Konsequenzen der Maxwellgleichungen.

(i) <u>Ladungserhaltung.</u> Aus der Antisymmetrie des Feldtensors und den inhomogenen Maxwell-gln. folgt sofort, dass

$$\partial^\nu j_\nu = \partial^\nu \partial^\mu F_{\mu\nu} = 0, \qquad (6.62)$$

d.h. die <u>Kontinuitätsgleichung.</u>

(ii) <u>Elektromagnetische Potentiale und Eichinvarianz.</u>

Aus den homogenen Maxwellgln. und der Antisymmetrie von $F_{\mu\nu}$ folgt mit Hilfe des Lemmas von Poincaré, dass

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \qquad (6.63)$$

mit $(A_\mu) = (\Phi, -\vec{A})$. Das kovariante Vektorfeld $A = (A_\mu)$ transformiert unter Poincarétransformationen wie j; siehe (6.55)

Aus (6.63) ist sofort ersichtlich, dass F

invariant unter <u>Eichtransformationen</u>,

$$A_\mu \longmapsto A_\mu - \partial_\mu \chi \qquad (6.64)$$

ist.

(iii) Die Lorentz-Eichbedingung lautet nun

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \qquad (6.65)$$

und behält unter Poincarétransformationen ihre Form — im Gegensatz zur Coulomb-Eichbedingung $(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0)$.

(iv) Für e.m. Potentiale, die die Lorentz-Eichbedingung erfüllen, lauten die inhomogenen Maxwellgleichungen

$$\Box A_\mu = j_\mu , \qquad (6.66)$$

mit der Lösung

$$A_\mu(x) = \int d^4y \, D_{ret}(x-y)\, j_\mu(y). \qquad (6.67)$$

Nun versuchen wir, die Gesetze der klassischen Mechanik den Einsteinschen Postulaten der speziellen

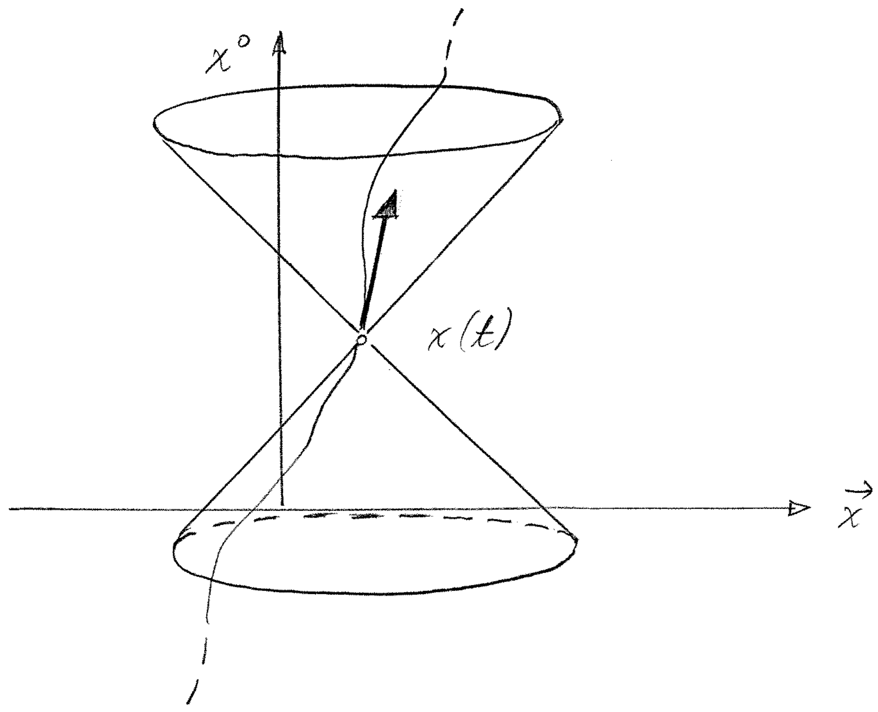
Relativitätstheorie anzupassen (Einstein 1905).

