6. Spezielle Relativitätstheorie, relativistische Elektrodynamik und Mechanik.

In dieser Vorlesung werden Gravitationskräfte vernachlässigt. Der Grund ist, dass in irdischen Experimenten bescheidener Ausdehnung d, d ≪ Erdradius, das Gravitationsfeld einfach als homogenes Beschleunigungsfeld beschrieben werden kann und die gravitationellen Wechselwirkungen zwischen materiellen Teilchen, wie Elektronen und Protonen, im Vergleich zu den elektromagnetischen vernachlässigbar klein sind: Für den Quotienten der gravitostatischen zu den elektrostatischen Kräften zwischen zwei Protonen gilt:

$$\frac{G_N\, m^2_{Proton}}{e^2} \approx 10^{-36}.$$

Wenn man auf eine geometrische Beschreibung der Gravitationskräfte, wie sie die allgemeine Relativitätstheorie zustande bringt, verzichtet, kann man zunächst davon ausgehen, daß der drei-dimensionale Euklidische Raum, $\mathbb{E}^3$, ein gutes Modell für den physikalischen Raum ist, und die reelle Zahlengerade ein gutes Modell für die Zeitachse darstellt. Daraus resultiert das Modell der Raum-Zeit, das der Newtonschen Mechanik zugrunde liegt.

Will man allerdings der Mechanik und der Elektrodynamik ein <u>gemeinsames</u>

Modell der Raum-Zeit zugrunde legen, das den Begriff gleichförmig zueinander bewegter Inertialsysteme, in denen alle mechanischen und elektromagnetischen Gesetze dieselbe Form haben, zulässt, so zwingen sich revolutionäre Modifikationen des Newtonschen Raum-Zeit Modells auf, die nun besprochen werden sollen. Es ist das Verdienst Poincarés, Minkowskis und in erster Linie Einsteins, ein neues Modell der Raum-Zeit gefunden zu haben, das den eben formulierten Anforderungen dann genügt, wenn man die Gesetze der Newtonschen Mechanik im Bereich von Relativgeschwindigkeiten zwischen materiellen Körpern, die der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar sind, geeignet modifiziert.

Beginnen wir mit einer kurzen Revue des Newtonschen Raum-Zeit Begriffs. Legt man Einheiten von Länge (etwa m) und Zeit (etwa sec) fest so haben die Grössen

$|t_1 - t_2| =$ Zeitabstand zwischen zwei Ereignissen $(\vec{x}_1, t_1)$ und $(\vec{x}_2, t_2)$

$|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| =$ Raumabstand von zwei gleichzeitigen Ereignissen $(\vec{x}_1, t), (\vec{x}_2, t)$

eine <u>invariante</u> (absolute), nämlich vom benützten Bezugssystem unabhängige <u>Bedeutung.</u>

Verwenden wir kartesische Koordinatensysteme, so sind offenbar zwei durch die Transformationen

$$t' = \sigma t + \tau, \quad \sigma = \pm 1, \; \tau \in \mathbb{R} \tag{6.1}$$

$$\vec{x}\,' = R(t)\,\vec{x} + \vec{a}(t), \quad R(t) \in O(3), \; \vec{a}(t) \in \mathbb{R}^3, \tag{6.2}$$

verbundene solche Koordinatensysteme aequivalent. Die Newtonsche Mechanik sondert aus all diesen Koordinatensystemen die sog. Inertialsysteme aus, in denen die Bewegungsgleichungen für kräftefreie Punktteilchen die Form

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = 0 \tag{6.3}$$

haben. Aus (6.3) folgt, dass die Raum-Zeit Trajektorie eines kräftefreien Punktteilchens in einem beliebigen Inertialsystem eine Gerade ist. Die Raum-Zeit Transformationen, die ein beliebiges Inertialsystem in ein anderes

Inertialsystem überführen, sind die <u>Galilei-Transformationen</u>

$$t' = \sigma t + \tau, \qquad \sigma = \pm 1, \tau \in \mathbb{R}, \tag{6.5}$$

$$\vec{x}' = R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{a}, \quad R \in O(3); \vec{v}, \vec{a} \in \mathbb{R}^3. \tag{6.6}$$

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen eines autonomen mechanischen Systems im leeren Raum (näherungsweise etwa des Sonnensystems) lauten in jedem Inertialsystem gleich, behalten also unter den Transformationen (6.5) und (6.6) ihre Form bei; (Galileisches Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik).

