THEORETISCHE PHYSIK FÜR STUDIERENDE DER MATHEMATIK

FS 2011

Jürg Fröhlich

D-PHYS

Literaturverzeichnis

Mechanik

N. Straumann, "Klassische Mechanik", LNP 289, Springer-Verlag 1987

V. I. Arnol'd, "Mathematical Methods of Classical Mechanics", GTM, Springer-Verlag 1978

W. Thirring, "Vorlesungen über mathematische Physik", Band I, Springer-Verlag

Elektrodynamik

R. Jost, "Elektrodynamik", Verlag der Fachvereine, ETH Zürich 1976

J. D. Jackson, "Classical Electrodynamics", Wiley 1975

W. Thirring, "Vorlesungen über mathematische Physik", Band II - "Klassische Feldtheorie", Springer-Verlag

Quantenmechanik

N. Straumann, "Quantenmechanik", Springer-Verlag 2002

P. A. M. Dirac, "The Principles of Quantum Mechanics", 4th ed., Clarendon Press 1958

A. Gennaro, M. Fortunato and G. Parisi, "Quantum Mechanics", Cambridge University Press 2009

G. M. Graf, "Theoretische Physik II - Quantenmechanik", ETH Zürich, WS 04/05

W. Hunziker, "Quantenmechanik I", ETH Zürich, WS 95/96

I. Einleitung zur theoretischen Physik und einigen ihrer mathematischen Methoden

Diese Vorlesung trägt den Titel "Theoretische Physik", denn in ihr erläutern wir allgemeine Prinzipien theoretisch-physikalischer Naturbeschreibung im Rahmen einer Einführung in die klassische Elektrodynamik und in die Grundlagen der Quantenmechanik. Wir lernen Begriffe und Methoden kennen, die für alle Gebiete der theoretischen Physik wichtig sind. Um die Quantenmechanik zu verstehen, ist es notwendig, die Grundlagen der klassischen Mechanik und Begriffe wie "physikalisches System", "Ereignis", "Masse", "Kraft", "Energie", etc. zu kennen, die zuerst in der Mechanik einen präzisen Sinn erhielten.

Die in der theoretischen Physik mathematisch untersuchten "physikalischen Systeme" sind

Idealisierungen wirklicher Systeme. Denn nur idealisierte Gebilde lassen sich in einem mathematischen Modell darstellen. Im Prozess der Idealisierung abstrahiert man von vielen Eigenschaften und Erscheinungen, die an wirklichen Systemen beobachtet werden. Man nimmt den Standpunkt ein, dass viele dieser Eigenschaften unwesentlich seien oder nur eine kleine Störung im Verhalten eines wirklichen Systems nach sich ziehen, die von einem anderen Standpunkt aus just als Gegenstand von Forschung erscheinen mag. So sind für die Fragestellungen der Himmelsmechanik, im Sinne Newtons, die Farbe des von einem Stern ausgesandten Lichts oder die Massendichte eines sphärisch-symmetrischen Himmelskörpers unwesentlich, wogegen sie in der Astrophysik von zentralem Interesse sind.

Was am Verhalten und an Eigenschaften wirklicher Systeme beobachtet werden kann und damit in eine theoretisch-mathematische Beschreibung eingehen kann, hängt vom Beobachter und dem ihm zur Verfügung stehenden experimentellen Hilfsmitteln ab. Indem man die durch Abstraktion idealisierten Erscheinungen auf ein mathematisches Modell abbildet, entsteht ein komplexes Ineinanderspiel physikalischen und mathematischen Denkens, das erlernt werden muss, das aber den Reiz der theoretischen Physik ausmacht.

Da also die theoretische Physik stets von idealen Gebilden handelt, erfasst jede physikalische Theorie nur einen beschränkten Ausschnitt der Wirklichkeit und beschreibt diesen nur näherungsweise. Dass erfolgreiche Idealisierungen, die zu mathematischen Modellen von Ausschnitten der natürlichen Erscheinungen Anlass geben, überhaupt möglich sind, und dass es Modelle gibt, die einen beschränkten

Bereich von Erscheinungen überaus genau zu beschreiben vermögen, ist als Wunder zu betrachten, über das man staunen soll. So ist beispielsweise die Mechanik von Systemen mit endlich vielen Freiheitsgraden, als Himmelsmechanik oder technische Mechanik, eine physikalische Theorie von wunderbarer Kraft, die für die Beschreibung eines geeignet gewählten Ausschnitts natürlicher Erscheinungen innerhalb gewisser Genauigkeitsgrenzen immer gültig bleiben wird. Ähnliches kann man über die Elektrodynamik und nicht-relativistische Quantenmechanik sagen, die in dieser Vorlesung vorgestellt werden sollen. In diesem Sinne ist die theoretische Physik ein konservatives Unterfangen.

Zusammenfassung. Ein physikalisches Modell, resp. eine physikalische Theorie beinhaltet folgende Elemente:

(1) Eine mathematische Struktur;

(2) einen Bereich beobachtbarer Erscheinungen und experimentell verifizierbarer Tatsachen;

(3) eine "Abbildung" von (2) auf (1), (Idealisierung).

Dabei ist (1) ein logisch-kohärenter Bereich innerhalb der Mathematik; wogegen (2) ein i.a. nicht präzis definierbarer Bereich der erfahrbaren Wirklichkeit ist. (3) ist demzufolge ebenfalls unpräzis und intrinsisch <u>heuristisch</u>.

Eine physikalische Theorie ist also ein mathematisches, aber keineswegs "isomorphes" Bild eines Teilbereichs der Wirklichkeit.

I.1 Raum-Zeit, Beobachter, Ereignisse, ...

Physikalische Experimente bestehen aus dem Sammeln von Daten über Reihen von Ereignissen und Messungen von physikalischen Grössen. Physikalische Grössen sind <u>operationell</u> definiert, nämlich durch Angabe einer Messvorschrift.

Beispiele: Distanzmessungen mit Massstäben oder Lichtpulsen; Zeitmessungen mit Uhren; Messung des elektrischen Feldes mit Testladungen, etc.

Auswahl beobachtbarer physikalischer Grössen und Erscheinungen und mathematisch-kohärente Organisation von Messreihen: Modellbildung.

Integration von Modellen in theoretische Grundkonzepte und Prinzipien: Theoriebildung.

Um Modelle und Theorien mit der Realität vergleichen zu können, muss es klar sein, was eine Theorie oder ein Modell unter einem "Beobachter" versteht, und welche physikalischen Grössen ein Beobachter überhaupt messen kann.

Ein Modell (eine Theorie) ist gut, wenn es (sie) einen gewissen Bereich der Wirklichkeit innerhalb festgelegter Genauigkeitsgrenzen und in einem bestimmten Skalenbereich auf eine mathematische Struktur abzubilden vermag, die es gestattet, Resultat von Experimenten und Ereignisse im vorgegebenen Skalenbereich innerhalb der vorgegebenen Präzision vorauszusagen.

Ein Beispiel einer guten Theorie ist die klassische Mechanik von Punktteilchen und starren Körpern. Die möglichen Grundmessungen der Mechanik sind Distanz- und Winkelmessungen und Zeitmessungen. Ein Ereignis ist beispielsweise das Auftauchen eines bestimmten Planeten an einem bestimmten Punkt des Firmamentes. In der Himmelsmechanik kann man sphärisch-symmetrische Himmelskörper dank der $1/r^2$ - Form der Gravitationskraft als Massenpunkte auffassen. Durch wiederholte Messungen von Ort und Zeit eines Massenpunktes kann man näherungsweise seine Trajektorie in der Raum-Zeit bestimmen und daraus abgeleitete Grössen wie Geschwindigkeit, Beschleunigung, etc. bilden.

In der klassischen Mechanik und Elektrodynamik und in der Quantenmechanik wird von der Näherung ausgegangen, dass die Geometrie von Raum und Zeit unabhängig von der in der Raum-Zeit befindlichen Materie resp. von den in der Raum-Zeit ablaufenden Ereignissen sei. Diese Näherung wird in der allgemeinen Relativitätstheorie nicht mehr gemacht.

Die Raum-Zeit der nicht-relativistischen klassischen Mechanik hat die folgende Struktur:

Zeit(achse) $= \mathbb{R}$;

"früher – später" $\longleftrightarrow$ Ordnungsrelation, $\geq$, $\leq$, auf $\mathbb{R}$.

Man möge zwischen "topolgischer" und "metrischer" Zeit unterscheiden. Metrische Zeit: $\mathbb{R} \rightarrow E^1$ mit Metrik (Zeitabstand) geg. durch $|t_1 - t_2|$.

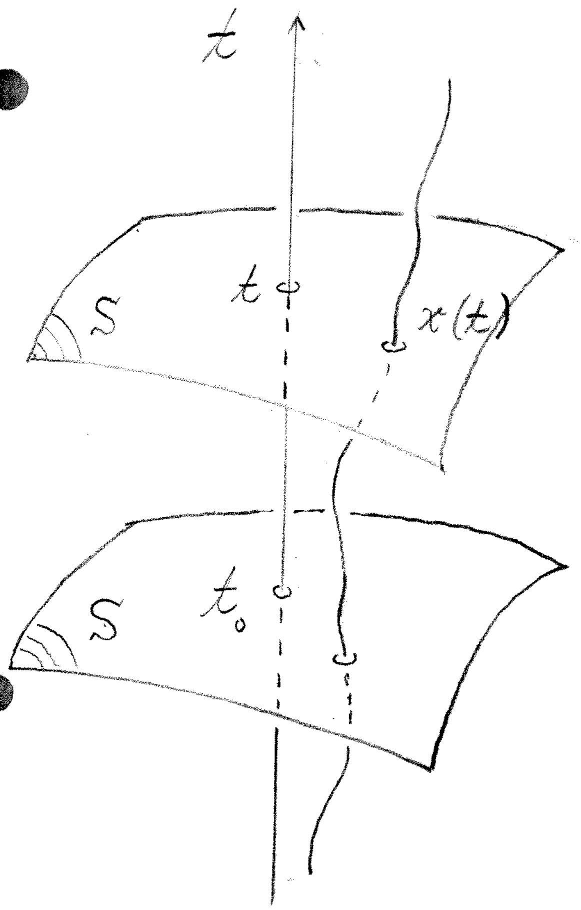
Physikalischer Raum $= E^3$ (mit euklidischer Metrik $\leftrightarrow$ Distanzmessungen)

Allgemeiner: Phys. Raum ist Riemannsche Mannigfaltigkeit, S.

Raum-Zeit $= \mathbb{E}^3 \times \mathbb{R} \quad (S \times \mathbb{R})$

Der euklidische Raum $\mathbb{E}^3$ ist ein Beispiel für einen affinen Raum (↗ Übungen).

Es ist zweckmässig, die Trajektorie eines Massenpunktes in einem Raum-Zeit Diagramm wiederzugeben:



Trajektorie $(t, x(t) \in S)$

Geschwindigkeit zur Zeit t:

$$v(t) = \dot{x}(t) \in T_{x(t)}(S) \quad (1)$$

Beschleunigung zur Zeit t:

$$a(t) = \dot{v}(t) \quad (2)$$

(erfordert i.a. den Begriff des Paralleltransportes!)

In der klassischen Mechanik kann ein "Beobachter" als Stück $\{x(t) \in S \mid t_1 \leq t \leq t_2\}$ der Trajektorie eines Massenpunktes idealisiert werden, (oder als Vereinigung mehrerer solcher Stücke).