Relativistische Mechanik.

Die Bewegung eines Punktteilchens kann durch seine Weltlinie im M^4, parametrisiert z.B. durch die Koordinatenzeit t, beschrieben werden:

$$\left(x^\mu(t)\right) = \left(x^0(t) = ct, \vec{x}(t)\right) \qquad (6.68)$$

Die Bewegungsrichtung eines massiven Punktteilchens soll in jedem Punkt $x(t)$ seiner Bahn in dass Innere des Vorwärtslichtkegels über $x(t)$ hineinzeigen:



Statt durch t ist es zweckmässiger, die Bahn durch die <u>invariante Eigenzeit</u>, τ, zu parametrisieren:

$$d\tau := \frac{ds}{c}, \quad (ds)^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \qquad (6.69)$$

Aus (6.68) folgt dann, dass

$$(ds)^2 = (c^2 - v^2)(dt)^2, \quad \text{mit } \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}. \qquad (6.70)$$

Also

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2}\; dt \qquad (6.71)$$

Im momentanen Ruhesystem des Teilchens misst $d\tau$ tatsächlich das <u>Zeitinkrement</u>, was aus (6.34) Lorentz Trsf. folgt. Nur wenn

$$v = |\vec{v}| < c, \quad \forall t, \qquad (6.72)$$

kann das Teilchen in jedem Zeitpunkt durch eine Lorentztransformation auf Ruhe transformiert werden. Es wird sich herausstellen, dass die Bedingung (6.72) mit den Bewegungsgleichungen eines geladenen Punktteilchens im äusseren e.m. Feld kompatibel ist. In (6.71) wählt man stets das positive Vorzeichen der Wurzel. Somit gilt

$$\mathrm{sign}(d\tau) = \mathrm{sign}(dt),$$

und

$$d\tilde{\tau} = \mathrm{sign}(\Lambda^0{}_0)\, d\tau \qquad (6.73)$$

Nun definiert man die Vierervektoren

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{(c, \vec{v})}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (6.74)$$

(Vierergeschwindigkeit)

und

$$p^\mu := m u^\mu = \frac{(mc, m\vec{v})}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (6.75)$$

wo m die Masse des Teilchens in seinem Ruhesystem, d.h. seine <u>Lorentz-invariante</u> Masse ist. Es gilt dann

$$\tilde{p}^\mu = \mathrm{sign}(\Lambda^0{}_0)\, \Lambda^\mu{}_\nu\, p^\nu, \qquad (6.76)$$

woraus u.A. folgt, dass stets

$$p^0 > 0 \qquad (6.77)$$

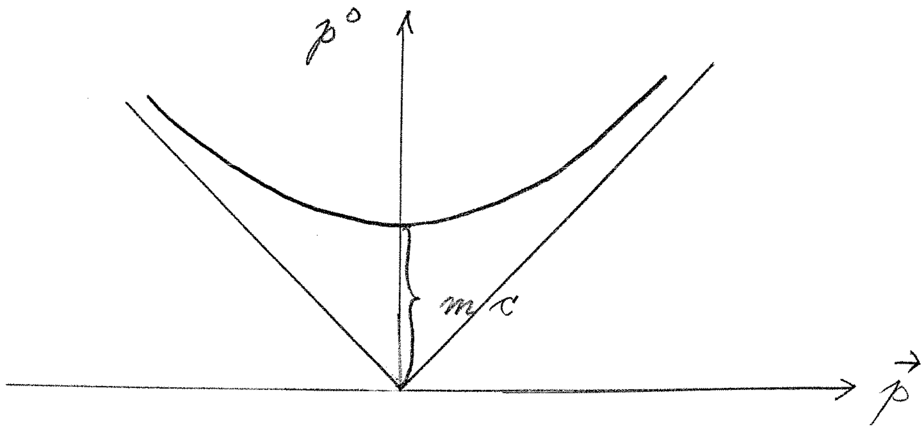
ist. Aus der Definition von ds folgt, dass