Die Elektrodynamik verletzt das Galileische Relativitätsprinzip! Das Gesetz für Lichtausbreitung im Vakuum lautet wie folgt: Können zwei Ereignisse, $(\vec{x}_1, t_1)$ und $(\vec{x}_2, t_2)$, durch einen Lichtpuls verbunden werden, so muss gelten, dass

$$c^2(t_1 - t_2)^2 - |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 = 0, \qquad (6.7)$$

wo c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Sucht man nun nach einer Klasse von Koordinatensystemen, in denen alle Gesetze der Newtonschen Mechanik und der Maxwellschen Theorie die gleiche Form behalten, so sind zwei solche Koordinatensysteme durch eine Transformation (6.5), (6.6) mit

$$\vec{v} = 0 \qquad (6.8)$$

untereinander verbunden. Mechanik und ED zusammen würden also eine Klasse ruhender Bezugssysteme auszeichnen, was gut zu

Newtons Idee des absoluten Raums und der Aetherhypothese des 19. Jahrhunderts passt. Lorentz und Poincaré fanden allerdings schon eine grössere Klasse von relativ zu einander bewegten Bezugssystemen, in denen die Gesetze der Elektrodynamik im leeren Raum ihre Form behalten. Ausserdem konnten Michelson und Morley (1887) in Interferenzexperimenten mit Lichtwellen <u>keine</u> Relativbewegung der Erde zu einem hypothetischen Aether (vergleichbar der Erdatmosphäre, in der sich Schallwellen ausbreiten) nachweisen.

Einstein (1905) befreit sich von der ihm zutiefst unnatürlich erscheinenden Aetherhypothese (resp. der Hypothese eines absolut ruhenden

Raums) auf einfache, aber radikale Weise. Er verwirft die oben erwähnten Invarianten $|t_1 - t_2|$ und $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$, der klassischen Mechanik und setzt an ihre Stelle die folgenden zwei Postulate:

(1) Inertialsysteme sind durch das Trägheitsgesetz (6.3) für kräftefreie Punktteilchen u. Lichtstrahlen charakterisiert. In allen solchen Inertialsystemen gelte das Gesetz (6.7) für die Lichtausbreitung, wo c eine <u>universelle</u>, von der Bewegung von Beobachter (in $(\vec{x}_2, t_2)$) und Lichtquelle (in $(\vec{x}_1, t_1)$) <u>unabhängige</u> Konstante ist.

(2) Die Gesetze der Mechanik (die im Vergleich zu Newton zu modifizieren sind!)

und der Elektrodynamik lauten in allen Inertialsystemen gleich.

Aus diesen zwei Postulaten leitet sich das folgende <u>Programm</u> ab:

(i) Man bestimme die Gruppe derjenigen Transformationen zwischen Bezugssystemen, die (6.3) <u>und</u> (6.7) ihrer Form nach <u>invariant</u> lassen. ⟶ Gruppe der <u>Poincaré Transformationen</u>

(ii) Die Gesetze der Mechanik (und die Transformationen der elektrischen und magnetischen Felder) sind so zu bestimmen, dass sie und die Maxwell Gleichungen in allen Inertialsystemen die gleiche Form haben.

Insbesondere soll sich das von einer Lampe ausgesandte Licht für <u>irgendeinen</u> Beobachter, der sich relativ zur Lampe mit irgendeiner konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, als isotrope Kugelwelle mit Geschwindigkeit c (unabhängig vom Bewegungszustand von Lampe und Beobachter) ausbreiten. → Begriff der absoluten Gleichzeitigkeit verschiedener Ereignisse muss aufgegeben werden!

Für <u>Fernwirkungsgesetze</u>, wie das Newtonsche Gravitationsgesetz gibt es daher <u>keinen</u> Platz mehr. An ihre Stelle müssen <u>Feldwirkungsgesetze</u> treten. (Darauf hat auch Poincaré schon hingewiesen.) In dieser Vorlesung sollen die Feldwirkungsgesetze für geladene Punktteilchen in einem äusseren elektromagnetischen Feld formuliert werden.

Klassische, mathematisch konsistente Feldwirkungsgesetze für Systeme vieler miteinander wechselwirkender (Punkt-) Teilchen sind nicht bekannt.

Die klassische relativistische Mechanik ist eine "Kinematik", aber keine "Dynamik".

Poincaré Transformationen.

Einsteins Bild eines Inertialsystems: recht ✗ Gitterwerk von Meterstäben, mit idealen Uhren an jedem Knoten. (Beobachter ruht relativ zum Gitterwerk.)

In jedem solchen Inertialsystem sei die Raum–Zeit Trajektorie eines kräftefreien Punktteilchens eine Gerade,

$$g = \{ (\vec{x}, t) \mid \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}\, t \}, \qquad (6.9)$$

hier parametrisiert durch die Zeit t.

