<u>falls</u> μ so gewählt werden kann, dass

$$\delta d \mu = -\delta \alpha . \tag{122}$$

Da $\mu \in \Omega^{r-1}(M)$, ist μ von der Form

$$\mu = d\varepsilon + \delta x + \pi ,$$

$\varepsilon \in \Omega^{r-2}(M)$, $x \in \Omega^{r}(M)$, $\pi \in \mathcal{H}^{r-1}(M)$. Nun gilt aber, dass

$$d\mu = d\delta x + \underbrace{d\pi}_{=0} .$$

Also können wir in (122) μ durch δx ersetzen, und es gilt dann, dass $\delta(\mu = \delta x) = 0$. Daher können wir (122) durch die Gl.

$$(\delta d + d\delta)\mu = \Delta \mu = -\delta \alpha \tag{123}$$

ersetzen (mit $\delta \mu = 0$). Das ist die verallgemeinerte <u>Poisson Gl.</u>, die man unter sehr allg. Voraussetzungen lösen kann.

Nun kehren wir zu unserer Diskussion des Hamiltonschen Formalismus der Mechanik zurück.

(8) Hamiltonsche Mechanik und symplektische Mannigfaltigkeiten

Eine glatte $2f$-dimensionale Mannigfaltigkeit Γ ($f = 1,2,3,\dots$) heisst symplektisch, falls es eine global definierte 2-Form $\omega \in \Omega^2(\Gamma)$ gibt mit den Eigenschaften:

(i) $d\omega = 0$;

(ii) ω ist nicht entartet: Wenn $X \in T(M)$ ein VF ist mit $X \not\equiv 0$, dann gibt es ein VF $Y \in T(M)$ so, dass

$$\omega(X,Y) \not\equiv 0 .$$

Sei U ein sternförmiges, offenes Gebiet in Γ. Da $d\omega/_U = 0$, existiert eine 1-Form α auf U so, dass

$$\omega/_U = d\alpha .$$

Dies ist eine Konsequenz des Poincaré Lemmas.

Seien (Γ, ω) und $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\omega})$ zwei symplektische Mf. Eine glatte Abbildung

$$\varphi : \Gamma \xrightarrow{in} \tilde{\Gamma}$$

heisst <u>symplektisch</u>, oder <u>kanonisch</u>, falls

$$\varphi^* \tilde{\omega} = \omega \tag{124}$$

Falls auch die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : \tilde{\Gamma} \longrightarrow \Gamma$ existiert und symplektisch ist, so nennt man φ einen <u>Symplektomorphismus</u>.

Es fällt nun leicht, den Begriff einer <u>symplektischen Untermannigfaltigkeit</u> zu definieren: Eine Untermf., Γ, einer symplektischen Mf. $(\tilde{\Gamma}, \tilde{\omega})$ ist symplektisch, falls $\tilde{\omega}/_{\Gamma} =: \omega$ nicht entartet ist, d.h. wenn ω die Eigenschaft hat, dass aus $\omega(X, Y) = 0$, für ein $X \in \mathcal{T}(\Gamma)$, $\forall Y \in \mathcal{T}(\Gamma)$, folgt, dass $X = 0$. Eine Untermf. $L \subset \tilde{\Gamma}$ heisst <u>Lagrangesch</u>, falls $\tilde{\omega}(X, Y) = 0$, $\forall X, Y$ in $\mathcal{T}(L)$. Da $\tilde{\omega}$ nicht entartet ist, folgt, dass $\dim L \leqslant \frac{1}{2} \dim \tilde{\Gamma}$.

Sei $\varphi : \Gamma \longrightarrow \tilde{\Gamma}$ ein Symplektomorphismus, und sei $U \subset \Gamma$ ein offenes, sternförmiges Gebiet, $\tilde{U} = \varphi(U) \subset \tilde{\Gamma}$ sein Bild. Es gibt dann 1-Formen

$\alpha, \tilde{\alpha}$ so, dass

$$\omega\big|_U = d\alpha\big|_U , \quad \tilde{\omega}\big|_{\tilde{U}} = d\tilde{\alpha}\big|_U ;$$

