3. Definitive Form der Maxwellgleichungen, Grundprobleme der Elektrodynamik.

Die Maxwellgleichungen in Integralform lauten:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{B}\cdot d\vec{\sigma} = 0\,, \quad \oint_{\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{\sigma}\,, \qquad (H)$$

siehe Gln. (2.37) und (2.26); und

$$\int_{\partial\Omega} \vec{D}\cdot d\vec{\sigma} = \int_{\Omega} \rho\, d^3x\,, \quad \oint_{\partial S} \vec{H}\cdot d\vec{s} = \int_S (\vec{j}_M + \dot{\vec{D}})\cdot d\vec{\sigma}\,, \qquad (I)$$

wo $\vec{j}_M$ die elektrische Stromdichte der Materie und $\dot{\vec{D}} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$ der Maxwell'sche Verschiebungsstrom sind. Weiter gelten die Verknüpfungsgleichungen (im Vakuum),

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}\,, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}\,, \qquad (V)$$

und das Kraftgesetz

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j}\wedge\vec{B}. \qquad (L)$$

Aus (I) folgt die Ladungserhaltung in der Form

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \rho\, d^3x = -\int_{\partial\Omega} \vec{j}_M\cdot d\vec{\sigma}\,; \quad (S=\partial\Omega,\ \partial S=\emptyset) \qquad (K)$$

Nun leiten wir aus (H) und (I) die Maxwellgleichungen in Differentialform und aus (K) die Kontinuitätsgleichung her. Dazu brauchen wir die Sätze von Gauss und Stokes.

weglassen!

Exkurs: Divergenz, Rotation, Gauss und Stokes.

Es seien $\vec{A}(\vec{x})$ ein einmal stetig differenzierbares Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand $\partial\Omega$, S eine beschränkte, stückweise glatte Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit stückweise glatte Rand ∂S; ("glatt" $\overset{\text{z.B.}}{=}$ C^∞).

$\mathbb{R}^3 \ni \vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$, (Komponenten von $\vec{x}$ in kartesischen Koordinaten).

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \vec{\nabla} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3), \quad (\cdot)^{\cdot} = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot)$$

$$\vec{A} = (A^1, A^2, A^3).$$

Divergenz von $\vec{A}$.

$$\operatorname{div} \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \sum_{i=1}^{3} \partial_i A^i. \tag{3.1}$$

Rotation von $\vec{A}$.

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} \equiv \mathrm{curl}\,\vec{A} \equiv \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$= \left(\partial_2 A^3 - \partial_3 A^2,\ \partial_3 A^1 - \partial_1 A^3,\ \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1\right)$$

$$= \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ A^1 & A^2 & A^3 \end{vmatrix} \qquad (3.2)$$

Falls φ ein Skalarfeld ist, so soll $\vec{\nabla}\varphi$ seinen Gradienten bezeichnen. Es gelten

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\varphi = 0, \qquad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0,$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}, \qquad \Delta \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}, \qquad (3.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{A}) = (\vec{\nabla}\varphi) \cdot \vec{A} + \varphi\, \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\varphi \vec{A}) = (\vec{\nabla}\varphi) \wedge \vec{A} + \varphi\, \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

etc.

Gauss.

$$\int_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\, d\mathrm{vol}, \qquad d\mathrm{vol} \equiv d^3x. \quad (3.4)$$

Stokes.

$$\oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_{S} (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{\sigma}. \qquad (3.5)$$

Green.

$$\int_{\partial\Omega} (\varphi \vec{\nabla} \psi) \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{\nabla} \psi) \, d\mathrm{vol} \qquad (3.6)$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) \, d\mathrm{vol} = \int_{\partial\Omega} (\varphi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \varphi) \cdot d\vec{\sigma} \, ; \qquad (3.7)$$

(folgen unmittelbar aus Gauss!).

Aus (H) folgen mit Gauss und Stokes:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \, , \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0 \qquad (HD)$$

und aus (I)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \, , \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = \vec{j}_M \qquad (ID)$$

Das sind die <u>Maxwellgleichungen in Differentialform</u>.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$: <u>keine</u> magnetischen Ladungen (oder Monopole).

$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0$: <u>keine</u> magnetischen Ströme

(V) und (L) gelten unverändert, und aus (K) wird mit Hilfe von Gauss:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_M = 0 . \qquad (KD)$$

Aus $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ folgt mit Hilfe des Lemmas von Poincaré, (Stokes):

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} \qquad (3.8)$$

Skizze!

Da $\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\chi = 0$ (1. Gl. in (3.3)), folgt, dass $\vec{A}$ durch $\vec{B}$ nur bis auf einen Gradienten bestimmt ist, d.h., für $\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\chi$ gilt auch, dass

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{A}' = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \vec{B}.$$

Faraday!

Setzt man (3.8) in die 2. Gleichung von (HD) ein, so folgt mit $\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\wedge(\cdot) = \vec{\nabla}\wedge\frac{\partial}{\partial t}(\cdot)$, dass

$$\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) = 0, \qquad (3.9)$$

und daraus folgt in bekannter Manier, dass

$$\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = -\vec{\nabla}\Phi, \qquad (3.10)$$

wo Φ ein Skalarfeld ist. Man nennt Φ das elektrostatische- und $\vec{A}$ das Vektorpotential.

Eichinvarianz der ED (Fock, Weyl 1918, 1927):

Setzt man

$$\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\chi, \quad \Phi' = \Phi + \frac{\partial}{\partial t}\chi \qquad (3.11)$$

wo χ ein beliebiges Skalarfeld ist, dann folgt

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}', \quad \text{und}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = -\vec{\nabla}\Phi' - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}'. \qquad (3.12)$$

<u>Die Rolle der Lichtgeschwindigkeit in der klassischen Elektrodynamik.</u>

Wir studieren nun die Maxwell Gleichungen und die Verknüpfungsgleichungen im <u>materiefreien</u> Raum, d.h. für $\rho = 0$, $\vec{j}_M = 0$. Wir haben, dass

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0\vec{H}. \qquad (3.13)$$

Aus der 2. Gl. in (HD) Faraday folgt durch Rotationsbildung

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) = 0 \qquad (3.14)$$

Nun folgt aus (3.13) und der 2. Gl. in (ID):

