II. Elektrodynamik

In diesem 2. Kapitel geben wir eine kurze und überaus lückenhafte Einführung in die klassische Elektrodynamik, die spezielle Relativitätstheorie und die relativistische Mechanik.

Für alle Einzelheiten verweise ich auf die unten angegebene Literatur oder mein Skript "Elektrodynamik" vom SS 2003.

Literatur

R. Jost, "Elektrodynamik", Verlag der Fachvereine, ETH Zürich

A. Sommerfeld, "Elektrodynamik", Vorlesungen über Theoretische Physik Band III, "Optik", Band IV, Verlag Harri Deutsch.

Becker, Sauter, "Theorie der Elektrizität", Band I, Teubner Verlag.

L. D. Landau, E. M. Lifshitz, "The Classical Theory of Fields", Band II der Reihe, Pergamon Press.

J. D. Jackson, "Classical Electrodynamics", Wiley.

W. Panofsky, M. Phillips, "Classical Electricity and Magnetism", Addison-Wesley.

W. Thirring, "Klassische Feldtheorie", Band 2, Springer-Verlag.

J.R. Oppenheimer, "Lectures on Electrodynamics
Gordan and Breach.

E.T. Whittaker, "A History of the Theories of
Aether and Electricity"

D. Bleecker, "Gauge Theory and Variational
Principles", Addison-Wesley

W. Hunziker, "Elektrodynamik" (SS 90)

1. Geschichtliches zur Elektrodynamik.

Elektrische und magnetische Erscheinungen als Kuriositäten sind seit der Antike bekannt; (Aufladbarkeit von Bernstein, magnetische Wechselwirkungen des Magneteisensteins). Licht, auch eine elektromagnetische Erscheinung (Maxwell), wurde schon immer wahrgenommen.

Mit wissenschaftlichen (experimentellen und theoretischen) Methoden wurde die klassische Elektrodynamik zwischen ca. 1750 und 1909 entdeckt und entwickelt, (abgesehen von der Optik, die schon von Fermat, Newton, Hugghens u.a. erforscht worden war, aber noch nicht als Zweig der Elektrizitätslehre erkannt war).

Priestley (1766) und Coulomb (1785) erkannten die Analogie zwischen elektrostatischen und Gravitationskräften. Die wichtigsten Experimente dazu wurden von Cavendish zwischen 1771 und

1773 ausgeführt. Die mathematische Ausgestaltung der Elektrostatik stammt von Poisson (1812).

1800 erfand Volta die galvanischen Elemente zur Erzeugung von Gleichstrom. Dies war die Grundlage für die Versuche Oersteds (1819) über die Ablenkung einer Magnetnadel in der Nähe eines von elektrischem Strom durchflossenen Leiters. Diese haben Ampère 1820 zur Formulierung seines berühmten Verkettungsgesetzes inspiriert. Eine andere Variante davon ist das Biot-Savartsche Gesetz. Ampère hat auch die Aequivalenz eines Solenoids zu einem permanenten Stabmagneten erkannt und ist in der Folge auf die Idee der Ampèreschen Molekularströme gestossen. Ausserdem hat er die Methode des "magnetischen Blattes" entdeckt.

Das einfachere magnetostatische Kraftgesetz für Stabmagneten war schon 1750 von Michell und 1785 von Coulomb entdeckt worden.

Alle bisher erwähnten Gesetze sind Fernwirkungsgesetze, wie das Newtonsche Gravitationsgesetz, und gelten nur in statischen (zeitunabhängigen) Situationen. Fernwirkungsgesetze waren auch die heute weitgehend vergessenen Gesetze von Grassmann, Gauss, Riemann, Clausius und Weber. Gauss gehört allerdings auch zu den Erfindern der Feld- oder Nahewirkung (ca. 1845).

Das grosse Genie der Elektrodynamik ist Michael Faraday (1791-1867): Buchbinder, Assistent von Sir Humphrey Davy; später sein Nachfolger. Faraday ist ein virtuoser und genialer Experimentator. Er kennt kaum etwas von Mathematik, leitet aber aus seinen Experimenten den Feldbegriff her; (Faraday'sche elektrische und magnetische Kraftlinien). Er entdeckt in unzähligen Experimenten das Induktionsgesetz, die Elektrolyse, bestimmt Dielektrizitätskonstanten materieller Medien und findet para- und diamagnetisches Verhalten, entdeckt magneto-optische Erscheinungen, ...

James Clerk Maxwell (1831 - 1879) hat Faraday Entdeckungen in mathematische Sprache übersetzt und ergänzt (Maxwellscher Verschiebungsstrom): "On Faraday's Lines of Force", 1855, "Treatise", 1873. Er erkennt, dass Licht eine elektromagnetische Erscheinung ist. Maxwell hat überdies zentrale Beiträge zur statistischen Physik (Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung) und zur allgemeinen mathematischen Physik (z. B. Himmelsmechanik) gemacht.