Diejenigen Transformationen, die Inertialsysteme in andere Inertialsysteme überführen, müssen also geradentreu sein.

Wir nehmen an, dass keine Ereignisse aus dem Endlichen ins Unendliche abgebildet werden. Dann müssen die Transformationen affin sein: Wir setzen $x^0 = ct$, $(x^\mu) = (x^0, \vec{x})$; dann muss gelten

$$\begin{aligned} \tilde{x}^\mu &= M^\mu{}_\nu\, x^\nu + a^\mu, \quad \text{oder} \\ \tilde{x} &= M\, x + a, \end{aligned} \qquad (6.10)$$

wo $\tilde{x}^\mu$, $\mu = 0,1,2,3$, die Koordinaten des Ereignisses $(x^0, \vec{x})$ in einem neuen Inertialsystem bedeuten. Der Richtungsvektor,

$v = x - y$, von einem Ereignis $(y^0; \vec{y})$ zu einem Ereignis $(x^0, \vec{x})$ transformiert sich homogen, also <u>linear</u>:

$$\tilde{v} = M v. \qquad (6.11)$$

Das Gesetz (6.7) für die Lichtausbreitung sagt dann, dass unter allen linearen Transformationen (6.11) nur diejenigen zugelassen sind, die den in y errichteten

<u>Lichtkegel</u>

$$\{x \mid (x^0 - y^0)^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2 = 0\} \qquad (6.12)$$

<u>invariant</u> lassen; (dabei ist $y \in \mathbb{R}^4$ beliebig). Der Begriff des <u>lichtartigen</u> Richtungsvektors, v, mit

$$(v^0)^2 - |\vec{v}|^2 = 0 \qquad (6.13)$$

soll offenbar unter zulässigen linearen

Transformationen <u>invariant</u> sein. Daraus folgt, dass diese eine <u>Gruppe</u>, $\mathcal{G}$, bilden.

Gl. (6.13) schreiben wir wie folgt:

$$(v,v) := \eta_{\mu\nu}\, v^\mu v^\nu = v^T \eta\, v = 0\,, \qquad (6.14)$$

mit

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \qquad (6.15)$$

Die Forderung, dass die Gl. (6.14) unter einer Transformation M, wie in (6.11), der Form nach erhalten bleiben soll, impliziert (Übungen!), dass

$$M^T \eta\, M = \lambda\, \eta\,, \qquad (6.16)$$

mit $\lambda = \lambda(M) > 0$. (Dass $\lambda > 0$, folgt aus dem Trägheitssatz für quadratische Formen, oder, <u>geometrisch</u>, daraus, dass für $\lambda < 0$ das Innere des Lichtkegels — ein nicht-zusammenhängendes Gebiet — mit dem Äusseren — einem zusammenhängenden Gebiet – vertauscht würde, was für <u>lineare</u> Transformationen unmöglich ist!)

Die Gruppe G der Transformationenen (6.11), (6.16) enthält als Untergruppe die reinen <u>Dilatationen</u> (Streckungen):

$$v \longmapsto \lambda v\,, \quad \lambda > 0,$$

$\forall v \in \mathbb{R}^4$. Da $\lambda > 0$, lässt sich jede Transformation M eindeutig in

$$M = \lambda(M)\Lambda\,, \quad \lambda(M) > 0\,, \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \qquad (6.17)$$

zerlegen. Die Transformationen

$$\{\Lambda \mid \Lambda \text{ linear, und } \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\} \qquad (6.18)$$

des $\mathbb{R}^4 \circlearrowleft$ bilden eine Gruppe, die man <u>Lorentz Gruppe</u> nennt. Da auch die Transformationen M in (6.17) eine

Gruppe bilden sollen, muss gelten, dass

$$\lambda(M_1)\,\lambda(M_2) = \lambda(M_1 M_2). \qquad (6.19)$$

Schliesst man "Querkontraktionen" (Gedankenexperiment mit Schienen und TGV's) aus — siehe Taylor & Wheeler, "Spacetime Physics" — so folgt dann, dass

$$\lambda(M) \equiv 1. \qquad (6.20)$$

Die Gruppe der affinen Transformationen (6.10), wo $M = \Lambda$ eine Lorentztransformation ist, die die Inertialsysteme der SRT untereinander verbinden, heisst <u>inhomogene Lorentz</u>- oder <u>Poincarégruppe</u>. Sie hat als einzige Invariante den "Lorentzabstand"

$$c^2(t_1 - t_2)^2 - |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2$$

zwischen zwei Ereignissen, $(\vec{x}_1, t_1)$ & $(\vec{x}_2, t_2)$, und gibt dem $\mathbb{R}^4$ eine <u>indefinite</u> (Lorentz-) <u>Metrik</u>, η, die in jedem Inertialsystem die Normalform (6.15) hat.