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) + \frac{\partial}{\partial t}\mu_0(\vec{\nabla}\wedge\vec{H})$$

$$= \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0 \qquad (3.15)$$

Aus (3.3) entnehmen wir, dass

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \Delta\vec{E}.$$

Aber aus der 1. Gl. in (ID) und (3.13) folgt

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho = 0 \,, \text{ im Vakuum.}$$

Damit folgt aus (3.15), dass

$$\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{E} = 0 \qquad (3.16)$$

Ebenso findet man, dass

$$\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{B} = 0. \qquad (3.17)$$

Das sind die Differentialgleichungen für <u>dispersionsfreie Wellen</u> mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \qquad (3.18)$$

Die Experimente von <u>Kohlrausch</u> und <u>Weber</u> (1856) ergaben

$$\mu_0 = 4\pi\,10^{-7}\ \text{Joule}/A^2 m$$

(genauer Wert ist gesetzliche Konvention zur Definition des Ampère!) und

$$\varepsilon_0 \mu_0 \approx \frac{1}{9} 10^{-16} \frac{\sec^2}{m^2}$$

Also ist

$$\boxed{c \approx 3 \times 10^8 \frac{m}{\sec} \approx \text{Lichtgeschwindigkeit}} \qquad (3.19)$$

Es war schon bekannt, dass Licht aus <u>transversal polarisierten</u> Wellen besteht, (Wellenoptik). Nun gilt wegen (HD) und $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho = 0$, dass

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \qquad (3.20)$$

d.h. die durch (3.16) und (3.17) beschriebenen Wellen sind <u>transversal</u> polarisiert.

$\Rightarrow$ <u>Maxwell:</u> Licht besteht aus elektromagnetischen Wellen, und $1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \equiv$ Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Lichtgeschwindigkeit, c, (unabhängig von elektro- und magnetostatischen Versuchen) aus <u>Fizeau'schem Versuch</u> bekannt.

Definitive Form der Maxwell'schen Gleichungen.

Alte Grössen: $\rho_a, \vec{j}_a, \vec{D}_a, \vec{E}_a, \vec{B}_a, \vec{H}_a, (\varepsilon_0)_a, (\mu_0)_a$.

Neue Grössen: $\rho, \vec{j}, \vec{D}, \vec{E}, \vec{B}, \vec{H}, \varepsilon_0, \mu_0,$

definiert durch:

$$\vec{D} = \vec{D}_a, \quad \rho = \rho_a, \quad \vec{H} = \frac{1}{c}\vec{H}_a, \quad \vec{j} = \frac{1}{c}\vec{j}_a, \qquad (3.21)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{D} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{D}_a = \frac{(\varepsilon_0)_a}{\varepsilon_0}\vec{E}_a. \qquad (3.22)$$

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} = \frac{\mu_0}{c}\vec{H}_a = \frac{\mu_0}{(\mu_0)_a}\frac{1}{c}\vec{B}_a. \qquad (3.23)$$

Mit (3.21) wird aus (ID)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho, \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = \vec{j} \qquad (3.24)$$

und aus (HD)

$$0 = \vec{\nabla}\wedge\vec{E}_a + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_a = \frac{\varepsilon_0}{(\varepsilon_0)_a}\vec{\nabla}\wedge\vec{E} + c\,\frac{(\mu_0)_a}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B},$$

oder

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} + c\,\frac{(\varepsilon_0)_a(\mu_0)_a}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0,$$

oder

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0, \quad \text{falls } \varepsilon_0\mu_0 = 1, \qquad (3.25)$$

und schliesslich

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 .$$

Wir werden von nun an "mechanische Einheiten" benützen: $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$ (vorläufig), [Strom] und [Ladung] über Ampère'sches, resp. Coulomb'sches Gesetz auf mechanische Dimensionen zurückführen.

Dann lauten die Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \qquad (3.26)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho, \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = \vec{j}, \qquad (3.27)$$

$$\vec{D} = \vec{E}, \quad \vec{B} = \vec{H} \qquad \text{(im Vakuum)} \qquad (3.28)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \qquad (3.29)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}, \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \qquad (3.30)$$

mit der Invarianz unter Eichtransformationen

$$\vec{A} \mapsto \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\chi, \quad \Phi \mapsto \Phi' = \Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi \qquad (3.31)$$

Grundprobleme der Elektrodynamik.

Lösen der Gleichungen (3.26) – (3.28), allenfalls zusammen mit

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}. \qquad (3.32)$$

Spezialfälle:

(1) ρ zeitunabhängig, $\vec{j} = 0$, $\vec{B}$ zeitunabh.

$\Rightarrow$ $\vec{A}$ kann zeitunabhängig gewählt werden.

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = -\Delta \Phi = \rho \qquad (3.33)$$

muss gelöst werden. Das ist die Poisson Gleichung (Poisson, 1812). Die Lösung von (3.33) in Abwesenheit von Leitern ist

$$\Phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \qquad (3.34)$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{D}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{x}). \qquad (3.35)$$

$\boxed{\text{Elektrostatik}}$

(2) $\rho = 0$, $\vec{j}$ zeitunabhängig, $\vec{B}, \vec{E}$ zeitunabhängig $\Rightarrow$ $\vec{A}$ kann zeitunabhängig gewählt werden. Dann folgt aus (3.27) und (3.30) (mit (3.3))

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \vec{j}. \tag{3.36}$$

Die Lösung dieser Gleichung für vorgegebenen Strom $\vec{j}$ stellt das Grundproblem der

$$\boxed{\text{Magnetostatik}}$$

dar. Wir behaupten nun, dass $\vec{A}$ so gewählt werden kann, dass

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \text{(Coulomb Eichung)} \tag{3.37}$$

Denn, sei $\vec{A}^*$ eine Lösung von (3.36). Wir setzen

$$\vec{A} = \vec{A}^* - \vec{\nabla} \chi,$$

und wählen χ so, dass

$$0 \stackrel{!}{=} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}^* - \Delta \chi,$$

also

$$\chi(\vec{x}) = -\int d^3x' \, \frac{(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}^*)(\vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|}. \tag{3.38}$$

In der Coulomb Eichung wird aus (3.36)

$$-\Delta \vec{A} = \vec{j}, \qquad (3.39)$$

mit der Lösung

$$\vec{A}(\vec{x}) = \int d^3x' \, \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|}. \qquad (3.40)$$

Da wegen (3.29)

$$0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

folgt aus (3.40) durch partielle Integration, dass

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0,$$

d.h. die Coulomb Eichbedingung (3.37) ist erfüllt!

Ergänzungen zu (1) und (2) folgen in späteren Abschnitten und in den Übungen.