Die klassische, nicht-relativistische Mechanik geht davon aus, dass ein Beobachter, der sich zur Zeit t in einem Raumpunkt $x(t) \in S$ befindet, im Prinzip Ereignisse in beliebigen Punkten $x \in S$ zur selben Zeit t beobachten kann. Denn Signalübertragung durch Massenverschiebungen, die das Gravitationsfeld verändern, läuft in der Newtonschen Mechanik mit ∞ Geschwindigkeit ab. Freilich ist es eine kühne Idealisierung, sich vorzustellen, dass ein winzig kleiner Beobachter in beliebig kurzer Zeit die Orte von beliebig vielen gleichzeitigen Ereignissen bestimmen kann. Aber dies wird in der Newtonschen Mechanik vorausgesetzt.

Vergangenheit zur Zeit $t = \{(t', x) \mid t' < t, x \in S\}$

Gegenwart zur Zeit $t = \{(t', x) \mid t' = t, x \in S\}$

Zukunft zur Zeit $t = \{(t', x) \mid t' > t, x \in S\}$

Man nimmt hier an, ein "Ereignis" sei durch Angabe der Zeit, zu der es stattfindet, und des Ortes, wo es stattfindet, hinreichend genau charakterisiert. Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft eines Beobachters hängen offenbar nur vom Zeitpunkt (t), nicht aber von seinem Aufenthaltsort und Bewegungszustand ab.

Es ist in der nicht-relativistischen Himmelsmechanik natürlich – aber nicht wesentlich – den Raum, S, als drei-dimensionalen euklidischen Raum, $\mathbb{E}^3$, aufzufassen. (Es haben aber schon Gauss und vorallem Riemann, später dann auch Mach vor Einstein über andere, allgemeinere Modelle des Raums spekuliert. Welches Modell am genausten zutrifft ist durch Experimente – Winkel & Distanzmessungen – abzuklären!)

Zur Aufzeichnung von Ereignissen in der Raum-Zeit bedient sich ein Beobachter zweckmässigerweise eines Koordinatensystems. Z.B. wählt man für $S = \mathbb{E}^3$ etwa <u>kartesische Koordinaten</u>. Damit wird die Zuordnung von Zahlentupeln zu Ereignissen vom benützten Koordinatensystem abhängig, und man muss fragen, welche Grössen eine <u>invariante</u>, vom benützten Koordinatensystem unabhängige <u>Bedeutung</u> haben.

In der Newton'schen Mechanik sind dies:

(1) $|t_1 - t_2|$ = Zeitabstand von 2 beliebigen Ereignissen $(t_1, x_1), (t_2, x_2)$;

[(1') $\operatorname{sign}(t_1 - t_2)$;]

(2) $\operatorname{dist}(x_1, x_2)$ = Raumabstand von zwei gleichzeitigen Ereignissen.

Dabei legt man feste Einheiten von Zeit (e.g. 1 sec auf Quarzuhr) und Länge (etwa Wellenlänge einer Spektrallinie) fest.

Falls $S = \mathbb{E}^3$ und man nur kartesische Koordinatensysteme zulässt, sind dann noch die folgenden

Koordinatentransformationen möglich:

$$(1) \Rightarrow t' = \lambda t + a; \quad \lambda = \pm 1, \; a \in \mathbb{R}.$$

$$(1') \Rightarrow \lambda = 1. \tag{3}$$

$$(2) \Rightarrow x' = R(t)x + b(t); \; R(t) \in O(3), \; b(t) \in \mathbb{R}^3,$$

für jeden Zeitpunkt t.

Das Newton'sche Bewegungsgesetz hat <u>in speziellen Koordinatensystemen</u> die Form:

$$m\,\ddot{x}(t) = F(x(t)),$$

m = träge Masse eines Massenpunktes,

$F(x(t))$ = Kraft, die auf den Massenpunkt einwirkt.

Die speziellen Koordinatensysteme sind diejenigen, in denen das Bewegungsgesetz im <u>kräftefreien Fall</u>, $F = 0$, die Form

$$\ddot{x}(t) = 0$$

annimmt. Einstein hat scharf erkannt, dass es zumindest im Falle der Gravitationskraft nicht möglich ist, zu entscheiden, ob eine beschleunigte

Bewegung ($\ddot{x} \neq 0$) die Folge von Scheinkräften ist, die sich aus der Wahl eines bestimmten "bewegten" Koordinatensystems ergeben, oder ob sie die Folge "wirklicher Kräfte" ist. Denn die Gravitationsbeschleunigung eines Massenpunktes ist experimentell unabhängig von seiner Masse; (Aequivalenz von träger und schwerer Masse!). Deswegen sollte es in einer kleinen Umgebung eines im Gravitationsfeld frei fallenden Beobachters ein lokales Inertialsystem geben, in welchem die Bewegungsgl. eines kräftefreien Teilchens die Gl. $\ddot{x}(t) = 0$ ist. Diese Überlegung Einstein's ist für die Entwicklung der allgemeinen Relativitätstheorie zentral. In der klassischen Mechanik geht man allerdings davon aus, dass es möglich ist, zwischen Scheinkräften und wirklichen Kräften zu unterscheiden. Dann erfüllt ein kräftefreier Massenpunkt in einem kartesischen Koordinatensystem, das mit einem kräftefreien Beobachter fest verbunden ist, die Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x}(t) = 0. \qquad (4)$$

Die hier gemeinten Koordinatensysteme sind <u>Inertialsysteme</u>; (Kritik von Mach!) Inertialsysteme sind untereinander durch <u>spezielle Koordinatentransformationen</u> der Form (3) verbunden:

$$\begin{aligned} t' &= \lambda t + a, \quad \lambda = \pm 1,\ a \in \mathbb{R}; \\ x' &= Rx + vt + b,\ R \in O(3),\ v, b \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \qquad (5)$$

Die Bewegungsgleichungen autonomer Systeme im leeren Raum (näherungsweise z. B. das Sonnensystem) sind invariant unter beliebigen solchen sog. <u>Galilei Transformationen:</u> Sie lauten in jedem Inertialsystem gleich. Das ist das <u>Relativitätsprinzip der klassischen, "vor-relativistischen" Mechanik.</u>

Die Elektrodynamik verletzt dieses Prinzip: Das Gesetz für die Ausbreitung einer Wellenfront von e.m. Wellen im leeren Raum besagt, dass zwei Ereignisse, (t_1, x_1) und (t_2, x_2), in der Raum-Zeit nur dann durch ein Lichtsignal miteinander verbunden werden können, falls

$$c^2(t_1 - t_2)^2 - |x_1 - x_2|^2 = 0, \qquad (6)$$

wo c die Lichtgeschwindigkeit ist. Dabei ist das <u>Entscheidende</u>, dass <u>jeder kräftefreie Beobachter</u> bei Messung der Lichtgeschwindigkeit den <u>gleichen Wert</u>

$$c = 3 \times 10^8 \ m/sec \qquad (7)$$

erhält, <u>unabhängig</u> von seinem (beschleunigungsfreien) <u>Bewegungszustand</u> relativ zu anderen Beobachtern. Das ist das Ergebnis der Versuche von Michelson und Morley; (siehe auch Pauli's Buch (15)).

Hält man an den Galilei-Transformationen (5) fest, so findet man, dass (6) nur dann unter (5) invariant ist, falls

$$v = 0, \qquad (8)$$

und die Invarianzgruppe von klassischer Mechanik und Elektrodynamik reduziert sich auf die Euklidische Gruppe. Dies wäre dann natürlich, falls die Existenz eines absoluten Raumes[1], oder Aethers, experimentell nachgewiesen werden könnte. Offenbar sagen die Ergebnisse der Versuche von Michelson und Morley, u.a., dass dies nicht der Fall ist.

Die Geometrie und Invarianzgruppe, die sich aus der Invarianten (6) der Elektrodynamik ergeben, wurden teilweise schon von H.A. Lorentz (1897–1904) und vollständig von H. Poincaré (1905) verstanden.

Einstein macht 1905 den radikaleren Vorschlag:

(a) Die Invarianten (1) und (2) sind durch die Invariante (6) zu ersetzen.

(b) Inertialsysteme sind physikalisch durch das Trägheitsgesetz (4) und das Gesetz (6) für die Ausbreitung von Licht ausgezeichnet, wobei der Wert von c unabhängig vom Inertialsystem ist.

1) wie von Newton postuliert.

(c) Signale zwischen verschiedenen Beobachtern können prinzipiell <u>nicht</u> mit Geschwindigkeiten $> c$ übertragen werden.

(d) Die Gesetze einer relativistisch zu modifizierenden Mechanik und der Elektrodynamik lauten in allen Inertialsystemen gleich.

Diese Postulate bilden die <u>Grundlage der SRT.</u>
Dieser Vorschlag erfordert nun, zunächst die Gruppe der Koordinatentransformationen zu finden, die die Bewegungsgleichung (4) und die Invariante (6) invariant lassen. Das ist die <u>Poincaré Gruppe.</u>
Dann sind die Gesetze der Mechanik und ED so zu modifizieren, dass (d) gilt, d.h. dass sie <u>form-invariant</u> unter Poincaré Trsf. sind. Die ED erfüllt diese Forderung schon, die Newton'sche Mechanik noch nicht.
Aus (c) folgt, dass Fernwirkungsgesetze keinen Platz in der Theorie mehr haben und durch <u>Feldwirkungsgesetze</u> zu ersetzen sind, (worauf im Zusammenhang mit dem Newton'schen Gravitationsgesetz schon Poincaré 1905

hingewiesen hat).

Aus der Gültigkeit von (4) in beliebigen Inertialsystemen folgt, dass ein kräftefreier Massenpunkt sich auf einer Raum–Zeit Geraden g bewegt:

$$g = \{(t, x(t)) : x(t) = x_0 + vt\}$$

Aus (c) folgt, dass die Geschwindigkeit v in allen Inertialsystemen $\leq c$ sein muss.

Sei (t, x) ein Ereignis. Der Vorwärtslichtkegel in (t, x) ist durch

$$V_+(t,x) = \{(s,y) : s > t,\ (t-s)^2 - |x-y|^2 > 0\} \tag{9}$$

definiert, der Rückwärtslichtkegel durch

$$V_-(t,x) = \{(s,y) : s < t,\ (t-s)^2 - |x-y|^2 > 0\}. \tag{10}$$

Alle Signale, die einen Beobachter in (t, x) erreichen, kommen von Ereignissen in $\overline{V}_-(t,x)$; Lichtsignale kommen von Ereignissen in $\partial \overline{V}_-(t,x)$. Daher haben die Ereignisse in $\overline{V}_-(t,x)$ die Bedeutung der

<u>Vergangenheit</u> von (t,x).

Signale, die ein Ereignis oder ein Beobachter in (t,x) aussenden, breiten sich innerhalb von $\overline{V_+}(t,x)$ aus, Lichtsignale auf $\partial \overline{V_+}(t,x)$. Daher kann man $\overline{V_+}(t,x)$ als die <u>Zukunft</u> von (t,x) auffassen.