Wie Faraday, hat auch Heinrich Hertz (1857 - 1894) gleichzeitig experimentell und theoretisch gearbeitet; Schüler von Helmholtz. Vereinfacht mathematische Formulierung der Maxwell'schen Theorie und wendet sie (experimentell und theoretisch) auf Erzeugung elektromagnetischer Wellen an: Hertz'scher Dipol, Hertz'sches Potential → drahtlose Telegraphie (Marconi), photoelektrischer Effekt, Bremsstrahlung, ...

Nun ist die klassische Elektrodynamik eine abgeschlossene Theorie. Sie passt aber noch nicht zur damaligen Theorie der Materie, der Mechanik von Punktteilchen.

Hendrik Antoon Lorentz (1853 – 1928) entwickelt eine klassische Theorie der Elektronen und Metalle und stösst dabei auf Teile der speziellen Relativitätstheorie. Durch seine Studien der Elektrodynamik findet Henri Poincaré (1854 – 1912) die spezielle Relativitätstheorie, die er mathematisch vollständig (inklusive Minkowski Raum) formuliert, (1905, 1906).

Albert Einstein (1879 – 1955) ist es vorbehalten, die Grundkonzepte der spezielllen Relativitätstheorie kristall-klar zu isolieren und die relativistische Mechanik von Punktteilchen zu formulieren (1905).

Hermann Minkowski (1864 – 1909) findet die abschliessende geometrische Formulierung der speziellen Relativitätstheorie (1908). Diese spielt in der Entdeckung der allgemeinen Relativitätstheorie (Gravitationstheorie) eine wesentliche Rolle.

Im 19. Jahrhundert war die Vorstellung verbreitet, die elektromagnetischen Erscheinungen könnten auf mechanische zurückgeführt werden: Aether Hypothese. Die Experimente von Michelson und Morley konnten aber keine Bewegung relativ zum Aether nachweisen. Einstein hat die Aether Hypothese definitiv aus der Elektrodynamik verbannt.

1900 hat Planck sein berühmtes Gesetz

der Hohlraumstrahlung gefunden, das korrekt zwischen dem Rayleigh-Jeans'schen Grenzfall ($kT \gg h\nu$) und dem Wien'schen Grenzfall ($kT \ll h\nu$) interpolierte. Das war die Geburtsstunde der Quantentheorie. 1905 entdeckte Einstein im Rahmen seiner Untersuchungen zum photoelektrischen Effekt das Photon (Lichtquant). Seither war es ein Hauptproblem, die Quantentheorie mathematisch konsistent zu formulieren und die klassische Elektrodynamik mit der Quantentheorie zu vereinigen: Quantenelektrodynamik. Diese Gegenstände werden in den Vorlesungen über Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie abgehandelt werden.

Interessante, historische Einzelheiten findet man im Handbuchartikel von Pauli zur Relativitätstheorie und im Buch von Whittaker.

---

2. Kraftgesetze: Fernwirkungs- versus Feldgesetze.

2.1. Rekapitulation der mechanischen und elektrischen Dimensionen und Einheiten.

Physikal. Grösse		(Rat.) MKSA	Gauss
Länge	l	Meter m	cm
Zeit	t	Sekunde sec	sec
Masse	M, od. m	Kilogramm kg	Gramm g
Frequenz	ν	Hertz (= # Schwingungen pro sec)	Hertz
Kraft	F, od. K	Newton N ($1\,N = 1 \frac{kg\, m}{sec^2}$)	dyn ($1\,N = 10^5$ dyn,
Energie	E, od. U	Joule J ($1\,J = 1 \frac{kg\, m^2}{sec^2}$)	erg ($1\,J = 10^7$ erg,
Leistung	W, od. P	Watt W ($1\,W = \frac{1\, kg\, m^2}{sec^3}$)	erg/sec ($1\,W = 10^7$ erg/sec
Ladung	q, od. Q	Coulomb C	Stat Coulomb ($1\,C = 3 \cdot 10^9$ Stat Coulomb)
Strom	I	Ampère = C/sec	Stat Ampère ($1\,A = 3 \cdot 10^9$ Stat Ampère)

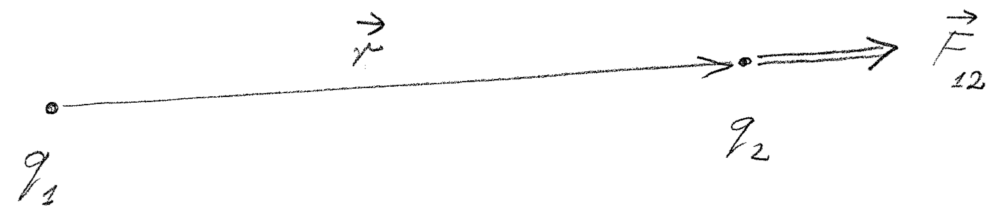
Für eine allgemeine Diskussion von Einheiten, (die in der ED immer wieder für Verwirrung sorgen), konsultiere man Jost (p. 2), Jackson (pp. 818 – 821), oder Sommerfeld.