Eigenschaften der Lorentzgruppe.

Lorentzgruppe

$$L := \{\Lambda \mid \Lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \text{ linear}, \ \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\} \quad (6.21)$$

Daraus folgt sofort, dass

$$-1 = \det \eta = \det(\Lambda^T \eta \Lambda) = (\det \Lambda)^2 \det \eta ,$$

d.h.

$$\det \Lambda = \pm 1 \qquad (6.22)$$

Aus der Form (6.15) von η folgt

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{k=1}^{3} (\Lambda^k{}_0)^2 = 1,$$

also

$$\pm \Lambda^0{}_0 \geq 1. \qquad (6.23)$$

Aus (6.22) und (6.23) folgt, dass L in vier Zusammenhangskomponenten zerfällt:

$$L = L_+^\uparrow \cup L_-^\uparrow \cup L_+^\downarrow \cup L_-^\downarrow, \qquad (6.24)$$

mit $L_+^\uparrow = \{\Lambda \in L \mid \Lambda^0{}_0 \geq 1,\ \det\Lambda = 1\}$

$$L_-^\downarrow = T L_+^\uparrow, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_-^\uparrow = P L_+^\uparrow, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \qquad (6.25)$$

$$L_+^\downarrow = PT L_+^\uparrow, \quad PT = -\mathbb{1}.$$

Dabei bedeuten T die Zeitumkehr ($\sigma = -1$ in (6.5)) und P die Raumspiegelung.

Da jede Lorentztransformation das Innere des Lichtkegels $\overline{V} = \{v \mid v^T \eta v \geq 0\}$ in sich überführt, sind Vorwärtskegel

$$V_+ = \{v \mid v^T \eta v = 0,\ v^0 > 0\}$$

und Rückwärtskegel

$$V_- = \{v \mid v^T \eta v = 0,\ v^0 < 0\}$$

unter Lorentztransformationen entweder invarian
$({\Lambda^0}_0 \geq 1)$, oder sie werden vertauscht $({\Lambda^0}_0 \leq -1)$.
Es genügt nun, die Struktur von $L_+^\uparrow$ aufzuklären. Dann ist diejenige von L über (6.25) und (6.24) bekannt.

$L_+^\uparrow$ enthält als Untergruppe die

<u>eigentlichen Raumdrehungen</u>

$$\Lambda = \Lambda(R) := \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{array}\right), \quad R \in SO(3), \qquad (6.26)$$

wie man leicht sieht. Ausserdem enthält sie die abelsche Untergruppe der <u>"Boosts"</u> in der 1-Richtung des Inertialsystems:

$$\Lambda = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \qquad \text{mit}$$

$a \geq 1, \quad ad - bc = 1,$ und

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad a = \mathrm{Ch}\,\chi, \quad b = -\,\mathrm{Sh}\,\chi, \qquad (6.27)$$
$$c = -\mathrm{Sh}\,\chi, \quad d = \mathrm{Ch}\,\chi, \quad \chi \in \mathbb{R},$$

d.h.

$$\Lambda = \Lambda(\chi) := \left(\begin{array}{cc|cc} \mathrm{Ch}\,\chi & -\mathrm{Sh}\,\chi & 0 & 0 \\ -\mathrm{Sh}\,\chi & \mathrm{Ch}\,\chi & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (6.28)$$

Es gilt dann

$$\Lambda(\chi_1)\,\Lambda(\chi_2) = \Lambda(\chi_1 + \chi_2) \qquad (6.29)$$

(Additionstheorem der Geschwindigkeiten).

Man nennt χ die "<u>Rapidität</u>".

Es gilt der Satz

<u>Satz.</u> Jede Lorentztransformation $\Lambda \in L_+^\uparrow$ lässt sich als

$$\Lambda = \Lambda(R_1)\,\Lambda(\chi)\,\Lambda(R_2) \tag{6.30}$$

schreiben.

<u>Beweis.</u> Wir setzen $\tilde{x} = \Lambda x$, $x \in \mathbb{R}^4$, und definieren den Unterraum

$$\mathbb{R}^4 \supset N := \{x \mid x^0 = \tilde{x}^0 = 0\}. \tag{6.31}$$

(a) <u>$\dim N = 3$.</u> Dann müssen die zwei Gleichungen

$$x^0 = 0, \quad \tilde{x}^0 = 0$$

aequivalent sein. $\Longrightarrow$ $N = \{x \mid x^0 = 0\}$ muss daher unter Λ <u>invariant</u> sein.

$$\Longrightarrow \quad N^\perp := \{x \mid \vec{x} = 0\}$$

muss unter Λ ebenfalls invariant sein.

$$\Longrightarrow \quad \Lambda = \Lambda(R),$$

wie man leicht schliesst.