Gegenwart eines Beobachters in (t,x)

$$= \overline{V_+}(t,x) \cap \overline{V_-}(t,x). \qquad (11)$$

"Anderswo" von (t,x)

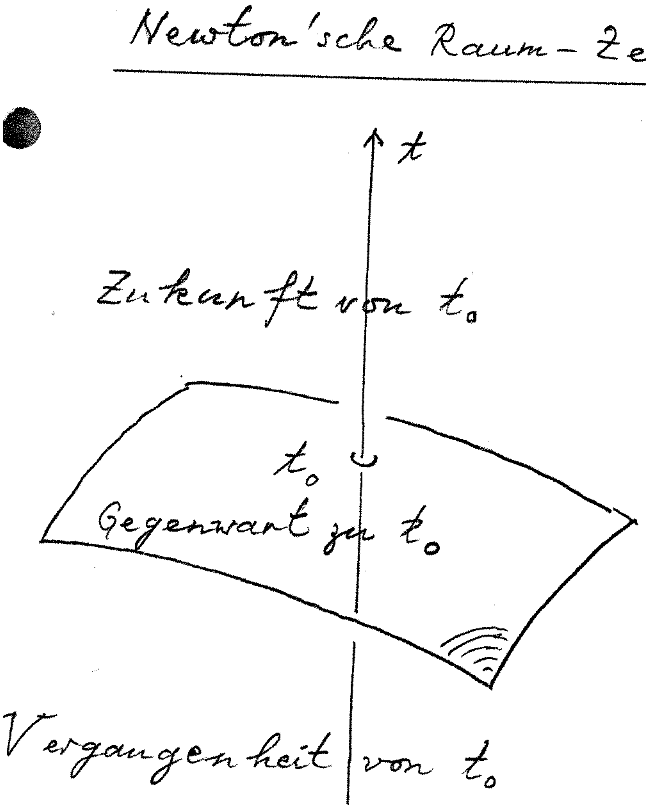
$$= \{(s,y) : (t-s)^2 - |x-y|^2 < 0\} \qquad (12)$$

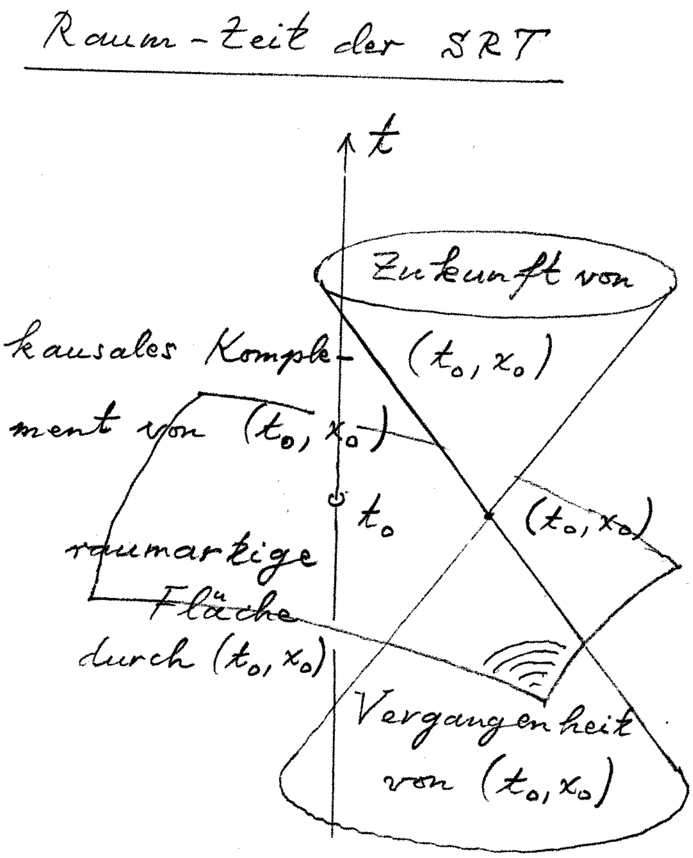
= Menge der von (t,x) "<u>raumartig</u>" getrennten Punkte.

= <u>Kausales Komplement</u> von (t,x). (12)

Als **Folge** sehen wir nun schon, dass es in der SRT keinen absoluten Gleichzeitigkeitsbegriff gibt; die Einteilung in Vergangenheit und Zukunft hängt vom Beobachter ab; wenn zwei Ereignisse voneinander raumartig getrennt sind, macht es keinen invarianten Sinn, das eine als früher (oder später) als das andere zu bezeichnen.

In der SRT und ART ist es üblich, Gedankenexperimente mit Lichtstrahlen durchzuführen und Signale als mit e.m. Wellen übermittelt zu denken. Der Grund ist, dass die Gesetze der Ausbreitung von e.m. Wellen gut bekannt sind, solche Wellen im leeren Raum dispersionsfrei propagieren und dass sie die maximale Signalgeschwindigkeit haben.





I.2 Erinnerung an die klassische Mechanik

(1) Kinematik

Betrachten Massenpunkt mit Raum-Zeit Trajektorie $(x(t), t)$, $x(t) \in \mathbb{E}^3$, $\forall t$ mit $t_0 \leq t \leq t_1$. Geschwindigkeit zur Zeit t:

$$v(t) = \dot{x}(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt} \tag{1}$$

Im Gegensatz zu $x(t)$ (= Punkt im affinen Raum $\mathbb{E}^3$) ist $v(t)$ ein Vektor, da dx ein Vektor ist.

Beschleunigung zur Zeit t:

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) \tag{2}$$

$a(t)$ kann man in eine Komponente, $a_{\parallel}(t)$, $\parallel v(t)$ und eine Komponente, $a_{\perp}(t)$, $\perp v(t)$ aufspalten, mit

$$a_{\parallel}(t) = \frac{d|v(t)|}{dt} \; ; \tag{3}$$

$a_{\perp}(t)$ beschreibt die Richtungsänderung von $v(t)$ und bestimmt mit $v(t)$ eine Ebene. Der momentane Krümmungsradius der Bahn zeigt in Richtung von $a_\perp(t)$ und hat den Wert

$$r(t) = \frac{v(t)^2}{|a_\perp(t)|} \tag{4}$$

(Beweis: Übungen)

(2) Bewegungsgleichungen eines endlichen Systems von Massenpunkten

Wir studieren ein System von N "Massenpunkten" mit (trägen) Massen m_j und Trajektorien $x_j(t)$, $j = 1, \ldots, N$. Diese Massenpunkte sollen "kleine" Körper darstellen, in der Himmelsmechanik Planeten, Monde und Kometen. Die Gleichungen für die Trajektorien $x_j(t)$, d.h. die "Bewegungsgleichungen" haben die Form $(j = 1, \ldots, N)$

$$m_j \ddot{x}_j = k_j(x_1, \ldots, x_N, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N; t), \tag{5}$$

(das Zeitargument, t, ist in den x_j, $\dot{x}_j$ ... weggelassen). Der Vektor k_j ist die Kraft, die auf den $j$ten Massenpunkt wirkt. Die Kräfte k_j hängen i.a. von den Positionen, x_i, und den Geschwindigkeiten, $\dot{x}_i$, $i = 1, \dots, N$, der Massenpunkte ab, nicht aber von höheren Ableitungen nach der Zeit.

$(x_1, \dots, x_N)$: Konfiguration des Systems

$(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N)$: Bewegungszustand des Systems

Die Abhängigkeit der k_j von Konfiguration und Bewegungszustand des Systems wird durch ein "<u>Kraftgesetz</u>" festgelegt. Die k_j bestimmen über (5) die zeitliche Änderung des Bewegungszustandes; (Newton, Euler).

Die Erfahrung lehrt, dass die k_j für viele Systeme nur von der Konfiguration allein abhängen; in der Gegenwart von Magnetfeldern ist dies allerdings nicht so. Wir nehmen nun an, dass

$$k_j = k_j^{(I)} + K_j . \qquad (6)$$

Dabei ist K_j die auf den j^{ten} Massenpunkt wirkende <u>äussere</u> Kraft. Sie hängt nur von x_j, $\dot{x}_j$ und t ab, nicht aber von $(x_i, \dot{x}_i)$, $i \neq j$. Weiter ist $k_j^{(I)}$ die <u>innere</u> Kraft. Sie soll nur von der relativen Konfiguration,

$(x_1 - x_j, \ldots, x_{j-1} - x_j, x_{j+1} - x_j, \ldots, x_N - x_j)$, abhängen.

I.a. ist $k_j^{(I)}$ eine Summe von Zweikörperkräften:

$$k_j^{(I)} = \sum_{i \neq j} k_{ji} \, . \qquad (7)$$

Ist $r_{ji} = |x_j - x_i|$ der Abstand zwischen dem i ten und j ten Massenpunkt, so ist k_{ji} für viele Systeme von der Form

$$k_{ji} = \frac{x_j - x_i}{r_{ji}} f_{ji}(r_{ji}), \qquad (8)$$

und Newton hat erkannt, dass i.a. $f_{ji} = f_{ij}$, so dass

$$k_{ji} = -k_{ij} \quad (\text{"actio = reactio"}) \quad (9)$$

Man nennt f_{ji} Kraftgesetz. Eine Kraft der Form (8) nennt man <u>Zentralkraft</u>: $k_{ji} \parallel x_j - x_i$ (Richtungsvektor von i nach j).

Die Kräfte im Sonnensystem (Gravitationskräfte) und in den Atomen (Coulomb) haben die Form (8), mit $f_{ji}(r) \propto r^{-2}$.

Ein System, auf das keine äusseren Kräfte wirken, heisst (mechanisch) <u>abgeschlossen.</u>

(3) Erhaltungssätze

Für $N > 2$ ist die Integration der Bewegungsgln. (5) i.a. hoffnungslos schwierig. Um das Verhalten von Lösungen wenigstens qualitativ zu verstehen sind Erhaltungssätze nützlich: Man sucht Funktionen der x_j und $\dot{x}_j$, $j = 1, \dots, N$, die zeitlich konstant bleiben, falls die $(x_j, \dot{x}_j)$ die Gln. (5) lösen.

A. Impulssatz (Descartes)

Wir definieren die Impulse

$$m_j v_j =: p_j . \qquad (10)$$

Da die Massen m_j i.a. nicht von der Zeit abhängen, kann man dann (5) in der Form

$$\dot{p}_j = k_j , \quad j = 1, \dots, N, \qquad (11)$$

schreiben (Newton). Mit (6), (7) und (9) folgt dann

$$\dot{P} = \sum_{j=1}^{N} K_j \equiv K, \qquad (12)$$

wo

$$P = \sum_{j=1}^{N} p_j \quad \text{(Gesamtimpuls)}$$

Für ein mechanisch abgeschlossenes System ($K_j = 0$, $\forall j$) bleibt also der Gesamtimpuls konstant.

Wir führen nun den Schwerpunkt, X, des Systems ein:

$$X = M^{-1}\Big(\sum_j m_j x_j\Big), \quad \text{mit} \quad M = \sum_j m_j \tag{13}$$

Dann folgt für ein abgeschlossenes System mit (10) und (11):

$$\ddot{X} = 0 \Rightarrow \dot{X} = V = \text{const.}, \tag{14}$$

d.h.

$$X(t) = X_0 + Vt, \tag{15}$$

mit $V = M^{-1}\Big(\sum_j m_j v_j\Big)$; (Schwerpunktssatz).

B. Energiesatz

Wir definieren

$$U_{ji}(r) := -\int^r dr' f_{ji}(r') = U_{ij}(r), \tag{16}$$

wo $f_{ji}(r) = \overset{*}{f}_{ij}(r)$ wie in (8) ist. Dann ist

$$k_{ji}(r_{ji}) = -\nabla_{x_j} U_{ji}(r_{ji}), \tag{17}$$

wie man sofort sieht. Setzt man

$$U^{(I)}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} U_{ij}(r_{ij}), \tag{18}$$

so findet man sofort, dass

$$k_j^{(I)} = - \nabla_{x_j} U^{(I)}, \tag{19}$$

d.h. die inneren Kräfte sind <u>Potentialkräfte</u>.