(Poincaré Lemma!). Wegen (124) und (97) gilt nun, dass $\varphi^*\tilde{\omega} - \omega = 0$, also

$$\left(\varphi^* d\tilde{\alpha} - d\alpha\right)\Big|_U \overset{(97)}{=} \left(d\varphi^*\tilde{\alpha} - d\alpha\right)\Big|_U$$

$$= d\left(\varphi^*\tilde{\alpha} - \alpha\right)\Big|_U = 0$$

und daher (Poincaré Lemma)

$$\left(\varphi^*\tilde{\alpha} - \alpha\right)\Big|_U = dS\big|_U , \tag{125}$$

für eine glatte Funktion, S, auf U. Man nennt S eine <u>erzeugende Funktion</u> von φ. <u>Lokal</u> ist φ durch S bestimmt, wie wir später sehen werden.

Wenn $\Gamma = \tilde{\Gamma}$ und $\varphi : \Gamma \to \Gamma$ ein Diffeomorphismus ist, dann nennen wir φ einen <u>Symplektomorphismus</u> von Γ, falls $\varphi^*\omega = \omega$. Lokal gibt es dann eine 1-Form α und eine Funktion S so, dass

$$\varphi^*\alpha - \alpha \underset{\text{lokal}}{=} dS \tag{126}$$

<u>Übung</u>: Diskutiere (126) in lokalen Koordinaten,

in denen ω die Form $\omega = \overset{\circ}{\omega}$, mit

$$(\overset{\circ}{\omega}_{ij}) = \begin{pmatrix} \begin{array}{cc|} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ \hline \end{array} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{array}{|cc} \hline 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \end{pmatrix}$$

hat; ("Darboux Koordinaten"; siehe später).

Hamiltonsche Vektorfelder

Sei (Γ, ω) eine symplektische Mf. und $X \in \mathcal{T}(\Gamma)$ ein VF. Man nennt X "Hamiltonsch", falls

$$L_X \omega = 0 \tag{127}$$

Aus Korollar 7 und $d\omega = 0$ folgt:

$$L_X \omega = d i_X \omega + i_X d\omega = d i_X \omega = 0,$$

d.h.

$$d\omega(X, \cdot) = 0 . \tag{128}$$

Lokal folgt aus (128) und dem Poincaré Lemma die Existenz einer Funktion H so, dass

$$\omega(X, \cdot) = dH, \tag{129}$$

d.h. ein Hamiltonsches VF $X = X_H$ ist lokal durch eine Funktion, H, die zu X_H gehörige Hamilton Funktion, bestimmt.

Umgekehrt bestimmt eine beliebige glatte Funktion

H auf Γ eindeutig ein Hamiltonsches VF, X_H, über die Gleichung

$$\omega(X_H, Y) = \langle dH, Y \rangle \equiv Y(H), \qquad (130)$$

$\forall\, Y \in \mathcal{T}(\Gamma)$; (da ω nicht-entartet ist, ist X_H in der Tat eindeutig durch H bestimmt).

Sei $\{\phi_t\}_{t \in I}$ der durch ein Hamiltonsches VF X_H, mit (130), bestimmte Fluss. Dann sind die Flussabbildungen ϕ_t symplektisch, d.h.

$$\phi_t^* \omega = \omega, \quad \forall\, t \in I. \qquad (131)$$

Dies zeigt man, indem man die linke Seite von (131) nach t ableitet:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\phi_t^* \omega)(Y, Z) &= (L_{X_H} \phi_t^* \omega)(Y, Z) \\ &= (\phi_t^* L_{X_H} \omega)(Y, Z) \\ &= 0, \quad \forall\, Y, Z \text{ in } \mathcal{T}(\Gamma).\end{aligned}$$

Es folgt, dass die Funktion $(\phi_t^* \omega)(Y, Z)$ in t konstant ist; also

$$(\phi_t^* \omega)(Y, Z) = (\phi_0^* \omega)(Y, Z) = \omega(Y, Z),$$

$\forall\, Y, Z$ in $\mathcal{T}(\Gamma)$.