(b) <u>$\dim N = 2$.</u> Durch Drehungen der $\vec{x}$- und $\vec{\tilde{x}}$- Koordinaten kann man dann erreichen, dass N in beiden Systemen die $(2,3)$- Koordinatenebene ist, d.h.

$$N = \{x \mid x^0 = x^1 = 0 \Leftrightarrow \tilde{x}^0 = \tilde{x}^1 = 0\}.$$

Die von links und von rechts mit je einer Raumdrehung multiplizierte Lorentztransformation Λ lässt also die $(2,3)$- Ebene und ihr orthogonales Komplement (bez. η), d.h. die $(0,1)$- Ebene invariant.

$$\Longrightarrow \qquad \Lambda = \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & B \end{array}\right)$$

Da $\det \Lambda = (\det A) \cdot (\det B) = 1$ sein muss, folgt entweder

$$\det A = \det B = 1,$$

oder

$$\det A = \det B = -1.$$

Im ersten Fall ist Λ das Produkt eines

Boosts $\left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{array}\right)$ mit einer Drehung

$\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & B \end{array}\right)$ der $(2,3)$-Ebene.

Im zweiten Fall schreiben wir

$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AC & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{1}_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right),$$

mit $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, und die rechte Seite

ist ebenfalls wieder das Produkt eines Boosts

in 1-Richtung mit einer Raumdrehung.

Damit ist unser Satz, und insb. die Zerlegung (6.30), bewiesen. Schliesst man nun "Querkontraktionen" aus, so folgt dass

$$\lambda(M) = M\,\Lambda(M)^{-1} = 1 \text{ sein muss!}$$

Bedeutung der Boosts.

$$\tilde{x} = \Lambda(\chi)\,x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c\tilde{t} = ct\,\mathrm{Ch}\chi - x^1\,\mathrm{Sh}\chi\,, & \tilde{x}^2 = x^2 \\ \tilde{x}^1 = -ct\,\mathrm{Sh}\chi + x^1\,\mathrm{Ch}\chi\,, & \tilde{x}^3 = x^3 \end{cases} \qquad (6.32)$$

Sei p ein im neuen ($\sim$) System ruhender Punkt. Zu p gehört die Gerade

$$(c\tilde{t},\ \vec{\tilde{x}} = \text{const.})$$

von Ereignissen. Dieser Bahn von p entspricht im ursprünglichen Inertialsystem gemäss (6.32) die Bahn

$$x^1 = \tilde{x}^1(\mathrm{Ch}\chi)^{-1} + ct\,\mathrm{Th}\chi$$

$$x^2 = \tilde{x}^2 = \text{const.}, \quad x^3 = \tilde{x}^3 = \text{const.}$$

$\Rightarrow$ Das neue Inertialsystem bewegt sich relativ zum ursprünglichen mit konstanter Geschwindigkeit

$$v = c \, \mathrm{Th}\,\chi \qquad (6.33)$$

in 1-Richtung. Benützt man v statt χ als Gruppenparameter für Boosts in 1-Richtung, so findet man

$$\mathrm{Ch}\,\chi = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}, \quad \mathrm{Sh}\,\chi = \frac{v}{c}\left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

und

$$\tilde{t} = \frac{t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{\frac{v}{c^2}\, x^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$\tilde{x}^1 = \frac{x^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{v t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (6.34)$$

$$\tilde{x}^2 = x^2, \quad \tilde{x}^3 = x^3,$$

Formeln, die schon Lorentz bekannt waren.

Im Limes $c \to \infty$ gehen die Lorentz- in Galileitransformationen über. Für diese sind die Relativgeschwindigkeiten <u>additiv</u> unter Gruppenmultiplikation. Für Lorentztransformationen ist dagegen die <u>Rapidität</u> χ additiv, und daher addieren sich die Geschwindigkeiten, v_1 und v_2, zweier Boosts in 1-Richtung zu einer Geschwindigkeit v $(\neq v_1 + v_2)$, mit

$$v = c\,\mathrm{Th}(\chi_1+\chi_2) = c\,\frac{\mathrm{Th}\chi_1 + \mathrm{Th}\chi_2}{1+\mathrm{Th}\chi_1\,\mathrm{Th}\chi_2} = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}. \qquad (6.35)$$

Das ist das relativistische Additionsgesetz für Geschwindigkeiten. Da $\mathrm{Th}\chi < 1$, $|\chi| < \infty$, folgt, dass stets

$$|v| < c \qquad (6.36)$$

gilt.