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dx}{ds}\right) = 1,$$

und daher, mit (6.69):

$$(u,u) = c^2, \quad (p,p) = m^2c^2, \qquad (6.78)$$

d.h. der Viererimpuls p liegt auf einem durch die Masse m des Teilchens bestimmten, sog. <u>"Massenhyperboloid"</u> im Inneren des Vorwärtslichtkegels im Impulsraum:



Aus (6.78) folgt, dass $\frac{d}{d\tau}(u,u) = 2(u,a) = 0$ und

$$\frac{d}{d\tau}(p,p) = 2\left(p, \frac{dp}{d\tau}\right) = 0, \qquad (6.79)$$

d.h. die Viererkraft $f := \frac{dp}{d\tau}$ muss stets <u>senkrecht</u> (bez. η) zu p sein!

Bewegungsgln. geladener Teilchen im e.m. Feld.

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^{\mu\nu}(x) p_\nu \,, \qquad (6.80)$$

wo

$$p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} \qquad (6.81)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau}(p,p) = 2\, p_\mu \frac{dp^\mu}{d\tau} \overset{(1)}{=} \frac{2e}{mc} F^{\mu\nu}(x) p_\mu p_\nu$$

$$= 0 \,, \quad \text{da } F \text{ schiefsymm. ist!}$$

Dies ist konsistent mit

$$(p,p) = m^2c^2 = \text{konstant; siehe } (6.79).$$

Trennung zeitlicher und räumlicher Komponenten:

0-Komponente.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = e\,\vec{E}\cdot\vec{v} \qquad (6.82)$$

räuml. Komponenten

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\wedge\vec{B}\right) \qquad (6.83)$$

(6.82) folgt aus (6.83) & (6.79): Aus (6.79) folgt

$$\frac{d}{dt}(p,p) = 2\left(p, \frac{dp}{dt}\right) = 0.$$

Daher

$$c\,\frac{dp^0}{dt} = \frac{c}{p^0}\,\vec{p}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) \overset{(6.83)}{=} e\,\vec{v}\cdot\vec{E},$$

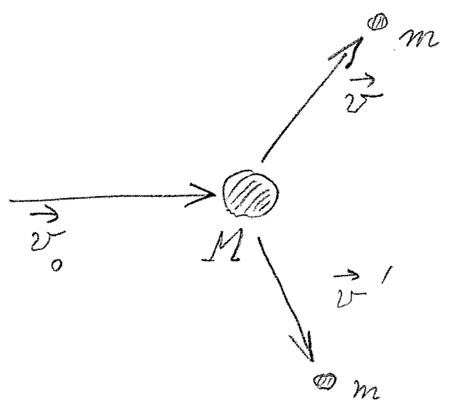
also (6.82).

$$c\,p^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \text{relat. kinetische Energie.} \tag{6.84}$$

Energie - Impulssatz in Stossprozessen:

$$p_{tot} = \text{konstant.} \tag{6.85}$$

<u>Beispiel.</u> Symmetrischer Zerfall



Es gelten die Erhaltungssätze

$$\frac{Mc^2}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} = 2\,\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

und

$$\frac{M\vec{v}_0}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m\vec{v}\,'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Speziell für $\vec{v}_0 = 0$:

$$2m = M\sqrt{1-v^2/c^2} < M$$

$\Rightarrow$ Totale Masse in relativistischen Stossprozessen <u>nicht</u> erhalten!

Kompliziertere Stossprozesse und Mandelstam Variablen werden in den Übungen besprochen. Beispiel: <u>Compton Effekt</u>; (Stoss zwischen Elektron und Photon. Photon = neutrales Teilchen mit $m=0$; Bahn eines Photons = Lichtstrahl, d.h. Strahl auf Lichtkegel).

