

# Quantenmechanik I und II

## HS 10/FS 11

G.M. Graf  
ETH Zürich

### Inhaltsverzeichnis

<b>1 Die frühe Quantentheorie</b>	<b>1</b>
1.1 Das Plancksche Strahlungsgesetz (1900) . . . . .	1
1.2 Licht als Teilchen (Einstein 1905) . . . . .	5
1.3 Die Bohrsche Quantenhypothese (1913) . . . . .	6
1.4 Die Quantisierung der Wirkung (Sommerfeld 1915) . . . . .	8
1.5 Emission und Absorption (Einstein 1917) . . . . .	11
1.6 Licht als Teilchen (Compton 1922) . . . . .	13
1.7 Teilchen als Welle (de Broglie 1923) . . . . .	13
<b>2 Wellen- und Matrizenmechanik</b>	<b>15</b>
2.1 Wellenmechanik und Schrödinger-Gleichung . . . . .	15
2.2 Matrizenmechanik und Heisenberg-Gleichung . . . . .	18
<b>3 Die allgemeine Form der Quantenmechanik</b>	<b>22</b>
3.1 Darstellung im Hilbertraum . . . . .	22
3.2 Das freie Teilchen . . . . .	30
3.3 Der harmonische Oszillator . . . . .	31
3.4 Die WKB-Näherung . . . . .	35
3.5 Symmetrien und Erhaltungssätze . . . . .	39
<b>4 Das Zweikörperproblem</b>	<b>41</b>
4.1 Schwerpunkts- und Relativbewegung . . . . .	41
4.2 Das Wasserstoff-Atom . . . . .	43

<b>5</b>	<b>Streutheorie</b>	<b>46</b>
5.1	Die Greensche Funktion . . . . .	46
5.2	Streuzustände . . . . .	47
5.3	Das optische Theorem . . . . .	49
5.4	Zerlegung in Partialwellen . . . . .	50
5.5	Resonanzen . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Näherungsmethoden</b>	<b>55</b>
6.1	Störung des Eigenwertproblems . . . . .	55
6.2	Variationsmethoden . . . . .	58
6.3	Das Beispiel Helium . . . . .	60
<b>7</b>	<b>Drehimpuls und Spin</b>	<b>64</b>
7.1	Symmetrien im Hilbertraum . . . . .	64
7.2	Drehungen . . . . .	67
7.3	Irreduzible Darstellungen . . . . .	69
7.4	Einschub: Zusammengesetzte Quantensysteme . . . . .	71
7.5	Addition von Drehimpulsen . . . . .	72
7.6	Die quantenmechanische Drehgruppe $SU(2)$ . . . . .	73
7.7	Der Spin des Elektrons . . . . .	76
7.8	Der Satz von Wigner–Eckart . . . . .	79
7.9	Der anomale Zeeman–Effekt . . . . .	80
7.10	Einschub: Gemischte Zustände . . . . .	83
<b>8</b>	<b>Zeitabhängige Störungsrechnung</b>	<b>86</b>
8.1	Das Wechselwirkungs–Bild . . . . .	86
8.2	Atomare Übergänge . . . . .	87
8.3	Die Goldene Regel . . . . .	90
<b>9</b>	<b>Quantentheorie der Hohlraumstrahlung</b>	<b>92</b>
9.1	Das klassische Feld . . . . .	92
9.2	Quantisierung des Strahlungsfeldes . . . . .	94

9.3	Der Feldoperator . . . . .	96
9.4	Das Atom im Strahlungsfeld . . . . .	97
<b>10</b>	<b>Identische Teilchen</b>	<b>100</b>
10.1	Die Permutationsgruppe . . . . .	100
10.2	Das Pauli-Prinzip . . . . .	101
10.3	Unabhängige Fermionen oder Bosonen . . . . .	102
<b>11</b>	<b>Das Thomas-Fermi Atom</b>	<b>106</b>
11.1	Das Atommodell . . . . .	106
11.2	Die Thomas-Fermi Gleichung . . . . .	106
11.3	Positive Ionen . . . . .	108
11.4	Das neutrale Atom . . . . .	109
<b>12</b>	<b>Die Hartree-Fock Näherung</b>	<b>111</b>
12.1	Das Atommodell . . . . .	111
12.2	Die Hartree-Fock Näherung . . . . .	111
12.3	Die Hartree-Fock Gleichungen . . . . .	112
<b>13</b>	<b>Schalenmodell und Periodensystem</b>	<b>115</b>
13.1	Das Atommodell . . . . .	115
13.2	Konfigurationen . . . . .	116
13.3	Multipletts . . . . .	118
13.4	Terme . . . . .	121
13.5	Begründung der Hundschen Regeln . . . . .	122
<b>14</b>	<b>Zweite Quantisierung</b>	<b>124</b>
14.1	Der Fock-Raum . . . . .	124
14.2	Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren . . . . .	124
14.3	Besetzungszahl-Basis . . . . .	126
14.4	Observablen in der Fock-Darstellung . . . . .	127
14.5	Korrelationsfunktionen für Fermionen . . . . .	128

14.6 Korrelationsfunktionen für Bosonen . . . . .	128
<b>15 Quantenstatistik</b>	<b>129</b>
15.1 Zustände und Gesamtheiten . . . . .	129
15.2 Unabhängige Teilchen . . . . .	133
15.3 Ideale Quantengase . . . . .	134
15.4 Entartetes Bose-Gas und Bose-Einstein Kondensation . . . . .	136
<b>16 Zurück zu den Grundlagen</b>	<b>141</b>
16.1 Das EPR-Paradoxon . . . . .	141
16.2 Verborgene Variablen . . . . .	142
16.3 Die Bellsche Ungleichung . . . . .	146
16.4 Quanten Teleportation . . . . .	147
<b>A Anhang: Selbstadjungierte Operatoren</b>	<b>149</b>
<b>B Anhang: Kugelfunktionen</b>	<b>166</b>
<b>C Anhang: Die Methode der stationären Phase</b>	<b>170</b>
<b>D Anhang: Symmetrien in der Quantenmechanik</b>	<b>172</b>
<b>Literaturhinweise und Index</b>	<b>175</b>

Quantenmechanik I: Abschnitte 1.1-7.7  
Quantenmechanik II: Abschnitte 7.8-16.4

Dank gebührt Prof. W. Hunziker, auf dessen Skript das vorliegende basiert, z.T. durch Verwendung des Quelltextes; ferner Herrn I. Lenzo und Frau A. Schultze, sowie weiteren Mitarbeitern für die Textverarbeitung mehrerer Kapitel und Anhänge.

Erste Ausgabe: WS 04/05 (QMI), FS 11 (QMII).

# 1 Die frühe Quantentheorie

---

## 1.1 Das Plancksche Strahlungsgesetz (1900)

Nach klassischer Vorstellung ist ein **Teilchen** (z.B. ein Elektron oder ein Atom) charakterisiert durch Ort und Geschwindigkeit, deren Angabe beliebig genau sein kann; eine **Welle** hat eine bestimmte Frequenz und Wellenzahl, oder ist eine Superposition von solchen. Ein (elementares) Teilchen ist unteilbar und verläuft auf einer Bahn; eine Welle ist teilbar und die Teile können miteinander interferieren. Licht besteht aus elektromagnetischen Wellen und Materie aus Teilchen. Die beiden wechselwirken miteinander und gelangen, in einem verspiegelten Hohlraum eingeschlossen, zu einem thermischen Gleichgewicht, das Planck untersuchte.

Das zunächst freie elektromagnetische (e.m.) Feld genügt auf Grund der Maxwell-Gleichungen der Wellengleichung

$$\square \vec{E} = 0 \quad \text{mit} \quad \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

und der Nebenbedingung

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad (1.1)$$

(analog für  $\vec{B}$ ). Der Separationsansatz

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = f(t) \vec{E}(\vec{x})$$

führt auf

$$\frac{1}{c^2} \ddot{f}(t) \vec{E}(\vec{x}) = f(t) \Delta \vec{E}(\vec{x})$$

und weiter

$$\ddot{f} = -\omega^2 f, \quad -\Delta \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} \quad (1.2)$$

für eine Konstante  $\omega^2 (\geq 0)$ : Dies sind die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators, bzw. die Eigenwertgleichung für  $-\Delta$ . Auf dem Rand des Hohlraums sollen die Randbedingungen

$$\vec{E}_{\parallel} = 0, \quad \frac{\partial \vec{E}_{\perp}}{\partial n} = 0$$

ideal leitender Wände gelten. Wählt man diesen Einfachheit halber als den Würfel  $0 \leq x_i \leq L$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), so lauten die Eigenschwingungen

$$E_i(\vec{x}) = E_i \cos(k_i x_i) \sin(k_{i+1} x_{i+1}) \sin(k_{i+2} x_{i+2}) : \quad (1.3)$$

Die Randbedingungen ( $E_i = 0$  für  $x_j = 0, L$  ( $j \neq i$ );  $\partial E_i / \partial x_i = 0$  für  $x_i = 0, L$ ) sind erfüllt, falls

$$k_i = \frac{\pi}{L} n_i, \quad n_i \text{ ganz, } \geq 0, \text{ höchstens ein } n_i = 0. \quad (1.4)$$

Mit  $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$  und  $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$  verlangt (1.1)  $\vec{E} \cdot \vec{k} = 0$ : zu jedem  $\vec{k}$  gibt es zwei linear unabhängige Eigenschwingungen mit Eigenfrequenzen  $\omega = c \cdot |\vec{k}|$ . Die Zahl der Eigenschwingungen  $\leq \omega$  ist nach (1.4) asymptotisch für  $\omega \gg c/L$

$$N(\omega) = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \left( \frac{\omega L}{\pi c} \right)^3 = \frac{V}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\omega^3}{3}$$

für grosse  $\omega$ , wobei  $V = L^3$ , bzw.

$$\frac{dN}{d\omega} = V \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} . \quad (1.5)$$

Planck stellt sich die Materie vor als bestehend aus Oszillatoren (“Resonatoren”) verschiedener Frequenzen  $\omega_0$ , welche die sonst unabhängigen e.m. Schwingungen ins Gleichgewicht bringen. Er geht dabei in zwei Schritten vor:

- i) Die Resonatoren der Frequenz  $\omega_0$  werden durch das e.m. Feld angeregt und strahlen auch zurück. Das resultierende dynamische Gleichgewicht zwischen mittlerer Energie der Eigenschwingung,  $\bar{U}_\omega$ , und das Resonators,  $\bar{E}_{\omega_0}$ , ist

$$\bar{U}_{\omega_0} = \bar{E}_{\omega_0} . \quad (1.6)$$

- ii) Danach wird  $\bar{E}_\omega$  im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur  $T$  bestimmt (und damit auch  $\bar{U}_\omega$ ).

Die Energieverteilung kann dann durch die spektrale Energiedichte  $u(\omega, T)$  beschrieben werden:

$$V \cdot u(\omega, T) d\omega = \bar{U}_\omega \cdot dN$$

ist die Energie aller Moden mit Frequenzen in  $[\omega, \omega + d\omega]$ ; also

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \bar{U}_\omega . \quad (1.7)$$

- i) Die Schwingung eines Resonators,  $b e^{-i\omega t}$ , genügt der Differentialgleichung (Newtonsche Gleichung)

$$m\ddot{b} + \gamma\dot{b} + m\omega_0^2 b = e\mathcal{E} e^{-i\omega t} , \quad (1.8)$$

falls sie durch eine Schwingung  $\sim e^{-i\omega t}$  einer Komponenten  $\mathcal{E}$  des elektrischen Felds angeregt wird. Dabei sind  $m, e$  die Masse, bzw. die Ladung des Resonators und  $\gamma = e^2 \omega_0^2 / (6\pi c^3)$  ist eine summarische Beschreibung der Strahlungsverluste (s. Elektrodynamik). Also ist

$$b = \frac{\frac{e\mathcal{E}}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{i\gamma\omega_0}{m}} \approx \frac{e\mathcal{E}}{2m\omega_0} \cdot \frac{1}{\omega_0 - \omega - \frac{i\gamma}{2m}}$$

für  $\omega \approx \omega_0$ , mit entsprechender (ungestörter) Energie

$$E_{\omega_0}(\omega) = \frac{m}{2} (\omega^2 + \omega_0^2) |b|^2 \approx m\omega_0^2 |b|^2 \approx \frac{m}{4} \frac{\left(\frac{e\mathcal{E}}{m}\right)^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2} . \quad (1.9)$$

Sind die Phasen der verschiedenen Moden unkorreliert, so sind ihre Beiträge (1.9) im Mittel additiv. Die Gesamtenergie eines Resonators ist damit

$$\bar{E}_{\omega_0} = \int_0^\infty E_{\omega_0}(\omega) dN(\omega) = 3V \overline{|\mathcal{E}_{\omega_0}|^2} = \bar{U}_{\omega_0}$$

unter Verwendung von (1.5) und von  $(x^2 + a^2)^{-1} \approx \frac{\pi}{a} \delta(x)$ . Die letzte Gleichung folgt aus der Isotropie der Strahlung:  $3V \overline{|\mathcal{E}_{\omega_0}|^2} = V \overline{|\vec{E}_{\omega_0}|^2} = \bar{U}_{\omega_0}$ .

ii) Folgende Überlegung, die Planck nicht machte, drängt sich hier auf. Die Wahrscheinlichkeit, ein Hamiltonsches System mit Phasenkoordinaten  $p, q$  in  $dpdq$  zu finden, ist bei der Temperatur  $T$  nach Boltzmann

$$w(p, q)dpdq = \frac{e^{-\beta H(p, q)}}{Z(\beta)} dpdq, \quad (1.10)$$

wobei  $H$  die Hamiltonfunktion ist,  $\beta = (kT)^{-1}$  die inverse Temperatur,  $k$  die Boltzmann-Konstante und

$$Z(\beta) = \int dpdq e^{-\beta H(p, q)}. \quad (1.11)$$

Die mittlere Energie ist damit

$$\bar{E} = \int dpdq H(p, q)w(p, q) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z(\beta).$$

Für einen 1-dimensionalen harmonischen Oszillator,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2,$$

ist (1.11) ein Gaussches Integral,

$$Z(\beta) = \frac{2\pi}{\beta\omega_0},$$

und damit

$$\bar{E} = \frac{1}{\beta} = kT, \quad (1.12)$$

was unabhängig von  $\omega_0$  ist. Wendet man dies auf die Resonatoren an und, indirekt über (1.6), auf  $\bar{U}_{\omega_0}$  (oder, wie Rayleigh, direkt auf die Feldoszillatoren (1.2), ohne auf die Einstellung des Gleichgewichts einzugehen), so folgt aus (1.7)

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT, \quad (1.13)$$

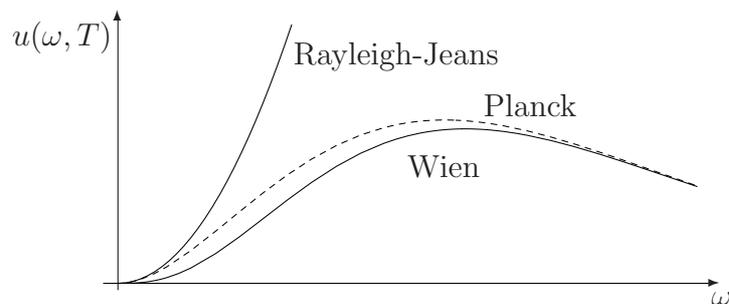
(Rayleigh 1900, berichtigt durch Jeans 1905). Dieses Verhalten führt auf die Energie pro Volumeneinheit

$$\int_0^\infty u(\omega, T) d\omega = \infty \quad (!)$$

(“Ultraviolett katastrophe”) und steht im Widerspruch zum experimentellen Verhalten

$$u(\omega, T) \propto \omega^3 e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \quad (1.14)$$

für grosse  $\omega$  (Wien, 1896). Planck folgerte über (1.6, 1.7)  $\bar{E}_\omega \propto \omega e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$  und bemerkte, dass  $\hbar$  (damals anders benannt) eine neue Naturkonstante sein musste.



Am 7. Oktober 1900 erfuhr Planck von Messungen, die eine Abweichung vom Wienschen Gesetz zeigten. Noch am selben Tag änderte er den Ausdruck für  $\bar{E}_\omega$  ab und gelangte so zum **Strahlungsgesetz**

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1}, \quad (1.15)$$

(s. Übungen für Details). Sie interpoliert zwischen (1.13) und (1.14). Aus dem Vergleich mit der neuen experimentellen Kurve fand er

$$\begin{aligned} \hbar &= 1,04 (1,05549) \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} , \\ k &= 1,34 (1,3807) \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \end{aligned}$$

(in Klammern die heutigen Werte) und auch den damals besten Wert für die Avogadro Zahl

$$N_A = \frac{R}{k} = 6,17 (6,022) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} .$$

Die grossartigste Bestätigung fand das Plancksche Gesetz (1.15) in der gemessenen Spektralverteilung der kosmischen Hintergrundstrahlung bei  $T = 2,73\text{K}$  (COBE 1992, WMAP 2003).

Nachträglich (14. Dez. 1900) begründet Planck (1.15) so:

“Wir betrachten aber – und dies ist der wesentlichste Punkt der ganzen Berechnung –  $E$  als zusammengesetzt aus einer ganz bestimmten Anzahl endlicher Teile und bedienen uns dazu der Naturconstanten  $h = 6,55 \cdot 10^{-27}$  [erg· sec].”

(hier ist  $E$  die Energie eines Resonators und  $h = 2\pi\hbar$ ).

Die gleichen Teile setzt er dann gleich  $\hbar\omega_0$ , d.h. die möglichen Energien eines Resonators sind **quantisiert**:

$$E_n = n\hbar\omega_0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) . \quad (1.16)$$

Dies bedingt die Ersetzung von (1.10) durch

$$w_n = \frac{e^{-\beta n\hbar\omega_0}}{Z(\beta)}, \quad Z(\beta) = \sum_0^\infty e^{-\beta n\hbar\omega_0} = \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_0}}$$

und damit

$$\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial\beta} \log Z(\beta) = \frac{\hbar\omega_0}{e^{\beta\hbar\omega_0} - 1},$$

was über (1.6, 1.7) auf (1.15) führt. (s. Übungen für Plancks äquivalente Überlegung).

Beachte, dass Planck die Feldoszillatoren nicht quantisierte. Als Einstein dies tat (s. unten), erschien ihm der Schritt zu radikal. Umgekehrt bemängelte Einstein, dass die Quantisierungshypothese (1.16) im Widerspruch zum kontinuierlichen Energieaustausch steht, wie er in (1.8) zum Ausdruck kommt.

## 1.2 Licht als Teilchen (Einstein 1905)

Der 1. und 2. Hauptsatz der Thermodynamik besagen in knapper Form  $dU = TdS - pdV$ , d.h.

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV, \quad (1.17)$$

wobei  $S$ : Entropie,  $U$ : innere Energie,  $V$ : Volumen,  $p$ : Druck,  $T$ : Temperatur sich auf Gleichgewichtszustände eines physikalischen Systems beziehen. Diese sollen durch Angabe zweier Zustandsvariablen, z.B.  $U$  und  $V$ , bestimmt sein. So legt (1.17) die partiellen Ableitungen von  $S(U, V)$  fest:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \frac{1}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{p}{T}.$$

- Für ein ideales Gas aus  $N$  Teilchen ist nach dem idealen Gasgesetz

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{p}{T} = \frac{Nk}{V},$$

also

$$S(U, V) - S(U, V_0) = \int_{V_0}^V \frac{\partial S}{\partial V} dV = Nk \log \frac{V}{V_0} = k \log \left(\frac{V}{V_0}\right)^N. \quad (1.18)$$

- Ein Oszillator hat nur eine unabhängige Zustandsvariable, z.B.  $u$  oder  $T$ . Im Wienschen Grenzfall hat ein Feldoszillator der Frequenz  $\omega$  die (mittlere) Energie

$$u(T) = \hbar\omega e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}},$$

sodass

$$\begin{aligned} \frac{ds}{du} &= \frac{1}{T} = -\frac{k}{\hbar\omega} \log \frac{u}{\hbar\omega}, \\ s(u) &= \int \frac{ds}{du} du = -\frac{ku}{\hbar\omega} \left( \log \frac{u}{\hbar\omega} - 1 \right), \end{aligned} \quad (1.19)$$

(verwende  $\int \log x dx = x(\log x - 1)$ ; die Wahl der Integrationskonstanten ist unwesentlich).