Die Poisson Klammer zweier Funktionen auf Γ

Seien F und G zwei glatte Funktionen auf Γ. Diese bestimmen zwei Hamiltonsche VF, X_F und X_G. Wir definieren die Poisson Klammer, $\{F, G\}$, durch

$$\{F, G\} := -\omega(X_F, X_G). \tag{132}$$

Aus der Definition von X_F folgt, dass

$$\omega(X_F, Y) = \langle dF, Y \rangle = Y(F).$$

Wenn nun $Y = X_G$ ein Hamiltonsches VF ist, dann folgt, dass

$$-\{F, G\} = \omega(X_F, X_G) = X_G(F) = -X_F(G).$$

Seien $\{\phi_t\}_{t \in I}$ der von X_F und $\{\psi_s\}_{s \in J}$ der von X_G erzeugte Fluss. Dann haben wir, dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi_t^* G = L_{X_F}(\phi_t^* G) &= \phi_t^* L_{X_F} G \\ &= \phi_t^* X_F(G) \\ &= \phi_t^* \{F, G\} \\ &= \{\phi_t^* F, \phi_t^* G\}, \end{aligned} \tag{133}$$

Ebenso sieht man, dass

$$\frac{d}{ds}\psi_s^* F = \psi_s^*\{G,F\} = \{\psi_s^* G, \psi_s^* F\}. \qquad (134)$$

In (133) und (134) haben wir benützt, dass für einen Symplektomorphismus φ

$$\begin{aligned}\varphi^*(\omega(X,Y)) &= (\varphi^*\omega)((\varphi^{-1})_* X, (\varphi^{-1})_* Y) \\ &= \omega((\varphi^{-1})_* X, (\varphi^{-1})_* Y) \qquad (135)\end{aligned}$$

Für $X = X_F$ (das zu F gehörige Hamiltonsche VF) folgt dann

$$\begin{aligned}\varphi^*(\omega(X_F, Y)) &= \varphi^*(Y(F)) \\ &= (\varphi^{-1})_* Y(\varphi^* F) \\ &= \omega(X_{\varphi^* F}, (\varphi^{-1})_* Y),\end{aligned}$$

und wegen (135) ist die linke Seite durch

$$\omega((\varphi^{-1})_* X_F, (\varphi^{-1})_* Y)$$

gegeben. Daher folgt, dass

$$(\varphi^{-1})_* X_F = X_{\varphi^* F} \; ; \qquad (136)$$

(dabei ist $\varphi_* X$ der "<u>push-forward</u>" von X unter φ).

Symmetrien und Erhaltungssätze

Sei H die Hamilton Funktion eines mechanischen Systems mit Phasenraum = symplektische Mannigfaltigkeit (Γ, ω), und sei $\{\phi_t\}_{t\in I}$ der von X_H erzeugte Fluss auf Γ. Sei G eine Funktion auf Γ und $\{\psi_s\}_{s\in J}$ der von X_G erzeugte Fluss auf Γ.

Satz 9.

Die Funktion G ist eine Erhaltungsgrösse für $\{\phi_t\}_{t\in I}$ genau wenn $\{H, G\} \equiv 0$. In diesem Falle ist $\{\psi_s\}_{s\in J}$ eine einparametrige Gruppe von Symmetrien des mechanischen Systems, in dem Sinn, dass $\psi_s^* H = H$, $\forall s \in J$.

(i) Zu sagen, G sei eine Erhaltungsgrösse für $\{\phi_t\}_{t\in I}$, ist gleichbedeutend damit, dass

$$\phi_t^* G = G, \quad \forall t \in I,$$

was äquivalent zu $\{H, G\} \equiv 0$ ist; (siehe (133)).

(ii) Offenbar gibt es eine 1-1 Beziehung zwischen einparametrigen Gruppen von Symplektomorphismen, die Symmetrien des mechanischen Systems darstellen und Erhaltungsgrössen: Jede Erhaltungsgrösse erzeugt eine einparametrige Gruppe von Symmetrien, und die Erzeugende einer einparametrigen Gruppe von Symmetrien ist eine Erhaltungsgrösse.

Nun wenden wir uns der Existenz lokaler Koordinaten auf einer symplektischen Mf. (Γ, ω) zu, in denen ω die Komponenten $\omega_{ij} = \mathring{\omega}_{ij}$ hat, wo

$$(\mathring{\omega}_{ij}) = \begin{pmatrix} \begin{array}{cc|} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ \hline \end{array} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{array}{|cc} \hline 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \end{pmatrix} \qquad (137)$$

hat. Solche Koordinaten heissen "Darboux Koordinaten".