Wir werden sehen, dass wir die in der Elektrizitätslehre neu auftretenden Dimensionen der Ladung und Stromstärke auf mechanische zurückführen können. Dabei werden wir auf die Lichtgeschwindigkeit c ($\approx$ 300'000 km/sec) stossen. Die ED wird Licht als eine elektromagnetische Erscheinung begreiflich machen und weist c als universelle Naturkonstante der klassischen Physik aus. Obschon mechanische Einheiten genügen, um die Gesetze der ED zu formulieren, soll man nicht denken, dass die ED sich auf Mechanik (allgemeiner auf eine Theorie der Materie allein) zurückführen lässt; (c ist in der klassischen Mechanik zunächst keine natürliche Konstante).

Trotzdem wollen wir versuchsweise so tun als sei dies möglich. Dann muss man zumindest Massenpunkte mit der Eigenschaft der <u>elektrischen Ladung</u> dekorieren.

2.2. <u>Kraftgesetze als Fernwirkungsgesetze.</u>

(1) <u>Kraft zwischen zwei relativ zueinander ruhenden Ladungen im Vakuum</u> (Priestley, Coulomb):



$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_1 \cdot q_2 \frac{\vec{r}}{4\pi r^3}$$

Actio = reactio $\Rightarrow$ $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$. (2.1)

Dimensionen:

$$[\varepsilon_0] \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{sec}^2} = \frac{\mathrm{Coulomb}^2}{\mathrm{m}^2} \qquad (2.2)$$

Für die Kräfte zwischen relativ zu einander ruhenden Ladungsverteilungen gilt das <u>Superposi-</u>

tionsprinzip!

Der Wert von ε_0, der Dielektrizitätskonstante des Vakuums, kann im Prinzip mit Hilfe von (2.1) aus mechanischen Experimenten (Kapazitätsmessungen) bestimmt werden.

(2) Kraft zwischen magnetischen Monopolen (Michell-Coulomb):

Ein Stabmagnet kann als aus magnetischen Dipolen aufgebaut gedacht werden. Ein magnetischer Dipol besteht aus zwei entgegengesetzt gleichen magnetischen Monopolen, $\pm M$. Die Kraft zwischen zwei relativ zueinander ruhenden Monopolen, M_1 und M_2, ist nach Michell und Coulomb durch

$$\vec{F}_{12} = \mu_0 M_1 M_2 \frac{\vec{r}}{4\pi r^3} = -\vec{F}_{21} \qquad (2.3)$$

bestimmt, wo μ_0 die magnetische Permeabilität des Vakuums ist. Die Dimension von M

wählt man als

$$[M] = [q]\,\frac{l}{t} \quad \left(\text{Coulomb}\,\frac{m}{sec}\right). \qquad (2.4)$$

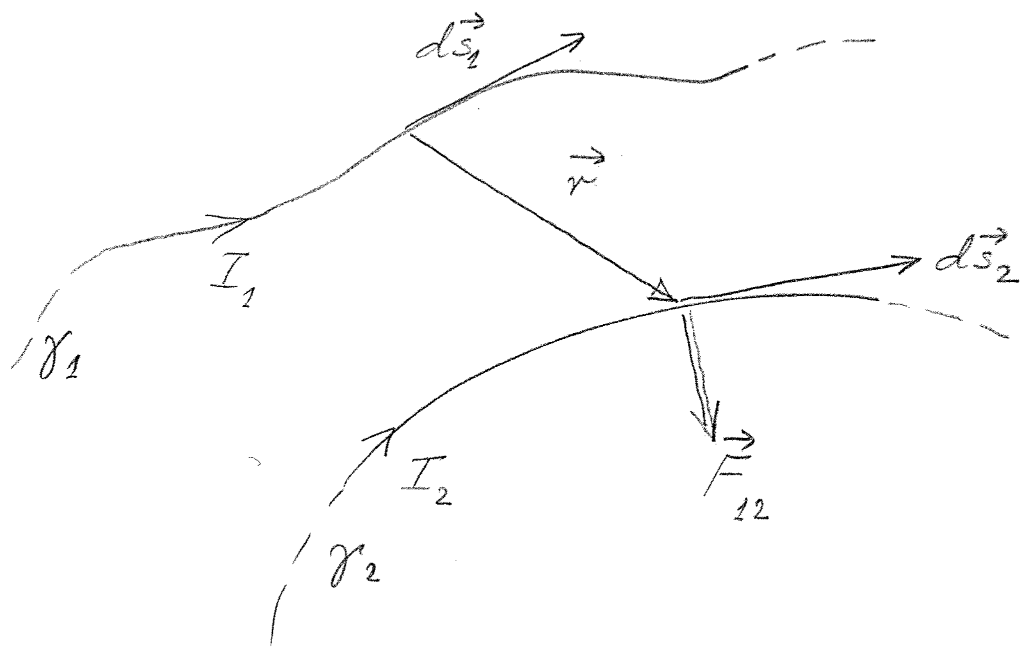
Dies wird aus dem Ampère'schen Gesetz verständlich, das wir unten diskutieren. Damit folgt