- Einstein betrachtet als System das e.m. Feld im Hohlraum im Frequenzbereich  $[\omega, \omega + \Delta\omega)$  (monochromatische Strahlung). Dessen Entropie und Energie sind

$$S(U, V) = \Delta N \cdot s(u), \quad U = \Delta N \cdot u,$$

wobei

$$\Delta N = V \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \Delta\omega$$

die Anzahl Oszillatoren ist. Also, mit (1.19),

$$S(U, V) = \Delta N \cdot \left( -\frac{kU/\Delta N}{\hbar\omega} \right) \cdot \left( \log \left( \frac{\pi^2 c^3 U}{\hbar\omega^3 \Delta\omega V} \right) - 1 \right)$$

und

$$S(U, V) - S(U, V_0) = \frac{kU}{\hbar\omega} \log \frac{V}{V_0} = k \log \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{U}{\hbar\omega}}.$$

Nun vergleicht dies Einstein mit (1.18) und schliesst:

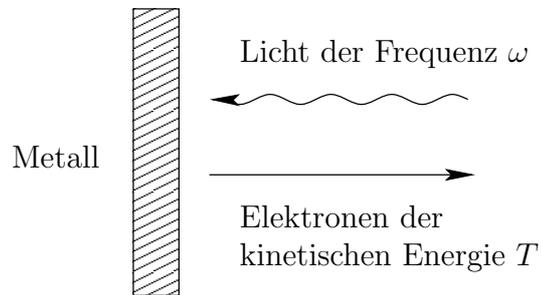
“Monochromatische Strahlung geringer Dichte (innerhalb des Gültigkeitsbereich der Wienschen Strahlungsformel) verhält sich in wärmetheoretischer Beziehung so, wie wenn sie aus voneinander unabhängigen Energiequanten von der Grösse  $\hbar\omega$  bestünde.”

Als Gleichung:

$$E = \hbar\omega . \quad (1.20)$$

Er wendet diesen “heuristischen Gesichtspunkt” an, um “zu untersuchen, ob auch die Gesetze der Erzeugung und Verwandlung des Lichts so beschaffen sind, wie wenn das Licht aus derartigen Lichtquanten bestünde”. Eine Anwendung ist auf den **photoelektrischen Effekt** (entdeckt 1887, Hertz).

Beobachtung (Lenard 1902): Die Energie  $T$  der emittierten Elektronen hängt (monoton wachsend) nur von der Frequenz, nicht aber von der Intensität der einfallenden Strahlung ab, entgegen der klassischen Vorstellung. Davon abhängig ist hingegen die Emissionsrate.



**Deutung** (Einstein 1905): ein Lichtquant  $\hbar\omega$  wird an ein einziges Elektron übergeben, das dann aus dem Metall mit der Energie

$$T = \hbar\omega - W \quad (1.21)$$

( $W$ : Austrittsarbeit) entweicht. (Erst um 1915 waren die experimentellen Daten gut genug, um (1.21) zu bestätigen.)

### 1.3 Die Bohrsche Quantenhypothese (1913)

Atome weisen diskrete Lichtemissionsspektren auf. Für das Wasserstoff-Atom gilt die empirisch hergeleitete Formel

$$\omega_{nm} = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n, m = 1, 2, \dots, \quad n > m, \quad (1.22)$$

(Balmer 1885, aus den 4 Linien  $m = 2, n = 3, 4, 5, 6$ ).

Bohr nimmt an (analog zur Planckschen Quantisierung des Resonators, aber gegen klassische Vorstellungen), dass das Atom nur in Zuständen mit diskreten Energien  $E_n$  existieren kann. Strahlung (nämlich ein Lichtquant) der Frequenz

$$\omega_{nm} = \frac{1}{\hbar}(E_n - E_m)$$

wird emittiert beim Übergang  $n \rightarrow m$ ,  $E_m < E_n$ . (Auch der Übergang  $m \rightarrow n$  ist möglich unter Absorption eines Lichtquants gleicher Frequenz.) Mit diesem Ansatz wird der spektroskopische Befund (1.22) als Energiebilanz erklärt. Für das H-Atom ergibt sich

$$E_n = -\text{Ry} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.23)$$

mit  $\text{Ry} = R \cdot \hbar$ .

Als Modell des Atoms verwendet Bohr das von Rutherford (1911): Ein Elektron (Masse  $m$ , Ladung  $-e$ ) im Feld eines viel schwereren Kerns (Ladung  $e$ ), den wir zunächst als fest annehmen. Längs klassischen Bahnen würde das Elektron strahlen und so dem Kern stets näher kommen. Bohr wählt die Quantenzustände unter den Kreisbahnen (Radius  $r$ , Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , Drehimpuls  $L$ , Energie  $E$ ). Für diese gilt

$$mr\omega^2 = \frac{e^2}{r^2}, \quad L = mr^2\omega, \quad E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}.$$

Daraus folgt

$$r = \frac{L^2}{me^2}, \quad E = -\frac{me^4}{2L^2}, \quad \omega = \frac{me^4}{L^3}.$$

Nach (1.23) muss  $L \propto n$  sein. Bohr setzt als **Quantenbedingung**:

$$L_n = \hbar n, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.24)$$

und findet

$$\begin{aligned} r_n &= a_0 n^2, & a_0 &= \frac{\hbar^2}{me^2} & \text{(Bohr-Radius)}, \\ E_n &= -\text{Ry} \cdot \frac{1}{n^2}, & \text{Ry} &= \frac{me^4}{2\hbar^2} & \text{(Rydbergkonstante)}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\omega_n = \frac{2\text{Ry}}{\hbar n^3} \quad (1.26)$$

mit den heutigen Werten

$$a_0 = 0,529177 \cdot 10^{-10} \text{ m}, \quad \text{Ry} = 13,6058 \text{ eV}.$$

Berücksichtigt man die Mitbewegung des Kerns der Masse  $M$ , so ist  $m$  durch die reduzierte Masse zu ersetzen; ebenso seine Ladung  $e$  durch  $Ze$  bei wasserstoffähnlichen Ionen wie  $\text{He}^+$ ; also Ry in (1.25) durch

$$Z^2 \frac{M}{M+m} \text{Ry}.$$

Die Wahl von  $\hbar$  als Proportionalitätsfaktor in (1.24) ist zwingend, falls man die Gültigkeit der klassischen Strahlungstheorie für grosse  $n$  fordert: beim Übergang  $n \rightarrow n-1$  soll dann Licht der klassischen Umlauffrequenz  $\omega_n$  ausgestrahlt werden. In der Tat stimmt

$$\omega_{n,n-1} = \frac{\text{Ry}}{\hbar} \left( \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) \approx \frac{2\text{Ry}}{\hbar n^3}, \quad (n \rightarrow \infty)$$

mit (1.26) überein. Später (1923) erhebt Bohr dies zum **Korrespondenzprinzip**: Die Quantentheorie reproduziert die klassische Physik im Grenzfall grosser Quantenzahlen.

Grosse Erfolge der Bohrschen Theorie waren u.A.:

- Der richtige Wert von  $R$ .
- $a_0$  als richtige Grössenordnung der Atome
- Die Erklärung des Verhältnisses  $R_{\text{He}^+} : R_{\text{H}} = 4,0016$ .

### 1.4 Die Quantisierung der Wirkung (Sommerfeld 1915)

Sommerfeld verallgemeinert die Bohrsche Bedingung (1.24). Die Quantisierung der **gebundenen** Bahnen eines Hamiltonschen System mit **einem** Freiheitsgrad ist die Quantisierung der Wirkung:

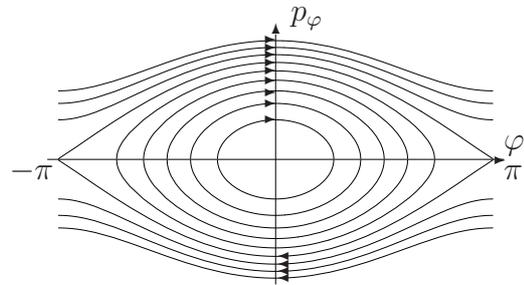
$$\oint p dq = 2\pi n\hbar = nh, \quad (n = (0), (\pm)1, (\pm)2, \dots), \quad (1.27)$$

wobei das Integral sich über eine Bahnkurve erstreckt.

**Beispiele. 1.** Das ebene Pendel (Masse  $m$ , Länge  $l$ ) mit Hamiltonfunktion

$$H(\varphi, p_\varphi) = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl \cos \varphi$$

hat je eine Bahnkurve bei Energien  $E < mgl$ , aber je zwei, falls  $E \geq mgl$ . Nur im zweiten Fall kann  $n$  auch negativ sein.

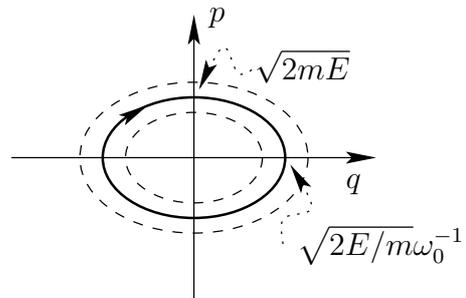


**2.** Harmonischer Oszillator. Die Bahnkurve der Energie  $E$ ,

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2 = E,$$

ist eine Ellipse im Phasenraum, also

$$\oint p dq = \pi\sqrt{2mE} \cdot \sqrt{\frac{2E}{m}}\omega_0^{-1} = \frac{2\pi E}{\omega_0}$$



und (1.27) liefert

$$E_n = n\hbar\omega_0,$$

was überraschend mit Plancks Postulat (1.16) übereinstimmt.

**3.** Ein Teilchen, das sich frei längs einem Kreis bewegt (Phasenkoordinaten  $(\varphi, p_\varphi)$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ). Der Drehimpuls  $p_\varphi = L$  ist erhalten. Also ist

$$\oint p_\varphi d\varphi = 2\pi L$$

und (1.27) ist (1.24).

Die Bedingung (1.27) lässt sich auf **vollständig separable Systeme** (s. Allgemeine Mechanik) mit  $f$  Freiheitsgraden erweitern: Solche, für welche die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi Gleichung

$$H\left(q, \dots, q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_f}\right) = E \equiv \alpha_1$$

( $H(q, p)$ : Hamiltonfunktion in passenden Koordinaten) eine vollständige Lösung der Form

$$S(q_1, \dots, q_f, \alpha_1, \dots, \alpha_f) = \sum_{k=1}^f S_k(q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_f)$$

besitzt. Dabei sind  $(\alpha_1, \dots, \alpha_f) = \alpha$  Erhaltungsgrößen. Im  $2f$ -dimensionalen Phasenraum verläuft die Bewegung auf dem Schnitt von  $f$  durch  $\alpha$  bestimmte Flächen

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}(q, \alpha) = \frac{\partial S_k}{\partial q_k}(q_k, \alpha), \quad (k = 1, \dots, f). \quad (1.28)$$

Für festes  $k$  definiert die Gleichung einen (topologischen) Kreis in der  $(q_k, p_k)$ -Ebene, falls die Bewegung beschränkt ist (wie für  $f = 1$  die Kreise in der Figur). Die  $f$ -dimensionale Schnittfläche ist deren kartesisches Produkt und somit ein **Torus**. Die Sommerfeld-Bedingung ist anwendbar: Sie zeichnet als erlaubt diejenigen Tori (und nicht spezielle, darin verlaufende Bahnen) aus, für welche

$$W_k(\alpha) := \oint p_k dq_k = 2\pi n_k \hbar, \quad (n_k = 0, (\pm)1, \dots). \quad (1.29)$$

für alle  $k = 1, \dots, f$ , wo  $p_k$  durch (1.28) gegeben ist. Dies bestimmt  $(\alpha_1, \dots, \alpha_f)$  als Funktion der  $n_k$  und insbesondere die möglichen Energien  $E_{n_1 \dots n_f}$ .

**Beispiel.** Das 2-Körperproblem (s. Allgemeine Mechanik). Nach Separation der Schwerpunktsbewegung und Verwendung von Polarkoordinaten  $(r, \theta, \varphi)$  für die Relativbewegung,

$$\vec{x} = r\vec{e}_r, \quad \dot{\vec{x}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r(\sin\theta)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi,$$

lautet deren kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2),$$

mit kanonischen Impulsen

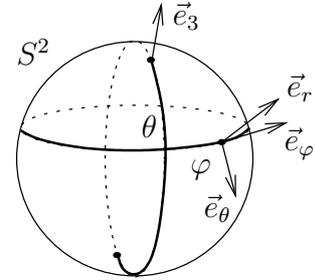
$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}.$$

Der Drehimpuls ist

$$\vec{L} = m\vec{x} \wedge \dot{\vec{x}} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta + mr^2(\sin\theta)\dot{\varphi}\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\varphi = p_\theta\vec{e}_\varphi - \frac{p_\varphi}{\sin\theta}\vec{e}_\theta,$$

sodass

$$\vec{L} \cdot \vec{e}_3 = p_\varphi, \quad \vec{L}^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}. \quad (1.30)$$



Die Hamiltonfunktion lautet

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(r)$$

und die Hamilton-Jacobi Gleichung

$$\frac{1}{2m} \left\{ \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left( \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \right\} + V(r) = E \equiv \alpha_1$$

ist vollständig separabel. Der Ansatz

$$S = S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_\varphi(\varphi)$$

führt auf

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_\varphi}{\partial \varphi} &= \alpha_\varphi, \\ \left( \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2 \theta} &= \alpha_\theta^2, \\ \left( \frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} &= 2m(E - V(r)). \end{aligned}$$

Damit können  $W_k(\alpha)$ , ( $k = r, \theta, \varphi$ ), in (1.29) berechnet werden:

$$\begin{aligned} W_\varphi(\alpha) &= 2\pi\alpha_\varphi, \\ W_\theta(\alpha) &= 2 \int_{\theta_{\min}=\pi-\theta_{\max}}^{\theta_{\max}} \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta = 2\pi(\alpha_\theta - \alpha_\varphi), \end{aligned}$$

also

$$\alpha_\theta = \frac{1}{2\pi} (W_\varphi + W_\theta), \quad (1.31)$$

$$W_r(\alpha) = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}} dr. \quad (1.32)$$

Nach Quantisierung der Wirkungen (1.29) sind die erlaubten **Drehimpulse** und **Energien** durch die Quantenzahlen  $n_r, n_\varphi, n_\theta$  bestimmt, s. (1.30, 1.31, 1.32):

$$\begin{aligned} \vec{L} \cdot \vec{e}_3 &= \alpha_\varphi = n_\varphi \cdot \hbar, \\ \vec{L}^2 &= \alpha_\theta^2 = \underbrace{[(n_\varphi + n_\theta)\hbar]^2}_{:=l}, \\ E &= E_{n_r, l}. \end{aligned}$$

Die Energien hängen nur von zwei (statt 3) Quantenzahlen ab, dafür kommt jede  $2l + 1$  mal vor (**Entartung**), denn  $|n_\varphi| \leq l$  wegen  $|\vec{L} \cdot \vec{e}_3| \leq |\vec{L}|$ , also  $(n_\varphi, n_\theta) = (-l, 2l), \dots, (l, 0)$ .

**Spezialfall:** Wasserstoff-Atom (Kepler-Problem), d.h.  $V(r) = -e^2/r$ . Dann ist für  $E < 0$  (damit Bahnen gebunden)

$$W_r(\alpha) = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2mE + \frac{2me^2}{r} - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}} dr = -2\pi \left( \alpha_\theta - \frac{me^2}{\sqrt{-2mE}} \right),$$

(verwende

$$2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{-A + 2\frac{B}{r} - \frac{C}{r^2}} dr = -2\pi \left( \sqrt{C} - \frac{B}{\sqrt{A}} \right)$$

für  $A, B, C > 0$ ), und damit

$$n_r \hbar = -l \hbar + e^2 \sqrt{\frac{m}{-2E}}, \quad (n_r = 1, 2, \dots),$$

$$E_n = -\frac{me^4}{2n^2 \hbar^2}, \quad (n = n_r + l = 1, 2, \dots).$$

Dies stimmt mit (1.23) überein. Die Entartung ist nun

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2. \quad (1.33)$$

Die Entartungen sind Ausdruck von Symmetrien: der Rotationen (Drehimpulserhaltung) beim 2-Körper-Problem und, darüber hinaus beim Kepler-Problem, der Erhaltung des Laplace-Lenz-Vektors.

Auf Systeme, die nicht separabel sind (und dies ist der generische Fall), ist Sommerfelds Bedingung nicht anwendbar.

## 1.5 Emission und Absorption (Einstein 1917)

Einstein gibt eine neue Herleitung des Planckschen Gesetzes (1.15). Auch er bestimmt die spektrale Energiedichte des Strahlungsfelds über das Gleichgewicht mit der Materie, ohne allerdings weder (1.6) noch ein konkretes Modell der Materie, wie die Resonatoren, zu verwenden. Die Moleküle, die einfachheitshalber alle von derselben Sorte seien, haben diskrete Energien  $E_n$ , wobei Entartungen ( $E_n = E_m$  für  $n \neq m$ ) erlaubt sind. Jedes Molekül kann folgende Übergänge eingehen:

- **spontane Emission:** Übergang  $n \rightarrow m$ , ( $E_n > E_m$ ) mit

$$\text{Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit: } A_{nm}. \quad (1.34)$$

- **induzierte Emission, bzw. Absorption** in Anwesenheit von Strahlung: Übergang  $n \rightarrow m$ , ( $E_n > E_m$ , bzw.  $E_n < E_m$ ) mit

$$\text{Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit: } B_{nm} u(\omega_{nm}). \quad (1.35)$$

wobei  $u(\omega)$  die spektrale Energiedichte ist und  $\omega_{nm}$  eine durch  $n$  und  $m$  festgelegte Frequenz:  $\omega_{nm} = \omega_{mn}$ .

Im thermischen Gleichgewicht (Temperatur  $T$ ) ist die mittlere Anzahl Moleküle im Zustand  $E_n$

$$N_n = N \cdot \frac{e^{-E_n/kT}}{Z},$$

wobei  $N$  deren Gesamtzahl und  $Z = \sum_n e^{-E_n/kT}$  die sogenannte Zustandssumme ist. Für die Zahl der Moleküle, die pro Zeiteinheit den Übergang  $n \rightarrow m$  machen, setzt somit Einstein:

$$W_{nm} = \frac{N}{Z} e^{-E_n/kT} \cdot \begin{cases} B_{nm}u(\omega_{nm}) + A_{nm}, & (E_n > E_m), \\ B_{nm}u(\omega_{nm}), & (E_n < E_m). \end{cases}$$

Im Gleichgewicht ist  $W_{nm} = W_{mn}$ , also für  $E_n > E_m$ :

$$u(\omega_{nm}, T) = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \left( \frac{B_{mn}}{B_{nm}} e^{\frac{E_n - E_m}{kT}} - 1 \right)^{-1}, \quad (1.36)$$

mit expliziter  $T$ -Abhängigkeit der rechten Seite! Aus der Wienschen Strahlungsformel (1.14) folgt deshalb die Bohrsche Frequenzbedingung

$$E_n - E_m = \text{konst} \cdot \omega_{nm} =: \hbar\omega_{nm}.$$

Weiter soll bei festen  $n, m$  für  $T \rightarrow \infty$  das klassische Rayleigh-Jeans Gesetz (1.13) gelten. Dies verlangt zunächst  $u \rightarrow \infty$  für  $T \rightarrow \infty$ , also

$$B_{mn} = B_{nm}, \quad (1.37)$$

und dann weiter

$$\frac{A_{nm}}{B_{nm}} \left( e^{\frac{E_n - E_m}{kT}} - 1 \right)^{-1} \rightarrow \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \frac{kT}{\hbar\omega_{nm}} = \frac{\omega_{nm}^2}{\pi^2 c^3} kT.$$

Daraus folgt die Beziehung

$$\frac{A_{nm}}{B_{nm}} = \frac{\hbar\omega_{nm}^3}{\pi^2 c^3} \quad (1.38)$$

zwischen spontaner und induzierter Emission und (1.36) wird zum Planckschen Strahlungsgesetz (1.15) für  $u(\omega_{nm}, T)$ . Weil darin alle Moleküleigenschaften entfallen, muss es für beliebige Frequenzen  $\omega$  gelten. Die Berechnung der molekularen Grössen  $E_n, A_{nm}, B_{nm}$  bleibt der späteren Quantenmechanik vorbehalten (s. Kap. 9). Zum Vergleich mit ihr ist es zweckmässig, die Wahrscheinlichkeit (1.35) für induzierte Übergänge auf die mittlere Anzahl Lichtquanten  $\bar{U}_\omega/\hbar\omega$  in einer Mode der Frequenz  $\omega = \omega_{nm}$  zu beziehen, vgl. (1.7),

$$B_{nm}u(\omega_{nm}) = B_{nm} \frac{\hbar\omega_{nm}^3}{\pi^2 c^3} N_{\omega_{nm}} =: \tilde{B}_{nm} \cdot N_{\omega_{nm}}.$$

Dann vereinfacht sich (1.38) nämlich zu

$$A_{nm} = \tilde{B}_{nm}.$$

Bemerkenswert ist die Beschreibung (1.34) der spontanen Emission: Selbst im Vakuum ( $u = 0$ ) gibt es für ein Molekül in einem **bestimmten** Quantenzustand nur eine **Wahrscheinlichkeitsaussage** für das zukünftige Verhalten. Dieser prinzipielle Verzicht auf eine (im klassischen Sinn) kausale Dynamik haftet der ganzen Quantentheorie an.