<u>Lagrange'sche Formulierung der relativistischen Mechanik.</u>

Seien Φ und $\vec{A}$ das skalare, resp. Vektorpotential eines äusseren e.m. Feldes $(\vec{E}, \vec{B})$. Betrachten ein Punktteilchen, das sich in diesem Felde bewegt. Die Bewegungsgleichungen (6.80) lassen sich aus einem Hamilton'schen Variationsprinzip mit Lagrange Funktion

$$L(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) = -mc^2\sqrt{1-\dot{x}^2/c^2} - e\left(\Phi(\vec{x},t) - \frac{\dot{\vec{x}}}{c}\cdot\vec{A}(\vec{x},t)\right) \quad (6.86)$$

herleiten. L selbst ist nicht Lorentz-invariant; hingegen ist

$$L\,dt = \frac{L}{\sqrt{1-\dot{x}^2/c^2}}\,d\tau = -\left(mc^2 + \frac{e}{c}(u,A)\right)d\tau$$

Lorentz-invariant, und das <u>Hamilton'sche Variationsprinzip</u> für die Teilchenbahn $\vec{x}(t)$ lautet

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} d\tau\left(mc^2 + \frac{e}{c}\left(\frac{dx}{d\tau},A\right)\right) = 0, \qquad (6.87)$$

wo x_1 und x_2 feste Punkte im Minkowskiraum M^4 sind.

Die Euler-Lagrange Gleichungen, mit t als Kurvenparameter und $\delta\vec{x}_i(t)=0$, $i=1,2$, lauten:

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0, \quad k = 1,2,3, \tag{6.88}$$

also

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\,\dot{x}^k}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial t} + \sum_l \frac{\partial A_k}{\partial x^l}\,\dot{x}^l\right)$$

$$= -e\,\frac{\partial \Phi}{\partial x^k} + \frac{e}{c}\sum_l \frac{\partial A_l}{\partial x^k}\,\dot{x}^l, \tag{6.89}$$

und das ist Gleichung (6.83)!

Die kanonischen Impulse sind

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = \frac{m\,\dot{x}_k}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}A_k.$$

Wenn L nicht explizit von t abhängt, gilt der

<u>Energiesatz</u>:

$$H = \dot{x}^k p_k - L = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\,\Phi(\vec{x}) = \text{konst.} \tag{6.90}$$

auf jeder Lösung der Bewegungsgln..

Das Variationsprinzip (6.87) gilt für <u>beliebige</u> <u>Kurvenparameter</u>: Es sei $x(\lambda)$ die Weltlinie eines Teilchens im Minkowskiraum, wo λ den Kurvenparameter bezeichnet. Dann gilt

$$d\tau = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}, \frac{dx}{d\lambda}\right)} \, \frac{d\lambda}{c} , \quad \text{und}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{d\lambda}{d\tau} \, \frac{dx}{d\lambda} , \quad \text{wo} \quad \frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}, \frac{dx}{d\lambda}\right)}} .$$

Damit wird aus (6.87):

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} d\lambda \left(mc \sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}, \frac{dx}{d\lambda}\right)} + \frac{e}{c} \left(\frac{dx}{d\lambda}, A\right)\right) = 0 ,$$

mit den Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{d\lambda}\left(mc \, \frac{\frac{dx^\mu}{d\lambda}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}, \frac{\partial x}{d\lambda}\right)}}\right) + \frac{e}{c} \, \frac{dx^\nu}{d\lambda} \, \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$$

$$- \frac{e}{c} \, \frac{\partial x^\nu}{d\lambda} \, \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} = 0$$

Falls λ die Eigenzeit τ ist, dann ist

$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}, \frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)} = c$, und wir finden

$$\frac{d}{dt} p^\mu = \frac{e}{c} F^{\mu\nu}(x)\, u,$$

was (1) reproduziert!