$$[\varepsilon_0 \mu_0] = \frac{t^2}{l^2} \quad \left(\frac{sec^2}{m^2}\right). \qquad (2.5)$$

Man wird nun wieder das Superpositionsprinzip fordern.

Nun zeigt der Versuch, dass beim Zerlegen eines Stabmagneten in zwei Teile neue magnetische Pole entstehen. Die beiden Teile sind wieder Dipole. Konstant bleibt das totale magnetische Moment $\sum M_i \vec{x}_i$. Isolierte magnetische Monopole (Dirac) hat man in der Natur bis anhin nicht gefunden! (Dies wird uns auf eine der homogenen Maxwell Gleichungen führen.)

(3) Kraft zwischen zwei Stromleitern im Vakuum (Ampère)



$$\vec{F}_{12} = -\mu_0 I_1 I_2 \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{(d\vec{s}_1 \wedge \vec{r}) \wedge d\vec{s}_2}{4\pi r^3}$$

$$= -\mu_0 I_1 I_2 \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{1}{4\pi r^3} \left\{ (d\vec{s}_2 \cdot \vec{r})\, d\vec{s}_1 - (d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2)\, \vec{r} \right\} \tag{2.6}$$

$$[I] = \frac{[q]}{t} \quad \left(\frac{\text{Coulomb}}{\text{sec}} \right)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\text{kg m}}{\text{sec}^2} = [\mu_0] \frac{\text{Coulomb}^2}{\text{sec}^2} \tag{2.7}$$

Aus (2.2) und (2.7) folgt:

$$[\varepsilon_0 \mu_0] = \frac{\text{sec}^2}{\text{m}^2} = \text{Geschwindigkeit}^{-2},$$

was mit (2.4) und (2.5) kompatibel ist!

Gesetzliche Konvention zur Definition des Ampère (A):

$$\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}\ \frac{\text{Joule}}{A^2 \cdot m}$$

$\hookrightarrow$ 1 Coulomb := 1 Ampère · sec

Exkurs zur Vektorrechnung.

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c}) &= \vec{b}\cdot(\vec{c}\wedge\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b}) \\ \vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) &= (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \\ (\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot(\vec{c}\wedge\vec{d}) &= (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}) \end{aligned}\right\}(2.8)$$

Die Gesetze (1) – (3) sind Fernwirkungsgesetze (genau wie das Newton'sche Gravitationsgesetz, von dem sie inspiriert sind). Sie gelten streng nur im statischen ((1) & (2)), resp. stationären ((3)) Fall.

Faraday hat durch viele Experimente erkannt, dass die elektromagnetischen Erscheinungen in ihrer Gesamtheit nicht durch Fernwirkungsgesetze beschrieben werden können, und dass der Feldbegriff zentral ist, (Induktionsgesetz).

Wir definieren nun die <u>Feldgrössen der Elektrodynamik</u> und formulieren anschliessend die Maxwell Gleichungen.

$\vec{D}(\vec{x})$: <u>dielektrische Verschiebung</u>;

$\vec{E}(\vec{x})$: <u>elektrisches Feld</u>.

Dielektrische Verschiebung einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$:

$$\vec{D}(\vec{x}) = \int d^3x' \, \rho(\vec{x}\,') \frac{\vec{x} - \vec{x}\,'}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}\,'|} \qquad (2.9)$$

(Superpositionsprinzip!)

Verknüpfungsgleichung:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{D}(\vec{x}). \qquad (2.10)$$

Kraft von $\vec{E}$ auf Testteilchen der Ladung q:

$$\vec{F}(\vec{x}) = q \, \vec{E}(\vec{x}). \qquad (2.11)$$

Das Testteilchen ruht, und seine Ladung q ist im Punkte $\vec{x}$ konzentriert.