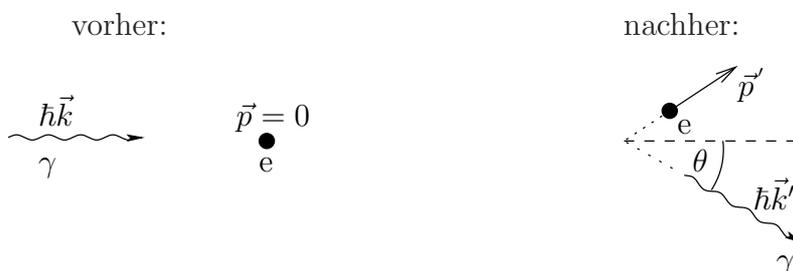
In derselben Arbeit erweitert Einstein seine Lichtquantenhypothese (1.20) zu einer relativistisch kovarianten Beziehung zwischen dem 4er-Impuls  $(E/c, \vec{p})$  und dem 4er-Wellenvektor  $(\omega/c, \vec{k})$ ,

$$\begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} \omega/c \\ \vec{k} \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad p^\mu = \hbar k^\mu, \quad (1.39)$$

und schliesst somit, dass ein Lichtquant auch einen Impuls  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$  mit  $|\vec{k}| = \omega/c$  trägt.

## 1.6 Licht als Teilchen (Compton 1922)

Der direkte Nachweis der Wellen-Teilchen Dualität des Lichts lieferte Compton. Bei der Streuung von Röntgenstrahlen an (ruhenden) Elektronen ändert sich der Impuls der Lichtquanten (Teilcheneigenschaft) und wegen (1.39) die Wellenlänge  $\lambda$  der Strahlung (Welleneigenschaft):



Aus der Energie-Impuls Erhaltung

$$\hbar k^\mu + p^\mu = \hbar k'^\mu + p'^\mu$$

folgt

$$\lambda' - \lambda = \frac{4\pi\hbar}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (1.40)$$

Rechnung: Das Minkowski-Quadrat von  $\hbar(k'^\mu - k^\mu) = p^\mu - p'^\mu$  ist  $-\hbar^2 k^\mu k'_\mu = m^2 c^2 - p^\mu p'_\mu$  mit

$$k^\mu k'_\mu = |\vec{k}||\vec{k}'|(1 - \cos \theta) = 2|\vec{k}||\vec{k}'| \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$p^\mu p'_\mu = mc \frac{E'}{c} = mc(mc + \hbar|\vec{k}| - \hbar|\vec{k}'|),$$

also

$$-2\hbar^2 |\vec{k}||\vec{k}'| \sin^2 \frac{\theta}{2} = mc\hbar(|\vec{k}'| - |\vec{k}|).$$

Mit  $\lambda = 2\pi/|\vec{k}|$  folgt (1.40).

## 1.7 Teilchen als Welle (de Broglie 1923)

De Broglie überträgt die Wellen-Teilchen Dualität von Licht auf Materie: einem Teilchen mit Impuls  $p^\mu$  ist eine Welle ("Materiewelle") zugeordnet mit Wellenvektor  $k^\mu$ , wie in

(1.39). Aus  $p^\mu p_\mu = (E/c)^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2$  folgt das Dispersionsgesetz dieser Wellen:

$$\omega(\vec{k}) = c \sqrt{\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 + \vec{k}^2}.$$

In nicht-relativistischer Näherung, wo

$$E(\vec{p}) = \underline{mc^2} + \frac{\vec{p}^2}{2m}, \quad (1.41)$$

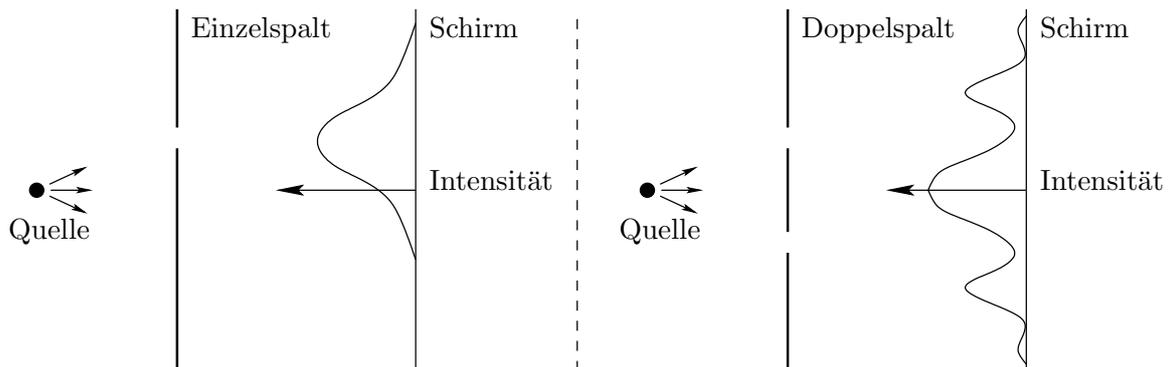
lautet es

$$\omega(\vec{k}) = \frac{mc^2}{\hbar} + \frac{\hbar \vec{k}^2}{2m}, \quad (1.42)$$

wobei die unterstrichenen Terme der Ruheenergie entsprechen. Nicht relativistisch betrachtet kann eine solche Konstante in der Energie  $E(\vec{p})$  weggelassen werden und ebenso (siehe später) bei der Frequenz  $\omega(\vec{k})$ .

De Broglie vermutet, dass sich Beugungs- und Interferenzerscheinungen auch mit Teilchenstrahlen ergeben.

**Beispiel.** Doppelspaltexperiment



Die Intensität beim Doppelspalt ist nicht die Summe der Intensitäten von je einem offenen Spalt. Die Interferenz deutet darauf hin, dass hingegen Amplituden additiv sind. Das Experiment kann heute mit Elektronen, Neutronen, ja Fulleren-Molekülen  $C_{60}$  durchgeführt werden.

Weitere Entwicklungen, auf die wir hier nicht eingehen, waren das Ausschlussprinzip (Pauli, 1925), welches mit einem weiteren, 2-wertigen Freiheitsgrad im Zusammenhang steht (Pauli, 1924); letzterer wurde sodann als **Spin** des Elektrons gedeutet (Uhlenbeck, Goudsmit 1925).

Darauf folgte die moderne Form der Quantenmechanik in der Gestalt der Matrizenmechanik (Heisenberg, dann Born und Jordan, sowie Dirac, alle 1925) und der Wellenmechanik (Schrödinger 1926), auf die im nächsten Kapitel eingegangen wird.

## 2 Wellen- und Matrizenmechanik

---

### 2.1 Wellenmechanik und Schrödinger-Gleichung

Nach de Broglie, s. (1.39), ist einem Teilchen mit Impuls  $\vec{p}$  eine Welle (Zustand)

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{x}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (\vec{p} = \hbar\vec{k}), \quad (2.1)$$

zugeordnet. Allgemeine Zustände ergeben sich durch Superposition

$$\psi(\vec{x}) = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} \hat{\psi}(\vec{p}) d^3p. \quad (2.2)$$

Die Zeitentwicklung eines Zustands der Energie  $E$  ergibt sich durch Multiplikation mit

$$\cdot e^{-i\omega t}, \quad (E = \hbar\omega).$$

Für ein **freies Teilchen** ist  $E = E(\vec{p})$  und damit

$$\psi(\vec{x}, t) = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - E(\vec{p})t)/\hbar} \hat{\psi}(\vec{p}) d^3p.$$

Die Bewegung des Zustands erfüllt

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - E(\vec{p})t)/\hbar} E(\vec{p}) \hat{\psi}(\vec{p}) d^3p$$

und, falls das Teilchen **nicht-relativistisch** (1.41) ist,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi.$$

Anders gesagt: Dies erhält man aus (1.42) durch die Substitution

$$\omega \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{k} \rightarrow -i \vec{\nabla} \quad (2.3)$$

und Anwendung auf  $\psi(\vec{x}, t)$ . (Für ebene Wellen  $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$  liefern ja die rechten Seiten (2.3) die linken.)

Für ein **nicht freies** Teilchen mit klassischer Hamiltonfunktion

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$$

liefert (2.3) die **Schrödinger-Gleichung**

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}) \right) \psi. \quad (2.4)$$

Damit ist  $H$  auch quantenmechanisch die Erzeugende der Zeitentwicklung. Für Wellen fester Frequenz,

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}) e^{-iEt/\hbar},$$

lautet (2.4)

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(\vec{x}))\psi = 0 . \quad (2.5)$$

Schrödinger (1926) erhielt diese zeitunabhängige Gleichung als wellenoptische Verallgemeinerung der Hamilton-Jacobi Gleichung. Hier soll sein Weg skizziert werden: In der skalaren Wellenoptik ist eine Licht**welle** fester Frequenz  $\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x})e^{-i\omega t}$  eine Lösung der Gleichung (mit Wellenzahl  $k(\vec{x}) = \omega n(\vec{x})/c$  und Brechungsindex  $n(\vec{x})$ )

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0 . \quad (2.6)$$

Sie kann unter Umständen (siehe unten) ein Bündel von Licht**strahlen** beschreiben über die Zerlegung

$$\psi(\vec{x}) = A(\vec{x})e^{iS(\vec{x})}$$

in Amplitude  $A(\vec{x})$  und Phase  $S(\vec{x})$  (beide reell), und zwar als Schar der Orthogonaltrajektorien  $\vec{x}(s)$  ( $s$ : Bogenlänge) der Flächen konstanter Phase:

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{\vec{\nabla}S}{|\vec{\nabla}S|} . \quad (2.7)$$

Mit

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(Ae^{iS}) &= (\vec{\nabla}A + iA\vec{\nabla}S)e^{iS} , \\ \Delta(Ae^{iS}) &= \text{div } \vec{\nabla}(Ae^{iS}) = (\Delta A + iA\Delta S + 2i\vec{\nabla}A \cdot \vec{\nabla}S - A(\vec{\nabla}S)^2)e^{iS} \end{aligned}$$

besagt (2.6) nach Trennung von Real- und Imaginärteil

$$\Delta A - A(\vec{\nabla}S)^2 + Ak^2 = 0 , \quad (2.8)$$

$$A\Delta S + 2\vec{\nabla}A \cdot \vec{\nabla}S = 0 . \quad (2.9)$$

Die Strahlenoptik ist eine gute Näherung in Gebieten, wo die Amplitude  $A(\vec{x})$  wenig variiert über eine Wellenlänge  $2\pi/k$ , oder genauer, wo

$$\left| \frac{\Delta A}{A} \right| \ll k^2 . \quad (2.10)$$

Dort wird (2.8) zu

$$(\vec{\nabla}S)^2 = k^2 \quad (2.11)$$

und (2.7) zu

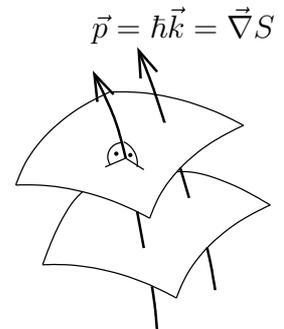
$$\vec{k} \equiv k \frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{\nabla}S . \quad (2.12)$$

Die Gleichung  $\vec{p} = \vec{\nabla}S$ , wodurch in der Hamiltonschen Mechanik die Wirkung  $S$  ein Bündel von Bahnen beschreibt, steht über  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$  in Übereinstimmung mit (2.12), falls  $S/\hbar$  als Phase einer Lösung von (2.5) angesetzt wird. Dann wird (2.11) zu

$$\left( \frac{\vec{\nabla}S}{\hbar} \right)^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(\vec{x})) ,$$

also zur HJ-Gleichung

$$\frac{(\vec{\nabla}S)^2}{2m} + V(\vec{x}) = E .$$



Schrödinger vollzieht den Übergang von der Mechanik zur Wellenmechanik auch für Hamiltonsche Systeme des Typs

$$H = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(q) p_\alpha p_\beta + V(q) .$$

Wir formulieren die Schrödinger Gleichung aber nur für  $N$ -Teilchensysteme

$$H = \sum_{k=1}^N \frac{\vec{p}_k^2}{2m_k} + V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) :$$

Die Wellenfunktion  $\psi = \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)$  erfüllt

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( \sum_{k=1}^N -\frac{\hbar^2 \Delta_k}{2m_k} + V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \right) \psi , \quad (2.13)$$

wobei  $\Delta_k$  der gewöhnliche Laplace-Operator im  $\mathbb{R}^3$  ist, der nur auf die Variable  $\vec{x}_k$  wirkt. Wichtig ist, dass die **Wellenfunktion**  $\psi(q)$  auf dem **Konfigurationsraum** des klassischen System lebt, hier dem  $\mathbb{R}^{3N}$ . Nur im Fall eines Teilchens kann dieser mit dem physikalischen  $\mathbb{R}^3$  identifiziert werden. Die Auffassung der Materiewelle als einer Welle im Raum ist somit nicht haltbar.

Unter (2.4) verhalten sich die Grössen

$$\rho(\vec{x}, t) = |\psi|^2 = A^2 , \quad (2.14)$$

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \bar{\psi} \vec{\nabla} \psi = \frac{A^2}{m} \vec{\nabla} S \quad (2.15)$$

wie eine Dichte, bzw. eine Stromdichte, insofern die **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0 \quad (2.16)$$

gilt (Nachrechnen; oder: Im zeitabhängigen Fall (2.4) erhält man statt (2.9)

$$A \Delta S + 2 \vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} S = -2m \frac{\partial A}{\partial t} ,$$

nach Multiplikation mit  $A$  also  $\text{div}(A^2 \vec{\nabla} S) = -m \partial A^2 / \partial t$ , d.h. (2.16)). In integrierter Form:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d^3x = - \int_{\partial\Omega} \vec{j} \cdot d\vec{\sigma} , \quad (\Omega \subset \mathbb{R}^3) .$$

Insbesondere ist  $\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x$  konstant in  $t$  (falls  $\psi$  für  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  abfällt).

Eine Energieverschiebung  $V(\vec{x}) \rightarrow V(\vec{x}) + E_0$  ändert zwar die Frequenz der Lösung, vgl. (1.42), gemäss  $\psi(\vec{x}, t) \rightarrow \psi(\vec{x}, t) e^{-iE_0 t/\hbar}$ , bzw.  $A \rightarrow A$ ,  $S \rightarrow S - E_0 t$ , was aber ohne Einfluss auf (2.14, 2.15) bleibt.

Die **Deutung** der Zustände  $\psi(\vec{x})$  ist **statistisch** (Born 1926): Man normiere  $\psi$  so, dass

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\vec{x})|^2 d^3x = 1 . \quad (2.17)$$

Dann ist  $\rho$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte, d.h.

$$\int_{\Omega} |\psi(\vec{x})|^2 d^3x$$

ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Teilchen in  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  befindet. Ebenso, in Bezug auf (2.13),  $|\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t)|^2 d^3x_1 \dots d^3x_N$  die, die  $N$  Teilchen der Reihe nach in  $d^3x_1, \dots, d^3x_N$  um  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$  zu finden.

## 2.2 Matrizenmechanik und Heisenberg-Gleichung

Nach Sommerfeld, s. (1.27), genügt das mechanische System mit einem Freiheitsgrad

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

der Quantisierungsbedingung: Eine gebundene Bahn der Energie  $E$  ist quantentheoretisch zulässig, falls

$$n(E) := \frac{1}{2\pi\hbar} \oint p dx$$

eine ganze Zahl ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) ist. Vorderhand betrachten wir beliebige Bahnen; sie entsprechen reellen  $n \geq 0$ . Es ist

$$n(E) = \frac{2}{2\pi\hbar} \int_{a_-}^{a_+} \sqrt{2m(E - V(x))} dx ,$$

wobei  $a_{\pm} = a_{\pm}(E)$  die Umkehrpunkte der Bahn sind. Die Periode ist, mit  $\dot{x} = dx/dt$ ,

$$T(E) = \oint dt = 2 \int_{a_-}^{a_+} \frac{dx}{\dot{x}} = 2 \int_{a_-}^{a_+} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))/m}} = 2\pi\hbar \frac{dn}{dE} ,$$

die Frequenz  $\omega = 2\pi/T$  also

$$\omega(n) = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dn} .$$

Funktionen  $a(p, x)$  (Observablen) weisen längs der Bahn,  $a(t) = a(p(t), x(t))$ , diese Periode auf und sind folglich Fourierreihen der Form

$$a(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m(n) e^{im\omega(n)t} , \quad (2.18)$$

wobei

$$A_{-m}(n) = \overline{A_m(n)} , \quad (2.19)$$

falls  $a$  reell ist. Ebenso

$$\dot{a}(t) = i\omega(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} mA_m(n) e^{im\omega(n)t} . \quad (2.20)$$

Observablen können multipliziert werden,  $c(p, q) = a(p, q)b(p, q)$ , bzw.  $c(t) = a(t)b(t)$ . Gruppiert man im Produkt die Terme nach ihrer Frequenz, so resultiert die Faltung

$$C_m(n) = \sum_{m'} A_{m-m'}(n) B_{m'}(n) . \quad (2.21)$$

Insbesondere gilt (2.18) für das Dipolmoment  $d(t) = ex(t)$ , welches in drei Dimensionen die Ausstrahlung

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{r^3 c^2} (\vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \ddot{\vec{d}}))$$

( $r \gg \lambda \gg |\vec{x}|$ ) bestimmt (vgl. Elektrodynamik): Klassisch strahlt das System in der Bahn  $n \in \mathbb{R}$  mit der Frequenz  $\omega(n)$  und ihren Oberschwingungen  $m\omega(n)$ ; quantenmechanisch ( $n \in \mathbb{N}$ ) gemäss der Bohrschen Frequenzbedingung für den Übergang  $n \rightarrow n - m$ :

$$\begin{aligned} \text{klassisch} &\quad \rightarrow \quad \text{quantenmechanisch} \\ m\omega(n) = m \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dn} &\quad \rightarrow \quad \omega_{n,n-m} = \frac{E(n) - E(n-m)}{\hbar}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Für grosse  $n$ , wo  $d^2 E/dn^2 \ll dE/dn$ , sind die beiden Ausdrücke annähernd gleich, was das Korrespondenzprinzip auf S. 8 bekräftigt.

Die Quantisierung des klassischen Systems erfordert nach Heisenberg nicht bloss, dass in (2.18) die Frequenzen gemäss (2.22) ersetzt werden, sondern ebenso

$$A_m(n) \rightarrow A_{n,n-m} : \quad (2.23)$$

was für die Phasen recht ist, kann für die Amplituden nur billig sein. Insgesamt

$$A_m(n) e^{im\omega(n)t} \rightarrow A_{n,n-m} e^{i\omega_{n,n-m}t}.$$

Links stehen lauter Eigenschaften der selben Bahn  $n$ , unabhängig von  $m \in \mathbb{Z}$ ; rechts Eigenschaften verschiedener Paare von Zuständen  $(n, n - m)$ . So ist links die Summe (2.18) sinnvoll; nicht aber rechts, sozusagen gemäss dem Verbot, Äpfel und Birnen zu addieren (Heisenberg: “nicht ohne Willkür möglich und deshalb nicht sinnvoll”). Es ist somit die Gesamtheit

$$A = (A_{nn'} e^{i\omega_{nn'}t})_{nn'}$$

als Matrix aufzufassen. Wodurch ist das Produkt (2.21) zu ersetzen? Nach dem Ritzschen Kombinationsprinzip ist

$$\omega_{nn'} + \omega_{n'n''} = \omega_{nn''} \quad (2.24)$$

und damit  $e^{i\omega_{nn'}t} e^{i\omega_{n'n''}t} = e^{i\omega_{nn''}t}$ . Im Matrixprodukt  $C = AB$ , d.h.

$$C_{nn''} e^{i\omega_{nn''}t} = \sum_{n'} A_{nn'} e^{i\omega_{nn'}t} B_{n'n''} e^{i\omega_{n'n''}t},$$

kommt (2.24) zum Tragen (“ergibt sich diese Art der Zusammensetzung nahezu zwangsläufig aus der Kombinationsrelation der Frequenzen”).