Unter Eichtransformationen ändert sich die Lagrangedichte L in (6.86) wie folgt:

$$L \to L + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial \chi}{\partial t} + \dot{\vec{x}}\, \vec{\nabla}\chi\right) = L + \frac{e}{c}\frac{d\chi}{dt}, \quad (6.9$$

was bekanntlich an den Euler-Lagrange Gln. nichts ändert!

7. Die Erhaltungssätze der Elektrodynamik.

(a) Ladungserhaltung.

Die Materieverteilung sei so gewählt, dass der Viererstrom $j^\mu(x)$ rasch abfällt, wenn x in raumartigen Richtungen nach ∞ strebt.

In einem Inertialsystem mit Koordinaten x^μ definieren wir die Gesamtladung Q zur Zeit t durch

$$Q_t = \int_{x^0 = ct} d^3x \, j^0(\vec{x}, t). \tag{1}$$

Seien $\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ die Koordinaten eines Lorentztransformierten Inertialsystems, und

$$\bar{Q}_t = \int_{\bar{x}^0 = ct} d^3\bar{x} \, \bar{j}^0(\vec{\bar{x}}, t)$$

die Ladung in diesem neuen Inertialsystem.

<u>Satz.</u> $\bar{Q}_t = Q_{t'}$, unabhängig von t und t', für alle Λ und a.

<u>Beweis.</u> Es sei $d\sigma_\mu(x)$ die μ-Komponente des Normalenvektors zu einer dreidimensionalen Integrationshyperfläche Σ. Für $\Sigma \equiv \Sigma_{t'} = \{x^0 = ct'\}$ ist

$$Q_{t'} = \int_{\Sigma_{t'}} d\sigma_\mu(x) j^\mu(x).$$

Genauso gilt

$$\bar{Q}_t = \int_{\bar{\Sigma}_t} d\bar{\sigma}_\mu(\bar{x}) \bar{j}^\mu(\bar{x})$$

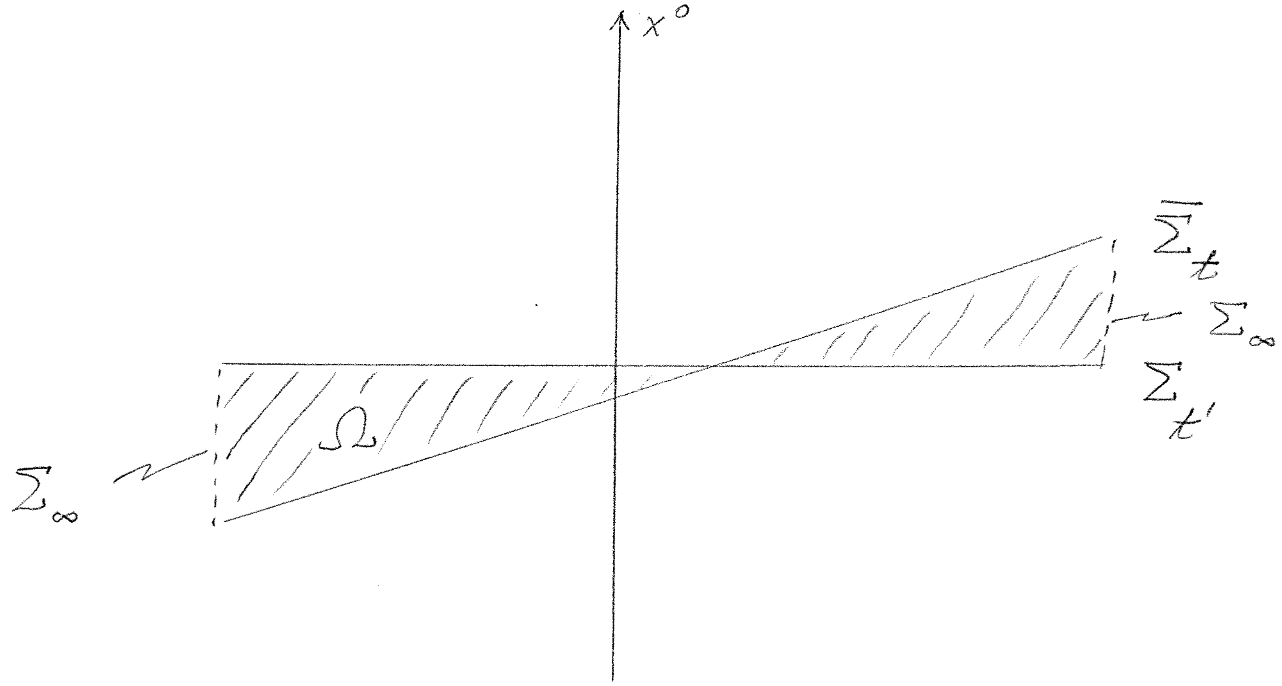
Im Inertialsystem mit Koordinaten x^μ ist