Der Satz von Darboux.

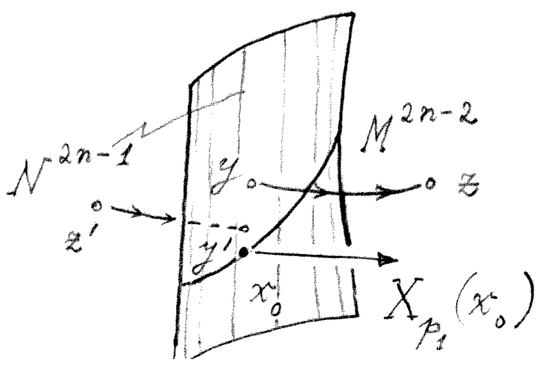
Es sei ω eine symplektische 2-Form (d.h. geschlossen und nicht-entartet) in einer offenen Umgebung, U, eines

eines Punktes x_0 einer symplektischen Mf. (Γ, ω). Dann kann man in einer offenen Umgebung $V \subseteq U$ von x_0 Koordinaten $(p_1, \dots, p_n; q^1, \dots, q^n)$, $n = \frac{1}{2} \dim \Gamma$, wählen so, dass

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i, \tag{138}$$

d.h. $\omega = \mathring{\omega}$, wie in (137); (mit $x = (x^1, \dots, x^{2n}) = (q^1, p_1, \dots, q^n, p_n)$ wie in (70)).

Dieser Satz kann induktiv wie folgt bewiesen werden. Als Koordinate p_1 wählen wir irgendeine glatte Funktion auf U, deren Differential, dp_1, im Punkt x_0 nicht verschwindet und mit $p_1(x_0) = 0$. Sei X_{p_1} das zur "Hamilton Funktion" p_1 gehörige Hamiltonsche VF. Da $dp_1(x_0) \neq 0$, ist $X_{p_1}(x_0) \neq 0$. Sei N^{2n-1} irgendeine $(2n-1)$-dimensionale (lokale) Untermannigfaltigkeit von Γ durch x_0 und transversal zu $X_{p_1}(x_0)$, d.h. $X_{p_1}(x_0) \notin T_{x_0}(N^{2n-1})$.



Sei $\Pi_{1,t}$ der von X_{p_1} erzeugte symplektische Fluss auf T. Sei $y \in N^{2n-1}$ ein Punkt in der Nähe von x_0. Dann ist wegen der Transversalität von N^{2n-1} zu $X_{p_1}(x_0)$ $\Pi_{1,t}(y) \notin N^{2n-1}$, für $t \neq 0$. Sei z ein Punkt in der Nähe von x_0, mit $z \notin N^{2n-1}$. Dann gibt es genau einen Punkt $y \in N^{2n-1}$ und einen Flussparameterwert t so, dass $z = \Pi_{1,t}(y)$. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen von Systemen gewöhnlicher Dgln. 1. Ordnung impliziert, dass der Parameterwert t, für den $z = \Pi_{1,t}(y)$, eine Funktion, q^1, von z ist, die für z in einer hinreichend kleinen Umgebung, V, von x_0 glatt von z abhängt. Man bemerke, dass $q^1(y) = 0$, $\forall$ $y \in V \cap N^{2n-1}$, und dass $dq^1(y)$ transversal zu N^{2n-1} ist, $\forall y \in V \cap N^{2n-1}$.

Sei z irgendein Punkt in V, $(z \notin N^{2n-1})$. Dann finden wir, dass

$$-\{p_1, q^1\}(z) = \omega(X_{p_1}, X_{q^1})(z) = -\omega(X_{q^1}, X_{p_1})(z)$$

$$= X_{p_1}(q^1)(z)$$

$$= \frac{d}{dt}\,\Pi_{1,t}(q^1)\Big|_{\Pi_{1,t=q_1}(y)=z} \qquad (y \in N^{2n-1})$$

$$= \frac{d}{dt}(t)\Big|_{\Pi_{1,t}(y)=z}$$

$$= 1.$$

Also

$$\{p_1, q^1\} \equiv -1, \tag{139}$$

auf einer hinreichend kleinen Umgebung V von x^0.