Im Übrigen ist die Vorschrift (2.22) nicht eindeutig, denn auf  $-m$  angewandt ergibt sie

$$m\omega(n) \rightarrow -\omega_{n,n+m} = \omega_{n+m,n} \neq \omega_{n,n-m}.$$

Der Unterschied ist aber  $\hbar^{-1} O(d^2 E/dn^2)$  und damit von der selben Ungenauigkeit wie die Näherung, die der Vorschrift (2.22) zugrundeliegt. Folglich ist auch

$$A_m(n) \rightarrow A_{n+m,n}$$

ebenso passend wie (2.23). Die Anwendung beider Regeln auf die Reellitätsbedingung (2.19) liefert eine Gleichung, in der beidseits dasselbe Zustandspaar vorkommt, und zwar

$$A_{n-m,n} = \overline{A_{n,n-m}}, \quad \text{d.h. } A = A^* .$$

Die Energie  $H$  nimmt unter den Observablen eine Sonderstellung ein, da erhalten. Ihre Fourierentwicklung ist somit  $H_m(n) = \delta_{m0}E(n)$  und quantenmechanisch entspricht ihr nach (2.23) die Diagonalmatrix

$$H_{nn'} = E(n)\delta_{nn'} . \quad (2.25)$$

Damit ist

$$A(t)_{nn'} \equiv A_{nn'}e^{i\omega_{nn'}t} = e^{iE(n)t/\hbar}A_{nn'}e^{-iE(n')t/\hbar} = (e^{iHt/\hbar}Ae^{-iHt/\hbar})_{nn'} ,$$

kurz

$$A(t) = e^{iHt/\hbar}Ae^{-iHt/\hbar} . \quad (2.26)$$

Es folgt  $\dot{A}(t) = (i/\hbar)e^{iHt/\hbar}(HA - AH)e^{-iHt/\hbar}$  und somit die **Heisenberg-Gleichung**: die Bewegungsgleichung

$$\dot{A}(t) = \frac{i}{\hbar}[H, A(t)] \quad (2.27)$$

einer beliebigen Observablen  $A(t)$ .

Insbesondere gilt dies für den Ort  $X(t)$  und den Impuls  $P(t)$ , die anstelle der Bahn  $(p(t), x(t))$  treten:

$$\dot{X} = \frac{i}{\hbar}[H, X], \quad \dot{P} = \frac{i}{\hbar}[H, P] . \quad (2.28)$$

Nun gilt es die Nabelschnur zur "halbklassischen" Quantentheorie Sommerfelds zu kappen: wo in (2.25)  $H$  noch über  $E(n)$  durch die Quantisierungsbedingung (1.29) bestimmt ist, soll neu die Energie durch

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(X) \quad (2.29)$$

gegeben sein, wobei  $P^2 = P \cdot P$  und  $V(X)$  (z.B. für  $V(x) = \alpha x^2 + \beta x^3$ ) als Matrixprodukte zu verstehen sind. Die Berechnung der Kommutatoren in (2.28) verlangt schlussendlich nach jener von  $(i/\hbar)[P, X]$ .

Letztere wird durch Heisenberg, Born und Jordan wie folgt mit (1.29) in Verbindung gebracht. Klassisch ist nach (2.18)  $\oint a(t)dt = (2\pi/\omega(n))A_0(n)$ , also nach (2.20, 2.21)

$$n = \frac{1}{2\pi\hbar} \oint pdx = \frac{1}{2\pi\hbar} \oint p\dot{x}dt = \frac{i}{\hbar} \sum_{m=-\infty}^{\infty} mP_{-m}(n)X_m(n) .$$

Ableitung nach  $n$  liefert

$$1 = \frac{i}{\hbar} \sum_{m=-\infty}^{\infty} m \frac{d}{dn} P_{-m}(n) X_m(n) .$$

Das Korrespondenzprinzip verlangt  $X_m(n) \rightarrow X_{n+m,n}$ ,  $P_{-m}(n) \rightarrow P_{n,n+m}$ ; durch Erweiterung von (2.22) auf  $E(n) \rightsquigarrow P_{n,n+m}X_{n+m,n}$  verwandelt es den Ausdruck in

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{i}{\hbar} \sum_m (P_{n,n+m}X_{n+m,n} - P_{n-m,n}X_{n,n-m}) \\ &= \frac{i}{\hbar} ((PX)_{nn} - (XP)_{nn}) = \frac{i}{\hbar} [P, X]_{nn} . \end{aligned}$$

Die Diagonalelemente von  $D = (i/\hbar)[P, X]$  sind damit bestimmt. Insbesondere folgt, dass die Matrizen  $P, X$  nicht von endlicher Ordnung  $N$  sein können, denn die Summe über  $n$  würde  $N = (i/\hbar)\text{tr}[P, X] = 0$  liefern. Die Bestimmung von  $D_{nn'}$ , ( $n \neq n'$ ) erfordert eine zusätzliche Annahme: Die Ähnlichkeit (Dirac) von  $(i/\hbar)[P, X]$  zur klassischen Poissonklammer  $\{p, x\}$  und deren Unabhängigkeit von der Zeit,  $\{p(t), x(t)\} = 1$ , verleiten zu  $\dot{D} = 0$ . Aus (2.27), also  $\dot{D} = (i/\hbar)[H, D]$ , d.h.  $\dot{D}_{nn'} = (i/\hbar)(E(n) - E(n'))D_{nn'}$ , folgt so  $D_{nn'} = 0$ , ( $n \neq n'$ ), da  $E(n) \neq E(n')$ . Insgesamt ist

$$\frac{i}{\hbar}[P, X] = 1 . \quad (2.30)$$

Als Folge davon gilt (s. Übungen)

$$\frac{i}{\hbar}[P, f(X)] = f'(X) , \quad \frac{i}{\hbar}[g(P), X] = g'(P)$$

und die Bewegungsgleichungen (2.28)

$$\dot{P} = -V'(X) , \quad \dot{X} = \frac{P}{m}$$

sind formal identisch mit den kanonischen Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik.

# 3 Die allgemeine Form der Quantenmechanik

---

## 3.1 Darstellung im Hilbertraum

Wir fassen die Wellenfunktion  $\psi(\vec{x})$  eines Teilchens (zu fester Zeit) auf als ein **Vektor**  $|\psi\rangle$  im Hilbertraum  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$  der quadratintegrierbaren Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \bar{\psi}(x)\phi(x) d^3x . \quad (3.1)$$

Er soll (2.17) entsprechend normiert sein. Allgemeiner sind Zustände eines quantenmechanischen Systems Vektoren  $\psi$  eines Hilbertraums  $\mathcal{H}$  über  $\mathbb{C}$  mit Skalarprodukt  $\langle\psi|\phi\rangle$ : Sie sind stets normiert, d.h.

$$\|\psi\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = 1 , \quad (3.2)$$

und stellen bis auf die Äquivalenz

$$|\psi\rangle \sim e^{i\alpha}|\psi\rangle , \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad (3.3)$$

die **Zustände** des Systems dar.

Observablen und Dynamik sind in der Quantenmechanik durch **Operatoren** dargestellt, d.h. (etwas ungenau) durch lineare Abbildungen  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ . Man schreibt

$$\langle\phi|A|\psi\rangle := \langle\phi|A\psi\rangle .$$

Der zu  $A$  **adjungierte Operator**  $A^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  ist durch

$$\langle\phi|A^*\psi\rangle := \langle A\phi|\psi\rangle , \quad (|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}) \quad (3.4)$$

erklärt. Den **Observablen** entsprechen **selbstadjungierte** Operatoren,  $A^* = A$ . Wir illustrieren den Begriff und die Zuordnung anhand eines Beispiels: ein Teilchen in einer Dimension, also  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ . Das Ereignis  $P$ , das Teilchen in  $\Omega \subset \mathbb{R}$  zu finden (ja:  $P = 1$ , nein:  $P = 0$ ) ist durch den orthogonalen Projektor  $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , ( $P = P^2 = P^*$ ),

$$(P\psi)(x) = P_\Omega(x)\psi(x) , \quad (3.5)$$

( $P_\Omega$ : charakteristische Funktion von  $\Omega$ ) gegeben, insofern

•

$$\langle\psi|P|\psi\rangle = \int \bar{\psi}(x)P_\Omega(x)\psi(x)dx = \int_\Omega |\psi(x)|^2 dx$$

die **Wahrscheinlichkeit** des Ereignisses ist;

• Die **Eigenwerte** von  $P$ , d.h.  $\lambda = 0, 1$ , die möglichen **Ergebnisse** der Messung sind.

• Für die entsprechenden **Eigenvektoren**,  $P|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ , das Ergebnis **deterministisch** ausfällt:  $\langle\psi|P|\psi\rangle = 0$  oder  $1$ .

Das Ergebnis der Messung einer physikalischen Grösse (Observable) ist i.A. nicht auf 1, 0 eingeschränkt, z.B. des Orts  $x \in \mathbb{R}$  des Teilchens. Damit verbunden ist der **Ortsoperator**  $x : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , ( $x = x^*$ )

$$x : \psi(x) \mapsto x\psi(x)$$

(Multiplikation mit  $x$ ), im Sinne, dass

$$\langle x \rangle_\psi := \langle \psi | x | \psi \rangle = \int x |\psi(x)|^2 dx \quad (3.6)$$

der **Erwartungswert** der Messung ist.

Für einen allfälligen Eigenvektor  $|\psi\rangle$ ,

$$x\psi(x) = \lambda\psi(x), \quad (3.7)$$

gilt  $\psi(x) = 0$ , ( $x \neq \lambda$ ), also  $|\psi\rangle = 0$  im Sinne von  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ . Formal hat (3.7) die Lösung  $\psi(x) = \delta(x - \lambda)$ , aber  $\psi \notin L^2(\mathbb{R})$ . Bezeichnet man diesen **uneigentlichen Zustand** zum Eigenwert  $\lambda = x$  mit  $|x\rangle$ , so ist

$$\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$$

und, vgl. (3.5),  $\langle \phi | P | \psi \rangle = \int_\Omega \bar{\phi}(x) \psi(x) dx = \int_\Omega \langle \phi | x \rangle \langle x | \psi \rangle dx$ , also formal

$$P = \int_\Omega dx |x\rangle \langle x|. \quad (3.8)$$

Insbesondere ist

$$\langle x | x' \rangle = \delta(x - x'), \quad \int dx |x\rangle \langle x| = \mathbf{1},$$

womit die  $\{|x\rangle\}$  eine uneigentliche Orthonormalbasis bilden (Dirac- statt Kronecker- $\delta$ , Integral statt Summe).

Das **Schwankungsquadrat** der Messung,

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle_\psi := \int (x - \langle x \rangle_\psi)^2 |\psi(x)|^2 dx = \|(x - \langle x \rangle_\psi)\psi\|^2 > 0,$$

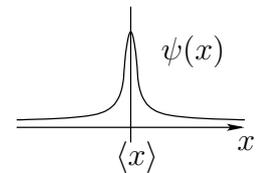
ist zwar stets positiv, da  $x$  keine Eigenvektoren hat, kann aber durch passende Wahl von  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  beliebig klein gemacht werden. Dies motiviert die auf  $\dim \mathcal{H} = \infty$  zugeschnittene **Definition:**

Das **Spektrum**  $\sigma(A)$  eines selbstadjungierten Operators  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  ist erklärt durch:

$$\lambda \in \sigma(A) : \iff \text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein Zustand } \psi_\varepsilon, (\|\psi_\varepsilon\| = 1) \text{ so, dass} \\ \|(A - \lambda)\psi_\varepsilon\| \leq \varepsilon. \quad (3.9)$$

**Bemerkungen. 1.** Ein Eigenwert  $\lambda$  liegt vor, falls (3.9) mit  $\varepsilon = 0$  gilt; folglich liegt er in  $\sigma(A)$ . Ferner ist  $\lambda \in \mathbb{R}$ , da  $\bar{\lambda} \langle \psi | \psi \rangle = \langle A\psi | \psi \rangle = \langle \psi | A\psi \rangle = \lambda \langle \psi | \psi \rangle$  wegen  $A = A^*$ . Es gilt aber auch  $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$  (s. Anhang A).

**2.** Im **endlich-dimensionalen** Fall,  $\dim \mathcal{H} < \infty$ , ist die Einheitskugel  $\{\psi \in \mathcal{H} | \|\psi\| = 1\}$  kompakt, also folgt aus (3.9):  $\|(A - \lambda)\psi\| = 0$  für ein  $\psi \in \mathcal{H}$  mit  $\|\psi\| = 1$ . Also:  $\sigma(A) = \{\text{Eigenwerte von } A\}$ .



Für den Ortsoperator ist also  $\sigma(x) = \mathbb{R}$ :

- Das Spektrum von  $x$  besteht aus den möglichen Ergebnisse seiner Messung.

Analog für den **Impulsoperator**. Die (uneigentlichen) Eigenzustände sind nach (2.1)

$$\psi_p(x) = (2\pi\hbar)^{-1/2} e^{ipx/\hbar}$$

mit Eigenwert  $p$ , aber  $\psi_p \notin L^2(\mathbb{R})$ . Notation:  $|p\rangle$ . Für (2.2) ist

$$(p\psi)(x) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int p e^{ipx/\hbar} \widehat{\psi}(p) dp = \frac{\hbar}{i} \frac{d\psi}{dx} . \quad (3.10)$$

Der Operator

$$p = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \quad (3.11)$$

ist ebenfalls selbstadjungiert (partielle Integration) und (3.10) besagt

$$p = \mathcal{F}^{-1} x \mathcal{F} , \quad (3.12)$$

wobei  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$

$$(\mathcal{F}\psi)(p) \equiv \widehat{\psi}(p) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int e^{-ipx/\hbar} \psi(x) dx = \langle p|\psi\rangle$$

die Fouriertransformation ist.  $\mathcal{F}$  ist **unitär**,  $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$  (Parseval Identität). Folglich ist auch  $\sigma(p) = \mathbb{R}$  und die Zustände  $|p\rangle$  mit Wellenfunktion  $\psi_p$  bilden eine uneigentliche Orthonormalbasis,

$$\langle p|p'\rangle = \delta(p - p') , \quad \int dp |p\rangle \langle p| = \mathbf{1} ,$$

Eine allgemeinere, präzise Definition eines uneigentlichen Zustandes wird sich dank des Spektralsatzes erübrigen. Trotzdem sei bemerkt: Man könnte vermuten, dass  $\psi_p$  auch für  $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  als einen solchen zugelassen werden sollte, da ja nach wie vor  $-i\hbar\psi'_p = p\psi_p$ , obschon  $\psi_p(x)$  nun exponentiell wachsend statt beschränkt ist. Dem ist nicht so, denn nur für  $p_0 \in \mathbb{R}$  stellt  $\psi_{p_0}$  eine vernünftige Idealisierung von Zuständen  $\psi_n \in L^2(\mathbb{R})$  dar: “ $\psi_n \rightarrow \psi_{p_0}$ ” mit  $\|\psi_n\|^{-1} \|(p - p_0)\psi_n\| \rightarrow 0$ , ( $n \rightarrow \infty$ ).

Die Verallgemeinerung der Wahrscheinlichkeitsinterpretation auf beliebige Observablen beruht auf dem Spektralsatz, den wir zunächst im Fall eines endlich-dimensionalen Zustandsraums  $\mathcal{H}$  in Erinnerung rufen: Selbstadjungerte Operatoren besitzen eine orthonormierte Eigenbasis  $\{\phi_i\}$ ,

$$A|\phi_i\rangle = a_i|\phi_i\rangle , \\ \langle \phi_i|\phi_j\rangle = \delta_{ij} , \quad \sum_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i| = \mathbf{1} ,$$

und damit die Spektraldarstellung

$$A = \sum_i a_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i| = \sum_{a \in \sigma(A)} a P_a ,$$

wobei  $P_a = \sum_{i:\phi_i=a} |\phi_i\rangle\langle\phi_i| = P_a^* = P_a^2$  der Projektor auf den Eigenraum zum Eigenwert  $a$  ist. Sie ermöglicht, Funktionen von Operatoren zu definieren,

$$f(A) := \sum_{a \in \sigma(A)} f(a)P_a, \quad (3.13)$$

wobei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion und  $f(A) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  ein Operator ist. Die Zuordnung  $f \mapsto f(A)$  hat die Eigenschaften

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(A) = \alpha_1 f_1(A) + \alpha_2 f_2(A), \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}), \quad (3.14)$$

$$(f_1 f_2)(A) = f_1(A) f_2(A), \quad (3.15)$$

$$\bar{f}(A) = f(A)^*, \quad (3.16)$$

$$f(A) = \begin{cases} \mathbb{1} & \text{für } f(a) \equiv 1, \\ A & \text{für } f(a) = a, \end{cases} \quad (3.17)$$

sowie Stetigkeit bzgl.  $f$ , auf die wir nicht näher eingehen.

Die Definition (3.13) besitzt eine Verallgemeinerung auf  $\dim \mathcal{H} = \infty$ , und zwar den **Spektralsatz**:

**Satz.** Sei  $A = A^*$ . Dann gibt es eine eindeutige Zuordnung

$$f \mapsto f(A) \quad (3.18)$$

mit den Eigenschaften (3.14–3.17).

**Beweis.** s. Anhang A.

Sei nun  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $P_I(a)$  dessen charakteristische Funktion. Dann ist  $P_I(A)$  ein orthogonaler Projektor,

$$P_I(A) = P_I(A)^* = P_I(A)^2$$

(folgt aus (3.15, 3.16)), und für disjunkte Intervalle  $I_1, I_2$  gilt

$$P_{I_1 \cup I_2}(A) = P_{I_1}(A) + P_{I_2}(A)$$

(folgt aus (3.14)). Für jeden Zustand  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  ist

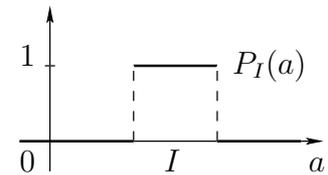
$$W_\psi(I) = \langle\psi|P_I(A)|\psi\rangle$$

ein **Wahrscheinlichkeitsmass** auf  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} W_\psi(I) &= \|P_I(A)\psi\|^2 \geq 0 \\ W_\psi(I_1 \cup I_2) &= W_\psi(I_1) + W_\psi(I_2), \quad (I_1 \cap I_2 = \emptyset), \\ W_\psi(\mathbb{R}) &= 1. \end{aligned}$$

**Interpretation.**  $W_\psi(I)$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $A$  im Zustand  $|\psi\rangle$  einen Messwert  $a \in I$  annimmt. (Dies ist konsistent mit (3.3).)

Insbesondere, wenn  $A$  selbst durch einen orthogonalen Projektor  $P$  gegeben ist, so ist  $\langle\psi|P|\psi\rangle$  die Wahrscheinlichkeit im Zustand  $|\psi\rangle$  für das Eintreten des Ereignisses, dem  $P$  zugeordnet ist. Dieses ist sicher, genau dann falls  $P|\psi\rangle = |\psi\rangle$ .



**Beispiel.** Der Projektor  $P = |\varphi\rangle\langle\varphi|$  hat den einfachen Eigenwert 1 mit Eigenvektor  $|\varphi\rangle$  und ist somit dem Ereignis “das System ist im Zustand  $|\varphi\rangle$ ” zugeordnet, denn genau in diesem Zustand ist sein Eintreten sicher. Für einen beliebigen Zustand  $|\psi\rangle$  ist

$$\langle\psi|P|\psi\rangle = |\langle\varphi|\psi\rangle|^2$$

die Wahrscheinlichkeit, es in  $|\varphi\rangle$  zu finden.

Für beliebige Observablen  $A$  ergeben sich aus obiger Interpretation einige Folgerungen:

**Erwartungswert.** Die Wahrscheinlichkeit eines Messwerts in  $(\lambda, \lambda + d\lambda]$  ist  $dW_\psi((-\infty, \lambda])$ . Der Erwartungswert von  $A$  im Zustand  $\psi$  folglich

$$\langle A \rangle_\psi = \int \lambda dW_\psi((-\infty, \lambda]) = \langle\psi|A|\psi\rangle, \quad (3.19)$$

da  $\int \lambda dP_{(-\infty, \lambda]}(x) = x$ , vgl. (3.14, 3.17).