Nun impliziert (5) mit (19), dass

$$\sum_j m_j v_j \cdot \dot{v}_j = - \sum_j v_j \cdot \nabla_{x_j} U^{(I)} + \sum_j v_j \cdot K_j ,$$

also

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\sum_j m_j v_j^2 + U^{(I)}\right] = \sum_j v_j \cdot K_j \tag{20}$$

$T := \frac{1}{2}\sum_j m_j v_j^2 = \sum_j \frac{p_j^2}{2m_j}$: kinetische Energie des Systems

$U^{(I)}$: potentielle Energie der inneren Wechselwirkung

$T + U^{(I)}$: "innere" Energie des Systems

$\sum_j v_j \cdot K_j$: Arbeitsleistung der äusseren Kräfte.

"<u>Wattlose Kräfte</u>": K_j's, die $\perp$ auf v_j stehen;

z. B. <u>Zwangskräfte</u>, Lorentzkraft ($\nearrow$ ED).

Übrige Kräfte heissen "<u>treibende Kräfte</u>"

Wenn auch die äusseren Kräfte Potentialkräfte sind, d.h.:

$$K_j(x) = -\nabla_{x_j} V_j(x), \qquad (21)$$

dann folgt, dass

$$T + U^{(I)} + \sum_j V_j =: E = \text{const.} \qquad (22)$$

falls $x_1(t), \ldots, x_N(t)$ Lösungen von (5) sind.

Das ist der <u>Energiesatz</u>.

$U := U^{(I)} + \sum_j V_j$: Gesamtpotential der Kräfte

E : Gesamtenergie des Systems.

Auf einfach zusammenhängenden Gebieten des physikalischen Raumes ist (21) äquivalent zu

$$\nabla_x \wedge K_j(x) = 0. \qquad (23)$$

Ein System, für welches die Gesamtenergie zeitlich konstant ist, heisst <u>konservativ</u>.

Ist X die Lage des Schwerpunkts, wie in (13), und $\xi_j := x_j - X$, so ist

$$\frac{1}{2}\Big(\sum_j m_j v_j^2 + \sum_{i,j} U_{ij}(|x_i - x_j|)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(MV^2 + \sum_j m_j \dot{\xi}_j^2 + \sum_{i,j} U_{ij}(|\xi_i - \xi_j|)\Big). \qquad (24)$$

wo $\frac{1}{2}MV^2$ die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung und die übrigen Terme auf der R.S. von (24) die "(innere) Energie relativ zum Schwerpunkt" bedeuten. Zum Beweis von (24) benütze man, dass

$$\sum_j m_j \xi_j = \sum_j m_j \dot{\xi}_j = 0.$$

C. Drehimpulssatz

Wir definieren den Gesamtdrehimpuls, J, durch

$$J := \sum_j m_j x_j \wedge v_j = \sum_j x_j \wedge p_j \tag{25}$$

und das Drehmoment der äusseren Kräfte durch

$$D := \sum_j x_j \wedge K_j . \tag{26}$$

Dann sieht man leicht, dass

$$\dot{J} = D \tag{27}$$

(Drehimpulssatz). Diese Gleichung kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{d}{dt}\left(X \wedge P + \sum_j m_j \xi_j \wedge \dot{\xi}_j\right) = X \wedge K + \sum_j \xi_j \wedge K_j ,$$

wo $K = \sum_j K_j$. Auch diese Gleichung beweist man, indem man $\sum_j m_j \xi_j = \sum_j m_j \dot{\xi}_j = 0$ benützt.

$\sum_j m_j \xi_j \wedge \dot{\xi}_j$: "innerer Drehimpuls".

Aus Gl. (12) folgt nun, dass

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_j m_j \xi_j \wedge \dot{\xi}_j\right) = \sum_j \xi_j \wedge K_j . \qquad (28)$$

Dieser Satz ist deshalb bemerkenswert, weil er auch dann gilt, wenn der Schwerpunkt beschleunigt ist. Verschwinden die äusseren Kräfte, so ist der "innere Drehimpuls"

$$\sum_j m_j \xi_j \wedge \dot{\xi}_j \equiv \sum_j \xi_j \wedge \pi_j$$

konstant.

Ein abgeschlossenes System hat also immer mind. zehn <u>Integrale der Bewegung</u>: Energie, drei Anfangsbedg. für die Schwerpunktsbewegung, drei Impuls- und drei Drehimpulskomponenten.

$\leftrightarrow$ Invarianz der Bewegungsgln. unter <u>Galileitransformationen</u>; (Galilei Gruppe ist 10-dimensional). Das ist das klassische Relativitätsprinzip der Newtonschen Mechanik von Chr. <u>Huyghens</u>.

(4) Der Lagrange Formalismus

Seien $T = \sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2$ (kinetische Energie)

und $U = \sum_{1 \le i < j \le N} U_{ij} + \sum_j V_j$ ("potentielle Energie")

wie in (3), B. Wir definieren die Lagrange Funktion

$$L := T - U. \qquad (29)$$

Diese Funktion hängt von $x \equiv (x_1, \dots, x_N)$ und $\dot{x} \equiv (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N)$ und allenfalls noch explizite von der Zeit t ab. Für die von uns betrachteten Systeme von Massenpunkten hängt T nur von $\dot{x}$ und U nur von x (und allenfalls von t) ab. Dann folgt, dass

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i \, ,$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = - \frac{\partial U}{\partial x_i} = k_i \quad \left(= k_i^{(I)} + K_i \right),$$

und die Bewegungsgln. (5) sind offenbar äquivalent zu den Gln.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \ \forall i \qquad (30)$$

Das sind die sog. Euler-Lagrange Gln. des mechanischen Systems. Diese kann man aus dem Hamiltonschen Variationsprinzip ableiten: Wir definieren die Aktion

$$S := \int_{t_0}^{t_1} dt \; L(x(t), \dot{x}(t); t). \qquad (31)$$

Diese ist ein Funktional auf dem ∞ dimensionalen Raum der stetig diff. baren Trajektorien

$$\mathcal{T}_{x_0, x_1}(t_0, t_1) := \{ x(t) \,|\, t_0 \leq t \leq t_1,\; x(t_0) = x_0,\; x(t_1) = x_1,\; \dot{x}(t) \text{ stetig} \},$$

die die Punkte x_0 und x_1 in der Zeit $t_1 - t_0$ mit einander verbinden. Ich setze nun ein paar Grundkenntnisse der Variationsrechnung voraus, wie sie schon Euler hatte. Wir behaupten dann, dass Lösungen der E-L Gln. (30) mit $x(t_0) = x_0$ und $x(t_1) = x_1$ Extrema der Aktion S auf dem Raum $\mathcal{T}_{x_0, x_1}(t_0, t_1)$ entsprechen. Die Variation von S in einer Trajektorie $x(\cdot) \in \mathcal{T}_{x_0, x_1}(t_0, t_1)$ ist durch

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_i \left\{ \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \right\} \tag{32}$$

gegeben, wo $\delta \dot{x}_i = \frac{d}{dt}(\delta x_i)$, $\forall i$. Im folgenden werde ich stets die Einsteinsche Summationskonvention benützen. Aus (32) folgt durch partielle Integration in t, dass

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i \; ; \tag{33}$$

(die Argumente, t, von x_i, $\dot{x}_i$ sind hier überall weggelassen). Fordert man nun, dass

$$\delta S = 0, \quad \forall\, \delta x_i, \; i = 1, \ldots, N,$$

auf einer Trajektorie $x_*(\cdot) \in \mathcal{T}_{x_0, x_1}(t_0, t_1)$, so folgt aus (33), dass $x_*(\cdot)$ eine Lösung von (30) mit $x_*(t_0) = x_0$, $x_*(t_1) = x_1$ ist; und umgekehrt.

Nun gibt es in der technischen Mechanik viele Systeme, die <u>Zwangsbedingungen</u> der Form

$$\sum_j F_\alpha^j(x)\, \delta x_j = 0, \tag{34}$$

$\alpha = 1, \ldots, K$, unterworfen sind, d.h. die δx_j, $j = 1, \ldots, N$, sind <u>nicht</u> von einander unabhängig, sondern haben den Gleichungen (34) zu genügen. Dann sind auch in der Gleichung

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i \overset{!}{=} 0 \qquad (35)$$

für ein Extremum von S <u>nur</u> Variationen $\delta x \equiv (\delta x_1, \dots, \delta x_N)$ <u>zulässig</u>, für die die Gln. (34) erfüllt sind, d.h. $\delta x \perp F_\alpha \equiv (F_\alpha^1, \dots, F_\alpha^N)$, $\alpha = 1, \dots, K$.

Daraus folgt sofort, dass

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{K} \lambda_\alpha F_\alpha^i}_{\text{"Zwangskräfte"}}, \qquad (36)$$

für i.a. zeitabhängige Parameter λ_α, $\alpha = 1, \dots, K$, sog. <u>"Lagrange Multiplikatoren"</u>. Ausserdem müssen die Gln.

$$\sum_j F_\alpha^j(x(t))\, \dot{x}_j(t) = 0, \quad \forall \alpha, \forall t \qquad (37)$$

gelten, wie man sieht, indem man $\delta x_j = \dot{x}_j\, dt$ setzt.

<u>"Holonome Zwangsbedingungen"</u> sind Gln. der Form (34), wo

$$F_\alpha^j(x) = \frac{\partial G_\alpha}{\partial x_j}(x), \qquad (38)$$

für eine Funktion $G_\alpha(x)$. Gl. (38) ist auf zusammenziehbaren Gebieten im Konfigurationsraum äquivalent zu

$$\frac{\partial F^j_\alpha}{\partial x_i} - \frac{\partial F^i_\alpha}{\partial x_j} \equiv 0, \quad \forall i,j, \qquad (39)$$

(wenn man (39) richtig liest[1]). Die Gln. (34) und (38) sagen, zusammengenommen, dass die erlaubten Variationen, δx, tangential zu einer Niveaufläche von G_α sein müssen; d.h. dass erlaubte Konfigurationen, x, die Gl.

$$G_\alpha(x) = g_\alpha = \text{const.} \qquad (40)$$

erfüllen müssen.

Nehmen wir nun an, es seien alle K Nebenbedingungen (34) holonom. Dann verlaufen erlaubte Bahnen des Systems auf einer "Untermannigfaltigkeit", M, des Konfigurationsraumes $\mathbb{R}^{3N}$, die durch die Gln.

$$G_\alpha(x) = g_\alpha = \text{const.}, \quad \alpha = 1, \dots, K \qquad (41)$$

bestimmt ist, (vorausgesetzt, die G_α erfüllen gewisse Voraussetzungen, die nun diskutiert werden sollen).

---

[1] $$\frac{\partial F^j_{\alpha,m}}{\partial x^n_i} - \frac{\partial F^i_{\alpha,n}}{\partial x^n_j} = 0, \quad \forall i,j, \ \forall n,m = 1,2,3.$$

(5) Exkurs über differenzierbare Mannigfaltigkeiten und die Sätze über inverse- und implizite Funktionen

Definition. Sei M ein topologischer Raum, der als Vereinigung von offenen Teilmengen U_i, $i \in I$ (Indexmenge), aufgefasst werden kann. Sei $\mathbb{R}^n$ der n-dimensionale VR über $\mathbb{R}$, dessen Elemente n-Tupel reeller Zahlen sind; $\mathbb{R}^n$ sei mit der üblichen differenzierbaren Struktur versehen. Für jedes $i \in I$ gebe es eine stetige Abbildung $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, deren Umkehrabbildung auf dem Bild, $\varphi_i(U_i)$, von U_i ebenfalls existieren und stetig sein möge; (es ist dann $\varphi_i(U_i)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$). Man nennt die Paare $(\varphi_i, U_i)_{i\in I}$ Karten von M. Es wird nun weiter angenommen, dass für alle $i, j \in I$ die Abbildung

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j) \qquad (42)$$

C^p $(1 \leq p \leq \infty)$ sei. Eine Teilmenge $V \subset M$ ist offen, falls $\varphi_i(U_i \cap V)$ offen in $\mathbb{R}^n$ ist, $\forall i \in I$.