Gln. (2.9) – (2.11) reproduzieren (1)!

$\vec{H}(\vec{x})$: <u>magnetisches Feld</u>;

$\vec{B}(\vec{x})$: <u>magnetische Induktion.</u>

Magnetfeld einer Stromverteilung $\vec{j}(\vec{x})$:

$$\vec{H}(\vec{x}) = \int d^3x' \, \frac{\vec{j}(\vec{x}') \wedge (\vec{x} - \vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|^3} , \qquad (2.12)$$

(Superpositionsprinzip!)

Verknüpfungsgleichung:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{H}(\vec{x}). \qquad (2.13)$$

<u>Kraftgesetz</u>:

Kraft auf punktförmiges Teilchen im Punkte $\vec{x}$ mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ und Ladung q ist

$$\vec{F}(\vec{x}) = q \vec{E}(\vec{x}) + q \vec{v} \wedge \vec{B}(\vec{x}) \qquad (2.14)$$

Das ist das <u>Lorentz'sche Kraftgesetz</u>.

Gleichungen (2.12) – (2.14) reproduzieren das Ampère'sche Gesetz, wenn man sich einen elektrischen Strom als aus geladenen, bewegten Punktteilchen bestehend vorstellt!

Erfahrungstatsachen:

(a) Superpositionsprinzip gilt.

(b) Es gibt keine magnetischen Monopole.

(c) In (2.14) spielt es keine Rolle, wie $\vec{E}$ und $\vec{B}$ erzeugt werden.

Exkurs über Vektorfelder.

Felder $\vec{D}, \vec{E}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{j}, \dots$ hängen i.A. von Zeit, t, und Ort, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, ab. Ein Punkt $p = (\vec{x}, t)$ in der Raum-Zeit heisst Ereigniss.

Die explizite Form der Abhängigkeit von $\vec{A}$ $(= \vec{D}, \vec{E}, \vec{H}, \dots)$ vom Ereignis p hängt von der Wahl eines Koordinatensystems ab.

Die Gesetze der Newton'schen Mechanik haben in allen Inertialsystemen, Koordinatensysteme, die durch Galilei Transformationen mit einem

Cartesischen Koordinatensystem verbunden sind, in dem der Fixsternhimmel "in Ruhe" ist, die gleiche Form. Fügt man zu den mechanischen Gesetzen noch die bis anhin besprochenen Gesetze der Elektro- und Magnetostatik, sowie das Lorentz'sche Kraftgesetz hinzu, so bleibt als Raum-Zeit Symmetriegruppe nur die Gruppe übrig, die von den Euklidischen Bewegungen des $\mathbb{R}^3$, den Zeittranslationen, den Raumspiegelungen und der Zeitumkehr erzeugt wird. Dieser Umstand schien historisch zunächst die Newton'sche Idee des "absoluten Raumes" zu bestätigen; (Aether Hypothese).

Sei S ein Cartesisches Koordinatensystem, in dem die Gesetze der Newton'schen Mechanik und die bis anhin besprochenen Gesetze der Elektro- und Magneto-statik, sowie Lorentz, gelten.

Sei S' ein Cartesisches Koordinatensystem, das mit S durch folgende Transformation verbunden ist: $(\vec{x}, t)$ und $(\vec{x}', t')$ seien die Koordinaten eines Ereignisses p in den Koordinatensystemen S, resp. S'. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} t &= \pm t' + \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}, \\ \vec{x} &= R\vec{x}' + \vec{a}, \quad R \in O(3), \ \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}\right\} \quad (2.15)$$

Für eigentliche, orthochrone Koordinatentransformationen soll gelten:

$$\left.\begin{aligned} t &= t' + \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}, \\ \vec{x} &= R\vec{x}' + \vec{a}, \quad R \in SO(3), \ \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}\right\} \quad (2.16)$$

$A(p)$ ist ein <u>kontravariantes Vektorfeld</u>, falls sich seine Komponenten, $\vec{A}$, unter der Transformation (2.16) wie ein Vektor, $\vec{x} - \vec{y}$, transformieren, d.h.

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = R\vec{A}'(\vec{x}', t'), \quad (2.17)$$

wo $(\vec{x},t)$ und $(\vec{x}',t')$ durch (2.16) verbunden sind, $\vec{A}$ die Komponenten von A in S und $\vec{A}'$ die Komponenten von $\vec{A}$ in S' bezeichnen.