Nach dieser Diskussion der Lorentz- und der Poincarégruppe wollen wir nun untersuchen wie sich z. B. das elektrische und das magnetische Feld unter Poincarétransformationen transformieren sollen.

Minkowski Raum-Zeit.

Wir vereinigen den physikalischen Raum und die Zeit, in Abwesenheit von Gravitationsfeldern, zur Minkowski Raum-Zeit, $\mathbb{M}^4$. Sie ist ein affiner Raum $\cong \mathbb{R}^4$, versehen mit der (indefiniten) Lorentz Metrik η. Jedem Paar (x, y) von Punkten, x und y, in $\mathbb{M}^4$ ordnet man den Richtungsvektor $V = x - y$ zu. Man kann ihn als einen Vektor im Tangentialraum, $T_y\mathbb{M}^4$, über dem Punkt y auffassen. Das Skalarprodukt zweier Vektoren V und W in $T_y\mathbb{M}^4$ ist durch

$$(V, W) \equiv V \cdot W := V^T \eta W, \qquad (6.37)$$

mit

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}, \qquad (6.38)$$

definiert. Ein <u>(kontravariantes) Vektorfeld</u>, X, ist durch eine Zuordnung eines Vektors $X(x)$ in $T_x M^4$ zu jedem Punkt $x \in M^4$ gegeben. Da M^4 offensichtlich ein parallelisierbarer Raum ist, gibt es einen natürlichen Begriff der Fernparallelität (von Vektoren in Tangentialräumen über <u>verschiedenen</u> Punkten von M^4). Daher ist es einfach, eine Richtungsableitung eines Vektorfeldes X zu definieren: Sei Y ein Vektorfeld über M^4. Dann definieren wir

$$(\nabla_Y X)^\mu(x) := \sum_{\nu=0}^{3} Y^\nu(x)\Big(\frac{\partial}{\partial x^\nu} X^\mu\Big)(x) \qquad (6.39)$$

Der Dualraum zu $T_x M^4$ wird <u>Kotangentialraum</u> genannt und mit $T_x^* M^4$ bezeichnet. Ein <u>kovariantes Vektorfeld</u>, auch Einsform genannt, ist eine Zuordnung einer Form $\alpha(x) \in T_x^* M^4$ zu jedem Punkt $x \in M^4$. Man definiert die Richtungsableitung eines kovarianten VF, α, in Richtung des Vektors $Y(x)$ im Punkte $x \in M^4$ durch

$$(\nabla_Y \alpha)_\mu (x) = \sum_{\nu=0}^{3} Y^\nu(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \alpha_\mu\right)(x) \quad (6.40)$$

Wie man die Metrik η und diese Richtungsableitungen von kartesischen Koordinaten in beliebige krummlinige Koordinaten umrechnet, entnehme der Leser dem Zusatzskript. Hier werden wir zunächst weiterhin nur kartesische Koordinatensysteme benützen.

Sei

$$\tilde{x} = \Lambda x + a$$

eine Poincarétransformation von M^4. Eine solche Transformation bestimmt eine Transformation von kontravarianten und kovarianten Vektorfeldern wie folgt: Sie bildet den Tangentialraum $T_x M^4$ über $x \in M^4$ linear in den Tangentialraum $T_{\tilde{x}} M^4$ über dem Bildpunkt $\tilde{x} = \Lambda x + a$ ab, und zwar durch

$$\tilde{X}(\tilde{x}) = \Lambda X(x), \qquad (6.41)$$

oder

$$\tilde{X}^\mu(\tilde{x}) = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu(x), \qquad (6.42)$$

(Einsteinsche Summationskonvention!) Kovariante Vektoren sind <u>Linearformen</u> über dem Vektorraum der kontravarianten Vektoren; d.h. zu $\alpha \in T^*_x M^4$, $X \in T_x M^4$ bildet man die Zahl

$$\alpha(X)(x) := \alpha_\mu(x) X^\mu(x); \qquad (6.43)$$

$\alpha(X)(\cdot)$ soll eine <u>Funktion</u> auf M^4 sein. Daraus ergibt sich die Forderung, dass

$$\tilde{\alpha}(\tilde{X})(\tilde{x}) = \alpha(X)(x), \qquad (6.44)$$

wenn $\tilde{x} = \Lambda x + a$ und $\tilde{X}(\tilde{x})$ wie in (6.41) definiert ist. Also

$$\tilde{\alpha}_\mu(\tilde{x})\,\tilde{X}^\mu(\tilde{x}) = \tilde{\alpha}_\mu(\tilde{x})\,\Lambda^\mu{}_\nu X^\nu(x)$$

$$\overset{!}{=} \alpha_\mu(x)\,X^\mu(x)$$

und damit

$$\alpha_\mu(x) = \Lambda^\nu{}_\mu\,\tilde{\alpha}_\nu(\tilde{x}),$$

oder

$$\tilde{\alpha}_\mu(\tilde{x}) = \left(\Lambda^{-1}\right)^{T\,\nu}{}_\mu\,\alpha_\nu(x) \qquad (6.45)$$