(3) $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$, $\vec{E}, \vec{B}$ zeitabhängig

$\Rightarrow$ Maxwell Gln. werden zu

$$\Box \vec{E} = 0, \quad \Box \vec{B} = 0, \qquad (3.41)$$

wo
$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \, , \qquad (3.42)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \, , \qquad (3.43)$$

und
$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \, . \qquad (3.44)$$

Man kann zur Lösung die Potentiale Φ und $\vec{A}$ benützen. Damit sind die homogenen Maxwellgleichungen gelöst, und die inhomogenen Maxwellgln. ergeben

$$-\Delta\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \qquad (3.45)$$

und
$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\Phi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = 0 \qquad (3.46)$$

Durch Eichtransformation können wir erreichen, dass die Lösungen von (3.45) und (3.46) die Coulomb-Eichbedingung $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ erfüllen; (siehe (3.38)). Dann wird aus (3.45)

$$\Delta\Phi = 0 \qquad (3.47)$$

mit der Lösung $\Phi = 0$, falls $\Phi(\vec{x}) \to 0$,

für $|\vec{x}| \to \infty$, und aus (3.46) wird

$$\Box \vec{A} = 0 , \quad \text{mit} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 . \tag{3.48}$$

Die allgemeine Lösung zu (3.48) wird im nächsten Abschnitt konstruiert.

(4) ρ und j beliebig vorgegeben: Auflösen der Maxwellgln. nach $\vec{E}$ und $\vec{B}$ → Abschnitt 5!

(5) Einfache Modelle der Materie: ρ und $\vec{j}$ aus $\vec{E}$ und $\vec{B}$ über Modelle der Materie (QM!), Lösung der gekoppelten Gleichungen für die Materie und das elektromagnetische Feld (Maxwellgln.) → Abschnitte 8, 11 und 12!

(6) Lösung von (5) im Spezialfall, wo keine "wahren" Ströme und Ladungen vorhanden sind: <u>Optik</u> → Abschnitte 10, 13!

---

4. Das elektromagnetische Feld im materiefreien Raum.

In diesem Abschnitt studieren wir die Ausbreitung von e.m. Wellen im materiefreien Raum (Vakuum). Die Maxwellgln. lauten dann

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0, \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}=0,$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0, \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}=0. \tag{4.1}$$

Die einfachsten Lösungen dieser Gleichungen sind die <u>ebenen Wellen</u>

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{\varepsilon}(\vec{n}\cdot\vec{x}-ct), \quad \vec{B}(\vec{x},t)=\vec{n}\wedge\vec{E}(\vec{x},t) \tag{4.2}$$

Sie sind charakterisiert durch einen Einheitsvektor $\vec{n}$, mit $|\vec{n}|=1$, und eine beliebige zu $\vec{n}$ orthogonale, vektorwertige Funktion $\vec{\varepsilon}$ einer Variablen. Die Transversalitätsbedingung

$$\vec{\varepsilon}\,(\cdot)\perp\vec{n} \tag{4.3}$$

garantiert, dass die Gleichungen $\operatorname{div}\vec{E}=\operatorname{div}\vec{B}=0$ gelöst sind.

Man verifiziert, dass $\vec{\varepsilon}(\vec{n}\cdot\vec{x}-ct)$ die Wellengl.

$$\Box \vec{E} = 0$$

löst, und $\vec{B}(\vec{x},t) = \vec{n} \wedge \vec{E}(\vec{x},t)$ stellt sicher, dass das Induktionsgesetz erfüllt ist.

In einer ebenen Welle (4.2) im Vakuum bilden die Vektoren $(\vec{E},\vec{B},\vec{n})$ ein orthogonales Rechtskreuz, und $|\vec{E}(\vec{x},t)| = |\vec{B}(\vec{x},t)|$.

Energie- und Impulsdichte des e.m. Feldes.

Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit, c, von e.m. Feldern endlich ist, können Energie und Impuls von einer Quelle durch die e.m. Felder nicht instantan auf materielle Teilchen übertragen werden. Energie- und Impulserhaltungssätze können daher nur gelten, wenn das e.m. Feld selber Energie und Impuls trägt; (Ähnliches gilt für den Drehimpuls). Aus der Identität

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) \qquad (4.4)$$

(Spatprodukt inv. unter zykl. Vertauschung) und den Maxwellgln. (3.26) und (3.27) erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{2}\left(\vec{E}^{\,2}+\vec{B}^{2}\right)+\;c\,\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\wedge\vec{B}\right)+\vec{j}\cdot\vec{E}=0 \quad (4.5)$$

Denn

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{2}\left(\vec{E}^{2}+\vec{B}^{2}\right)=\;\vec{E}\,\dot{\vec{E}}+\vec{B}\cdot\dot{\vec{B}}$$

$$\overset{(3.26),\,(3.27)}{=} c\,\vec{E}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}-\frac{\vec{j}}{c}\right)-c\,\vec{B}\cdot\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}\right)$$

$$\overset{(4.4)}{=}\;-c\,\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\wedge\vec{B}\right)-\vec{j}\cdot\vec{E}\,,\quad \text{also } (4.5).$$

Aus (4.5) folgt der Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}U(\vec{x},t)\,d^3x=-\int_{\partial\Omega}\vec{S}(\vec{x},t)\cdot d\vec{\sigma}(\vec{x})-\int_{\Omega}(\vec{j}\cdot\vec{E})(\vec{x},t)\,d^3x \quad (4.6)$$

wo

$U=\frac{1}{2}\left(\vec{E}^{2}+\vec{B}^{2}\right)=$ Energiedichte des e.m. Feldes;

$\vec{S}=c\left(\vec{E}\wedge\vec{B}\right)=$ Energiestrom-(Impuls-)dichte des e.m. Feldes, "Poynting Vektor";

$\vec{j}\cdot\vec{E}=$ Leistung des elektrischen Feldes an der Materie.

(Wegen der Form der Lorentzkraft, siehe (3.32), leistet $\vec{B}$ an der Materie keine Arbeit.)

Im materiefreien Raum folgt aus (4.6), dass

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3} U(\vec{x},t)\, d^3x = 0, \qquad (4.7)$$

falls $\vec{E}$ und $\vec{B}$ im Unendlichen hinreichend rasch verschwinden, d.h. die Feldenergie

$$E = \int_{\mathbb{R}^3} U(\vec{x},t)\, d^3x \qquad (4.8)$$

ist im Vakuum konstant (unabh. von t!).