Die Familie aller offenen Teilmengen von M bestimmt die Topologie von M, relativ zu $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i\in I}$.

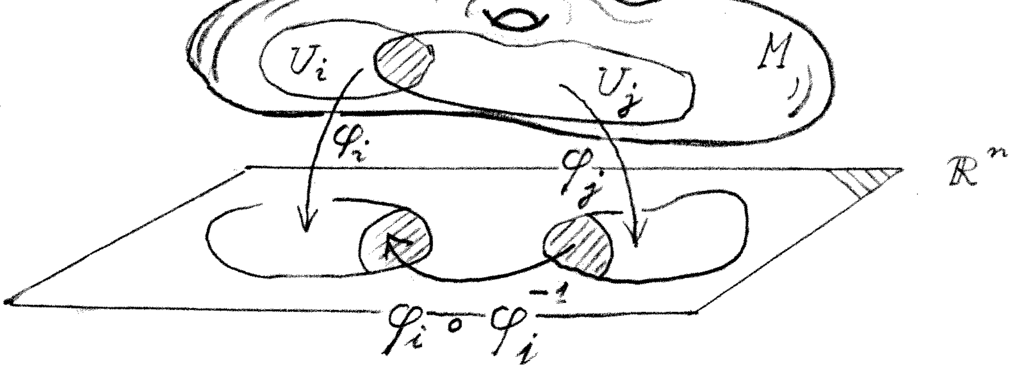
Wir nehmen immer an, die Familie $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i\in I}$ habe die Eigenschaft, dass M Hausdorffsch sei. Ausserdem soll es eine abzählbare Teilmenge $\{i_k \in I\}_{k=1}^{\infty}$ von I geben so, dass

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{i_k} .$$

Unter diesen Annahmen nennt man $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i\in I}$ einen Atlas von M. Zwei Atlanten sind äquivalent, falls auch ihre Vereinigung ein Atlas ist. Eine Äquivalenzklasse von Atlanten nennt man eine differenzierbare Struktur auf M.

M, versehen mit einer diff. baren Struktur, heisst n-dimensionale, reelle C^p-Mannigfaltigkeit. Jede Funktion $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ in einem Atlanten definiert eine Karte (φ_i, U_i) oder ein "Koordinatensystem".

M ist kompakt, falls jede offene Überdeckung von M eine endliche Überdeckung enthält.



(Wir haben hier Mannigfaltigkeiten ohne Rand definiert.)

Satz 1. Jede kompakte, differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n ohne Rand kann als n-dim. (Hyper-) Fläche in einem $\mathbb{R}^{2n+1}$ konstruiert werden.

(Siehe z. B. J. Milnor & J. Stasheff, "Characteristic Classes", PUP.)

Definition. Seien M und N zwei C^p-Mf. mit Atlanten $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i\in I}$, resp. $\{(\psi_j, V_j)\}_{j\in J}$. Eine Abbildung

$$f : M \longrightarrow N$$

heisst eine C^p-Abbildung von M nach N, falls

$$\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^m \supset \varphi_i\left(U_i \cap f^{-1}(V_j)\right) \to \psi_j(V_j) \subset \mathbb{R}^n \qquad (43)$$

C^p ist, $\forall\, i, j$. Hier sind $m = \dim M$, $n = \dim N$.

Wenn f eine Inverse, f^{-1}, besitzt ($\Rightarrow m = n$), und f, f^{-1} C^∞ Abbildungen sind, so nennt man f einen Diffeomorphismus.

Definition. Sei (φ, U) eine Karte von M. Ersetzen wir φ durch eine Abbildung $\tilde{\varphi} : U \to \mathbb{R}^m$ so, dass auch $(\tilde{\varphi}, U)$ eine Karte ist und die Abbildungen $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ und $\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ C^p-Abbildungen von $\mathbb{R}^m$ sind, so nennen wir $\tilde{\varphi}\circ\varphi^{-1}$ eine Koordinatentransformation in der Karte (φ, U). Eine solche hat eine "passive Interpretation": Sie benennt lediglich die Punkte in U um.

Der Einfachheit halber setzen wir im folgenden i.a. $p = \infty$.

Beispiel 1. $N = \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$. Die Familie der C^∞-Abbildungen $f : M \to \mathbb{R}$ ist eine abelsche Algebra über $\mathbb{R}$, die mit $C^\infty(M)$ bezeichnet wird. Sie hat ein Neutralelement $(f \equiv 1)$, falls M kompakt ist.

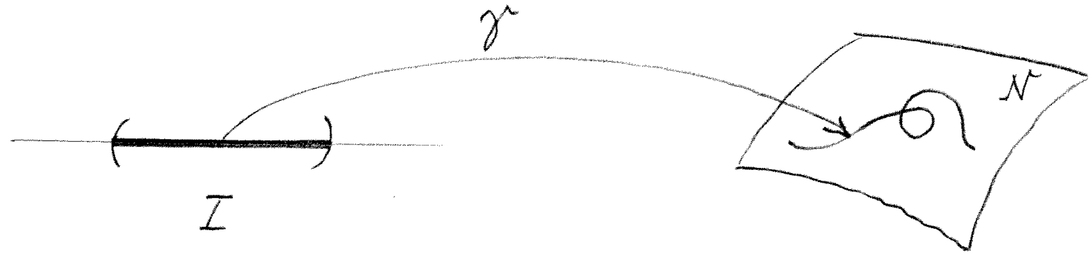
"Zustände" über $C^\infty(M)$ sind Wahrscheinlichkeitsmasse auf M.

Ein bekannter Satz von I.M. Gel'fand besagt, dass M als Hausdorffscher Raum aus $C^\infty(M)$ (resp. aus der C^*-Algebra $C^0(M)$) rekonstruiert werden kann. Punkte $q \in M$ entsprechen "reinen Zuständen", δ_q, auf $C^\infty(M)$, wo $\delta_q(f) = f(q) \in \mathbb{R}$, $\forall f \in C^\infty(M)$. Eine Folge $(q_i)_{i=1}^\infty \subset M$ konvergiert gegen $q \in M$, falls $\delta_{q_i}(f) \xrightarrow[i\to\infty]{} \delta_q(f)$, $\forall f \in C^\infty(M)$. Dadurch wird die Topologie von M festgelegt.

Beispiel 2. Sei $M = I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und N eine glatte, n-dim. Mf. Eine C^∞-Abbildung

$$\gamma : I \longrightarrow N$$

heisst eine parametrisierte Kurve (Trajektorie) in N.



Die Algebra $C^\infty(M)$ und die parametrisierten Kurven in M sind die fundamentalen Bausteine der Differentialgeometrie — und der klassischen Physik! Elemente von $C^\infty(M)$ gestatten es uns, "Ereignisse in M" zu lokalisieren, parametrisierte Kurven geben die Begriffe von Richtung(svektor) und Geschwindigkeit.

Zwei Kurven, γ_1 und γ_2, durch einen Punkt $q \in M$ heissen äquivalent in q, falls

$$\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = q, \quad (t_0 \in I), \quad (\varphi \circ \gamma_1)'(t_0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(t_0), \tag{44}$$

für irgendeine Karte (φ, U) von M, mit $q \in U$. Eine Äquivalenzklasse von Kurven durch q heisst Tangentialvektor in q. Der Raum aller Tangentialvektoren in q wird mit $T_q M$ (Tangentialraum in q) bezeichnet. Wie aus (44) leicht ersichtlich, ist $T_q M$ ein zu $\mathbb{R}^m$ isomorpher VR über $\mathbb{R}$; ($m = \dim M$). Diese Begriffe sind invariant, d.h. unabh. von φ. Ist γ eine Kurve durch $q \in M$, so bezeichnet man den ihr entsprechenden Tangentialvektor mit $\gamma'(t_0)$, oder $(\frac{d}{dt}\gamma)(t_0)$ (wo $\gamma(t_0) = q$).

Mit Hilfe von Tangentialvektoren kann man nun Richtungsableitungen von Funktionen $f \in C^\infty(M)$ definieren: Sei $X = \gamma'(0)$ ($t_0 = 0$ o.V.a.A.), $f \in C^\infty(M)$. Dann nennt man

$$X(f)(q) \equiv L_X(f)(q) := (f \circ \gamma)'(0) \in \mathbb{R} \qquad (45)$$

die Ableitung von f in Richtung X im Punkte q.

In den Übungen werden wir Tangentialvektoren und Richtungsableitungen in Karten untersuchen.

Das "Tangentialbündel" von M ist durch

$$TM = \bigcup_{q \in M} T_q(M) \qquad (46)$$

definiert. Ein sog. "Schnitt" von TM ist das, was man ein Vektorfeld nennt. Ein Problem, das uns noch beschäftigen wird, ist dass es zwischen $T_{q_1}M$ und $T_{q_2}M$, für $q_1 \neq q_2$, a priori keine Beziehung gibt, sodass es a priori keinen invarianten Begriff der Ableitung von Vektorfeldern gibt.

Die Sätze von den inversen und impliziten Funktionen

Wir beginnen mit dem Begriff der Tangentialabbildung (Differential) einer Abbildung $\varphi: M \supset U \to V \subset N$ in einem beliebigen Punkte $q \in U$. Wir behaupten, dass φ eine lineare Abbildung, $d\varphi(q)$, von T_qM nach $T_{\varphi(q)}N$ bestimmt, $\forall q \in U$: Der zu einem Vektor $X \in T_qM$ gehörigen Äquivalenzklasse von Kurven, γ, durch q ordnen wir die Äquivalenzklasse von Kurven, $\varphi(\gamma)$, durch $\varphi(q)$ zu. Diese bestimmt dann einen Tangentialvektor $Y \in T_{\varphi(q)}N$. Durch Benützung von Karten sieht man leicht, dass die so definierte Abbildung linear ist. Sie wird mit $d\varphi(q)$ bezeichnet. Wir schliessen, dass φ lineare Abbildungen

$$d\varphi(q): T_qM \longrightarrow T_{\varphi(q)}N \qquad (47)$$

bestimmt, $\forall q \in U$. Man nennt $d\varphi(q)X$ den "push forward" von $X \in T_q M$.

Satz 2. ("Inverse-Funktionen Theorem")

Seien M und N glatte Mf. der Dimension n, und $\varphi : M \supseteq U \to V \subseteq N$ eine glatte Abbildung. Es gebe einen Punkt $q \in U$ so, dass

$$d\varphi(q) : T_q M \to T_{\varphi(q)} N$$

ein Vektorraum-Isomorphismus sein möge.

Dann gibt es eine offene Umgebung $U_0 \subseteq U$ von q so, dass

(i) $\varphi|_{U_0} : U_0 \to \varphi(U_0)$ injektiv

(ii) $\varphi(U_0)$ offen in N, und

(iii) $\varphi^{-1} : \varphi(U_0) \to U_0$ glatt.