Nun gilt für Lorentztransformationen, Λ, dass

$$\Lambda^T\eta\,\Lambda = \eta \;\Rightarrow\; \left(\eta\,\Lambda^T\eta\right)\Lambda = \mathbb{1},$$

d.h.

$$\Lambda^{-1} = \eta\,\Lambda^T\eta\,,$$

und

$$\left(\Lambda^{-1}\right)^T = \eta\,\Lambda\,\eta \qquad (6.46)$$

Wir bezeichnen die Matrixelemente von $\left(\Lambda^{-1}\right)^T$ mit $\Lambda_\mu{}^\nu$, und es gilt dann, dass

$$\Lambda_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\lambda}\,\Lambda^\lambda{}_\kappa\,\eta^{\kappa\nu}, \qquad (6.47)$$

wo

$$\left(\eta^{\kappa\nu}\right) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ & 0 & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Ein p-fach kontravariantes, q-fach kovariantes Tensorfeld, T, wird als Zuordnung einer Linearform auf $(T_x^* M^4)^{\otimes p} \otimes (T_x M^4)^{\otimes q}$ zu jedem Punkt $x \in M^4$ definiert. D.h., wenn $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(p)}$ kovariante und $X^{(1)}, \dots, X^{(q)}$ kontravariante Vektorfelder sind, dann soll

$$T\left(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(p)}, X^{(1)}, \dots, X^{(q)}\right)(x)$$
$$= T^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_q}(x)\, \alpha^{(1)}_{\mu_1}(x) \cdots \alpha^{(p)}_{\mu_p}(x)\, X^{(1)\nu_1}(x) \cdots X^{(q)\nu_q}(x) \tag{6.48}$$

eine Funktion auf M^4 sein. Daraus folgt dann, dass

$$\tilde{T}^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_q}(\tilde{x}) = \Lambda^{\mu_1}{}_{\lambda_1} \cdots \Lambda^{\mu_p}{}_{\lambda_p} \Lambda_{\nu_1}{}^{\kappa_1} \cdots \Lambda_{\nu_q}{}^{\kappa_q}\, T^{\lambda_1 \dots \lambda_p}{}_{\kappa_1 \dots \kappa_q}(x) \tag{6.49}$$

als Transformationsgesetz der Komponenten von T unter Poincaré Transformationen gelten soll.

(Wenn Λ <u>nicht eigentlich</u>, d.h. $\det \Lambda = -1$, oder <u>nicht orthochron</u>, d.h. $\Lambda^0{}_0 \leq -1$, ist, dann können auf der rechten Seite Vorzeichen, $\det\Lambda$, resp. $\operatorname{sign}(\Lambda^0{}_0)$, auftreten $\rightarrow$ Pseudotensoren — analog zu Pseudovektoren und Pseudoskalaren.)

T wie in (6.48) wird auch ein "Tensorfeld der Stufe (p,q)" genannt.

Operationen auf Tensorfeldern.

(1) Tensorprodukt. Es seien T, S Tensorfelder der Stufen (p,q), resp. (r,s). Dann definiert man ein Tensorfeld $T\otimes S$ der Stufe $(p+r, q+s)$ durch

$$(T\otimes S)^{\mu_1\cdots\mu_p\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\nu_1\cdots\nu_q\kappa_1\cdots\kappa_s}(x) := T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q}(x)\, S^{\lambda_1\cdots\lambda_r}_{\kappa_1\cdots\kappa_s}(x). \tag{6.50}$$

(2) "Verjüngung" oder Spur. Wenn T ein Tensorfeld der Stufe $(p+1, q+1)$ ist, dann definieren

$$T^{\mu_1\cdots\mu\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\mu\cdots\nu_q}(x) \quad (\text{Summation über } \mu!)$$

die Komponenten eines Tensorfeldes der Stufe (p,q).