Nun berechnen wir den Poynting Vektor für ebene Wellen im Vakuum. Aus (4.2) folgt:

$$\vec{S} = c\,(\vec{E}\wedge\vec{B}) = c\,|\vec{E}|^2\vec{n} = c\,|\vec{B}|^2\vec{n}, \qquad (4.9)$$

d.h. der Energiestrom fliesst in Richtung von $\vec{n}$.

Spezialfall der monochromatischen Wellen:

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{\mathcal{E}}(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad \vec{B}(\vec{x},t) = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\wedge\vec{E}(\vec{x},t), \qquad (4.10)$$

wo $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$ $\quad (|\vec{n}| = 1,\ \lambda = \text{Wellenlänge})$

der Wellenvektor ist, $k \equiv |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$ die Wellenzahl, ω die Kreisfrequenz der Welle, und $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + i\vec{\varepsilon}_2$ ein beliebiger, komplexer Vektor $\perp$ zu $\vec{k}$:

$$\vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}(\vec{k}) = 0. \tag{4.11}$$

Physikalische $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder bekommen wir aus (4.10) durch Bildung des Real- resp. Imaginärteiles. Da die Maxwellgln. <u>linear</u> sind, sind sie sowohl für Real- als auch Imaginärteil von (4.10) erfüllt (Superpositionsprinzip).

Die <u>Polarisation</u> der monochromatischen Welle (4.10) wird beschrieben durch die Bahn von $\mathrm{Re}\,\vec{E}$ in einem festen Raumpunkt $\vec{x}$ in der Ebene $\perp$ zu $\vec{k}$:

$$\mathrm{Re}\,\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{\varepsilon}_1 \cos(\omega t + \theta) + \vec{\varepsilon}_2 \sin(\omega t + \theta), \tag{4.12}$$

wo $\theta = \vec{k} \cdot \vec{x}$.

Man unterscheidet zwischen

(i) <u>linearer Polarisation</u> : $\vec{\mathcal{E}}_1 \parallel \vec{\mathcal{E}}_2$, und

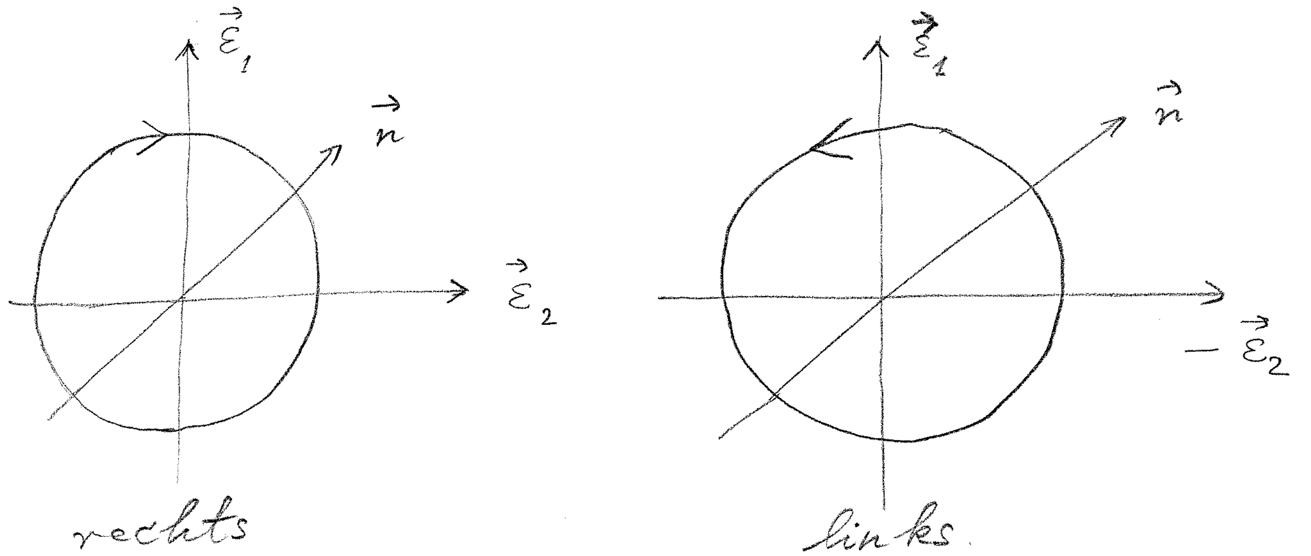
(ii) <u>zirkulärer Polarisation:</u> $\vec{\mathcal{E}}_1 \perp \vec{\mathcal{E}}_2$, mit $|\vec{\mathcal{E}}_1| = |\vec{\mathcal{E}}_2|$

Im zweiten Fall gilt:

$$\vec{\mathcal{E}}_2 = \pm \; \vec{n} \wedge \vec{\mathcal{E}}_1$$

rechts-zirkulär
links-zirkulär

(betrachtet in Fortplanzungsrichtung)



Durch Wahl einer Basis in der Ebene $\perp$ zu $\vec{k}$ kann jede monochromatische Welle als Superposition zweier linear polarisierter oder zwei zirkulär polarisierter Wellen dargestellt werden. Sei $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ eine solche Basis, mit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$, wo

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \equiv \overline{\vec{a}} \cdot \vec{b} = (\vec{a}_1 - i\vec{a}_2) \cdot (\vec{b}_1 + i\vec{b}_2).$$

Dann ist

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_1 \vec{e}_1 + \mathcal{E}_2 \vec{e}_2, \quad \text{mit} \quad \mathcal{E}_i = (\vec{e}_i, \vec{\mathcal{E}}). \qquad (4.13)$$

(i) Sei $\vec{e}_1 = \vec{n}_1$, $\vec{e}_2 = \vec{n}_2$, wo $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n} \equiv \frac{\vec{k}}{k}\}$ eine reelle, orthonormierte, positiv-orientierte Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Dann ist (4.13) die Zerlegung in zwei zueinander senkrecht linear polarisierte Wellen.

(ii) $\vec{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{n}_1 \pm i\vec{n}_2)$. Dann ist (4.13) die Zerlegung in eine rechts-(+) und links- (−) zirkulär polarisierte Welle.