$$\bar{\Sigma}_t = \{x^\mu : \Lambda^0{}_\nu x^\nu + a^0 = ct\}$$

was auch eine dreidimensionale Fläche beschreibt.

Da $d\sigma_\mu$ ein Lorentzvektorfeld ist, gilt

$$\bar{Q}_t = \int_{\bar{\Sigma}_t} d\sigma_\mu(x) j^\mu(x).$$



Wir nehmen an, Λ sei eine eigentliche, orthochrone Lorentztransformation; (unter Zeitumkehr ist die Invarianz von Q_t trivial). Dann gilt

$$\partial\Omega = \overline{\Sigma}_t \cup \Sigma_{t'}^- \cup \Sigma_\infty,$$

wo $\Sigma_{t'}^-$ die Hyperfläche $\Sigma_{t'}$ mit umgekehrter Orientierung bezeichnet. Darum finden wir, dass

$$\overline{Q}_t - Q_{t'} = \int_{\partial\Omega} d\sigma_\mu(x)\, j^\mu(x) - \int_{\Sigma_\infty} d\sigma_\mu(x)\, j^\mu(x)$$

$$\overset{\text{Gauss}}{=} \int_\Omega d^4x\, (\partial_\mu j^\mu)(x) - \int_{\Sigma_\infty} d\sigma_\mu(x)\, j^\mu(x)$$

Da $\partial_\mu j^\mu = 0$ (Kontinuitätsgl.) und $j^\mu(x)$ rasch nach 0 abfällt, wenn x ins raumartig Unendliche strebt, folgt, dass die rechte Seite verschwindet.

Q.E.D.

Generalize to general surfaces

(b) Energie-Impuls Erhaltung.

Wir definieren den Energie-Impulstensor

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(F^\mu{}_\sigma F^{\sigma\nu} - \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\sigma\rho} g^{\mu\nu}\right)$$

Es gilt

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}, \quad T^\mu{}_\mu = 0,$$

T ist homogen vom Grad 2 in $\vec{E}$ und $\vec{B}$.

Aus den Maxwellgln. folgt, dass

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = - F^{\mu\nu} j_\nu \equiv - f^\mu \qquad (2)$$

Denn

$$(F_{\mu\sigma} F^{\sigma\nu})_{,\nu} = \underbrace{F_{\mu\sigma,\nu} F^{\sigma\nu}}_{G_\mu} + \underbrace{F_{\mu\sigma} F^{\sigma\nu}{}_{,\nu}}_{H_\mu}$$