(3) <u>Rauf- und Runterziehen von Tensorindizes</u>

Sei T von der Stufe (p,q). Dann definieren

$$T^{\mu_1 \cdots \mu_p \mu_{p+1}}{}_{\nu_1 \cdots \nu_{q-1}} := \eta^{\mu_{p+1}\nu}\, T^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu \nu_1 \cdots \nu_{q-1}} \qquad (6.51)$$

die Komponenten eines Tensorfeldes der Stufe $(p+1, q-1)$.

(3') <u>Differentialformen</u>: Siehe Kap. I – Mechanik!

(4) <u>Differentiation von Tensorfeldern.</u> Es sei T ein Tensorfeld der Stufe (p,q). Dann definieren $\left(\partial_{\nu_1} T^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_2 \cdots \nu_{q+1}}\right)(x)$ die Komponenten eines Tensorfeldes der Stufe $(p, q+1)$. Denn

$$\tilde{\partial}_\nu = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\lambda} = (\Lambda^{-1})^\lambda{}_\nu \, \partial_\lambda$$

$$= \Lambda_\nu{}^\lambda \, \partial_\lambda . \qquad (6.52)$$

(5) Der d'Alembert Operator, $\Box$, ist durch

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = (\partial_0)^2 - \Delta, \qquad (6.53)$$

mit $\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu$, definiert und ist offensichtlich <u>invariant</u> unter Poincarétransformationen.

Zwei Beispiele x-unabhängiger Tensorfelder sind $\eta = (\eta_{\mu\nu}) = (\eta^{\mu\nu})$ und $\varepsilon = (\varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_4})$, wo $\varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_4} = \mathrm{sign}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{pmatrix}$.

Nun sind wir in der Lage, die Maxwellsche Theorie so zu formulieren, dass sie Einsteins Postulate erfüllt, d.h., dass sie in beliebigen Inertialsystemen die gleiche Form hat. Mit Poincaré (1905) fassen wir $\vec{E}$ und $\vec{B}$ als verschiedene Komponenten eines <u>antisymmetrischen Tensorfeldes der Stufe</u> (0,2), <u>den Feld(stärken)tensor</u>, auf:

$$F = (F_{\mu\nu}) := \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (6.54)$$

Ladungsdichte ρ und Stromdichte $\vec{j}$ fassen wir zu einem kovarianten Vektorfeld j, mit $(j_0, j_1, j_2, j_3) = (\rho, -\frac{1}{c}\vec{j})$ zusammen, das wie

$$\tilde{j}_\mu(\tilde{x}) = \operatorname{sign}(\Lambda^0{}_0)\, \Lambda_\mu{}^\nu j_\nu(x) \qquad (6.55)$$

transformiert. Man nennt j <u>Viererstromdichte.</u>

Nun lauten die <u>homogenen Maxwellgleichungen</u>

$$\partial_\sigma F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\mu F_{\nu\sigma} = 0, \qquad (6.56)$$

und die <u>inhomogenen Maxwellgln.</u>

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu \qquad (6.57)$$

Damit (6.57) auch unter nicht orthochronen Lorentztransformationen seine Form behält, müssen wir fordern, dass

$$\tilde{F}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \operatorname{sign}(\Lambda^0{}_0)\, \Lambda_\mu{}^\lambda \Lambda_\nu{}^\kappa F_{\lambda\kappa}(x) \qquad (6.58)$$

Unter Zeitumkehr, T, folgt dann, dass

$$(\vec{E}, \vec{B}, \rho, \vec{j}) \xrightarrow{T} (\vec{E}, -\vec{B}, \rho, -\vec{j}), \qquad (6.59)$$

wie es sein soll!

Wir schreiben (6.55) und (6.58) noch für den Spezialfall eines Boosts mit Geschwindigkeit v in der 1- Richtung explizite aus:

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho + \frac{v}{c^2} j_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} , \quad \tilde{j}_1 = \frac{j_1 + v\rho}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$\tilde{j}_2 = j_2 , \quad \tilde{j}_3 = j_3 ; \tag{6.60}$$

und

$$\tilde{E}_1 = E_1 , \quad \tilde{E}_2 = \frac{E_2 - \frac{v}{c} B_3}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} , \quad \tilde{E}_3 = \frac{E_3 + \frac{v}{c} B_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ,$$
$$\tilde{B}_1 = B_1 , \quad \tilde{B}_2 = \frac{B_2 + \frac{v}{c} E_3}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} , \quad \tilde{B}_3 = \frac{B_3 - \frac{v}{c} E_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \tag{6.61}$$

Wesentlich ist die Erkenntnis, dass die Aufspaltung des elektromagnetischen Feldes in ein elektrisches und ein magnetisches Feld vom Bezugssystem abhängt! Dass diese richtig ist, hat sich in unzähligen Experimenten (z. B. spektroskopischen) bestätigt.