Satz 3. ("Implizite-Funktionen Theorem")

Seien M und N glatte Mf. mit $\dim M > \dim N$, und $\varphi : M \supseteq U \to V \subseteq N$ eine glatte Abbildung. Es sei $p \in V$, und

$$\tilde{M}_p := \{ q \in M \mid \varphi(q) = p \}. \tag{48}$$

Wir nehmen an, dass für jedes $q \in \tilde{M}_p$ die Abbildung

$$d\varphi(q) : T_q M \to T_p N$$

surjektiv ist.

Dann ist $\tilde{M}_p$ lokal eine glatte Mf., deren Topologie von derjenigen auf M induziert wird. Die Inklusionsabbildung $\tilde{M}_p \to M$ ist glatt, und

$$\dim \tilde{M}_p = \dim M - \dim N.$$

Definition. Eine "Untermannigfaltigkeit" M einer glatten Mf. N ist ein Paar (M, ψ), wo M eine glatte Mf. ist, und $\psi : M \to N$ eine glatte injektive Abbildung ist so, dass

$$d\psi(q) : T_q M \to T_{\varphi(q)} N$$

in allen Punkten $q \in M$ injektiv ist

Bemerkung. Die Mf. $\tilde{M}_p$ in Satz 2 ist (lokal) eine Untermannigfaltigkeit von M.

---

(6) Zurück zum Lagrange Formalismus

Wir betrachten ein System von N Massenpunkten mit Konfigurationsraum $\mathbb{E}^{3N}$ und K holonomen Zwangsbedingungen

$$G_\alpha(x) = g_\alpha = \text{const.}, \quad \alpha = 1, \dots, K.$$

Offenbar definiert

$$\mathcal{G} : \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow \mathbb{R}^{K}$$
$$\mathbb{R}^{3N} \ni x \longmapsto \begin{pmatrix} G_1(x) \\ \vdots \\ G_K(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{K}$$

eine Abb. von $\mathbb{R}^{3N}$ nach $\mathbb{R}^{K}$, von der wir annehmen, sie sei glatt. Die Tangentialabbildung $d\mathcal{G}(x)$ in einem Punkte $x \in \mathbb{R}^{3N}$ ist dann durch die Jacobi Matrix

$$d\mathcal{G}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_1(x)}{\partial x_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_K(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_K(x)}{\partial x_N} \end{pmatrix} \tag{49}$$

gegeben. Das ist eine $K \times 3N$ Matrix (K Zeilen, $3N$ Spalten). Zu sagen

$$d\mathcal{G}(x) : T_x \mathbb{R}^{3N} \cong \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow T_{\mathcal{G}(x)} \mathbb{R}^{K} \cong \mathbb{R}^{K}$$

sei <u>surjektiv</u>, bedeutet, dass die Jacobi Matrix $d\mathcal{G}(x)$ den Rang K hat, d.h. die K Vektoren

$$\left(\frac{\partial G_\alpha(x)}{\partial x_1} \ \cdots \ \frac{\partial G_\alpha(x)}{\partial x_N}\right)_{\alpha = 1,\dots,K}$$

sind <u>linear unabhängig</u>, oder, anders gesagt, die K holonomen Zwangsbed., $G_\alpha(x) = g_\alpha$, $\alpha = 1,\dots,K$, sind unabhängig.

Der Satz über implizite Funktionen sagt uns nun, dass die Menge

$$\tilde{M}_g := \left\{ x \in \mathbb{R}^{3N} \,\middle|\, G_\alpha(x) = g_\alpha ,\ \alpha = 1, \dots, K \right\} \qquad (50)$$

lokal eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{3N}$ der Dimension $3N-K$ ist. Sie ist der eigentliche <u>Konfigurationsraum</u> des mechanischen Systems.

Die Bewegungsgln. (36) kann man nun auch wie folgt aus dem Hamiltonschen Variationsprinzip bekommen: Zur Aktion S in (31) fügt man die Zwangsbedingungen, $G_\alpha(x) - g_\alpha = 0$, mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren hinzu; d.h. man betrachtet das Funktional

$$\tilde{S} := \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ L(x(t), \dot{x}(t); t) - \sum_{\alpha=1}^{K} \lambda_\alpha(t) \big(G_\alpha(x(t)) - g_\alpha \big) \right\}$$

auf dem Raum der Trajektorien

$$\tilde{\mathcal{T}}_{x_0, x_1}(t_0, t_1) := \Big\{ (x(t), \lambda(t)) \,\Big|\, t_0 \leq t \leq t_1 ,\ x(t_0) = x_0 ,\ x(t_1) = x_1 ,\ \dot{x}(t) \text{ stetig} \Big\},$$

wo $\lambda \equiv (\lambda_1, \dots, \lambda_K)$. Variation von $\tilde{S}$ nach den

Trajektorien $(x(t), \lambda(t))$ ergibt nach partieller Integration in der Zeit:

$$\delta\tilde{S} = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} - \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial G_\alpha}{\partial x_j} \right) \delta x_j - \sum_\alpha \delta\lambda_\alpha (G_\alpha - g_\alpha) \right\} \tag{51}$$

$\overset{!}{=} 0$, für ein Extremum von $\tilde{S}$.

- Daraus folgen die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial L}{\partial x_j} = \underbrace{\sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial G_\alpha}{\partial x_j}}_{\text{Zwangskräfte}}, \quad \forall j \tag{52}$$

und die Zwangsbedingungen

$$G_\alpha(x) = g_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, K.$$

- Die Gln. (52) sind ein Spezialfall der Gln. (36).

Für den Konfigurationsraum $M := \tilde{M}_g$, siehe (50), wählen wir nun eine Parameterdarstellung; d.h. wir beschreiben M durch Karten und Koordinaten:

$$M \ni x = x(q), \quad q = (q^1, \dots, q^f) \in V \subseteq \mathbb{R}^f, \tag{53}$$

$f = 3N - K$ (= "Zahl der Freiheitsgrade"). Dann ist

$$\tilde{S} = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ L(x(q(t)), \dot{x}(q(t)); t) - \right.$$
$$\left. - \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha(t) \underbrace{(G_\alpha(x(q(t))) - g_\alpha)}_{\equiv 0\,!} \right\} \quad (54)$$

In (54) ist $\dot{x}(q(t)) = \sum_{a=1}^{f} \frac{\partial x}{\partial q^a} \dot{q}^a(t)$, (daher $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}^a} = \frac{\partial x_i}{\partial q^a}$). Wir definieren

$$\tilde{L}(q, \dot{q}; t) := L(x(q), \dot{x}(q); t).$$

Dann ist

$$\tilde{S} = \int_{t_0}^{t_1} dt\ \tilde{L}(q(t), \dot{q}(t); t), \qquad (55)$$

und $\tilde{S}$ ist auf denjenigen Trajektorien extrema[l], die die Euler-Lagrange Gln.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^a} = 0, \quad a = 1, \ldots, f, \qquad (56)$$

erfüllen. Es ist eine nützliche Übungsaufgabe, sich von der Richtigkeit des folgenden Lemmas zu überzeugen.

<u>Lemma.</u> Wenn man auf dem Konfigurationsraum M neue Koordinaten einführt,

$$q^a = q^a(Q), \quad Q = (Q^1, \ldots, Q^f), \qquad (57)$$

und die Lagrange Funktion in den neuen Koordinaten, Q, durch

$$\hat{L}(Q,\dot{Q};t) := \tilde{L}(q(Q),\dot{q}(Q);t) \tag{58}$$

definiert, wo $\dot{q}^a(Q) = \sum_b \frac{\partial q^a}{\partial Q^b}\dot{Q}^b$, dann gehen die Gln. (56) in die neuen Euler–Lagrange Gln.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{Q}^b} - \frac{\partial \hat{L}}{\partial Q^b} = 0, \quad b = 1,\dots,f, \tag{59}$$

über. (Zwei Beweise: (i) direkt; (ii) über Variations prinzip.)

Zum Abschluss dieser Einführung in die Lagrangesche Mechanik schauen wir uns den Ausdruck für die kinetische Energie eines Systems von N Massenpunkten in allgemeinen Lagekoordinaten an.

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\dot{x}_i^2 = \sum_{a,b=1}^{f} g_{ab}(q)\,\dot{q}^a\dot{q}^b, \tag{60}$$

wo

$$g_{ab}(q) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\frac{\partial x_i(q)}{\partial q^a}\cdot\frac{\partial x_i(q)}{\partial q^b} \tag{61}$$

Nun bemerke man, dass $\dot{q} = (\dot{q}^1,\dots,\dot{q}^f)$ ein allgemeiner Vektor im Tangentialraum T_qM ist. Offenbar bestimmt die Matrix $G(q) = (g_{ab}(q))$ ein Skalarprodukt auf T_qM, $q \in M$. Man nennt

$G(\cdot)$ eine Metrik auf M. Sie macht M zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Alle (kompakten) Riemannschen Mf. können als Flächen in einen hinreichend hoch dimensionalen Euklidischen Raum $\mathbb{E}^n$, dargestellt werden, und zwar so, dass ihre Metrik die von der Metrik von $\mathbb{E}^n$ induzierte Metrik (siehe (61)) ist. Das ist die Aussage des Nashschen Einbettungssatzes.

(7) Hamiltonsche Mechanik

Der Zustand eines Lagrangeschen Systems zur Zeit t_0 ist durch Angabe seiner Lagekoordinaten $q_0 = (q_0^1, \dots, q_0^f) \in M$ und der Geschwindigkeiten $\dot{q}_0 = (\dot{q}_0^1, \dots, \dot{q}_0^f) \in T_q M$ eindeutig bestimmt. Kennt man ihn, so ist die Bahn $(q(t))_{t \in I \subseteq \mathbb{R}}$ durch Lösen der Euler-Lagrange Gleichungen (56)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0, \quad a = 1, \dots, f,$$

zu den Anfangsbedg. $q(t_0) = q_0$, $\dot{q}(t_0) = \dot{q}_0$ im Prinzip für alle Zeiten festgelegt, (falls L so ist, dass die Lösungen nicht in endlicher Zeit singulär werden): Determinismus der klassischen Mechanik!

Es ist natürlich, die E-L Gln., die zweiter Ordnung in $\frac{d}{dt}$ sind, in ein System von Gleichungen erster Ordnung in $\frac{d}{dt}$ umzuwandeln. Das geschieht wie folgt: Wir stellen zunächst fest, dass die Lagrange Funktion, allgemein zu reden, eine Funktion auf dem Tangentialbündel, TM, des Konfigurationsraums M ist. Zum Punkt $(q, X \in T_q M)$ in TM gehört der Wert $L(q, \dot{q} = X; t)$ der Lagrange Funktion, und die E-L Gln. (56) lauten wie folgt:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial X^a}(q(t), X(t); t) - \frac{\partial L}{\partial q^a}(q(t), X(t); t) = 0, \qquad (62)$$

mit

$$\dot{q}(t) = X(t).$$

Das ist nun schon ein System von Gln. erster Ordnung. Man beachte, dass für alle $q \in M$, $X \in T_q M$

$$\frac{d}{d\varepsilon} L(q, X + \varepsilon Y; t)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial L(q, X; t)}{\partial X^a}\, Y^a \qquad (63)$$

(Summenkonvention!), wo Y ein beliebige Vektor in

$T_q M$ ist. Die linke Seite von (63) ist (für jedes $(q, X) \in TM$) eine reelle Zahl, die rechte Seite ist <u>linear</u> in Y. Also ist

$$\frac{\partial L(q, X; t)}{\partial X^a} =: p_a, \quad a = 1, \cdots, f, \qquad (64)$$

für jedes $(q, X) \in TM$ ein <u>lineares Funktional</u> auf $T_q M$, d. h. ein Element des <u>Kotangentialraums</u> $T_q^* M$. Man kann nun fragen, ob die Gln. (64) für jedes feste q und vorgegebene Form $p = (p_1, \cdots, p_f)$ nach X aufgelöst werden können.