<u>Verhalten unter Drehungen um $\vec{n}$-Achse:</u>

$$\vec{e}_1{}' = \cos\varphi\, \vec{e}_1 - \sin\varphi\, \vec{e}_2$$
$$\vec{e}_2{}' = \sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_\pm{}' = e^{\pm i\varphi} \vec{e}_\pm, \qquad (4.14)$$

φ = Drehwinkel um Achse $\vec{n}$.

Helizität = Eigenwert einer infinitesimalen Rechtsdrehung um $\vec{n}$

$\Rightarrow$ Helizität von $\vec{e}_\pm = \pm 1$;

Photonen haben Helizität (Eigendrehimpuls od. Spin in $\vec{k}$-Richtung) ± 1!

<u>Intensität und Stokes Parameter.</u>

Aus (4.9) ← Ausdruck für $\vec{S}$ findet man mit (4.12) ← monochrom. Welle, dass

$$|\vec{S}(\vec{x},t)| = c\left(|\vec{\mathcal{E}}_1|^2\cos^2(\omega t+\theta) + |\vec{\mathcal{E}}_2|^2\sin^2(\omega t+\theta)\right.$$
$$\left. + \vec{\mathcal{E}}_1\cdot\vec{\mathcal{E}}_2 \sin 2(\omega t+\theta)\right). \qquad (4.14')$$

Die <u>Intensität</u> I der Welle wird als <u>Zeitmittel</u> von $|\vec{S}(\vec{x},t)|$ definiert. Dann folgt aus (4.14'), dass

$$I = \frac{c}{2}\left(|\vec{\mathcal{E}}_1|^2 + |\vec{\mathcal{E}}_2|^2\right) = \frac{c}{2}\left(\vec{\mathcal{E}}_1, \vec{\mathcal{E}}\right)$$
$$= \frac{c}{2}\left(|\mathcal{E}_1|^2 + |\mathcal{E}_2|^2\right) = \frac{c}{2}\left(|\mathcal{E}_+|^2 + |\mathcal{E}_-|^2\right), \qquad (4.15)$$

d.h. I ist für irgendeine Zerlegung von $\vec{\mathcal{E}}$ nach einer orthonormierten Polarisationsbasis <u>additiv</u> in den Absolutquadraten der Amplituden.

Wir benützen nun die Basis $\{\vec{e}_+, \vec{e}_-\}$ und definieren die <u>Stokes Parameter</u> (1852) wie folgt:

$$\mathcal{E}_{\pm} = (\vec{e}_{\pm}, \vec{\mathcal{E}}) \equiv a_{\pm}\, e^{i\delta_{\pm}} . \qquad (4.16)$$

$$\begin{aligned}
s_0 &= \frac{2}{c} I = a_+^2 + a_-^2 \\
s_1 &= 2\,\mathrm{Re}(\overline{\mathcal{E}}_+ \mathcal{E}_-) = 2a_+ a_- \cos(\delta_- - \delta_+) \\
s_2 &= 2\,\mathrm{Im}(\overline{\mathcal{E}}_+ \mathcal{E}_-) = 2a_+ a_- \sin(\delta_- - \delta_+) \\
s_3 &= |\mathcal{E}_+|^2 - |\mathcal{E}_-|^2 = a_+^2 - a_-^2 .
\end{aligned} \qquad (4.17)$$

Also: $s_0 \propto$ Intensität der Welle; $s_1, s_2 \rightarrow$ Phasen δ_+ und δ_-; $s_3 \rightarrow$ Differenz der Intensitäten von rechts- und links zirkulär polarisierter Welle.

Man beachte, dass

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \qquad (4.18)$$

Messung der Stokes'schen Parameter:

s_0 aus Intensitätsmessungen

s_1, s_2 aus Experimenten mit Polarisator;

(Fresnel'sche Formeln, Abschnitt 10).

Herstellung monochromatischer Wellen: <u>Laser.</u>

Werden monochromatische Wellen superponiert, und definiert man die Stokes'schen Parameter durch Mittelung von (4.17), so gilt

$$s_0^2 \geq s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$$

(mit $=$, falls Welle monochromatisch ist). Für natürliches Licht gilt $s_1 \approx s_2 \approx s_3 \approx 0$.

Allgemeine Lösung der Maxwellgln. im Vakuum.

Die allgemeine Lösung der Maxwellgln. im Vakuum findet man durch Superposition monochromatischer Wellen (Fourieranalyse). Es ist nützlich, mit den Potentialen Φ und $\vec{A}$ in der Coulomb-Eichung zu rechnen (Abschnitt 3, Gln. (3.37), (3.47)):

$$\Phi = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 . \qquad (4.19)$$

Die Bewegungsgl. für $\vec{A}$ ist dann

$$\Box \vec{A} = 0 , \qquad (4.20)$$

siehe (3.48). Alle Lösungen von (4.19) und (4.20) sind von der Form

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=\pm} \int \Big\{ a_\lambda(\vec{k})\,\vec{e}_\lambda(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

$$+ a_\lambda^*(\vec{k})\,\vec{e}_\lambda(\vec{k})^*\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \Big\} \frac{d^3k}{\sqrt{2k}}, \tag{4.21}$$

wo $\omega = ck = c|\vec{k}|$, und $z^* \equiv \bar{z}$, für $z \in \mathbb{C}$.

Mit (3.30) finden wir

$$\vec{E}(\vec{x},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{x},t)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=\pm} \int \Big\{ i\, a_\lambda(\vec{k})\,\vec{e}_\lambda(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

$$- i\, a_\lambda^*(\vec{k})\,\vec{e}_\lambda(\vec{k})^*\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \Big\} \sqrt{\frac{k}{2}}\, d^3k \tag{4.22}$$

$$\vec{B}(\vec{x},t) = (\vec{\nabla}\wedge\vec{A})(\vec{x},t) = \cdots\cdot \tag{4.23}$$

Lösung des Anfangswertproblems.

Wir wollen die Maxwellglн. im Vakuum für zu einer festen Zeit $t_0 \overset{e.g.}{=} 0$ vorgegebenen e.m. Felder $\vec{E}(\vec{x},0)$, $\vec{B}(\vec{x},0)$ lösen.

<u>Satz.</u> Seien $\vec{E}_0(\vec{x})$ und $\vec{B}_0(\vec{x})$ vorgegeben. Dann haben die Maxwellgln. im Vakuum eine eindeutige Lösung $\vec{E}(\vec{x},t)$, $\vec{B}(\vec{x},t)$, mit $\vec{E}(\vec{x},0) = \vec{E}_0(\vec{x})$ und $\vec{B}(\vec{x},0) = \vec{B}_0(\vec{x})$.