Die homogenen Maxwellgln. lauten

$$F_{\mu\sigma,\nu} + F_{\nu\mu,\sigma} + F_{\sigma\nu,\mu} = 0,$$

und daher

$$G_\mu = -F_{\sigma\nu,\mu} F^{\sigma\nu} - F_{\nu\mu,\sigma} F^{\sigma\nu}$$

$$= F_{\nu\sigma,\mu} F^{\sigma\nu} - F_{\mu\nu,\sigma} F^{\nu\sigma} = F_{\nu\sigma,\mu} F^{\sigma\nu} - F_{\mu\sigma,\nu} F^{\sigma\nu}$$

$$= \frac{1}{2}\left(F_{\nu\sigma} F^{\sigma\nu}\right)_{,\mu} - G_\mu,$$

also

$$G_\mu = \frac{1}{4}\left(F_{\nu\sigma} F^{\sigma\nu}\right)_{,\mu},$$

und mit den inhomogenen Maxwellgln.,

$$F^{\mu\nu}{}_{,\mu} = j^\nu,$$

findet man

$$H_\mu = - F_{\mu\sigma} j^\sigma.$$

Damit folgt:

$$T_\mu{}^\nu{}_{,\nu} = H_\mu = - F_{\mu\sigma} j^\sigma.$$

In den Feldern $\vec{E}, \vec{B}$ ist

$$T^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}(\vec{E}^2+\vec{B}^2) & \vec{E}\wedge\vec{B} \\ \hline \vec{E}\wedge\vec{B} & T_{ik} \end{array}\right), \tag{3}$$

wo $T_{ik} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2+\vec{B}^2)\delta_{ik} - E_i E_k - B_i B_k$; (Komponenten des <u>Maxwell'schen Spannungstensors</u>).

Weiter ist

$$(f^\mu) = \left(\vec{j}\cdot\vec{E},\ \rho\vec{E} + \vec{j}\wedge\vec{B}\right). \tag{4}$$

Sei Ω ein Gebiet im Raum. Dann folgt aus (2) und dem Satz von Gauss, dass

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_\Omega d^3x\, T^{\mu 0} = -\int_{\partial\Omega}\sum_{k=1}^{3} T^{\mu k}\, d\sigma_k - \int_\Omega d^3x\, f^\mu. \tag{5}$$

Die Gln. (6.82) und (6.83) aus Abschnitt 6 zeigen, dass f der pro <u>Zeiteinheit</u> vom e.m. Feld auf die geladene Materie in Ω übertragene Viererimpuls ist.

Die Gl. (5) legt deshalb die folgende <u>Interpretation</u> nahe:

$\frac{1}{c} T^{\mu 0} =$ μ- Komponente der Viererimpulsdichte des e.m. Feldes

$\sum_{k=1}^{3} T^{ik} d\sigma_k =$ i-Komponente der Kraft, die das e.m. Feld auf das Oberflächenelement $d\vec{\sigma}$ ausübt.

$\hookrightarrow \sum_{k=1}^{3} T^{\mu k} d\sigma_k =$ μ- Komponente des Impulsstroms durch $d\vec{\sigma}$.

Spezialfälle von (5):

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} d^3x \, T^{00} = - \int_{\partial\Omega} \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} - \int_{\Omega} d^3x \; c\vec{j} \cdot \vec{E}, \quad (6)$$

(Energiesatz)

wo $T^{00} \equiv U = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$ die <u>Energiedichte</u> des e.m. Feldes und $\vec{S} = c\,(\vec{E} \wedge \vec{B})$ der <u>Poynting Vektor</u> sind.

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\Omega} d^3x \, \frac{1}{c^2} S_k}_{k\text{-Komponente des Impulses des e.m. Feldes in } \Omega} = - \int_{\partial\Omega} T_{k\ell} \, d\sigma_\ell - \int_{\Omega} d^3x \left(\rho E_k + (\vec{j} \wedge \vec{B})_k\right). \quad (7)$$

Spezialfälle.

(i) E. m. Feld im materiefreien Raum

Falls e. m. Feld im ∞ rasch genug abfällt, dann kann der 4^{er} Impuls des e. m. Feldes durch

$$P^\mu(t) := \int_{x^0 = ct} d^3x \, \frac{1}{c} T^{\mu 0}(x) \tag{8}$$

definiert werden, und aus $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ folgt:

$$\frac{d}{dt} P^\mu(t) = 0, \tag{9}$$

und P^μ transformiert unter Lorentz-Transformationen gemäss

$$\tilde{P}^\mu = \text{sig}(\Lambda^0{}_0) \, \Lambda^\mu{}_\alpha P^\alpha \tag{10}$$

Der Beweis von (10) ist ganz ähnlich dem Beweis des Satzes $(\tilde{Q} = Q)$ in (a) (Ladungserhaltung).