Wenn $n=1$, dann ist der Satz von Darboux hiermit bewiesen. Sei nun $n>1$. Wir betrachten die Niveaufläche

$$M^{2n-2} := \{x \in V \subseteq \Gamma \mid p_1(x) = q^1(x) = 0\}.$$

Offenbar liegt $x_0 \in M^{2n-2}$, und $M^{2n-2} \subset N^{2n-1}$. Da $\{p_1, q^1\} = -\omega(X_{p_1}, X_{q_1}) = -1$ auf V, sind dp_1 und dq^1 auf V linear unabhängig; (Übung!). Der Satz über implizite Funktionen impliziert daher, dass M^{2n-2} in einer Umgebung $\tilde{V} \subseteq V$ von x_0 eine $(2n-2)$-dim. Mf. ist.

<u>Lemma 10.</u> Die Restriktion, $\omega/_{M^{2n-2}}$, von ω auf M^{2n-2} ist lokal, in einer Umgebung $\tilde{\tilde{V}}$ von x_0 in M^{2n-2}, eine symplektische 2-Form.

Da ω geschlossen ist, ist $\omega/_{M^{2n-2}}$ automatisch geschlossen. Wir haben zu zeigen, dass $\omega/_{M^{2n-2}}$ nicht entartet ist. Sei $x \in M^{2n-2}$, x in der Nähe von x_0, und sei $Y \in T(M^{2n-2})$. Da p_1 und q^1 auf M^{2n-2} verschwinden, gilt, dass

$$Y(p_1)(x) = Y(q^1)(x) = 0$$

und daher, dass

$$\omega(X_{p_1}, Y)(x) = \omega(X_{q^1}, Y)(x) = 0, \tag{140}$$

$\forall x$ in der Nähe von x_0. Da ω nicht entartet ist, muss es einen Vektor $Z \in T_x\Gamma$ geben so, dass

$$\omega(Z, Y)(x) \neq 0.$$

Es gibt Zahlen α und β so, dass

$$Z_{//} := Z - \alpha X_{p_1} - \beta X_{q^1} \in T_x M^{2n-2}.$$

Wegen (140) gilt dann auch, dass

$$\omega(Z_{//}, Y)(x) \neq 0. \tag{141}$$

Da (141) für alle $x \in M^{2n-2}$ in der Nähe von x_0

gilt, ist daher $\omega|_{M^{2n-2}}$ in einer Umgebung von x_0 nicht-entartet. Damit ist Lemma 10 bewiesen.

Die Induktionsannahme impliziert nun, dass es auf M^{2n-2} lokal (in der Nähe von x_0) Koordinaten $p_2, q^2, \cdots, p_n, q^n$ gibt so, dass

$$\omega|_{M^{2n-2}} = \sum_{i=2}^{n} dp_i \wedge dq^i,$$

(d.h. $\omega|_{M^{2n-2}} = \mathring{\omega}|_{M^{2n-2}}$).

Wir erweitern nun die Definition der Koordinatenfunktionen $p_2, q^2, \cdots, p_n, q^n$ auf eine Umgebung von M^{2n-2} in Γ wie folgt: Sei $\Xi_{1,s}$ der von X_{q^1} erzeugte Fluss. Da q^1 eine Erhaltungsgrösse für $\Xi_{1,s}$ ist und $N^{2n-1} = \{x \in V \subseteq \Gamma \mid q^1(x) = 0\}$, liegt das Bild eines Punktes $w \in N^{2n-1}$ unter $\Xi_{1,s}$ in N^{2n-1}. Da $\omega(X_{q^1}, Y)(x) = 0$, $\forall Y \in T_x M^{2n-2}$, $\forall x \in M^{2n-2}$ in der Nähe von x_0, sind die Integralkurven, $\{\Xi_{1,s}(x)\}$, von X_{q^1} in N^{2n-1} (d.h. für $x \in N^{2n-1}$) transversal zu M^{2n-2}. Es folgt, dass jeder Punkt

$z \in \Gamma$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 eindeutig in der Form

$$z = \Pi_{1,t}\left(\Xi_{1,s}(w)\right), \quad w \in M^{2n-2}, \qquad (142)$$

geschrieben werden kann, ($|t|$ und $|s|$ sind "klein").
Nun setzen wir

$$p_i(z) := p_i(w), \; q^i(z) := q^i(w), \; i=2,\dots,n, \qquad (143)$$

mit w wie in (142).