Die Antwort liefert <u>lokal</u> das Theorem über inverse Funktionen. Für ein festes $q \in M$ fassen wir

$\varphi_q(X) := \left(\frac{\partial L}{\partial X^a}(q, X; t)\right)_{a=1,\cdots,f}$ als eine Abbildung von $T_q M \cong \mathbb{R}^f$ nach $T_q^* M \cong \mathbb{R}^f$ auf.

Die Tangentialabbildung ist dann

$$d\varphi_q(X) = \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial X^b}(X)\right) = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial X^a \partial X^b}(q, X; t)\right)$$

Ist diese für ein bestimmtes $X \in T_q M$ ein VR-Isomorphismus von $\mathbb{R}^f$ nach $\mathbb{R}^f$, so garantiert der

Satz über inverse Funktionen, dass es eine offene Umgebung, U, von X in $\mathbb{R}^f$ gibt so, dass die Gln.

$$\frac{\partial L}{\partial X^a}(q, X; t) = \varphi_a(X) = p_a$$

für alle p im Bild von U nach X auflösbar sind. Dass $d\varphi_q(X)$ ein VR Isomorphismus ist, ist gleichbedeutend mit der Annahme, dass die $f \times f$ Matrix $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial X^a \partial X^b}(q, X; t)\right)$ regulär ist, d.h. dass ihre Determinante $\neq 0$ ist.

Im folgenden wollen wir annehmen, dass die Gln. (64) für alle $q \in M$, für alle $p \in T_q^* M$ nach X auflösbar seien. Dann lauten die Gln. (62) wie folgt:

$$\dot{p}_a = \frac{\partial L}{\partial q^a}, \quad p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}. \tag{62'}$$

Wir definieren nun die sog. Hamilton Funktion, H, des Systems durch

$$H(q, p; t) := \left[\sum_{a=1}^{f} p_a \dot{q}^a - L(q, \dot{q}; t)\right]_{\dot{q}\ \text{Lösung von (64)}} \tag{65}$$

Aus den Euler-Lagrange Gln. (62) und (65) folgen die <u>Hamiltonschen Bewegungsgln.</u>

$$\dot{p}_a \overset{(62')}{=} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \overset{E-L}{=} \frac{\partial L}{\partial q^a} \overset{(65)}{=} -\frac{\partial H}{\partial q^a},$$

und
$$\dot{q}^a \overset{(65)}{=} \frac{\partial H}{\partial p_a}. \qquad (66)$$

<u>Zusammenhang von (65) mit der Legendre Transformation</u>

Wir nehmen an, $L(q, X; t)$ sei in den Variablen $X = (X^1, \dots, X^f)$ strikte <u>konvex</u>, $\forall q \in M$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Das ist äquivalent zur Aussage, die Hessische Matrix

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial X^a \partial X^b}\right)_{a,b=1,\dots,f}$$

sei <u>positiv-definit</u>. Dies ist in vielen wichtigen Beispielen der Mechanik der Fall; (siehe (60), (61))

Dann kann man $H(q, p; t)$ als die (konvexe) Legendre Transformierte von $L(q, X; t)$ auffassen:

$$H(q, p; t) = \sup_X \left[p_a X^a - L(q, X; t)\right]. \qquad (67)$$

Die allgemeine Theorie der Legendre Transformation ($\nearrow$ Übungen) sagt dann, dass auch H strikte konvex in den Variablen $p = (p_1, \dots, p_f)$ ist, dass die Legendre Transformierte von H in den Variablen p gerade L ist, und dass

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial X^a} \;, \quad X^a \equiv \dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a} .$$

Man sieht dann, dass die Euler–Lagrange Gln. die Hamiltonschen Bewegungsgln. implizieren, und umgekehrt.

Wir überzeugen uns nun davon, dass auch die Hamiltonschen Bewegungsgln. unmittelbar aus dem Hamiltonschen Variationsprinzip hergeleitet werden können. Zunächst definieren wir den <u>Phasenraum</u>, Γ, des Systems als die Menge der Punkte (q,p), $q \in M$ (Konfigurationsraum), $p \in T_q^* M$ (Kotangentialraum in q = Dualraum von $T_q M$). Offenbar ist Γ das Kotangentialbündel über dem Konfigurationsraum,

$$\Gamma = T^* M = \bigcup_{q \in M} T_q^* M . \tag{68}$$

Wir betrachten nun die Trajektorien

$$\mathcal{T}_{q_0 q_1}(t_0, t_1) = \Big\{ (q(t), p(t)) \in \Gamma \,\Big|\, t_0 \le t \le t_1 ,$$
$$q(t_0) = q_0 ,\; q(t_1) = q_1 \text{ fest} \Big\}$$

Auf diesem Raum von Trajektorien definieren wir die <u>Aktion</u>

$$S(q(\cdot),p(\cdot)) := \int_{t_0}^{t_1} dt\,\left[p_a(t)\,\dot{q}^a(t) - H(q(t),p(t);t)\right]. \quad (69$$

Wir variieren S mit den Nebenbedg., dass t_0, t_1 $q(t_0)=q_0$ und $q(t_1)=q_1$ fest sind:

$$\delta S(q(\cdot),p(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} dt\,\Big[\delta p_a\,\dot{q}^a + p_a\,\delta\dot{q}^a - \frac{\partial H}{\partial p_a}\delta p_a - \frac{\partial H}{\partial q^a}\delta q^a\Big]$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt\,\Big[\Big(\dot{q}^a - \frac{\partial H}{\partial p_a}\Big)\delta p_a - \Big(-\dot{p}_a - \frac{\partial H}{\partial q^a}\Big)\delta q^a\Big]$$

Die Summationskonvention ist in Kraft, und die Randterme beim partiellen Integrieren verschwinden, da $q(t_0)$ und $q(t_1)$ festgehalten werden. <u>Wir finden:</u>

S in $(q_*(\cdot),p_*(\cdot)) \in \mathcal{T}_{q_0,q_1}(t_0,t_1)$ extremal

$\Longleftrightarrow \quad \delta S(q_*(\cdot),p_*(\cdot)) = 0$, mit $q(t_0), q(t_1)$ fest

$$\Longleftrightarrow \quad \dot{q}_*^a = \frac{\partial H}{\partial p_{*a}}, \quad \dot{p}_{*a} = -\frac{\partial H}{\partial q_*^a}, \quad a = 1,\dots,f.$$

<u>Bemerkungen.</u> Die Hamiltonschen Bewegungsgln. sind

gewöhnliche Dgln. 1. Ordnung in $\frac{d}{dt}$ für Trajektorien im Phasenraum Γ. Benützen wir lokal die Koordinaten

$$x = (x^1, \ldots, x^{2f}) := (q^1, p_1, \cdots, q^f, p_f) \tag{70}$$

(sog. Darboux Koordinaten), so haben sie die Form

$$\dot{x} = \Omega \frac{\partial H}{\partial x} (x; t), \tag{71}$$

wo

$$\Omega = \begin{pmatrix} \begin{array}{cc|} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ \hline \end{array} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{array}{|cc} \hline 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \end{pmatrix}.$$

Für irgendeine Trajektorie $\{x(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \subset \Gamma$ ist die L.S. $\dot{x}(t)$, ein Element des Tangentialraumes $T_{x(t)}\Gamma$, d.h. ein Vektor in $T_{x(t)}\Gamma$. Dagegen ist der Gradient $\frac{\partial H}{\partial x}(x(t);t)$ ein Element des Kotangentialraumes $T^*_{x(t)}\Gamma$, d.h. eine Einsform. Das bedeutet, dass, auf der R.S. von (71), Ω ein Element von $T^*_x\Gamma$ auf ein Element von $T_x\Gamma$ abbildet, $\forall x \in \Gamma$. Ausserdem ist Ω schief. Einen solchen Tensor nennt man ein Bi-Vektorfeld. Der Tensor Ω hat in den von uns benützten (Darboux) Koordinaten konstante Komponenten.

Man kann (71) auch wie folgt schreiben:

$$\omega \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial x}(x(t);t). \tag{71'}$$

Der Tensor ω soll offenbar einen Vektor in $T_x\Gamma$ auf eine Einsform in $T_x^*\Gamma$ abbilden, $\forall x \in \Gamma$. In unseren Koordinaten hat ω die Komponenten

$$\omega = \begin{pmatrix} \begin{array}{cc|} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ \hline \end{array} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{array}{|cc} \hline 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \end{pmatrix}; \tag{72}$$

d.h. ω is schief-symmetrisch. Einen solchen Tensor nennt man eine "<u>2-Form</u>".

(7) <u>Exkurs über Vektorfelder, Flüsse & Differentialformen</u>

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, T_xM der Tangentialraum in $x \in M$ und T_x^*M der Kotangentialraum dual zu T_xM. Das sog. Tangentialbündel ist durch

$$TM = \bigcup_{x\in M} T_xM$$

definiert, das Kotangentialbündel durch

$$T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^* M.$$

TM und T^*M sind sog. Vektorbündel. Ein Vektorbündel, E, mit Faser V (= endl. dim. Vektorraum über $\mathbb{R}$ od. $\mathbb{C}$) über dem Basisraum M ist ein topologischer Raum mit stetiger Projektion, π,

$$\pi : E \longrightarrow M$$

so, dass $\forall\, x \in M$ $\exists$ offene Umgebung $U \ni x$ und ein Homöomorphismus Φ,

$$\Phi : V \times U \underset{\simeq}{\longrightarrow} \pi^{-1}(U)$$

mit der Eigenschaft, dass

$$\pi\left(\Phi(X,y)\right) = y, \quad \forall X \in V,\ y \in U.$$

(U, Φ) ist ein "lokales Koordinatensystem" von E.

E ist "trivial", falls $E \cong V \times M$, (global).

Übergangsfunktionen

Auf $U_1 \cap U_2$ ist

$$\Phi_{12} := \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : V \times (U_1 \cap U_2) \longrightarrow V \times (U_1 \cap U_2)$$

definiert, und $\forall y \in U_1 \cap U_2$

$$\Phi_1(X, y) \in \pi^{-1}(y), \quad \Phi_2(X,y) \in \pi^{-1}(y).$$

Also

$$\Phi_2^{-1}(\Phi_1(X,y)) = (\tilde{X}, y), \text{ oder}$$

$$\Phi_{12}(X,y) = (\varphi_{12,y}(X), y),$$

wo $\varphi_{12,y} : V \xrightarrow[\simeq]{} V$ ein VR Isomorphismus ist.

Die $\{\Phi_{ij}\}$ heissen <u>Übergangsfunktionen</u>. Wenn $\{U_j\}_{j\in}$ eine offene Überdeckung von M ist und alle $\{\Phi_{ij}\}$ bekannt sind, so ist E eindeutig bestimmt. Die Übergangsfunktionen haben die Eigenschaften

(i) Φ_{ii} = Identität, $\forall i$.