Für Wellenpakete (gebildet aus ebenen

Wellen), die in einem Wellenvektor $\vec{k}$ "gepeakt" sind (im ∞ aber rasch abfallen), finden wir

$$|\vec{P}| \simeq \frac{P^0}{c},$$

d.h. $(P^0)^2 - (c\vec{P})^2 = 0$, genau wie für Teilchen der Ruhemasse 0; ($\nearrow$ Photonenhypothese von Einstein).

(ii) <u>Maxwellsche Spannungen auf Leiter:</u>

Übungen!

(c) <u>Drehimpulserhaltung</u>

Für ein Punktteilchen im Ereignis x mit 4er Impuls p definiert man den Drehimpuls durch

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - p^\mu x^\nu,$$

insb.

$$M^{ik} = \varepsilon^{ikl} \underbrace{(\vec{x} \wedge \vec{p})_l}_{\vec{L}}$$

Für das e.m. Feld definieren wir den <u>Drehimpuls-tensor</u> durch

$$\Theta^{\mu\nu\sigma}(x) := x^\mu T^{\nu\sigma}(x) - x^\nu T^{\mu\sigma}(x) \qquad (11)$$

Da $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ und $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -\frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu =: -f^\mu$

folgt, dass

$$\Theta^{\mu\nu\sigma}{}_{,\sigma} = -\left(x^\mu f^\nu - x^\nu f^\mu\right). \qquad (12)$$

Denn

$$\Theta^{\mu\nu\sigma}{}_{,\sigma} = \left(x^\mu T^{\nu\sigma}\right)_{,\sigma} - \left(x^\nu T^{\mu\sigma}\right)_{,\sigma}$$

$$= \left(\underline{\delta^\mu_\sigma T^{\nu\sigma}} + x^\mu T^{\nu\sigma}{}_{,\sigma}\right) - \left(\underline{\delta^\nu_\sigma T^{\mu\sigma}} + x^\nu T^{\mu\sigma}{}_{,\sigma}\right)$$

$$= -\left(x^\mu f^\nu - x^\nu f^\mu\right).$$

In integrierter Form, mit Gauss:

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega d^3x \, \frac{1}{c} \, \Theta^{\mu\nu 0}(x) = -\int_{\partial\Omega} \sum_{k=1}^{3} \Theta^{\mu\nu k}(x) \, d\sigma_k(x)$$

$$- \int_\Omega d^3x \left(x^\mu f^\nu(x) - x^\nu f^\mu(x)\right) \qquad (13)$$

Gl. (13) motiviert die Interpretation:

$$\int_\Omega d^3x \left(x^i f^j(x) - x^j f^i(x) \right) =$$ ij - Komp. des Gesamtdrehmomentes der vom e.m. Feld auf die Materie in $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ausgeübten Kräfte.

$$\frac{1}{c}\,\Theta^{\mu\nu 0} =$$ $\mu\nu$ - Komp. der Drehimpulsdichte des e.m. Feldes

$$\sum_{k=1}^{3} \Theta^{\mu\nu k}\, d\sigma_k =$$ $\mu\nu$ - Komp. des Drehimpulsstroms durch Oberflächenelement $d\vec{\sigma}$

Für das e.m. Feld im materiefreien Raum folgt:

$$\Theta^{\mu\nu\sigma}{}_{,\sigma} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \int_{x^0 = ct} d^3x\; \Theta^{\mu\nu 0}$$

ist erhalten und transformiert unter Lorentztransformationen wie ein (Pseudo) Tensor 2. Stufe.