Offenbar bilden die $2n$ Funktionen $p_1, q^1, \dots, p_n, q^n$ ein lokales Koordinatensystem in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0.

Es seien $\Pi_{i,t}$ und $\Xi_{i,s}$ die von den VF X_{p_i} und X_{q^i} erzeugten Flüsse, $i=1,\dots,n$. Wir wollen damit die Poisson Klammern von $p_1, q^1, \dots, p_n, q^n$ berechnen. Wir haben in (139) schon gezeigt, dass $\{p_1, q^1\} \equiv -1$ auf einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 in Γ. Wegen (142) und (143) folgt, dass $p_2, q^2, \dots, p_n, q^n$ invariant unter $\Pi_{1,t}$ und $\Xi_{1,s}$ sind. Daher verschwinden die Poisson Klammern von p_1 und q^1 mit allen Funktionen p_i, q^i, $i=2,\dots,n$.
Es folgt, dass $\Pi_{1,t}$ $\Xi_{1,s}$ mit allen Flüssen

$\Pi_{i,t'}, \Xi_{i,s'}$, $i \geq 2$, vertauscht. Da $\Pi_{1,t} \Xi_{1,s}$ symplektisch ist, lässt es ω invariant. Daher folgt, dass

$$\omega(X_{x_i}, X_{x_j})(z = \Pi_{1,t} \Xi_{1,s} w)$$
$$= \omega(X_{x_i}, X_{x_j})(w), \quad i \geq 2, \qquad (144)$$

für $w \in M^{2n-2}$, $z \in \Gamma$ in der Nähe von x_0, mit $(x^2, \ldots, x^{2n}) = (p_2, q^2, \ldots, p_n, q^n)$.

Die Funktionen p_1, q^1 sind Erhaltungsgrössen für die Flüsse $\Pi_{i,t'}, \Xi_{i,s'}$, $i \geq 2$. Deshalb sind $X_{p_2}, X_{q^2}, \ldots, X_{p_n}, X_{q^n}$ <u>tangential</u> zur Niveaufläche $\{x \mid p_1(x) = q^1(x)\} = M^{2n-2}$. Daher sind $X_{p_2}, X_{q^2}, \ldots, X_{p_n}, X_{q^n}$ Hamiltonsche VF auf $(M^{2n-2}, \omega|_{M^{2n-2}})$ zu den Hamilton Funktionen $p_2, q^2, \ldots, p_n, q^n$. Die Induktionsvoraussetzung sagt dann, dass

$$-\{x^i, x^j\}(w) = \omega(X_{x^i}, X_{x^j})(w)$$
$$= \omega|_{M^{2n-2}}(X_{x^i}, X_{x^j})(w)$$
$$= \overset{\circ}{\omega}(X_{x^i}, X_{x^j})(w), \quad w \in M^{2n-2}$$

Wegen (144) gilt dies nun auch für alle $z = \Pi_{1,t} \Xi_{1,s} w$, $(w \in M^{2n-2})$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 in Γ. Es folgt, dass

$$\{x^i, x^j\} = -\omega(X_{x^i}, X_{x^j}) = \overset{\circ}{\omega}(X_{x^i}, X_{x^j}), \qquad (145)$$

auf einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 in Γ, für <u>alle</u> $i, j = 1, \dots, 2n$. Daraus folgt, dass in der Nähe von x_0

$$\omega = \overset{\circ}{\omega} = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i, \qquad (146)$$

siehe (138); und damit ist der Satz von Darboux bewiesen.

Um keine "handwerklichen Fehler" gestehen zu müssen (→ zu Guttenberg) betone ich, dass der hier wiedergegebene Beweis des Satzes von Darboux aus dem Buch von V. I. Arnol'd (loc. cit.) stammt.