(ii) Auf $U_i \cap U_j \cap U_k$ $(\neq \emptyset)$ gilt, dass

$$\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} = \varphi_{ik} .$$

Ein <u>Schnitt</u>, s, von E ist eine Abbildung

$$s : M \longrightarrow E$$

so, dass $\pi(s(x)) = x$.

$$\Gamma(E) := \text{Raum der Schnitte von } E.$$

Wenn M und E C^p-Mf. sind, so fordert man, dass s C^p sein soll. Der Raum der Schnitte ist ein $C^p(M)$-<u>Modul</u>. Besitzt er eine <u>globale Basis</u> $\{s_1(x), \dots, s_m(x) \mid x \in M\}$, $m = \dim V$, mit $s_j(x) \neq 0$, $\forall x \in M$, $j = 1, \dots, m$, so ist E <u>trivial</u>.

Für $E = TM$, resp. $E = T^*M$ ist $V = \mathbb{R}^n$, $n = \dim M$

Operationen auf Vektorbündeln

Seien E_1 und E_2 zwei Vektorbündel über demselben Basisraum M mit Fasern V_1, resp. V_2 (VR über demselben Körper $\mathbb{R}$ od. $\mathbb{C}$). Dann sind die folgenden Operationen definiert:

(i) $E_1 \oplus E_2$ (Whitney Summe)

Faser ist $V_1 \oplus V_2$, Basisraum M; (Def. ist offensichtlich)

(ii) $E_1 \otimes E_2$

Faser ist $V_1 \otimes V_2$, ...

(iii) $Hom(E_1, E_2)$

Faser über x ist $Hom(\pi_1^{-1}(x), \pi_2^{-1}(x)) \cong Hom(V_1, V_2)$, $\forall x \in M$, ...

(iv) Duales Vektorbündel

Das zu E duale Vektorbündel, E', ist das Vektorbündel über M, dessen Faser über irgendeinem Punkt $x \in M$ aus dem Raum der linearen Funktionale auf $\pi^{-1}(x) \cong V$ besteht, d.h.

$$(\pi')^{-1}(x) \cong Hom(V, \mathbb{R}) = V', \quad \forall x \in M.$$

Sei $E = TM$ das Tangentialbündel über M. Dann ist $E' = T^*M$ das Kotangentialbündel über M. Dank Operation (ii) kann man dann

$$T^p_q M := \underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_{p} \otimes \underbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}_{q},$$

das Vektorbündel der p-fach kontravarianten, q-fach kovarianten Tensorfelder, definieren.

- Schnitte von TM heissen Vektorfelder, Schnitte von T^*M heissen Einsformen. Wenn TM (und folglich T^*M) ein triviales Vektorbündel ist, dann nennt man M parallelisierbar. Dreidim. Mf. sind stets parallelisierbar, wogegen etwa S^2 nicht parallelisierbar ist (H. Hopf).

- Definition. Sei $\mathcal{A}$ eine *Algebra über $\mathbb{C}$. Ein *Automorphismus von $\mathcal{A}$ ist eine lineare Abb., α, mit den Eigenschaften:

(i) $\alpha : \mathcal{A} \xrightarrow{1-1} \mathcal{A}$ linear,

(ii) $\alpha(a \cdot b) = \alpha(a) \cdot \alpha(b), \ \forall a, b \in \mathcal{A}$,

(iii) $\alpha(a^*) = \alpha(a)^*$.

Eine Derivation von $\mathcal{A}$ ist eine Abb. mit den Eigenschaften:

$$(i) \quad D: \mathcal{A} \to \mathcal{A} \quad \underline{\text{linear}},$$

$$(ii) \quad D(a \cdot b) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b)$$

(<u>Leibniz Regel</u>)

$$(iii) \quad D(a^*) = D(a)^*$$

Wenn $\mathcal{A}$ eine abelsche C^*-Algebra ist, so ist

$$\mathcal{A} \cong C(\Gamma),$$

wo Γ ein Hausdorffscher Raum, nämlich das "Spektrum" von $\mathcal{A}$ ist. Dies ist der Inhalt eines <u>Satzes</u> von <u>Gel'fand</u>. In der Hamiltonschen Mechanik ist Γ der Phasenraum und $\mathcal{A} = C(\Gamma)$ die (komplexwertigen) beschränkten, stetigen Funktionen auf Γ, versehen mit der sup-Norm. Die <u>reellen</u> stetigen Funktionen spielen die Rolle der <u>beobachtbaren Grössen</u> oder <u>"Observablen"</u>. Man kann dann $\mathcal{A}$ auch als die Algebra der <u>reellwertigen</u> stetigen Funktionen definieren, und die Annahmen (iii) werden dann hinfällig. Wenn jedoch $\mathcal{A}$ <u>nicht-kommutativ</u> ist – wie in der Quantenmechanik – dann müssen wir $\mathcal{A}$ als Algebra über $\mathbb{C}$ auffassen.

Satz 4.

(1) Sei $\mathcal{A} = C(\Gamma)$ eine abelsche C^*-Algebra, und sei α ein *Automorphismus von $\mathcal{A}$. Dann gibt es einen Homöomorphismus, φ,

$$\varphi : \Gamma \xrightarrow{1-1} \Gamma,$$

so, dass

$$\alpha(a) = a \circ \varphi, \text{ d.h. } \alpha(a)(x) = a(\varphi(x)), \ \forall x \in \Gamma. \quad (73$$

(2) Wenn $T\Gamma$ existiert (z.B. Γ eine diff. bare Mf. ist), $\mathcal{A} = C^p(\Gamma)$, $p \geq 1$, und D eine Derivation von $\mathcal{A}$ ist, dann gibt es ein C^p-Vektorfeld, X, so, dass

$$D(a) = X(a), \quad (74$$

(die Richtungsableitung von a in Richtung X)

Bemerkung. In einer Karte von Γ mit lokalen Koordinaten $(x^1, \dots, x^n)$, $n = \dim \Gamma$, ist

$$X(a)(x) = \sum_{i=1}^{n} X^i(x) \frac{\partial a(x)}{\partial x^i}, \quad (75$$

wo $(X^1(x), \dots, X^n(x))$ die Komponenten von $X(x)$ in den vorliegenden Koordinaten sind. Man kann X mit der Derivation $\sum_{i=1}^{n} X^i(\cdot) \frac{\partial}{\partial x^i}$ identifi-

zieren. Indem man $X(x) = (0, \cdots, 0, \underset{\uparrow}{1}, 0, \cdots, 0)$, $x \in \Gamma$,
$\quad$ i te Stelle

$i = 1, \cdots, n$ setzt, sieht man, dass

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_{i=1,\cdots,n}$$

eine Basis von $T_x M$ bilden.

Integralkurven von Vektorfeldern und Flüsse

Satz 5.

Es sei X ein C^p-Vektorfeld definiert auf einer offenen Teilmenge U einer C^p-Mf. Γ, $p = 1, 2, 3, \cdots$. Dann gibt es eine Familie, $\mathcal{C}_X$, von einfachen Kurven, γ, die man Integralkurven von X nennt, so, dass es für jedes $x \in U$ ein Interval $(-s_x, s_x) \subset$ gibt derart, dass

$$\text{(i)} \quad \gamma(0) = x$$

$$\text{(ii)} \quad \gamma(s) \in U, \ \forall s \in (-s_x, s_x), \text{ und}$$

$$\left. \frac{d\gamma(s)}{ds} \right|_{s=0} = X(x).$$

Die Kurve $\gamma_x \in \mathcal{C}_X$, die (i) und (ii) erfüllt ist p mal differenzierbar in x.

Bemerkung. Seien $(x^1, \dots, x^n)$ Koordinaten auf U.

Dann sagt Satz 5, dass das System von gewöhnlichen

Dgln.
$$\dot{x}^i(s) = X^i(x(s)), \quad i = 1, \dots, n, \qquad (76)$$
mit
$$x(0) = x \in U,$$

für $|s|$ klein genug eine eindeutige Lösung hat, die differenzierbar von der Anfangsbedingung x abhängt.

In dieser Form ist Satz 5 ein Korollar des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für Lösungen von Systemen gew. Dgln.. Durch wiederholte Anwendung von Satz 5 kann man unter geeigneten Voraussetzungen über das Vektorfeld X einen <u>globalen</u> Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Integralkurven von X herleiten:

(1) Sei X ein Lipschitz-stetiges VF auf einer <u>kompakten</u> Mf. Γ; oder

(2) Γ nicht kompakt, aber X ist auf Γ <u>gleichmässig</u> <u>Lipschitz-stetig</u>;

dann existieren die Integralkurven von X <u>global</u> und sind eindeutig durch die Anfangsbedg. bestimmt; (d.h. durch jeden Punkt $x \in \Gamma$ geht genau eine Integralkurve).

Die Abbildung $\phi_s : \Gamma \to \Gamma$,

$$\phi_s : x \in \Gamma \longmapsto \gamma(s) \in \Gamma, \qquad (77)$$

mit $\gamma(0) = x$ und $\dot\gamma(s') = X(\gamma(s'))$, $0 \leq |s'| \leq |s|$, wird der von X erzeugte <u>Fluss</u> genannt. Man verifiziert leicht, dass

$$\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}, \qquad (78)$$

und ϕ_s sind C^p-Abb. $\Gamma \xrightarrow{1-1} \Gamma$, falls X ein C^p VF ist; (vorausgesetzt, die Integralkurven von X existieren <u>global</u>).

Sei ϕ_t der von einem VF X erzeugte Fluss und ψ_s der von einem VF Y erzeugte Fluss, und sei $a \in C^p(T)$, $p \geq 2$. Wir definieren die von X bestimmte <u>Liesche Ableitung</u> durch

$$L_X(a) := X(a) \quad (\text{Richtungsabl. von } a)$$

und

$$L_X Y(a) := \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds}\, a \circ \phi_{-t} \circ \psi_s \circ \phi_t\right)\Big|_{s=0}\right]_{t=0}$$

$$= \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds}\, \phi_t^* \{\psi_s^* (\phi_{-t}^*(a))\}\right)\Big|_{s=0}\right]_{t=0}$$

$$= \left[\frac{d}{dt}\, \phi_t^* \{ Y(\phi_{-t}^*(a))\}\right]_{t=0}$$

$$= X(Y(a)) - Y(X(a)),$$

wo
$$\phi^*(a)(x) := a(\phi(x)).$$

Es folgt offenbar, dass die Liesche Ableitung eines VF's Y in Richtung X durch

$$L_X Y = [X, Y] \tag{79}$$

(Kommutator von X mit Y) gegeben ist.

<u>Übung</u>: Man überzeuge sich davon, dass, wenn X und Y VF sind, auch $[X, Y]$ wieder ein VF ist. (Hinweis: Verifiziere für $[X, Y]$ die Leibniz Regel.)

Da $L_X Y(a) = L_X L_Y(a)$, haben wir, dass

$$[X, Y](a) = L_X L_Y(a) - L_Y L_X(a).$$

Für Kommutatoren gilt aber die <u>Jacobi Identität</u>:

$$[[L_X, L_Y], L_Z] + [[L_Y, L_Z], L_X] + [[L_Z, L_X], L_Y] = 0$$

oder
$$[[X, Y], Z] + \text{zykl.} = 0. \tag{80}$$

Leider ist die Liesche Abl. $L_X Y$ weder in X noch in Y tensoriell. Dies wird erst die kovariante Ableitung, ∇_X, sein, die wir hier nicht benötigen.

Differentialformen und äussere Ableitung

Dual zu Vektoren sind Formen; dual zu VF sind die sog. 1-Formen. Sie sind Schnitte des Kotangentialbündels T^*M, wo M eine Mf. ist. Im Abschnitt über Operationen auf Vektorbündeln haben wir die Tensorbündel $T^p_q M$ kennengelernt; (Seite 61).