$\varphi(p)$ ist ein <u>Skalarfeld</u>, falls

$$\varphi(\vec{x},t) = \varphi'(\vec{x}',t'). \qquad (2.18)$$

<u>Verhalten unter Raumspiegelungen</u> (P):

Betrachten (2.15) mit

$$t = t', \quad \vec{x} = -\vec{x}'. \qquad (2.19)$$

A ist ein <u>Vektorfeld</u>, falls

$$\vec{A}(\vec{x},t) = -\vec{A}'(\vec{x}',t') \qquad (2.20)$$

und ein <u>Pseudovektorfeld</u>, falls

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \vec{A}'(\vec{x}',t'), \qquad (2.21)$$

unter der Transformation (2.19).

Weiter ist φ ein <u>Skalarfeld</u>, falls

$$\varphi(\vec{x},t) = \varphi(\vec{x}',t') \qquad (2.22)$$

und ein <u>Pseudoskalarfeld</u>, falls

$$\varphi(\vec{x},t) = -\varphi(\vec{x},t') \qquad (2.23)$$

unter (2.19).

Weiter kann man das Verhalten von A unter <u>Zeitumkehr</u> (T), $t = -t'$, und, <u>speziell in der E.</u> unter Ladungskonjugation (C), $q \to -q$, studiere
Das Produkt, PCT, der Operationen P, C und T ist eine Symmetrie jeder "guten" physikalischen Theorie (PCT Theorem von Jost).

<u>Operationen auf Vektorfeldern.</u>

(i) Vektorfelder bilden einen linearen Raum; (tatsächlich einen sog. Modul für $C^\infty(\mathbb{R}^3)$).

(ii) Falls wir $\mathbb{R}^3$ mit dem üblichen Euklidischen Skalarprodukt versehen, so ist das Skalarprodukt zweier Vektorfelder ausgewertet in einem beliebigen Ereignis definiert und ist <u>unabhängig</u> vom benützten Koordinatensystem.

(iii) Für stetig differenzierbare Vektorfelder sind die Operationen

<u>Divergenz</u>: $\vec{A} \longmapsto \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ (ein Skalarfeld),

und

<u>Rotation</u>: $\vec{A} \longmapsto \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$ (ein Vektorfeld)

definiert.

(Genauer ist $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ ein Skalarfeld, falls $\vec{A}$ ein Vektorfeld ist, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ ein Pseudoskalar, falls $\vec{A}$ ein Pseudovektor, $\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$ ein Pseudovektor, falls $\vec{A}$ ein Vektor und $\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$ ein Vektor, falls $\vec{A}$ ein Pseudovektor ist.)

(iv) <u>Linienintegral und Fluss.</u>

Sei γ eine stückweise glatte Kurve, $\vec{A}$ ein stetiges Vektorfeld. Dann bedeutet

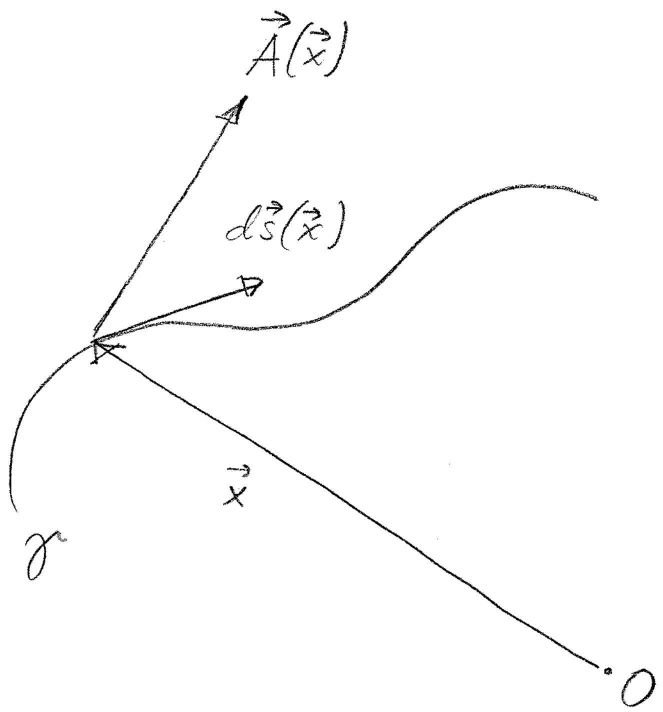
$$(\gamma, \vec{A}) \longmapsto \int_\gamma \vec{A}(\vec{x})\cdot d\vec{s}(\vec{x}) \qquad (2.24)$$