**Beispiel.** Für den Ortsoperator  $x$  ist  $f(x)$  Multiplikation mit der Funktion  $f(x)$ ; somit ist  $P_\Omega(x)$  identisch mit (3.5, 3.8). Für den Impulsoperator  $p$  ist nach (3.12)

$$f(p) = \mathcal{F}^{-1}f(x)\mathcal{F}, \quad \text{d.h.} \quad \widehat{f(p)\psi}(p) = f(p)\widehat{\psi}(p),$$

bzw.

$$(f(p)\psi)(x) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int f(p)e^{ipx/\hbar}\widehat{\psi}(p)dp. \quad (3.20)$$

Das Ereignis, dass der Messwert des Impuls  $p$  in  $I$  liegt, hat die Wahrscheinlichkeit

$$\langle\psi|P_I(p)|\psi\rangle = \int_I |\widehat{\psi}(p)|^2 dp.$$

**Messwerte.** Allgemein sind nun  $\lambda \in \sigma(A)$  die möglichen Messwerte der Observablen  $A$ :

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(A) &\iff P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}(A) \neq 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \\ \text{also:} &\iff \forall \varepsilon \exists \psi_\varepsilon (\|\psi_\varepsilon\| = 1) \text{ mit } W_{\psi_\varepsilon}(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) > 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Zum Beweis bemerken wir zunächst, dass

$$f \geq g \implies f(A) \geq g(A).$$

Dies folgt aus dem Spezialfall  $g = 0$  (also  $f = (\sqrt{f})^2 \geq 0$ ), der seinerseits aus

$$\langle\psi|f(A)|\psi\rangle = \langle\psi|f^{1/2}(A)f^{1/2}(A)|\psi\rangle = \langle f^{1/2}(A)\psi|f^{1/2}(A)\psi\rangle \geq 0$$

folgt.

$\Leftarrow$ : Dann gibt es einen Zustand  $|\psi_\varepsilon\rangle$  mit  $P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}(A)|\psi_\varepsilon\rangle = |\psi_\varepsilon\rangle$ . Aus  $(x-\lambda)^2 P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}(x) \leq \varepsilon^2$  folgt

$$\|(A-\lambda)\psi_\varepsilon\|^2 = \langle\psi_\varepsilon|(A-\lambda)^2|\psi_\varepsilon\rangle \leq \varepsilon^2 \langle\psi_\varepsilon|\psi_\varepsilon\rangle,$$

also  $\lambda \in \sigma(A)$  nach (3.9).

$\Rightarrow$ : Aus  $P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}(A) = 0$  für ein  $\varepsilon > 0$  folgt  $|\psi\rangle = (1 - P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}(A))|\psi\rangle$  für alle  $|\psi\rangle$ . Wegen  $(x-\lambda)^2(1 - P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}(x)) \geq \varepsilon^2(1 - P_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)}(x))$  folgt nun

$$\|(A-\lambda)\psi\|^2 \geq \varepsilon^2 \|\psi\|^2$$

für alle  $|\psi\rangle$ , also  $\lambda \notin \sigma(A)$ .

**Schwankungsquadrat und Unschärferelation.** Das mittlere Schwankungsquadrat einer Observablen  $A$  im Zustand  $\psi$  ist gegeben als

$$\langle(\Delta A)^2\rangle_\psi := \langle(A - \langle A \rangle_\psi)^2\rangle_\psi = \|(A - \langle A \rangle_\psi)\psi\|^2 = \langle A^2 \rangle_\psi - \langle A \rangle_\psi^2.$$

Somit ist

$$\langle(\Delta A)^2\rangle_\psi = 0 \iff A\psi = \lambda\psi : \quad (3.22)$$

Die Eigenzustände von  $A$  sind gerade diejenigen Zustände, in denen  $A$  mit Sicherheit (Schwankung Null) einen bestimmten Wert annimmt, nämlich den entsprechenden Eigenwert.

Zwei Observablen  $A, B$  haben in der Regel keinen gemeinsamen Eigenvektor, d.h. es gibt keinen Zustand des Systems, in dem  $A$  und  $B$  scharfe Werte annehmen. Ein quantitativer Ausdruck hierfür ist die Unschärferelation (Heisenberg 1925):

$$\langle(\Delta A)^2\rangle_\psi \langle(\Delta B)^2\rangle_\psi \geq \frac{1}{4} |\langle[A, B]\rangle_\psi|^2. \quad (3.23)$$

**Beweis.** Aus  $|\langle\phi|\psi\rangle| \leq \|\phi\|\|\psi\|$  folgt

$$|\langle\psi|[A, B]\psi\rangle| = |\langle A\psi|B\psi\rangle - \langle B\psi|A\psi\rangle| \leq 2\|A\psi\|\|B\psi\|.$$

Quadriere und ersetze  $A \rightarrow A - \langle A \rangle_\psi$ ,  $B \rightarrow B - \langle B \rangle_\psi$  (also  $[A, B] \rightarrow [A, B]$ ); es resultiert (3.23).

**Bemerkung.** Der Beweis beinhaltet zwei Ungleichungen: die Cauchy-Schwarz Ungleichung und die Dreiecksungleichung in der Form  $|z - \bar{z}| \leq 2|z|$ . Gleichheit gilt wenn  $\phi, \psi$  linear abhängig sind, bzw. wenn  $z$  rein imaginär ist. Daraus folgt: In (3.23) herrscht Gleichheit, genau dann falls

$$\alpha(A - a)\psi + \beta(B - b)\psi = 0 \quad (3.24)$$

mit  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  und  $\bar{\alpha}\beta$  rein imaginär; dann ist  $a = \langle A \rangle_\psi$  und  $b = \langle B \rangle_\psi$ .

**Beispiel.** Auf  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$  sind

$$x_k : \psi(x) \mapsto x_k \psi(x) ; \quad p_k : \psi(x) \mapsto \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \quad (3.25)$$

die Komponenten von Ort und Impuls. Es gilt

$$i[p_k, x_l] = \hbar \delta_{kl}$$

und damit

$$\langle(\Delta p_k)^2\rangle \langle(\Delta x_l)^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4} \delta_{kl}. \quad (3.26)$$

Im analogen 1-dimensionalen Fall,  $\langle(\Delta p)^2\rangle \langle(\Delta x)^2\rangle \geq \hbar^2/4$ , ist das Produkt der Schwankungen minimal genau für die Zustände

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{C}{\pi}} e^{iax/\hbar} e^{-C(x-b)^2/2}$$

mit  $C > 0$ . Dies sind in der Tat bis auf die Normierung die Lösungen der Differentialgleichung (3.24) mit  $A = p$ ,  $B = x$ . Der Zusatzbedingung entspricht  $C$  reell.

**Präparation der Zustände.** Die allgemeine Interpretation der Quantenmechanik auf S. 25 setzt eine konkrete Zuordnung zwischen physikalischen Observablen und selbstadjungierten Operatoren voraus, wie sie in den vorangehenden Beispielen zum Ausdruck kommt; grundsätzlich auch eine ebensolche für Zustände. Letztere kann aber auf erstere zurückgeführt werden mittels der Vorschrift (im einfachsten Fall): Liefert die Messung von  $A$  den einfachen Eigenwert  $\lambda$ , so ist unmittelbar danach dessen Eigenvektor der Zustand des Systems. (Dies ist konsistent mit (3.3).)

**Dynamik.** Die Bewegungsgleichung ist die Schrödinger-Gleichung in der allgemeinen Form

$$i\hbar \frac{d|\psi_t\rangle}{dt} = H|\psi_t\rangle, \quad (H = H^*), \quad (3.27)$$

geschrieben als gewöhnliche Differentialgleichung für die vektorwertige Funktion  $t \mapsto |\psi_t\rangle \in \mathcal{H}$ . Der Operator  $H$  heisst **Hamiltonoperator**.

**Beispiele. 1.** Ein Teilchen im Potential  $V(x)$  (vgl. (2.4)):

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V = \sum_{k=1}^3 \frac{p_k^2}{2m} + V(\vec{x}) \quad (3.28)$$

mit  $x_k, p_k$  wie in (3.25). Die über die Vorschrift (3.25) erzielte Übersetzung “Hamiltonfunktion  $\rightarrow$  Hamiltonoperator” heisst **kanonische Quantisierung**.

**2.**  $N$ -Teilchensystem (2.13):

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \quad (3.29)$$

auf  $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ . Hier indiziert  $k = 1, \dots, N$  die Teilchen, entsprechend wirkt  $\vec{p}_k^2 = -\hbar^2 \Delta_k$  auf die Variable  $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^3$  in  $\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$ .

**3.** Ein Teilchen der Ladung  $e$  im elektromagnetischen Feld:

$$H = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{x}, t) \right)^2 + e\varphi(\vec{x}, t) \quad \text{auf } L^2(\mathbb{R}^3) \quad (3.30)$$

entsteht wie (3.28) und (3.29) durch kanonische Quantisierung der klassischen Hamiltonfunktion, wobei die elektromagnetischen Potentiale  $A_k(\vec{x}, t)$  und  $\varphi(\vec{x}, t)$  wieder als Multiplikationsoperatoren aufzufassen sind. Falls das äussere Feld von  $t$  abhängt, ist das System nicht autonom. Bekanntlich (vgl. Elektrodynamik) bleiben die elektromagnetischen Felder unverändert unter **Eichtransformationen**

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi,$$

mit einer beliebigen Funktion  $\chi = \chi(\vec{x}, t)$ ; nicht aber der Hamiltonoperator,  $H \rightarrow H'$ , noch der Zustand. Hingegen erfüllt

$$\psi'(\vec{x}, t) = e^{ie\chi(\vec{x}, t)/\hbar c} \psi(\vec{x}, t) \quad (3.31)$$

die Schrödinger-Gleichung mit Hamiltonoperator  $H'$ . Dies folgt aus

$$\begin{aligned} e^{-ie\chi/\hbar c} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\varphi' \right) e^{ie\chi/\hbar c} &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\varphi, \\ e^{-ie\chi/\hbar c} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}' \right) e^{ie\chi/\hbar c} &= \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} : \end{aligned} \quad (3.32)$$

wie in der klassischen Mechanik ist  $m\vec{v} = \vec{p} - (e/c)\vec{A}$  eichinvariant.

Allgemein wird die Dynamik eines autonomen Systems ( $H$  in (3.27) unabhängig von  $t$ ) beschrieben durch den Propagator (Lösungsabbildung)

$$U(t) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad \psi_0 \mapsto \psi_t \quad (3.33)$$

von (3.27), die den (beliebigen) Anfangszustand  $\psi_0$  in den Zustand zur Zeit  $t$  abbildet. Die Operatoren  $U(t)$  bilden eine 1-parametrische Gruppe ( $U(0) = \mathbf{1}$ ,  $U(t)U(s) = U(t+s)$ ), die wegen

$$\frac{d}{dt} \langle \phi_t | \psi_t \rangle = \frac{i}{\hbar} [\langle H \phi_t | \psi_t \rangle - \langle \phi_t | H \psi_t \rangle] = 0$$

(benutze  $H = H^*$ ) unitär ist:  $\langle U(t)\phi_0 | U(t)\psi_0 \rangle = \langle \phi_t | \psi_t \rangle = \langle \phi_0 | \psi_0 \rangle$ . Die Gruppe genügt der Differentialgleichung

$$i\hbar \frac{dU(t)}{dt} = HU(t), \quad (3.34)$$

deren Lösung

$$U(t) = e^{-iHt/\hbar} \quad (3.35)$$

ist. Im Fall  $\dim \mathcal{H} < \infty$  ist dies über die Exponentialreihe erklärt; ansonsten und allgemeiner über den Spektralsatz (3.18). Umgekehrt hat jede 1-parametrische unitäre Gruppe  $U(t)$  eine selbstadjungierte Erzeugende (Satz von Stone).

Für nicht-autonome Systeme tritt anstelle von  $U(t)$  eine 2-parametrische unitäre Schar  $U(t, s) : \psi_s \mapsto \psi_t$ , die den (beliebigen) Zustand zur Zeit  $s$  in den Zustand zur Zeit  $t$  abbildet. Entsprechend ist dann  $U(t, t) = \mathbf{1}$ ,  $U(t, r)U(r, s) = U(t, s)$ .

**Bilder.** Erwartungswerte verändern sich im Laufe der Zeit gemäß

$$\langle e^{-iHt/\hbar} \psi | A | e^{-iHt/\hbar} \psi \rangle = \langle \psi | e^{iHt/\hbar} A e^{-iHt/\hbar} | \psi \rangle =: \langle A \rangle_t. \quad (3.36)$$

In der Schreibweise links findet wie in (3.33) eine zeitliche Entwicklung der Zustände statt,  $\psi \rightarrow e^{-iHt/\hbar} \psi$  (**Schrödinger-Bild**). In jener rechts findet wie in (2.26) eine der Observablen statt,  $A(t) = e^{iHt/\hbar} A e^{-iHt/\hbar}$  (**Heisenberg-Bild**) und die Bewegungsgleichung ist (2.27).

Für die Erwartungswerte selbst gilt

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_t = \left\langle \frac{i}{\hbar} [H, A] \right\rangle_t.$$

Instruktiv ist das Beispiel (3.28) des Teilchens im Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla}V(\vec{x}, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x_k \rangle_t &= \frac{1}{2m} \left\langle \frac{i}{\hbar} [\vec{p}^2, x_k] \right\rangle_t = \frac{1}{m} \langle p_k \rangle_t, \\ \frac{d}{dt} \langle p_k \rangle_t &= \left\langle \frac{i}{\hbar} [V, p_k] \right\rangle_t = \langle F_k \rangle_t. \end{aligned}$$

Ist nun  $V(\vec{x}, t)$  ein Polynom in  $x$  vom Grad  $\leq 2$  (Beispiele: freies Teilchen, homogenes Feld, harmonischer Oszillator), so ist  $\vec{F}(\vec{x}, t)$  (affin) linear in  $\vec{x}$  und deshalb  $\langle F_k \rangle_t = F_k(\langle x \rangle_t, t)$ . Dann erfüllen die Erwartungswerte von Ort und Impuls exakt die klassischen Bewegungsgleichungen! Näherungsweise gilt dies, solange die Welle  $\psi(\vec{x}, t)$  in Gebieten lokalisiert ist, in denen  $\vec{F}(\vec{x}, t)$  annähernd linear verläuft.

Die Äquivalenz der beiden Bilder ist aus (3.36) offensichtlich. Allgemeiner ist die Darstellung eines quantenmechanischen Systems nur bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig: Unter einer unitären Abbildung  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , bei der Zustände und Observablen gemäss  $\psi \mapsto U\psi$ ,  $A \mapsto UAU^*$  transformieren, bleiben die physikalischen Aussagen dieselben. Speziell entspricht (3.35) dem Übergang vom Heisenberg- zum Schrödinger-Bild.

### 3.2 Das freie Teilchen

Die Schrödinger-Gleichung des freien Teilchens

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\vec{p}^2}{2m} \psi$$

(mit  $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ ) löst man am einfachsten über Fouriertransformation, vgl. (3.20),

$$\begin{array}{ccc} \psi(\vec{x}, 0) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \psi(\vec{x}, t) \\ \downarrow \mathcal{F} & & \mathcal{F}^{-1} \uparrow \\ \widehat{\psi}(\vec{p}, 0) & \xrightarrow[\text{mit } e^{-i\vec{p}^2 t/2m\hbar}]{\text{Multiplikation}} & \widehat{\psi}(\vec{p}, t) \end{array}$$

d.h.:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}, t) &= (2\pi\hbar)^{-3/2} \int e^{-i\vec{p}^2 t/2m\hbar} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} \widehat{\psi}(\vec{p}, 0) d^3 p \\ &= \int d^3 y \underbrace{(2\pi)^{-3} \int d^3 k e^{i[\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y}) - \frac{\hbar\vec{k}^2}{2m}t]} \psi(\vec{y}, 0)}_{g(\vec{x}-\vec{y}, t)} \end{aligned} \quad (3.37)$$

mit  $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$  (Faltung). Mit

$$\int e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - a\vec{k}^2)} d^3 k = \underbrace{\int e^{-ia(\vec{k} + \frac{\vec{x}}{2a})^2} d^3 k}_{(|a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\text{sgn } a)s^2} ds)^3} \cdot e^{i\frac{\vec{x}^2}{4a}}$$

und dem bedingt konvergenten (Fresnel-)Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm is^2} ds = \sqrt{\pi} e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \quad (3.38)$$

(Beweis s. Anhang C) findet man

$$g(\vec{x}, t) = e^{-i\frac{3\pi}{4} \text{sgn } t} \left( \frac{m}{2\pi\hbar|t|} \right)^{3/2} e^{i\frac{m\vec{x}^2}{2\hbar t}} .$$

Für integrable  $|\psi(\vec{y}, 0)|$  folgt damit aus (3.37)

$$|\psi(\vec{x}, t)| \leq \sup_{\vec{x}} |g(\vec{x}, t)| \cdot \int |\psi(\vec{y}, 0)| d^3y \leq \text{konst} \cdot |t|^{-3/2}$$

für alle  $\vec{x}$ : das Wellenpaket  $\psi(\vec{x}, t)$  zerfließt. Dies ist ein weiteres Anzeichen, dass  $|\psi(\vec{x}, t)|^2$  nicht etwa als Massendichte eines ausgedehnten Teilchens, sondern (vgl. (2.14)) als Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auffinden bei  $\vec{x}$  (zur Zeit  $t$ ) eines punktförmigen Teilchens aufzufassen ist.

Für grosse  $t$  lässt sich (3.37) in führender Ordnung ausrechnen: mit  $\sqrt{it} = e^{\frac{i\pi(\text{sgn } t)}{4}} \sqrt{|t|}$  ist

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}, t) &= e^{i\frac{m\vec{x}^2}{2\hbar t}} \left(\frac{m}{it}\right)^{3/2} (2\pi\hbar)^{-3/2} \int e^{-i\frac{m\vec{x}\cdot\vec{y}}{\hbar t}} \underbrace{e^{i\frac{m\vec{y}^2}{2\hbar t}}}_{1+O(\vec{y}^2/\hbar t)} \psi(\vec{y}, 0) d^3y \\ &= e^{i\frac{m\vec{x}^2}{2\hbar t}} \left(\frac{m}{it}\right)^{3/2} \widehat{\psi}\left(\frac{m\vec{x}}{t}, 0\right) + O(t^{-5/2}), \end{aligned}$$

gleichmässig in  $\vec{x}$ , falls  $|\vec{y}^2\psi(\vec{y}, 0)|$  integrabel ist. Darin kommt der Zusammenhang von (3.37) zur klassischen freien Bewegung

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \frac{\vec{p}(0)}{m}t, \quad \vec{p}(t) = \vec{p}(0)$$

zum Ausdruck: für letztere ist

$$m\frac{\vec{x}(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \vec{p}(0),$$

für erstere ist die Wahrscheinlichkeit,  $m\vec{x}/t$  in  $G \subset \mathbb{R}^3$  zu finden, gleich

$$W = \int_{\frac{m\vec{x}}{t} \in G} |\psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_G |\widehat{\psi}(\vec{p}, 0)|^2 d^3p,$$

d.h. für grosse  $t$  durch die Impulsverteilung im Anfangszustand gegeben.