<u>Beweis der Eindeutigkeit.</u>

Seien $(\vec{E}', \vec{B}')$ und $(\vec{E}'', \vec{B}'')$ zwei solche Lösungen. Dann ist wegen der Linearität der Maxwell Gln. auch

$$(\tilde{\vec{E}}, \tilde{\vec{B}}) \equiv (\vec{E}' - \vec{E}'', \vec{B}' - \vec{B}'')$$

eine Lösung der Maxwellgln. zur Anfangsbedingung $\tilde{\vec{E}}(\vec{x},0) = 0$, $\tilde{\vec{B}}(\vec{x},0) = 0$. Also gilt:

$$E(\tilde{\vec{E}}, \tilde{\vec{B}}, t) = \frac{1}{2} \int \left\{ \tilde{\vec{E}}^2(\vec{x},t) + \tilde{\vec{B}}^2(\vec{x},t) \right\} d^3x$$

erfüllt $E(\tilde{\vec{E}}, \tilde{\vec{B}}, t=0) = 0$. Da nach (4.7) $E(\tilde{\vec{E}}, \tilde{\vec{B}}, t)$ unabhängig von t ist, gilt

$$E(\tilde{\vec{E}}, \tilde{\vec{B}}, t) = 0, \quad \forall t.$$

Daraus folgt, dass $\tilde{\vec{E}}(\vec{x},t)$, $\tilde{\vec{B}}(\vec{x},t) \equiv 0$.

Q.E.D.

Beweis der Existenz mit Hilfe von Fourier Transf..

Aus (4.22) und (4.23) und den Anfangsbedingungen $\vec{E}(\vec{x},0) = \vec{E}_0(\vec{x})$ und $\vec{B}(\vec{x},0) = \vec{B}_0(\vec{x})$ finden wir mit Hilfe der Eichbedingung $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ $\vec{A}(\vec{x},0)$ und $\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{x},0)$. Daraus bestimmt man mit inverser Fouriertransformation $a_\lambda(\vec{k})$, für $\lambda = \pm$ und alle $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$. Die $a_\lambda(\vec{k})$'s setzt man nun in (4.21) – (4.23) ein, und die Lösung ist gefunden!

Für Studenten ohne Kenntnisse der Fourieranalyse bringen wir nun einen zweiten, sehr expliziten Beweis, der das <u>Hughens'sche Prinzip</u> schön illustriert.

Beweis der Existenz mit Hilfe von Distributionslösungen

Wir wollen die Wellenglн.,

$$\square \vec{E}(\vec{x},t) = \square \vec{B}(\vec{x},t) = 0, \qquad (4.24)$$

zu den Anfangsbedingungen $\vec{E}(\vec{x},0) = \vec{E}_0(\vec{x})$ und $\vec{B}(\vec{x},0) = \vec{B}_0(\vec{x})$ lösen. Nebst (4.24) gelten die Maxwellgln.

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \vec{B} = 0 \, , \quad \text{und} \tag{4.25}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \, , \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \tag{4.26}$$

Die Anfangsbedg. $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$ haben also die Nebenbedingungen $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{B}_0 = 0$ (Transversalität) zu erfüllen. Aus (4.26) folgt, dass bei Vorgabe von $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$ auch $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(\vec{x},0) = c\,\vec{\nabla}\wedge\vec{B}_0(\vec{x})$ und $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{x},0) = -c\,\vec{\nabla}\wedge\vec{E}_0(\vec{x})$ bestimmt sind. Weiter folgt aus (4.26), dass

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = c\,\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right) = 0 \, , \quad \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0. \tag{4.27}$$

Also $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{x},t)$ und $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{x},t)$ sind <u>unabh.</u> von t!

Es folgt, dass $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_0(\vec{x}) = 0$ und $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{x},t) = \vec{\nabla}\cdot\vec{B}_0(\vec{x}) = 0, \ \forall t$.

Unser Problem, die Gln. (4.24) – (4.26) zu lösen, reduziert sich daher auf das folgende: Man löse die Wellengleichung

$$\Box\, u(\vec{x},t) = 0 \qquad (4.28)$$

zu beliebigen Anfangsbedingungen (Cauchy Daten)

$$u(\vec{x},0) = \varphi(\vec{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},0) = \psi(\vec{x}). \qquad (4.29)$$

Inspiriert durch das <u>Hughens'sche Prinzip</u> suchen wir zunächst die allgemeine <u>kugelsymmetrische</u> Lösung von (4.28):

$$u(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi r} f(r,t), \quad r = |\vec{x}|. \qquad (4.30)$$

Der Laplace Operator in sphärischen Polarkoordinaten r, θ, φ, lautet

$$\Delta \cdot = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\,\cdot\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\,\cdot\right)$$

$$+ \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,\cdot \qquad (4.31)$$

Einsetzen von (4.30) in (4.28) und Benützen von (4.31) führt auf die Gleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 0, \qquad 0 \le r < \infty. \qquad (4.32)$$

Denn $\quad \Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$, und

$$\Delta\left(\frac{1}{4\pi r} f(r,t)\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\left(-\frac{1}{4\pi r^2} f + \frac{1}{4\pi r} f'\right)\right)$$

$$= -\cancel{\frac{1}{4\pi r^2} f'} + \cancel{\frac{1}{4\pi r^2} f'} + \frac{1}{4\pi r} f'' \; !$$

Die allgemeine Lösung von (4.32) ist

$$f(r,t) = g(ct-r) + h(ct+r). \qquad (4.33)$$

Da $u(\vec{x},t)$ bei $r=0$ regulär sein soll, muss gelten:

$$0 = f(0,t) = g(ct) + h(ct) \Rightarrow h = -g\,!$$

Die allgemeine, kugelsymmetrische Lösung von (4.28) ist daher

$$u(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi r}\left[g(ct-r) - g(ct+r)\right], \qquad (4.34)$$

wo g eine beliebige Funktion auf $\mathbb{R}$ ist. Eine spezielle Lösung dieser Form ist die Distributionslösung

$$D(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi r}\left[\delta(ct-r) - \delta(ct+r)\right]. \qquad (4.35)$$

Sie löst das Anfangswertproblem zu

$$D(\vec{x},0) = 0\,, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}(\vec{x},0) = \delta(\vec{x}). \qquad (4.36)$$