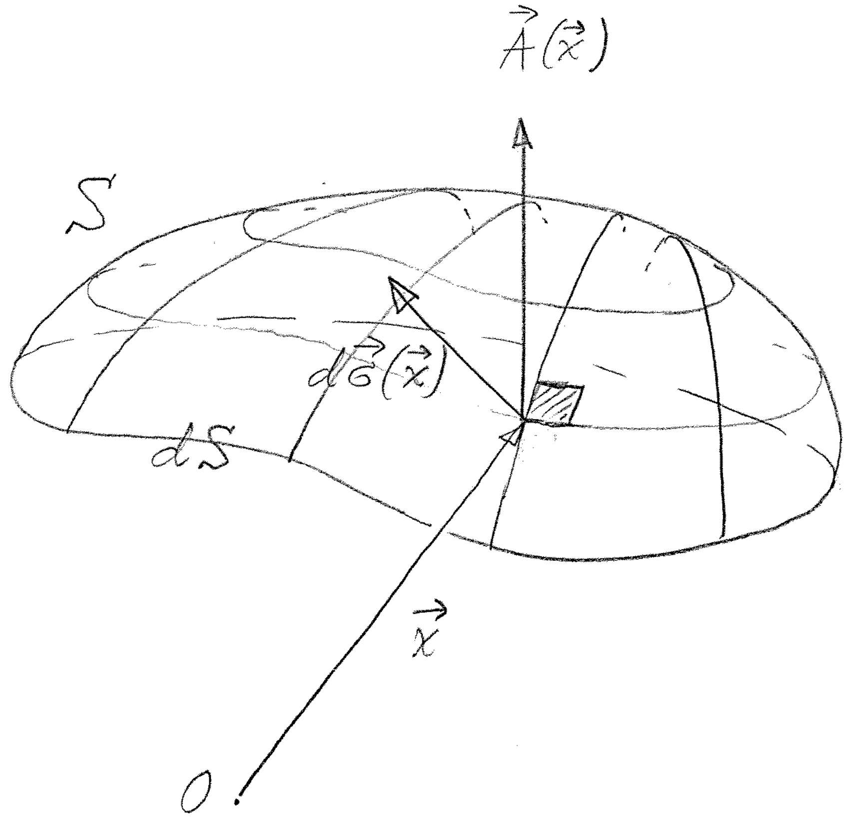
das Linienintegral von $\vec{A}$ entlang γ. Sein Wert ist <u>unabhängig</u> vom verwendeten Koordinatensystem und von der Parametrisierung der Kurve.

Sei S eine beschränkte, stückweise glatte Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit stückweise glattem Rand, ∂S (= geschlossene Raumkurve). Dann ist der <u>Fluss</u> von $\vec{A}$ durch S durch das Oberflächenintegral

$$(S, \vec{A}) \longmapsto \Phi_{\vec{A}}(S) := \int_S \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma}(\vec{x}) \qquad (2.25)$$

definiert. $\Phi_{\vec{A}}(S)$ ist <u>unabhängig</u> vom Koordinatensystem und von der Parametrisierung von S.





Für mathematisch präzise Definitionen von (2.24) und (2.25) verweise ich auf die Vorlesung Analysis II, oder mein Skript zur "Kontinuumsmechanik".

2.3. Feldgesetze: Die Maxwellgleichungen in Integralform.

Zu den Gesetzen (1) – (3) von Abschnitt 2.2, die zunächst nur für zeitunabhängige Ladungs- und Stromverteilungen gelten, trat später ein zeitabhängiges, das 1831 von Faraday entdeckte Induktionsgesetz dazu: Es besagt, dass

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \Phi_{\vec{B}}(S)$$

$$= -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} \qquad (2.26)$$

für irgendeine stückweise glatte Fläche S im $\mathbb{R}^3$.

Links von (2.26) steht die in der Schleife ∂S induzierte Spannung oder elektromotorische Kraft (EMK), rechts die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch S.

Nun hofft man, dass das Coulomb'sche Gesetz (2.9) und das Ampère'sche Gesetz (2.12) im Wesentlichen auch in zeitabhängigen Situationen noch richtig bleiben. Dabei wird es zu einer Überraschung kommen; (Maxwell'scher Verschiebungsstrom). Um diese Idee zu verfolgen, formulieren wir nun (2.9) und (2.12) in Integralform: Sei Ω ein offenes, beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^3$ mit stückweise glattem Rand. Es sei

$$Q(\Omega) := \int_\Omega \rho(\vec{x})\, d^3x = \text{Ladung innerhalb } \Omega \qquad (2.27)$$

Wie schon Newton wusste, kann man nun (2.9) wie folgt ausdrücken.

$$Q(\Omega) = \Phi_{\vec{D}}(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} \vec{D}\cdot d\vec{\sigma} \qquad (2.28)$$

Dies folgt leicht aus der entsprechenden Gleichung für eine Punktladung durch Superposition.