### 3.3 Der harmonische Oszillator

Die klassische Hamiltonfunktion des 1-dimensionalen Oszillators

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}fx^2$$

vereinfacht sich nach der kanonischen Transformation

$$x \rightarrow \frac{1}{(fm)^{1/4}}x, \quad p \rightarrow (fm)^{1/4}p$$

zu

$$H = \frac{\omega}{2}(p^2 + x^2),$$

wobei  $\omega = \sqrt{f/m}$  die Oszillatorfrequenz ist. Die Bahnen sind dann Kreise im Phasenraum:

$$x(t) + ip(t) = (x(0) + ip(0))e^{-i\omega t}. \quad (3.39)$$

Quantenmechanisch lautet der Hamiltonoperator nach kanonischer Quantisierung

$$H = \frac{\omega}{2} \left( -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right) = \frac{\hbar\omega}{2} \left( -\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 \right)$$

bzgl. der dimensionslosen Variablen  $\xi = x/\sqrt{\hbar}$  (oder direkt  $\xi = \sqrt{\omega m \hbar^{-1}} x$  bzgl. der ersten Variablen  $x$ ). Nützlich erweisen sich die Operatoren (Dirac)

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(x + ip) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right), & \text{(Vernichtungsoperator)}, \\ a^* &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(x - ip) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right), & \text{(Erzeugungsoperator)}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} [a, a^*] &= 2 \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{d\xi}, \xi \right] = 1, \\ N := a^* a &= \frac{1}{2} \left( \xi^2 - \frac{d^2}{d\xi^2} - \underbrace{\left[ \frac{d}{d\xi}, \xi \right]}_{=1} \right), \\ H &= \hbar\omega \left( N + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Für die Eigenwerte  $E$  von  $H$  gilt damit

$$E = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (3.40)$$

wobei  $n$  ein Eigenwert von  $N$  ist. Wir zeigen gleich: dies sind genau die Zahlen

$$n \in \mathbb{N}. \quad (3.41)$$

Folglich ist  $E_0 = \hbar\omega/2$  die Energie des **Grundzustands**  $n = 0$  (Nullpunktsenergie). Zunächst ist  $n \geq 0$ , denn aus  $N|\psi\rangle = n|\psi\rangle$  folgt

$$n\|\psi\|^2 = \langle \psi | N | \psi \rangle = \|a\psi\|^2 \geq 0.$$

Für  $n = 0$  gibt es einen Eigenvektor  $|\psi_0\rangle$ :

$$\begin{aligned} a|\psi_0\rangle = 0 &\iff \frac{d\psi_0}{d\xi} + \xi\psi_0(\xi) = 0 \\ &\iff \psi_0(\xi) = \pi^{-1/4} e^{-\xi^2/2}, \quad (\text{bis auf ein Vielfaches}). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Die Normierung,  $\|\psi_0\|^2 \equiv \int |\psi_0(\xi)|^2 d\xi = 1$ , und die Wahl der Phase,  $\psi_0(\xi) > 0$ , machen  $\psi_0$  eindeutig. Eigenvektoren  $|\psi_n\rangle$  zu  $n = 1, 2, \dots$  ( $N|\psi_n\rangle = n|\psi_n\rangle$ ,  $\|\psi_n\|^2 = 1$ ) findet man rekursiv dank

$$\begin{aligned} Na^* &= a^*aa^* = a^*(a^*a + 1) = a^*(N + 1), \\ Na^*|\psi_{n-1}\rangle &= a^*(N + 1)|\psi_{n-1}\rangle = na^*|\psi_{n-1}\rangle, \\ \|a^*|\psi_{n-1}\rangle\|^2 &= \langle \psi_{n-1} | \underbrace{aa^*}_{N+1} | \psi_{n-1} \rangle = n\langle \psi_{n-1} | \psi_{n-1} \rangle \end{aligned}$$

als

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} a^* |\psi_{n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^*)^n |\psi_0\rangle . \quad (3.43)$$

Die  $|\psi_n\rangle$ 's sind orthogonal, da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerte von  $N = N^*$ . Die entsprechenden Wellenfunktionen sind

$$\langle \xi | \psi_n \rangle = \psi_n(\xi) = \frac{\pi^{-1/4}}{\sqrt{2^n n!}} \underbrace{\left( \xi - \frac{d}{d\xi} \right)^n e^{-\xi^2/2}}_{\equiv H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}} ,$$

wobei  $H_n(\xi)$  ein Polynom mit führendem Term  $(2\xi)^n$  ist:

$$H_n(\xi) = e^{\xi^2/2} \underbrace{\left( \xi - \frac{d}{d\xi} \right)^n}_{-e^{\xi^2/2} \frac{d}{d\xi} e^{-\xi^2/2}} e^{-\xi^2/2} = e^{\xi^2} \left( -\frac{d}{d\xi} \right)^n e^{-\xi^2} , \quad (\text{Hermite Polynome}) .$$

Die endlichen Linearkombination der  $|\psi_n\rangle$ 's sind die Funktionen der Form  $e^{-\xi^2/2} P(\xi)$  ( $P$  ein Polynom), und diese sind dicht in  $L^2(\mathbb{R})$ : steht nämlich  $|\psi\rangle \in L^2(\mathbb{R})$  orthogonal auf ihnen allen, so ist

$$f(z) := \int e^{-\xi^2/2} \psi(\xi) e^{iz\xi} d\xi$$

eine analytische Funktion mit

$$\left. \frac{d^n f}{dz^n} \right|_{z=0} = \int e^{-\xi^2/2} (i\xi)^n \psi(\xi) d\xi = 0 ,$$

also  $f \equiv 0$ , da  $f$  durch die Taylorreihe gegeben ist, und  $\psi = 0$ , da  $e^{-\xi^2/2} \psi(\xi)$  die Fouriertransformierte von  $f$  ist. Insbesondere bilden die  $|\psi_n\rangle$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ) eine orthonormierte Basis für  $L^2(\mathbb{R})$  (**Besetzungszahlbasis**) und das Spektrum von  $H$  ist durch (3.40, 3.41) ausgeschöpft.

**Verschiebungsoperatoren.** Die Erzeugende der 1-parametrischen Gruppe der Translationen

$$U(s) : \psi(x) \mapsto \psi(x - s)$$

ist

$$i\hbar \left. \frac{d\psi}{ds} \right|_{s=0} = -i\hbar \frac{d\psi}{ds} = p\psi , \quad \text{d.h.} \quad U(s) = e^{-ips/\hbar} .$$

Analog ist  $e^{ixs/\hbar}$  eine Translation um  $s$  im Impulsraum:  $|p\rangle \mapsto |p + s\rangle$ . Für  $\alpha \in \mathbb{C}$  lässt sich

$$V(\alpha) := e^{\alpha a^* - \bar{\alpha} a}$$

wegen

$$\alpha a^* - \bar{\alpha} a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} [\alpha(x - ip) - \bar{\alpha}(x + ip)] = i\sqrt{2\hbar} [(\text{Im } \alpha)x - (\text{Re } \alpha)p] / \hbar \quad (3.44)$$

als Translation im Phasenraum um

$$(\Delta x, \Delta p) = \sqrt{2\hbar} (\text{Re } \alpha, \text{Im } \alpha) , \quad \text{bzw.} \quad \Delta x + i\Delta p = \sqrt{2\hbar} \alpha$$

auffassen. Eigenschaften:

- i)  $V(\alpha)^* = V(\alpha)^{-1} = V(-\alpha)$ ,
- ii)  $V(\alpha) = e^{\alpha a^*} e^{-\bar{\alpha} a} e^{-|\alpha|^2/2}$ ,
- iii)  $aV(\alpha) = V(\alpha)(a + \alpha)$ .

(i) folgt aus (3.44); (ii) daraus, dass allgemein gilt

$$e^{X+Y} = e^X e^Y e^{-[X,Y]/2} ,$$

falls  $[[X, Y], X] = [[X, Y], Y] = 0$ , wie wir nun zeigen. Zunächst folgt

$$\frac{d}{dt}(e^{-tX} Y e^{tX}) = -e^{-tX} [X, Y] e^{tX} = -[X, Y] ,$$

also

$$e^{-tX} Y e^{tX} = Y - t[X, Y] ; \quad (3.45)$$

damit ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{-tX} e^{t(X+Y)} e^{-tY} e^{t^2[X,Y]/2}) = \\ e^{-tX} Y e^{t(X+Y)} e^{-tY} e^{t^2[X,Y]/2} + e^{-tX} e^{t(X+Y)} e^{-tY} (-Y + t[X, Y]) e^{t^2[X,Y]/2} = 0 , \end{aligned} \quad (3.46)$$

da (3.45) auch für  $X + Y$  anstelle von  $X$  gilt. Damit ist die Klammer in (3.46) gleich 1 für  $t \in \mathbb{R}$ . Die Voraussetzung ist für

$$X = \alpha a^* , \quad Y = -\bar{\alpha} a , \quad [X, Y] = -|\alpha|^2 [a^*, a] = |\alpha|^2$$

erfüllt. (iii) folgt aus (3.45) für  $X = \alpha a^* - \bar{\alpha} a$ ,  $Y = a$  und  $t = 1$ :

$$V(\alpha)^{-1} a V(\alpha) = a - \alpha [a^*, a] = a + \alpha .$$

Die **kohärenten Zustände** sind definiert als

$$|\alpha\rangle = V(\alpha)|0\rangle \equiv V(\alpha)|\psi_0\rangle , \quad (\alpha \in \mathbb{C}) .$$

Wegen (iii), (3.42) ist

$$a|\alpha\rangle = aV(\alpha)|0\rangle = V(\alpha)(a + \alpha)|0\rangle = \alpha|\alpha\rangle ,$$

d.h.  $|\alpha\rangle$  ist ein Eigenvektor von  $a$  zum Eigenwert  $\alpha$ .

**Bemerkung.**  $a^*$  hat hingegen keine Eigenwerte: wäre  $a^*|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ , so

$$\lambda\langle\psi_n|\psi\rangle = \langle\psi_n|a^*\psi\rangle = \langle a\psi_n|\psi\rangle = \begin{cases} \sqrt{n}\langle\psi_{n-1}|\psi\rangle , & (n \neq 0) , \\ 0 , & (n = 0) . \end{cases}$$

Ist  $\lambda = 0$ , so folgt  $|\psi\rangle = 0$ ; ist  $\lambda \neq 0$ , so  $\langle\psi_0|\psi\rangle = 0$  und damit wieder  $|\psi\rangle = 0$ .

Insbesondere kennzeichnet  $\alpha$  den Erwartungswert von Ort  $x$  und Impuls  $p$  im Zustand  $|\alpha\rangle$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\langle x\rangle_\alpha + i\langle p\rangle_\alpha) = \langle a\rangle_\alpha = \alpha .$$

Kohärente Zustände haben eine **klassische Dynamik**:

$$e^{-iHt/\hbar}|\alpha\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}}|\alpha_t\rangle, \quad (3.47)$$

wobei  $\alpha_t = \alpha e^{-i\omega t}$  die klassische Bahn (3.39) ist, die dem Phasenraumpunkt  $\alpha := (x + ip)/\sqrt{2\hbar}$  entspringt. (Die Phase rechts in (3.47) könnte durch Verschiebung des Energienullpunkts eliminiert werden.) Dies folgt mit (ii), (3.42) aus

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= V(\alpha)|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}e^{\alpha a^*}|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|\psi_n\rangle, \\ e^{-iHt/\hbar}|\psi_n\rangle &= e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t}|\psi_n\rangle = e^{-i\omega\frac{t}{2}}(e^{-i\omega t})^n|\psi_n\rangle. \end{aligned}$$

### 3.4 Die WKB-Näherung

(Jeffreys 1923; Wentzel, Kramers, Brillouin 1926) Die Eigenwerte (3.40) des harmonischen Oszillators stimmen mit den nach (1.27) erlaubten Energien überein, bis auf die Ersetzung  $n \rightarrow n + 1/2$ . Es soll hier anhand der Wellenmechanik begründet werden, in welchem (approximativen) Sinn die Quantisierung nach Sommerfeld (s. Abschnitt 1.4) richtig ist. Wir betrachten dazu etwas allgemeiner einen Hamiltonoperator in einer Dimension der Form

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad \text{auf } L^2(\mathbb{R})$$

und suchen Eigenwerte  $E = E_n(\hbar)$  bei Energien  $< \tilde{E}$ , für welche die klassischen Bahnen gebunden sind; ja wir nehmen an, das klassisch erlaubte Gebiet bestehe aus einem Intervall

$$\{x | V(x) < E\} = (a_-(E), a_+(E)), \quad (E < E_0).$$

Die Energie  $E$  ist ein Eigenwert, genau dann falls unter den Lösungen von

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (3.48)$$

(sie bilden einen 2-dim. Raum, da die Differentialgleichung von 2. Ordnung ist) eine existiert mit  $0 \neq \psi \in L^2(\mathbb{R})$ .

$V(x) < E$ : Sei

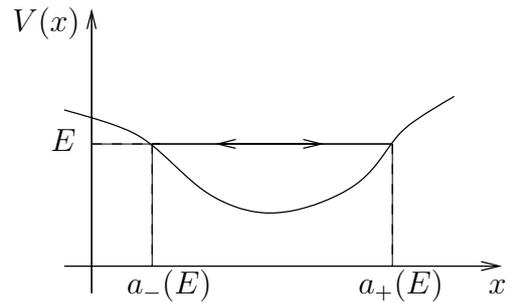
$$k(x) := \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))}, \quad (a_- < x < a_+).$$

Der Ansatz  $\psi(x) = A(x)e^{iS(x)/\hbar}$ . ( $A, S$  reell) führt, vgl. (2.8, 2.9), auf

$$A'' - A(S'/\hbar)^2 + Ak^2 = 0, \quad \frac{d}{dx}(A^2 S') = 0.$$

Im "strahlenoptischen Gebiet" (2.10)

$$\left| \frac{A''(x)}{A(x)} \right| \ll k^2(x), \quad (3.49)$$



vereinfacht sich die erste zu  $S' = \pm \hbar k$  mit Lösungen

$$\begin{aligned} S(x) &= \pm \hbar \int^x k(x') dx' , \\ A^2(x) &= \frac{c_{\pm}^2}{k(x)} , \end{aligned} \quad (3.50)$$

(Integrationskonstanten sind  $c_{\pm}$  und im unbestimmten Integral enthalten). Durch Superposition der beiden Lösungen  $\psi$  ergibt sich die WKB-Näherung

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \left( c_+ e^{i \int^x k(x') dx'} + c_- e^{-i \int^x k(x') dx'} \right) .$$

Die Konsistenz der Lösung verlangt, dass (3.50) die Bedingung (3.49) erfüllt. Man findet

$$\frac{A''}{A} = \frac{1}{4} \left( \frac{5}{4} \left( \frac{V'}{E-V} \right)^2 + \frac{V''}{E-V} \right) : \quad (3.51)$$

Für festes  $x \neq a_{\pm}$  ist  $A''(x)/A(x)$  endlich, also (3.49) für kleine  $\hbar$  (abhängig von  $x$ ) erfüllt, da  $k(x) \rightarrow \infty$  für  $\hbar \rightarrow 0$ . In der Nähe der Umkehrpunkte, wo

$$E - V(x) \cong -V'(a_{\pm})(x - a_{\pm}) ,$$

ist der erste Term (3.51) singulärer als der zweite, sodass (3.49) liefert:

$$|x - a_{\pm}| \gg \left| \frac{\hbar^2}{2mV'(a_{\pm})} \right|^{1/3} =: \varepsilon \quad (3.52)$$

$V(x) > E$ : Sei nun

$$\kappa(x) := \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E)} , \quad (x < a_- \text{ oder } x > a_+) .$$

Der Ansatz  $\psi(x) = A(x)e^{-S(x)/\hbar}$  führt auf

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} \left( c'_+ e^{\int^x \kappa(x') dx'} + c'_- e^{-\int^x \kappa(x') dx'} \right) ,$$

wiederum gültig unter der Bedingung (3.52), die eine kleine Umgebung der Umkehrpunkte ausschliesst. Eine Lösung  $\psi \in L^2$  liegt vor, falls

$$\begin{aligned} c'_- &= 0 & \text{bei } x < a_- , \\ c'_+ &= 0 & \text{bei } x > a_+ . \end{aligned}$$

Behauptung: Die Anschlussbedingung bei  $a_-$  lautet

$$\begin{aligned} x - a_- \ll -\varepsilon & & x - a_- \gg \varepsilon \\ \frac{1}{2\sqrt{\kappa(x)}} e^{-\int_{x_-}^{a_-} \kappa dx'} & \longleftrightarrow & \frac{1}{\sqrt{k(x)}} \cos \left( \int_{a_-}^x k dx' - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned} \quad (3.53)$$

für die Lösung  $\psi$ , die für  $x \rightarrow -\infty$  exponentiell abfällt. Analog für  $a_+$ .

Eine Lösung, die für  $x \rightarrow \pm\infty$  abfällt, erfordert somit

$$\cos\left(\int_{a_-}^x k dx' - \frac{\pi}{4}\right) = \alpha \cos\left(\int_x^{a_+} k dx' - \frac{\pi}{4}\right)$$

für ein  $\alpha \in \mathbb{C}$  und alle  $x$  mit  $x - a_- \gg \varepsilon$ ,  $x - a_+ \ll -\varepsilon$ . Dies ist nur möglich für  $\alpha = \pm 1$  und auch dann nur für

$$\int_{a_-}^{a_+} k dx - \frac{\pi}{2} = \begin{cases} 2m\pi, & (\alpha = +1), \\ (2m+1)\pi, & (\alpha = -1), \end{cases}$$

d.h. mit  $n = 2m, 2m+1$  für

$$\oint k dx = 2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Dies ist die Sommerfeld-Bedingung (1.27) mit  $n \rightsquigarrow n + 1/2$ .

Zu konstruieren bleibt eine Lösung für (3.48), die den Umkehrpunkt  $a = a_-$  überbrückt und zwischen den beiden Verhalten (3.53) interpoliert. Dazu verwenden wir die Variable

$$y = \frac{x - a}{\varepsilon},$$

in welcher der Gültigkeitsbereiches (3.52) von (3.53)

$$y \ll -1, \quad \text{bzw.} \quad y \gg 1 \tag{3.54}$$

lautet. Die Lösung soll ergänzt werden durch eine, die im linearen Bereich von  $V(x) - E$ ,

$$|V''(a)(x - a)^2| \ll |V'(a)(x - a)|, \tag{3.55}$$

d.h. für

$$|y| \ll \varepsilon^{-1} \left| \frac{V'(a)}{V''(a)} \right|, \tag{3.56}$$

gilt. Da  $\varepsilon \rightarrow 0$  für  $\hbar \rightarrow 0$ , überlappt (3.56) mit beiden Bereichen (3.54). Wegen (3.55) darf man  $k^2, \kappa^2$  in  $x - a$  linearisieren. Die Behauptung (3.53) lautet dann innerhalb von (3.56)

$$y \ll -1 \qquad y \gg 1 \\ \frac{1}{2|y|^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}|y|^{3/2}} \longleftrightarrow \frac{1}{y^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}y^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) .$$

Ebenfalls darf man  $V(x) - E$  in (3.48) linearisieren,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V'(a)(x - a)\psi(x) = 0$$

oder, unter Verwendung von  $V'(a) = -|V'(a)|$ ,

$$\ddot{\psi}(y) + y\psi(y) = 0$$

( $\cdot = d/dy$ ). Eine Lösung davon ist

$$\psi(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varphi(t,y)} dt \quad \text{mit } \varphi(t,y) := \frac{1}{3}t^3 - yt \quad (3.57)$$

(ist reell, da der Imaginärteil des Integranden ungerade ist), oder genauer

$$\psi(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\frac{1}{3}t^3 - yt)} e^{-\varepsilon t^2} dt ,$$

denn

$$\ddot{\psi}(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(-t^2)}_{-\frac{d}{dt} \frac{1}{3}t^3} e^{i(\frac{1}{3}t^3 - yt)} dt = -y\psi(y)$$

nach Integration einer Ableitung.

Die Phase  $\varphi$  ist stationär,  $0 = \partial\varphi/\partial t = t^2 - y$ , bei

$$t = \begin{cases} \pm\sqrt{y}, & (y > 0), \\ \pm i\sqrt{|y|}, & (y < 0), \end{cases}$$

ferner  $\partial^2\varphi/\partial t^2 = 2t$ .

$y > 0$ : Die quadratische Approximation der Phase um  $\pm\sqrt{y}$  ist

$$\varphi(t,y) = \mp \frac{2}{3}y^{3/2} \pm \sqrt{y}(t - \sqrt{y})^2 + \dots$$

und für  $y \gg 1$  sind die beiden stationären Punkte gut getrennt. Damit ist  $\psi(y)$  annähernd gleich der Summe ihrer beiden Beiträge, vgl. (3.38),

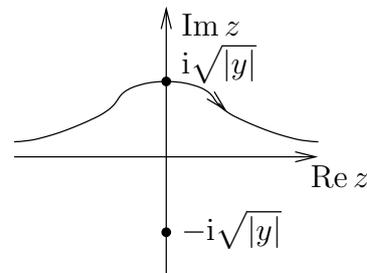
$$\begin{aligned} \psi(y) &= \frac{1}{2y^{1/4}} e^{-i\frac{2}{3}y^{3/2}} e^{i\frac{\pi}{4}} + (i \rightarrow -i) \\ &= \frac{1}{y^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}y^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

$y < 0$ : Die Phase nahe den Sattelpunkten  $\pm i\sqrt{|y|}$  ist für  $y \ll -1$  gut durch

$$i\varphi(t,y) = \mp \frac{2}{3}|y|^{3/2} \mp |y|^{1/2}(t \mp i\sqrt{|y|})^2$$

approximiert. Wir deformieren den Integrationspfad  $(-\infty, \infty)$  in (3.57) in die komplexe Ebene, und zwar durch  $t = +i\sqrt{|y|}$ : dann hat  $|e^{i\varphi(t,y)}|$  dort ein Maximum längs des Pfades, welches das Integral dominiert:

$$\psi(y) = \frac{1}{2|y|^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}|y|^{3/2}} .$$



### 3.5 Symmetrien und Erhaltungssätze

Wir betrachten die durch  $H = H^*$  (Hamiltonoperator) und  $A = A^*$  (eine Observable) erzeugten 1-parametrischen unitären Gruppen

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi_0\rangle : \text{Lösung von } i\hbar\frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle \text{ zum Anfangszustand } |\psi_0\rangle ,$$

$$|\varphi(\lambda)\rangle = e^{-iA\lambda/\hbar}|\psi_0\rangle : \text{Lösung von } i\hbar\frac{d|\varphi\rangle}{d\lambda} = A|\varphi\rangle \text{ zum Anfangszustand } |\psi_0\rangle .$$

Dann ist

$$\left. \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle \right|_{t=0} = \langle \psi_0 | \frac{i}{\hbar} [H, A] | \psi_0 \rangle = - \langle \psi_0 | \frac{i}{\hbar} [A, H] | \psi_0 \rangle = - \left. \frac{d}{d\lambda} \langle \varphi(\lambda) | H | \varphi(\lambda) \rangle \right|_{\lambda=0} .$$

Folgende Aussagen sind deshalb äquivalent:

- a)  $A$  ist eine **Erhaltungsgrösse**, d.h.  $\langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle$  ist für jeden Anfangszustand  $|\psi_0\rangle$  zeitlich konstant. Oder:

$$e^{iHt/\hbar} A e^{-iHt/\hbar} = A ;$$

- b)  $[H, A] = 0$ ;

- c)  $\langle \varphi(\lambda) | H | \varphi(\lambda) \rangle$  ist unabhängig von  $\lambda$  für jeden Anfangszustand  $|\psi_0\rangle$ , oder

$$e^{iA\lambda/\hbar} H e^{-iA\lambda/\hbar} = H .$$

Man nennt dann  $e^{-iA\lambda/\hbar}$  eine (1-parametrische) **Symmetriegruppe** von  $H$ .