<u>Beweis von (4.36):</u> $D(\vec{x},t)$ ist eine temperierte Distribution in $\vec{x}$. Sei $f(\vec{x}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ eine <u>Testfunktion</u>, (d.h. eine beliebig oft differenzierbare Funktion, die, zusammen mit allen Ableitungen, schneller als jede Potenz von $|\vec{x}|^{-1}$ abfällt, wenn $|\vec{x}| \to \infty$). Dann gilt

$$D(f,t) := \int d^3x \; D(\vec{x},t) f(\vec{x})$$

$$\overset{(4.35)}{=} \frac{ct}{4\pi} \int_{S^2} f(c|t|\vec{n}) \, |d\vec{\sigma}_{\vec{n}}|, \quad (|\vec{n}| = 1)$$

wo S^2 die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ ist. Offensichtlich ist $D(f,t)$ glatt und ungerade in t, so dass

$$\frac{d^n}{dt^n} D(f,t)\Big|_{t=0} = 0, \quad n = 0, 2, 4, \cdots. \qquad (4.37)$$

Für die erste Ableitung nach t erhalten wir:

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} D(f,t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f(0) \, |d\vec{\sigma}| = f(0). \quad (4.38)$$

(4.37) und (4.38) beweisen (4.36)!

Mit Hilfe von (4.35) und dem Superpositionsprinzip können wir nun das allgemeine Anfangswertproblem (4.28), (4.29) lösen: Die Lösung ist

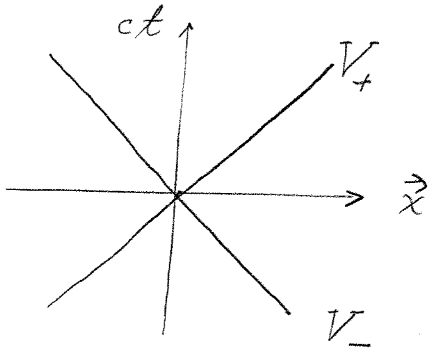
$$u(\vec{x},t) = \int d^3y \left[\frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}(\vec{x}-\vec{y},t)\,\varphi(\vec{y}) + D(\vec{x}-\vec{y},t)\,\frac{1}{c}\,\psi(\vec{y}) \right] \qquad (4.39)$$

Da u eine Superposition von Kugelwellen ist, löst u die Wellengl. (4.28), und (4.29) ist aufgrund von (4.36) erfüllt! Integrieren wir in (4.39) die δ-Funktionen in D aus, so erhalten wir:

$$u(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t}\left(t \int_{S^2} \varphi(\vec{x}+c|t|\vec{n})\,|d\vec{\sigma}_{\vec{n}}| \right) + \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} \psi(\vec{x}+c|t|\vec{n})\,|d\vec{\sigma}_{\vec{n}}| \qquad (4.40)$$

Man verifiziert ohne Mühe (Übung), dass (4.40) das Anfangswertproblem (4.28), (4.29) löst!

<u>Ausbreitungscharakteristik in 1 und 3 Dimensionen.</u>



$V_+ \cup V_-$: Lichtkegel.

Träger der Distributionslösung $D(\vec{x}, t)$

$$= V_+ \cup V_- = \{(\vec{x}, t) : c^2 t^2 - \vec{x}^{\,2} = 0\}.$$

Das gilt auch in einer Dimension, wo

$$D(x,t) = \delta(ct - x) + \delta(ct + x). \qquad (4.41)$$

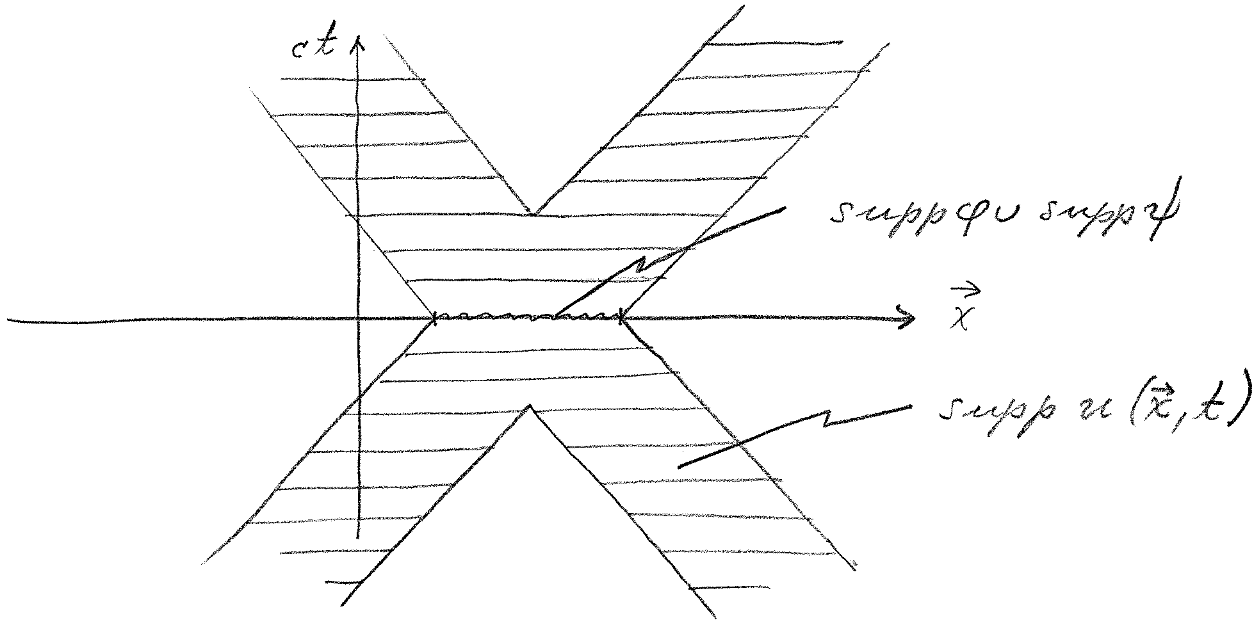
Es folgt, dass für vorgegebene $(\vec{x}, t)$, $u(\vec{x}, t)$

nur von $\varphi(\vec{y})$ und $\psi(\vec{y})$ abhängt, für alle $\vec{y}$,

die

$$|\vec{y} - \vec{x}| = c\,|t| \qquad (4.42)$$

erfüllen.



$\Rightarrow$ Ausbreitungsgeschwindigkeit von e.m. Wellen = c.

Analoges gilt für beliebige <u>ungerade</u> Raumdimensionen.