Weiter wird aus (2.12)

$$\oint_{\partial S} \vec{H}\cdot d\vec{s} = \Phi_{\vec{j}}(S) = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{\sigma}. \qquad (2.29)$$

Man nennt $\oint_{\partial S} \vec{H}\cdot d\vec{s}$ die in der Schleife ∂S erzeugte "magnetomotorische Kraft" (MMK).

Die Gleichung (2.29) ersetzen wir versuchsweise durch

$$\oint_{\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{j}_{tot.} \cdot d\vec{\sigma} , \qquad (2.30)$$

wobei noch zu entdecken bleibt, was unter $\vec{j}_{tot.}$ zu verstehen ist.

Schliesslich fordern wir, dass die totale elektrische Ladung <u>erhalten</u> ist, was eine sehr sicher bestätigte Erfahrungstatsache ist. Sie drückt sich in der Gleichung

$$\dot{Q}(\Omega) = -\Phi_{\vec{j}}(\partial\Omega), \qquad (2.31)$$

aus; (zeitliche Veränderung der Ladung in Ω = Fluss des elektrischen Stroms durch $\partial\Omega$).

Nun müssen wir (mit Maxwell) die Konsistenz der Gleichungen (2.26), (2.28), (2.30) und (2.31) untersuchen. Aus (2.31) und (2.28) folgt, dass

$$\dot{Q}(\Omega) = -\Phi_{\vec{j}}(\partial\Omega) \overset{(2.28)}{=} \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{\sigma}. \qquad (2.32)$$

Falls $S = \partial\Omega$, dann ist $\partial S = \emptyset$ und

$\oint\limits_{\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0$. Darum wird aus (2.30)

$$\int\limits_{\partial\Omega} \vec{j}_{tot} \cdot d\vec{\sigma} = 0. \qquad (2.33)$$

Vergleich von (2.32) und (2.33) und die Forderung, dass für <u>zeitunabhängige</u> Felder (2.29) gilt, implizieren dass

$$\vec{j}_{tot} = \vec{j} + \dot{\vec{D}} \qquad (2.34)$$

Der Term $\dot{\vec{D}}$ heisst <u>Maxwell'scher Verschiebungsstrom.</u>

Wenn wir im Induktionsgesetz (2.26) $S = \partial\Omega$ setzen, so erhalten wir, dass

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\partial\Omega} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = 0, \qquad (2.35)$$

für irgendein offenes, beschränktes Gebiet Ω im $\mathbb{R}^3$. Also folgt, dass

$$\int_{\partial\Omega} \vec{B}\cdot d\vec{\sigma} = \text{const.}, \qquad (2.36)$$

für irgendein Ω. Nun haben wir aber in der Besprechung des Gesetzes (2.3) aus Abschnitt 2.2 betont, dass es in der Natur keine isolierte magnetische Monopole gibt. So wie man von (2.9) auf (2.28) kommt, schliesst man nun, dass (2.36) zu

$$\int_{\partial\Omega} \vec{B}\cdot d\vec{\sigma} = 0 \qquad (2.37)$$

verschärft werden kann.

Gleichungen (2.26) und (2.37) sind die homogenen Maxwell Gleichungen, Gleichungen (2.30), mit (2.34), und (2.28) die inhomogenen Maxwell Gleichungen in Integralform. Aus (2.34), (2.33) und (2.28) folgt die Ladungserhaltung, in der Form der Gleichung (2.31).

Die <u>Verknüpfungsgleichungen</u> im Vakuum sind:

$$\vec{D}(\vec{x}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{x}), \qquad \vec{B}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{H}(\vec{x}), \qquad (2.38)$$

$$\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}\ \mathrm{Joule}/\mathrm{Am}^2, \quad \varepsilon_0 \mu_0 \approx \frac{1}{9} 10^{-16}\ \frac{\mathrm{sec}^2}{\mathrm{m}^2}.$$

Schliesslich ist das <u>Kraftgesetz</u> durch

$$\vec{F}(\vec{x}) = q\,\vec{E}(\vec{x}) + q\,\vec{v} \wedge \vec{B}(\vec{x}) \qquad (2.39)$$

gegeben, resp. der Ausdruck für die <u>Kraftdichte</u> durch

$$\vec{f}(\vec{x}) = \rho(\vec{x})\,\vec{E}(\vec{x}) + \vec{j}(x) \wedge \vec{B}(\vec{x}). \qquad (2.40)$$

In den Gesetzen (2.26), (2.28), (2.30), (2.34), (2.37), (2.38) und (2.40) ist die <u>ganze klassische Elektrodynamik</u> in mathematisch konsistenter Weise zum Ausdruck gebracht. Jetzt müssen wir ihre Konsequenzen ausloten.