**Beispiel.** Jede Drehung  $R \in O(3)$  induziert im Raum  $L^2(\mathbb{R}^3)$  eine unitäre Transformation

$$U(R) : \quad \psi(\vec{x}) \mapsto \psi(R^{-1}\vec{x}) . \quad (3.58)$$

Es gilt  $U(1) = \mathbf{1}$ ,  $U(R_2)U(R_1) = U(R_2R_1)$ , d.h.  $R \mapsto U(R)$  ist eine unitäre **Darstellung** der Drehgruppe  $O(3)$ . Die Drehungen  $R(\lambda)$  um eine feste Achse  $\vec{e}$ , ( $|\vec{e}| = 1$ ) mit Drehwinkel  $\lambda$  bilden eine 1-parametrische Untergruppe von  $SO(3) \subset O(3)$ , und es ist

$$\left. \frac{d}{d\lambda} R(\lambda)\vec{x} \right|_{\lambda=0} = \vec{e} \wedge \vec{x} .$$

Die zugehörigen  $U(\lambda) \equiv U(R(\lambda))$  bilden eine 1-parametrische unitäre Gruppe. Ihre Erzeugende  $A$  ergibt sich aus

$$(A\psi)(\vec{x}) = i\hbar \left. \frac{d}{d\lambda} \psi(R(-\lambda)\vec{x}) \right|_{\lambda=0} = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \vec{x}} \cdot (\vec{e} \wedge \vec{x}) = \vec{e} \cdot \left( \vec{x} \wedge \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial \vec{x}} \right) , \quad (3.59)$$

d.h. es ist

$$A = \vec{e} \cdot (\vec{x} \wedge \vec{p}) = \vec{e} \cdot \vec{L} = \text{Drehimpulskomponente in Richtung der Drehachse } \vec{e} .$$

Somit ist  $\vec{e} \cdot \vec{L}$  genau dann erhalten, wenn  $U(\lambda)$  eine Symmetriegruppe von  $H$  ist. Für

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$$

findet man

$$U(R)^{-1}HU(R) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(R\vec{x}) .$$

Somit ist  $\vec{e} \cdot \vec{L}$  erhalten, wenn  $V(\vec{x})$  rotationssymmetrisch um die Achse  $\vec{e}$  ist. Bei voller Rotationssymmetrie, d.h. falls  $V = V(|\vec{x}|)$ , sind alle Drehimpulskomponenten erhalten:

$$[H, \vec{L}] = 0 . \tag{3.60}$$

Ebenfalls erhalten ist dann  $\vec{L}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ , d.h.

$$[H, \vec{L}^2] = 0 . \tag{3.61}$$

**Bemerkung.** In Polarkoordinaten  $(r, \theta, \varphi)$  wirkt  $R(\lambda) : (r, \theta, \varphi) \mapsto (r, \theta_\lambda, \varphi_\lambda)$  nicht auf  $r$ . Ist  $\psi = \psi(r, \theta, \varphi)$  in diesen dargestellt, so wirken die  $L_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) nach (3.59) nur auf die Polarwinkel  $\theta, \varphi$ . Beispiel:  $\vec{e} = \vec{e}_3$ , also  $\theta_\lambda = \theta, \varphi_\lambda = \varphi + \lambda$ :

$$L_3 = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} .$$

Die  $L_i$ 's, und damit  $\vec{L}^2$ , sind selbst-adjungierte Operatoren auf  $L^2(\Omega)$ ,  $\Omega = \text{Einheitskugel}$ .

## 4 Das Zweikörperproblem

---

### 4.1 Schwerpunkts- und Relativbewegung

Der Hamiltonoperator ist

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \quad \text{auf } L^2(\mathbb{R}^6). \quad (4.1)$$

Speziell beschreibt

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} \quad (4.2)$$

die Wechselwirkung eines Elektrons der Ladung  $-e$  mit einem Atomkern der Ladung  $Z \cdot e$  ( $Z = 1$ : Wasserstoff-Atom). Zunächst bleiben wir aber bei einem allgemeinen Potential  $V(r)$ .

Nach klassischem Muster schreibt man  $H$  in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

$$\vec{X} = \frac{1}{M}(m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2), \quad \vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \quad (4.3)$$

und den konjugierten Impulsen

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \quad \vec{p} = m\left(\frac{\vec{p}_1}{m_1} - \frac{\vec{p}_2}{m_2}\right),$$

wobei  $M = m_1 + m_2$  und  $m = m_1m_2/M$  (reduzierte Masse). So wird

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(|\vec{x}|), \quad P_k = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial X_k}; \quad p_k = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (4.4)$$

denn es ist gleichgültig, ob die Quantisierung in den Koordinaten  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  oder  $(\vec{X}, \vec{x})$  erfolgt. Beschränken wir uns auf Wellenfunktionen der Form

$$\Psi(\vec{X}) \psi(\vec{x})$$

(die  $L^2(\mathbb{R}^6)$  aufspannen), so ergeben sich zwei unabhängige Schrödingergleichungen:

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\vec{P}^2}{2M} \Psi; \quad i\hbar \frac{d\psi}{dt} = \left( \frac{\vec{p}^2}{2m} \psi + V(|\vec{x}|) \right) \psi. \quad (4.5)$$

Die erste beschreibt die freie Bewegung des Schwerpunkts (die wir nicht weiter betrachten), die zweite die Relativbewegung: ein **Zentralkraftproblem** mit dem Hamiltonoperator

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(|\vec{x}|) \quad \text{auf } L^2(\mathbb{R}^3). \quad (4.6)$$

Da  $H$  rotationssymmetrisch ist, gilt der Erhaltungssatz (3.60). Dadurch wird sich das Problem weiter auf eine eindimensionale Schrödingergleichung für die radiale Bewegung reduzieren lassen. Aus (3.61) folgt, dass  $H$  die Eigenräume von  $\vec{L}^2$  in sich abbildet. Wir untersuchen daher zuerst das Eigenwertproblem von  $\vec{L}^2$ , dann jenes von  $H$ .

**Drehimpuls:** Wir setzen  $\vec{L} = \hbar \vec{M}$ ,  $\vec{M} = -i\vec{x} \wedge \partial/\partial\vec{x}$ . Es ist

$$\begin{aligned}\vec{M}^2 &= M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (x_i \partial_j - x_j \partial_i)^2 \\ &= -\sum_{i,j} (x_i \underbrace{\partial_j x_i}_{x_i \partial_j + \delta_{ij}} \partial_j - x_i \underbrace{\partial_j x_j \partial_i}_{\partial_i x_j \partial_j + (1 - \delta_{ij}) \partial_i}) \\ &= -\sum_{i,j} (x_i^2 \partial_j^2 - x_i \partial_i x_j \partial_j - x_i \partial_i + 2\delta_{ij} x_i \partial_i) .\end{aligned}$$

In Polarkoordinaten ist  $\sum_i x_i \partial_i = \vec{x} \cdot \vec{\nabla} = r \partial/\partial r$ , also

$$\vec{M}^2 = -r^2 \Delta + \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + (3-2)r \frac{\partial}{\partial r} = -r^2 \Delta + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} r ,$$

oder

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{1}{r^2} \vec{M}^2 . \quad (4.7)$$

Die Eigenvektoren von  $\vec{M}^2$  (als Operator auf  $L^2(\Omega)$  aufgefasst, vgl. Bemerkung auf S. 40), sind die Kugelfunktionen  $Y_l$  (Definition: s. Anhang B):

$$\vec{M}^2 Y_l = l(l+1) Y_l .$$

Weiter gilt der Satz in Anhang B. Als Operator auf  $L^2(\Omega)$  hat damit  $\vec{M}^2$  das rein diskrete Spektrum der Eigenwerte  $l(l+1)$ , ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ), die  $(2l+1)$ -fach entartet sind.

**Hamiltonoperator:**  $H$  lässt für jedes  $l$  den Unterraum der Wellenfunktionen

$$\psi(\vec{x}) = \frac{u(r)}{r} Y_l(\vec{e}) \quad (4.8)$$

mit  $u \in L^2(0, \infty)$ , d.h.  $\int_0^\infty |u(r)|^2 dr < \infty$ , invariant. (Beachte:  $\int |\psi(\vec{x})|^2 d^3x = \int_\Omega |Y_l(\vec{e})|^2 d^2e \cdot \int_0^\infty |u(r)|^2 dr$ , da  $d^3x = r^2 dr d^2e$ .) In jedem solchen Unterraum reduziert sich  $H\psi = E\psi$  auf das "radiale Eigenwertproblem"

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \mathcal{V}(r)\right)u = \varepsilon u \quad (4.9)$$

in  $L^2(0, \infty)$ , wobei wir

$$\mathcal{V}(r) = \frac{2m}{\hbar^2} V(r) , \quad \varepsilon = \frac{2m}{\hbar^2} E$$

gesetzt haben. Wir diskutieren das Verhalten der Lösung bei  $r \rightarrow 0$  und  $r \rightarrow \infty$ . Dabei nehmen wir an, dass  $V(r)$  für  $r \rightarrow \infty$  verschwindet und für  $r \rightarrow 0$  weniger singulär ist als  $1/r^2$ .

Bei  $r \rightarrow 0$  reduziert sich (4.9) auf

$$-u'' + \frac{l(l+1)}{r^2} u = 0$$

mit der allgemeinen Lösung

$$u(r) = ar^{l+1} + br^{-l} .$$

Falls  $l > 0$ , ist sie bei  $r = 0$  quadratintegrierbar, nur falls  $b = 0$ . Auch für  $l = 0$  ist die Lösung  $r^{-l} = 1$  zu verwerfen: dann ist nach (4.8)  $\psi(\vec{x}) = 1/r$ , also  $-\Delta\psi = 4\pi\delta$  nicht quadratintegrierbar. Die verbleibende Lösung ist bis auf die Konstante  $a$  bestimmt. Damit hat (4.9) für jedes  $\varepsilon$  nur eine einzige Lösung  $u(\varepsilon, r) \approx r^{l+1}$ , ( $r \rightarrow 0$ ): die ‘‘reguläre Lösung’’.

Bei  $r \rightarrow \infty$  reduziert sich (4.9) auf

$$-u'' = \varepsilon u$$

mit der allgemeinen Lösung

$$ae^{ikr} + be^{-ikr} , \quad (k = \sqrt{\varepsilon}) .$$

Insbesondere ist zu erwarten, dass die reguläre Lösung  $u(\varepsilon, r)$  von (4.9) für  $r \rightarrow \infty$  die asymptotische Form

$$u(\varepsilon, r) \approx a(\varepsilon)e^{ikr} + b(\varepsilon)e^{-ikr} \quad (4.10)$$

besitzt.

**Gebundene Zustände** entsprechen (normierbaren) Eigenzuständen,  $u(\varepsilon, \cdot) \in L^2(0, \infty)$ . Dann muss erstens  $\varepsilon < 0$ : wir legen dann  $k$  fest durch

$$k = i\kappa , \quad \kappa = \sqrt{-\varepsilon} > 0 , \quad (4.11)$$

also  $e^{\pm ikr} = e^{\mp \kappa r}$ . Zweitens muss  $b(\varepsilon) = 0$  sein: die Eigenwerte  $\varepsilon$  ergeben sich als **Nullstellen** der Funktion  $b(\varepsilon)$ . Dann reduziert sich (4.10) auf

$$u(\varepsilon, r) \approx a(\varepsilon)e^{-\kappa r} , \quad (r \rightarrow \infty) .$$

## 4.2 Das Wasserstoff-Atom

Wir behandeln nun den Fall (4.2) des Coulombpotentials

$$\mathcal{V}(r) = -\frac{\gamma}{r} , \quad \gamma = \frac{2mZe^2}{\hbar^2} .$$

Die allgemeine Diskussion motiviert den Ansatz

$$u(r) = e^{-\kappa r} \sum_{k=l+1}^{\infty} c_k r^k . \quad (4.12)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert unter Benutzung von (4.11) die einfache Rekursion

$$c_{k+1} = c_k \frac{\gamma - 2\kappa k}{l(l+1) - k(k+1)} , \quad (k = l+1, l+2, \dots) . \quad (4.13)$$

Falls die Rekursion nicht abbricht (d.h. alle  $c_k \neq 0$ ), so ist für  $k \rightarrow \infty$

$$c_{k+1} \approx c_k \frac{2\kappa}{k+1} , \quad \text{also} \quad c_k \approx C \frac{(2\kappa)^k}{k!} ,$$

was auf

$$u(r) \approx e^{-\kappa r} \cdot Ce^{2\kappa r} = Ce^{\kappa r}$$

führt. Falls (4.13) hingegen abbricht, d.h. falls für ein  $n$

$$c_n \neq 0, \quad c_{n+1} = 0,$$

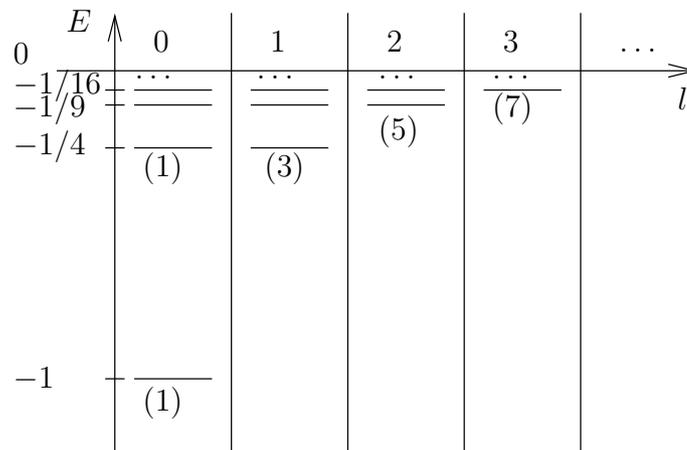
so ist die Lösung eine Eigenfunktion. Die Bedingung dafür ist

$$\kappa_n = \frac{\gamma}{2n}, \quad (n = l + 1, l + 2, \dots),$$

d.h.

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \kappa_n^2 = -\frac{m(Ze^2)^2}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad (4.14)$$

(Schrödinger 1926). Dies ist die von Bohr im Rahmen der "alten Quantentheorie" hergeleitete Formel (1.25) für die Energieniveaus. Das Schema der Eigenwerte stellen wir so dar:



Die Eigenwerte sind aufgetragen in der Einheit 1Ry (Rydberg); die Zahlen in Klammern sind die Vielfachheiten  $2l + 1$  der Eigenwerte zu gegebenem  $l$ , entsprechend der Dimension des Raums der Kugelfunktionen zum Index  $l$ . Zu gegebenem  $n$  ist die Vielfachheit (oder Entartung) von  $E_n$  gleich

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2,$$

was mit (1.33) übereinstimmt.

Fundamental ist die Existenz eines energetisch tiefsten Zustands ( $l = 0, n = 1$ ): die Energie des H-Atom ist nach unten beschränkt und es ist damit stabil! Dies im Gegensatz zum klassischen H-Atom, wo das (beschleunigte) Elektron beliebig viel Energie durch Ausstrahlung abgeben würde (vgl. Elektrodynamik). Die Wellenfunktion des Grundzustandes ist nach (4.12)

$$u(r) = e^{-\kappa_1 r}, \quad \kappa_1 = \frac{\gamma}{2} = \frac{me^2}{\hbar^2},$$

also (bis auf Normierung), da  $Y_0$  eine Konstante ist,

$$\psi(\vec{x}) = e^{-|\vec{x}|/a}, \quad a = \frac{\hbar^2}{me^2}.$$

Der Bohr-Radius  $a$  ist der Radius des Atoms in der Bohrschen Theorie. Durch (4.14) sind alle Eigenwerte von  $H$  (vgl. (4.6, 4.2)) gefunden (ohne Beweis). Damit ist aber (im Unterschied zum harmonischen Oszillator) noch nicht das gesamte Spektrum  $\sigma(H)$  ausgeschöpft, welches (wie beim freien Teilchen) auch einen kontinuierlichen Anteil  $[0, \infty)$  besitzt:



Um dies einzusehen, vgl. (3.9), konstruiere man sich zu jedem  $E \geq 0$  und beliebig kleinem  $\varepsilon > 0$  ein Zustand  $\psi$  mit der Eigenschaft

$$\|(H - E)\psi\| \leq \varepsilon.$$

Idee: ein approximierter Eigenzustand des freien Teilchens, weit weg vom Kern.

## 5 Streutheorie

---

### 5.1 Die Greensche Funktion

Als Vorbereitung zur Streutheorie soll die Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta + k^2)\psi = \rho \quad (5.1)$$

für eine lokalisierte Quelle  $\rho(\vec{x})$ , z.B.  $\rho \in L^2(\mathbb{R}^3)$  gelöst werden. Zu beachten ist, dass  $k^2 \in \sigma(-\Delta) = [0, \infty)$ . In welchem Sinn ist die Lösung  $\psi$  zu verstehen? Sie ist nicht eindeutig, zumindest nicht unter beschränkten Funktionen (die ebene Welle  $\psi_0(\vec{x}) = e^{ik\vec{e}_0 \cdot \vec{x}}$ , ( $|\vec{e}_0| = 1$ ) ist Lösung der homogenen Gleichung); und sie existiert i.A. nicht, falls  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$  gefordert wird (es würde  $\hat{\rho}(k\vec{e}_0) = 0$  folgen). Dazwischen liegen die nützlichen Lösungen

$$\psi_{\pm}(\vec{x}) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\Delta + k^2 \pm i\varepsilon)^{-1} \rho \equiv (\Delta + k^2 \pm i0)^{-1} \rho. \quad (5.2)$$

Wir zeigen weiter unten: Die **Greensche Funktion**

$$G_{\pm}(k, \vec{x} - \vec{y}) = \langle \vec{x} | (\Delta + k^2 \pm i0)^{-1} | \vec{y} \rangle \quad (5.3)$$

ist

$$G_{\pm}(k, \vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ikr}}{r}, \quad (r = |\vec{x}|). \quad (5.4)$$

Damit wird (5.2) zu

$$\psi_{\pm}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{\pm ik|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \rho(\vec{y}) d^3y. \quad (5.5)$$

Für grosse  $r$  fällt die Lösung ab,

$$\psi_{\pm}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ikr}}{r} \int e^{\mp ik\vec{e} \cdot \vec{y}} \rho(\vec{y}) d^3y + O(r^{-2}), \quad (r \rightarrow \infty, \vec{e} = \vec{x}/r), \quad (5.6)$$

wenn auch  $\psi_{\pm} \notin L^2(\mathbb{R}^3)$ . Dies folgt aus  $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x}| - \vec{e} \cdot \vec{y} + O(r^{-1})$ .

**Bemerkung.** Man erkennt in (5.5) die retardierten und avancierten Lösungen der Wellengleichung

$$(\square\psi)(\vec{x}, t) = -\rho(\vec{x}, t), \quad (5.7)$$

und zwar (vgl. Elektrodynamik)

$$\psi_{\pm}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(\vec{y}, t \mp |\vec{x} - \vec{y}|/c)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3y : \quad (5.8)$$

Für  $\rho(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x})e^{i\omega t}$  ist  $\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x})e^{i\omega t}$  und (5.7, 5.8) werden zu (5.1, 5.5) mit  $k = \omega/c$ .