Angesichts des Satzes von Darboux können wir nun symplektische Mf. (Γ, ω) auch wie folgt definieren. Sei Γ eine Mf. der Dimension $2n$ mit einem Atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$. In einer Karte (U_i, φ_i) mit Koordinaten $(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$ betrachten wir die 2-Form

$$\overset{\circ}{\omega}\big|_{U_i} = \sum_i dp_i \wedge dq^i .$$

Auf $U_i \cap U_j$ $(\neq \emptyset)$ ist die Koordinatentransformation $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ definiert. Wir sagen, Γ sei <u>symplektisch</u>, falls alle Übergangs-Koordinatentransformationen $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ <u>kanonisch</u> sind, d. h.

$$(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})^* \, \mathring{\omega}\big|_{U_i} = \mathring{\omega}\big|_{U_j} \qquad (147)$$

Man nennt dann $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ einen symplektischen Atlas von Γ.

Angesichts des Satzes von Darboux ist diese Definition symplektischer Mf. äquivalent zur ursprünglichen; (S. 94).

<u>Die symplektische Gruppe $Sp(n, \mathbb{R})$.</u>

Sei $(\Gamma, \mathring{\omega})$ eine symplektische Mf. mit

$$\mathring{\omega} = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i,$$

in lokalen Koos. $(p_1, q^1, \dots, p_n, q^n)$. Wir benützen die Notationen: $x = (x^1, \dots, x^{2n}) = (p_1, q^1, \dots, p_n, q_n)$,

$$J := \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\mathring{\omega} = \frac{1}{2} \, dx^T \cdot J \, dx.$$

Sei $\varphi : \Gamma \to \Gamma$ ein Symplektomorphismus. Dann ist $\varphi^* \mathring{\omega} = \mathring{\omega}$; also

$$dx^T (d\varphi(x))^T J \, (d\varphi(x)) \, dx \overset{!}{=} dx^T J \, dx,$$

wo

$$d\varphi(x) = \left(\frac{\partial \varphi^i(x)}{\partial x^j} \right)$$

die Tangentialabbildung in x ist. Da $\mathring{\omega}$ nicht-entartet ist, folgt, dass

$$(d\varphi(x))^T J \, d\varphi(x) = J. \qquad (148)$$

Eine $2n \times 2n$ Matrix, K, mit

$$K^T J K = J$$

heisst symplektisch. Symplektische $2n \times 2n$ Matrizen bilden eine Gruppe, $Sp(n, \mathbb{R})$: Seien K_1 und K_2 symplektisch. Dann gilt, dass

$$\begin{aligned} (K_1 K_2)^T J K_1 K_2 &= K_2^T (K_1^T J K_1) K_2 \\ &= K_2^T J K_2 \\ &= J \end{aligned}$$

Offenbar ist $J^2 = -\mathbb{1}$. Daher

$$-(J K^T J) K = -J^2 = \mathbb{1},$$

d.h. $-JK^TJ$ ist eine Linksinverse von K. Es ist jedoch K eine reguläre Matrix, da

$$\det(K^TJK) = (\det K)^2 \det J = \det J = 1$$

d.h. $\det K = \pm 1$. Deshalb ist $-JK^TJ$ auch eine Rechtsinverse von K. Ausserdem gilt $J^TJJ = J$, d.h. $J \in Sp(n,\mathbb{R})$. Weiter gilt, dass

$$\begin{aligned} KJK^T &= -KJK^T(JKK^{-1})J \\ &= -KJ(\underbrace{K^TJK}_{J})K^{-1}J \\ &= KK^{-1}J = J, \end{aligned}$$

d.h. mit K sind auch $-K$ und K^T in $Sp(n,\mathbb{R})$ und daher auch $K^{-1} = -JK^TJ$. Schliesslich ist $\mathbb{1} \in Sp(n,\mathbb{R})$. Damit ist gezeigt, dass $Sp(n,\mathbb{R})$ eine Gruppe ist. Diese Gruppe ist zusammenhängend. Daraus folgt, dass

$$\det K = 1, \quad \forall K \in Sp(n,\mathbb{R}),$$

d.h. alle symplektischen Matrizen sind volumen- und orientierungserhaltend.