$\rightarrow$ <u>Hughens'sches Prinzip!</u>

Lösung in 2 Raumdimensionen: Hadamard'sche Abstiegmethode.

Sei $u(\vec{x},t) = u(x,y,t)$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\Box u(\vec{x},t) = 0 \qquad (4.43)$$

zu den Anfangsbedingungen

$$u(\vec{x},0) = \varphi(\vec{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},0) = \psi(\vec{x}); \qquad (4.44)$$

(<u>Oberflächenwellen!</u>)

Setzen $\vec{X} = (\vec{x},z) = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;

$$\left.\begin{aligned} U(\vec{X},t) &:= u(\vec{x},t) \\ \Phi(\vec{X}) &:= \varphi(\vec{x}) \\ \Psi(\vec{X}) &:= \psi(\vec{x}) \end{aligned}\right\} \quad \underline{\text{unabhängig}} \text{ v. } z! \qquad (4.45)$$

Offensichtlich löst $U(\vec{X},t)$ die Wellengl.

$$\Box^{(3)} U(\vec{X},t) = \Box^{(2)} u(\vec{x},t) = 0$$

in drei Dimensionen zu den Anfangsbedg. Φ, Ψ.

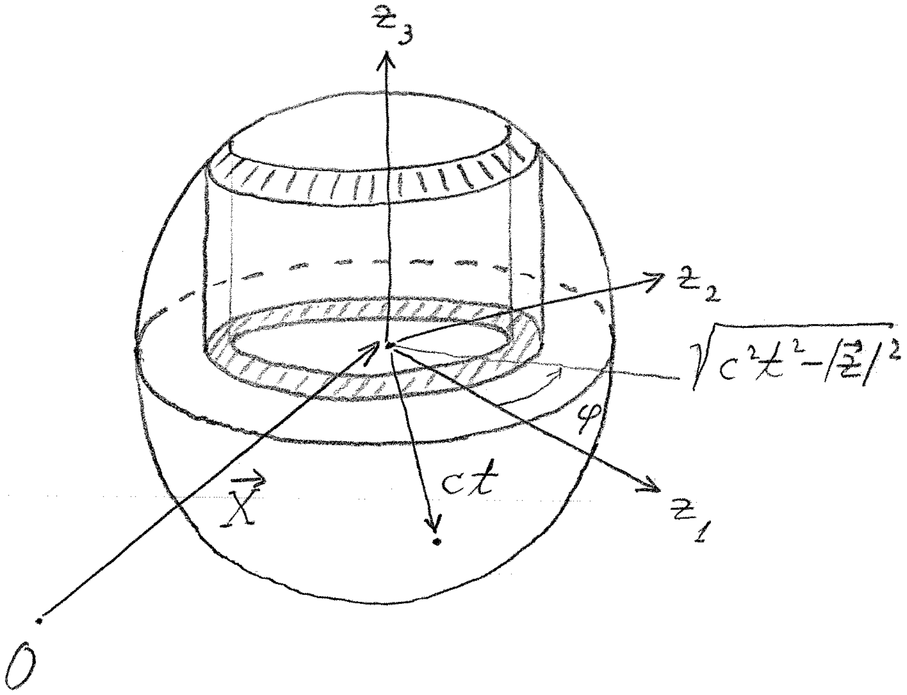
Daher folgt aus (4.40), dass (für $t > 0$)

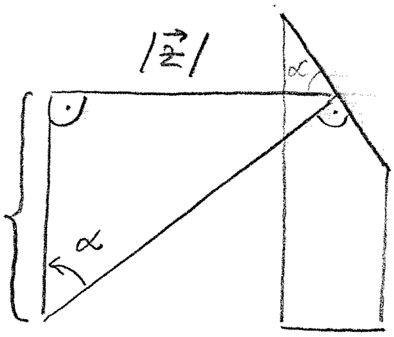
$$U(\vec{X},t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\Big(t \int_{S^2} \Phi(\vec{X}+ct\vec{n})|d\vec{\sigma}_{\vec{n}}|\Big)$$

$$+ \frac{t}{4\pi} \int_{S^2} \Psi(\vec{X}+ct\vec{n})|d\vec{\sigma}_{\vec{n}}|$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int\limits_{|\vec{Z}|=ct} \Phi(\vec{X}+\vec{Z})\,|d\vec{\sigma}_{\vec{Z}}| \right)$$

$$+ \frac{1}{4\pi c^2 t} \int\limits_{|\vec{Z}|=ct} \Psi(\vec{X}+\vec{Z})\,|d\vec{\sigma}_{\vec{Z}}| \qquad (4.46)$$





$$\vec{z} = (z_1, z_2)$$

Die Halbkugel, wo $z_3 > 0$, parametrisieren wir durch die Koordinaten

$$\left\{ \vec{z},\ z_3 = \sqrt{c^2t^2-|\vec{z}|^2} \ :\ |\vec{z}|^2 = z_1^2 + z_2^2 \leq c^2t^2 \right\}$$

Aus den Figuren folgt, dass

ebener Polar ∡

$1/\cos\alpha$

$$|d\vec{\sigma}_{\vec{Z}}| = \frac{1}{\cos\alpha}|\vec{z}|^2\, d\varphi\, d|\vec{z}| = \frac{ct}{\sqrt{c^2t^2-|\vec{z}|^2}}\, dz_1\, dz_2$$

Damit folgt aus (4.46) für $u(\vec{x},t) = U(\vec{X},t)$

$$u(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\vec{z}|\leq ct}\frac{\varphi(\vec{x}+\vec{z})}{\sqrt{c^2t^2-|\vec{z}|^2}}\,d^2z\right)$$

$$+\frac{1}{2\pi c}\int\limits_{|\vec{z}|\leq ct}\frac{\psi(\vec{x}+\vec{z})}{\sqrt{c^2t^2-|\vec{z}|^2}}\,d^2z \qquad (4.47)$$

Der Faktor $\frac{1}{2\pi}$, der $\frac{1}{4\pi}$ ersetzt, entspricht der Tatsache, dass es zwei Halbkugeln, $z_3>0$ und $z_3<0$, gibt, die identische Beiträge geben!

Offenbar breiten sich in zwei Dimensionen e.m. Wellen ins Innere des Lichtkegels aus. Das gilt allgemein in geraden Raumdimensionen. In diesem Sinne gilt das Huyghens'sche Prinzip in geraden Raumdimensionen nicht!