Beweis von (5.4). Nach (5.3) ist

$$G_+(k, \vec{x}) = (2\pi)^{-3} \int (-\vec{q}^2 + k^2 + i0)^{-1} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} d^3q.$$

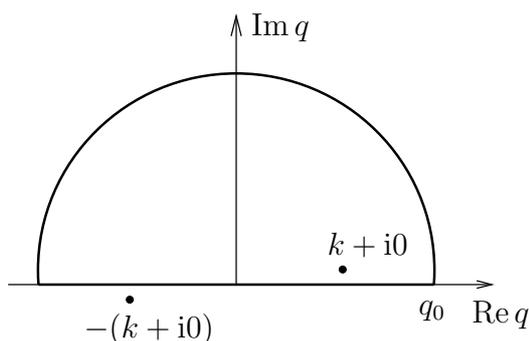
In Polarkoordinaten  $(q, \theta, \varphi)$  ist  $d^3q = q^2 dq d\varphi d(\cos \theta)$  und  $\vec{q} \cdot \vec{x} = qr \cos \theta$ . Mit  $\cos \theta = u$  ist

$$\begin{aligned} G_+(k, \vec{x}) &= (2\pi)^{-3} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{k^2 - q^2 + i0} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_{-1}^1 e^{iqru} du \\ &= (2\pi)^{-2} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{k^2 - q^2 + i0} \frac{1}{iqr} (e^{ikr} - e^{-ikr}) \\ &= (2\pi)^{-2} \frac{1}{ir} \int_{-\infty}^\infty dq \frac{q}{k^2 - q^2 + i0} e^{ikr} . \end{aligned}$$

Das Integral kann mit dem Residuensatz anhand der Contour der Figur berechnet werden. Der Integrand

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{q - (k + i0)} + \frac{1}{q + (k + i0)} \right) e^{ikr}$$

hat Pole bei  $q = \pm(k + i0)$  und ist in der oberen Halbebene exponentiell abfallend. Somit verschwindet der Betrag des Halbkreises für  $q_0 \rightarrow \infty$  und der umschlossene Pol  $q = k + i0$  hat Residuum  $-e^{ikr}/2$ . Daraus folgt (5.4).

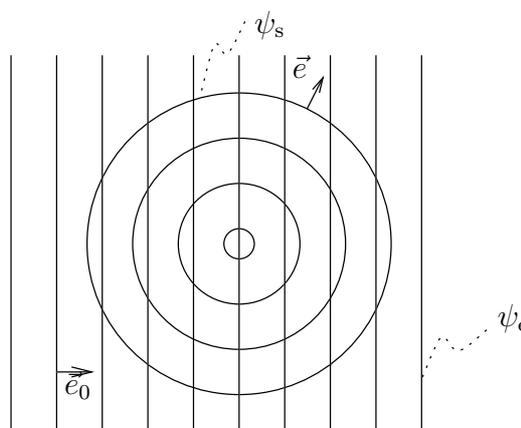


## 5.2 Streuzustände

Eine ebene Welle  $\psi_e(k, \vec{x}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}$ , ( $\vec{k} = k\vec{e}_0$ ) der Richtung  $\vec{e}_0$  ist eine (nicht normierbare) Lösung der freien Schrödinger-Gleichung zur Energie  $k^2$ :  $(-\Delta - k^2)\psi_e = 0$ . In Anwesenheit eines Potentials kann nach einer Lösung  $\psi$  von

$$(-\Delta + \mathcal{V}(\vec{x}))\psi = k^2\psi \quad (5.9)$$

(mit  $\mathcal{V}$  wie in (4.9)) gesucht werden, die sich von der einfallenden Welle  $\psi_e$  durch eine Streuwelle  $\psi_s$  unterscheidet:



$$\begin{aligned} \psi(k, \vec{x}) &= \psi_e(k, \vec{x}) + \psi_s(k, \vec{x}) , \\ \psi_s(k, \vec{x}) &= f(k, \vec{e}) \frac{e^{ikr}}{r} + O(r^{-2}) , \quad (r \rightarrow \infty, \vec{e} = \vec{x}/r) . \end{aligned} \quad (5.10)$$

Hier ist  $f(k, \vec{e})$  die **Streuamplitude**. Der Abfall  $\sim r^{-1}$  der Amplitude der Streuwelle drückt die zu erwartende Verdünnung der Wahrscheinlichkeitsdichte auf eine Kugel der Fläche  $\sim r^2$  aus.

Aus (5.9) folgt

$$(-\Delta - k^2)(\psi - \psi_e) = -\mathcal{V}\psi .$$

Für  $k \rightarrow k + i\varepsilon$  ist die Streuwelle  $\psi_s = \psi - \psi_e$  wegen  $e^{i(k+i\varepsilon)r} = e^{ikr}e^{-\varepsilon r}$  exponentiell abfallend. So ist im Limes  $\varepsilon \downarrow 0$

$$\psi(k, \vec{x}) - e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = (\Delta + k^2 + i0)^{-1} \mathcal{V} \psi ,$$

und mit (5.5) wird daraus die inhomogene, lineare Integralgleichung

$$\psi(k, \vec{x}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \mathcal{V}(\vec{y}) \psi(k, \vec{y}) \quad (5.11)$$

(**Lippmann-Schwinger Gleichung**). Nach (5.6) folgt für  $r \rightarrow \infty$  das asymptotische Verhalten (5.10) mit

$$f(k, \vec{e}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3y e^{-ik\vec{e}\cdot\vec{y}} \mathcal{V}(\vec{y}) \psi(k, \vec{y}) . \quad (5.12)$$

Also: Die Integralgleichung (5.11) ist äquivalent zur Schrödinger-Gleichung (5.9) inklusive der asymptotischen Bedingung (5.10) einer auslaufenden Streuwelle.

Durch Iteration von Gl. (5.11) entsteht die Bornsche Reihe. Die einfachste Näherungslösung derselben entsteht, indem man  $\psi(k, \vec{y})$  im Bereich des Potentials  $\mathcal{V}(\vec{y})$  ersetzt durch die einfallende Welle  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{y}}$ . Der entsprechende Ausdruck

$$f_B(k', k) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3y e^{-ik(\vec{e}-\vec{e}_0)\cdot\vec{y}} \mathcal{V}(\vec{y}) \quad (5.13)$$

für die Streuamplitude heisst **Bornsche Näherung**.

**Interpretation.** Obschon die Streulösungen  $\psi(k, \vec{x})$  nicht quadratintegrierbar sind, lassen sie sich plausibel interpretieren. Für jede Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung gilt die Kontinuitätsgleichung (2.16) für Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho$  und Wahrscheinlichkeits-Stromdichte  $\vec{j}$ . Für stationäre Lösungen, und insbesondere für obige Streulösung  $\psi(k, \vec{x})e^{-i\hbar k^2 t/2m}$ , gilt dabei  $\partial\rho/\partial t = 0$ . Zur einfallenden ebenen Welle  $\psi_e$  und zur Streuwelle  $\psi_s$  gehören die Stromdichten

$$\vec{j}^{(e)} = \frac{\hbar}{m} k \vec{e}_0 , \quad \vec{j}^{(s)}(\vec{x}) = \frac{\hbar}{m} k \frac{|f(k, \vec{e})|^2}{r^2} \vec{e} + O(r^{-3}) .$$

Die Streustromdichte ist asymptotisch radial nach aussen gerichtet, und der gesamte Streustrom durch die Kugel vom Radius  $r$  in einem Raumwinkelelement  $d\Omega$  wird unabhängig von  $r$ :

$$j^{(s)} r^2 d\Omega = j^{(e)} |f|^2 d\Omega .$$

Das Verhältnis

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(k, \vec{e}) := \frac{\text{Streustrom durch } d\Omega}{d\Omega \times \text{einfallende Stromdichte}} = |f(k, \vec{e})|^2 \quad (5.14)$$

ist der **differentielle Streuquerschnitt** in Richtung  $\vec{e}$ . Die Notation  $d\sigma/d\Omega$  rührt von der klassischen Mechanik her: Dort stiften die Streubahnen eine Zuordnung  $d\sigma \ni \vec{b} \mapsto \vec{e} \in d\Omega$  zwischen Zielfehler  $\vec{b}$  und Streurichtung  $\vec{e}$ . Dementsprechend ist  $j^{(e)} d\sigma = j^{(s)} r^2 d\Omega$ .

Der **totale Streuquerschnitt** entsteht daraus durch Integration über alle Streurichtungen:

$$\sigma(k) \equiv \int d^2e |f(k, \vec{e})|^2. \quad (5.15)$$

In den Notationen (5.14, 5.15) nicht explizit widerspiegelt ist die Abhängigkeit der Grössen von der einfallenden Richtung  $\vec{e}_0$ . Für ein Zentralpotential  $\mathcal{V}(r)$  hängt  $f(k, \vec{e})$  von  $\vec{e}_0$  nur über den Winkel  $\angle(\vec{e}, \vec{e}_0)$  ab. Dieser Fall wird im übernächsten Abschnitt näher behandelt.

### 5.3 Das optische Theorem

Die Vorwärtsrichtung ist durch die Richtung des einfallenden Strahls  $\vec{e}_0$  definiert. Das optische Theorem bringt die Stromerhaltung zum Ausdruck: Der Wahrscheinlichkeitsstrom, der in alle anderen Richtungen gestreut wird, geht dem Strahl in Vorwärtsrichtung verloren:

$$\sigma(k) = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(k, \vec{e}_0). \quad (5.16)$$

Die rechte Seite entspricht diesem Verlust. Der folgende Beweis bringt zum Ausdruck, dass er durch Interferenz zwischen den beiden Teilen von (5.10) zustande kommt.

**Beweis.** Aus (5.10) folgt

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\psi &= i\vec{k}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + ik\vec{e}f(k, \vec{e})\frac{e^{ikr}}{r} + O(r^{-2}), \\ \bar{\psi}\vec{\nabla}\psi &= i\vec{k} + \frac{i}{r}(k\vec{e}f(k, \vec{e})e^{i(kr-\vec{k}\cdot\vec{x})} + \vec{k}\bar{f}(k, \vec{e})e^{-i(kr-\vec{k}\cdot\vec{x})}) + \frac{i\vec{k}\vec{e}}{r^2}|f(k, \vec{e})|^2, \end{aligned}$$

woraus sich die Stromdichte  $\vec{j}$  aus (2.15) ergibt: insbesondere mit  $\vec{k} = k\vec{e}_0$  die Radialkomponente

$$\frac{m}{\hbar k}\vec{j} \cdot \vec{e} = \vec{e}_0 \cdot \vec{e} + \frac{1}{r} \text{Im} i (f(k, \vec{e})e^{ikr(1-\vec{e}_0\cdot\vec{e})} + \vec{e}_0 \cdot \vec{e}\bar{f}(k, \vec{e})e^{-ikr(1-\vec{e}_0\cdot\vec{e})}) + \frac{|f(k, \vec{e})|^2}{r^2}. \quad (5.17)$$

Das Integral über  $\vec{e} \in S^2$  der linken Seite verschwindet wegen  $\text{div} \vec{j} = 0$ ; jenes des ersten Terms rechts, da dieser ungerade in  $\vec{e}$  ist. Das Integral der Klammer lässt sich für grosse  $\rho = kr$  mit der Methode der stationären Phase berechnen, wie allgemein in Anhang C und hier speziell für  $S^2$  dargelegt:

$$\int f(\vec{e})e^{i\rho h(\vec{e})}d^2e = \frac{2\pi}{\rho} \sum_i \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\text{sgn}(\partial^2 h)(\vec{e}_i)}}{|\det(\partial^2 h)(\vec{e}_i)|^{1/2}} f(\vec{e}_i)e^{i\rho h(\vec{e}_i)} + O(\rho^{-2}), \quad (\rho \rightarrow \infty),$$

wobei  $\vec{e}_i$  die stationären Punkte von  $h : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sind und  $\partial^2 h$  die Hesse-Matrix ist. Die Funktion  $h(\vec{e}) = 1 - \vec{e}_0 \cdot \vec{e} = 1 - \cos \theta$ , ( $\theta = \angle(\vec{e}, \vec{e}_0)$ ) ist stationär bei  $\vec{e} = \pm\vec{e}_0$  (bzw.  $\theta = 0, \pi$ ) mit  $h(\pm\vec{e}_0) = 0, 2$  und  $\partial^2 h(\pm\vec{e}_0) = \pm 1$ . Das Integral des Ausdrucks, dessen Imaginärteil in (5.17) vorkommt, ist somit

$$\begin{aligned} \frac{2\pi i}{\rho} &[(e^{i\pi/2}f(k, \vec{e}_0) + e^{-i\pi/2}\bar{f}(k, \vec{e}_0)) + (e^{-i\pi/2}f(k, -\vec{e}_0)e^{2i\rho} - e^{i\pi/2}\bar{f}(k, -\vec{e}_0)e^{-2i\rho})] \\ &= \frac{2\pi}{\rho} [-(f(k, \vec{e}_0) - \bar{f}(k, \vec{e}_0)) + (f(k, -\vec{e}_0)e^{2i\rho} + \bar{f}(k, -\vec{e}_0)e^{-2i\rho})]. \end{aligned}$$

Beachte, dass der Beitrag der Rückwärtsrichtung  $-\vec{e}_0$  reell ist. So folgt aus (5.17) nach Multiplikation mit  $r^2$  schliesslich

$$0 = \frac{2\pi}{k} (-2\text{Im } f(\vec{k}, \vec{e}_0)) + \int d^2e |f(k, \vec{e})|^2 ,$$

d.h. (5.16).

#### 5.4 Zerlegung in Partialwellen

Die ebene Welle  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = e^{ikr\cos\theta}$  hat, für festes  $\rho = kr$ , eine Zerlegung nach Kugelfunktionen  $Y_{lm}(\theta, \phi)$ . Da  $L_3 e^{ikr\cos\theta} = 0$ , ( $L_3 = -i\partial/\partial\phi$ ) kommen nur solche mit  $m = 0$  vor oder, was dasselbe ist, s. (B.9), nur Legendre-Polynome  $P_l(\cos\theta)$ :

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \tilde{j}_l(kr) P_l(\cos\theta) . \quad (5.18)$$

Die Faktoren  $i^l(2l+1)$  sind Konvention. Die Entwicklung definiert die Partialwellen  $j_l(\rho) = \tilde{j}_l(\rho)/\rho$  (sphärische Besselfunktionen). Da sie der Form (4.8) entsprechen und  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$  eine Lösung der freien Schrödinger-Gleichung zur Energie  $(\hbar\vec{k})^2/2m$  ist, sind die  $\tilde{j}_l(\rho)$  im Ursprung reguläre Lösungen von

$$-u''(\rho) + \frac{l(l+1)}{\rho^2} u(\rho) = u(\rho) . \quad (5.19)$$

Die Partialwellen können anhand der Orthogonalitätsrelation (B.12) bestimmt werden:

$$\frac{\tilde{j}_l(\rho)}{\rho} = \frac{(-i)^l}{2} \int_{-1}^1 e^{i\rho u} P_l(u) du ,$$

wobei wir  $\cos\theta = u$ ,  $\vec{k}\cdot\vec{x} = \rho u$  geschrieben haben. Partielle Integration liefert dann

$$\frac{\tilde{j}_l(\rho)}{\rho} = \frac{(-i)^l}{2i\rho} \left( e^{i\rho u} P_l(u) \Big|_{u=-1}^{u=1} - \int_{-1}^1 e^{i\rho u} P_l'(u) du \right) ,$$

wobei das verbleibende Integral durch nochmalige partielle Integration für  $\rho \rightarrow \infty$  abgeschätzt werden kann. Es resultiert

$$\begin{aligned} \tilde{j}_l(\rho) &= \frac{1}{2i} (-i)^l e^{i\rho u} P_l(u) \Big|_{-1}^1 + O(\rho^{-1}) \\ &= \frac{1}{2i} (e^{i(\rho - \frac{l\pi}{2})} - e^{-i(\rho - \frac{l\pi}{2})}) + O(\rho^{-1}) \\ &= \sin\left(\rho - \frac{l\pi}{2}\right) + O(\rho^{-1}) , \end{aligned} \quad (5.20)$$

wobei  $(-i)^l = e^{-il\pi/2}$ ,  $P_l(1) = 1$ ,  $P_l(-1) = (-1)^l = e^{i\pi l}$ , s. (B.8), verwendet wurde.

Ist das Potential **sphärisch symmetrisch**, so ist die Streulösung  $\psi(k, \vec{x})$  achsialsymmetrisch ( $L_3\psi = 0$ ) und hat eine Partialwellenentwicklung der Form

$$\psi(k, \vec{x}) = \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) u_l(k, r) P_l(\cos\theta) , \quad (5.21)$$

wobei die  $u_l(k, r)$  im Ursprung reguläre Lösungen von (4.9) mit  $\varepsilon = k^2$  sind. Auf letzterer Grundlage ist  $u_l(k, r)$  nur bis auf einen Faktor bestimmt; immerhin ist  $u_l$  reell bis auf eine Phase,

$$u_l(k, r) = e^{2i\delta_l(k)} \bar{u}_l(k, r) .$$

Der Faktor, und somit die **Streuphase**  $\delta_l(k)$ , sind aber durch (5.10) absolut bestimmt, wie wir nun zeigen. Für  $r \rightarrow \infty$  geht  $u_l(k, r)$  in eine Lösung der freien radialen Schrödinger-Gleichung über und ist somit eine Linearkombination von  $e^{\pm ikr}$ :

$$u_l(k, r) = \frac{1}{2i} (A_+ e^{i(kr-l\pi/2)} - A_- e^{-i(kr-l\pi/2)}) + O(r^{-1}) ,$$

wobei  $A_+ = \bar{A}_- e^{2i\delta_l}$ . Aus (5.10) folgt, dass  $u_l(k, r)$  denselben **einlaufenden** Teil ( $\sim e^{-ikr}$ ) hat wie  $\tilde{j}_l(kr)$ , vgl. (5.20), also  $A_- = 1$ . So ist schliesslich

$$\begin{aligned} u_l(k, r) &= \frac{1}{2i} (e^{i(kr-l\pi/2+2\delta_l)} - e^{-i(kr-l\pi/2)}) + O(r^{-1}) \\ &= e^{i\delta_l} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) + O(r^{-1}) . \end{aligned}$$

Beachte, dass die Streuphase  $\delta_l$  aus einer beliebigen regulären Lösung von (4.9) gewonnen werden kann, da sie unter dem Sinus (und nicht nur als Vorfaktor  $e^{i\delta_l}$ ) vorkommt. Für die Streuwelle ergibt sich so die asymptotische Darstellung

$$\psi_s(k, \vec{x}) = \psi(k, \vec{x}) - e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{1}{2i} (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos\theta) + O(r^{-2}) ,$$

und damit die Streuamplitude:

$$f(k, \theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos\theta) . \quad (5.22)$$

Für den totalen Streuquerschnitt erhält man daraus unter Benutzung von (B.12) und (B.8) die beiden Ausdrücke:

$$\sigma(k) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (5.23)$$

$$= \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(k, 0) . \quad (5.24)$$

Die zweite Form reproduziert das Optische Theorem (5.16) im Fall eines Zentralpotentials. Zusammenfassend ist das Streuproblem reduziert auf die Berechnung der Streuphasen  $\delta_l(k)$ . Dazu braucht man nur die reguläre Lösung  $u_l(k, r)$  der radialen Wellengleichung zu bestimmen.

## 5.5 Resonanzen

Resonanzen sind Energien  $\varepsilon = k^2$ , bei welchen der (partielle) Streuquerschnitt

$$\sigma_l(k) = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l(k)$$

besonders gross ist. Nach (5.14, 5.22) äussert sich  $l$  in der Verteilung  $d\sigma/d\Omega \propto P_l^2(\cos\theta)$  der gestreuten Teilchen. Wir nehmen für  $\mathcal{V}$  einen kompakten Träger an:  $\mathcal{V}(r) = 0$  für  $r > R_0$ . Die Streuphase  $S_l(k) = e^{2i\delta_l(k)}$  beschreibt die Beziehung zwischen ein- und auslaufenden Anteilen in der regulären Lösung  $u_l$ :

$$2iu_l(k, r) = S_l(k)\tilde{h}_l(kr) - \overline{\tilde{h}_l(kr)}, \quad (r > R_0),$$

wobei  $\tilde{h}_l(\rho)$  die Lösung der freien Gleichung (5.19) mit der Asymptotik

$$\tilde{h}_l(\rho) = e^{i(\rho - l\pi/2)}(1 + O(\rho^{-1}))$$

einer auslaufenden Welle ist. Insbesondere ist  $\tilde{h}_0(\rho) = e^{i\rho}$  und  $\tilde{h}_1(\rho) = (\rho^{-1} - i)e^{i\rho}$ . Die Funktionen  $\tilde{h}_l(\rho)$  haben analytische Fortsetzungen für  $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit

$$\tilde{h}_l(-\rho) = (-1)^l \overline{\tilde{h}_l(\bar{\rho})}.$$

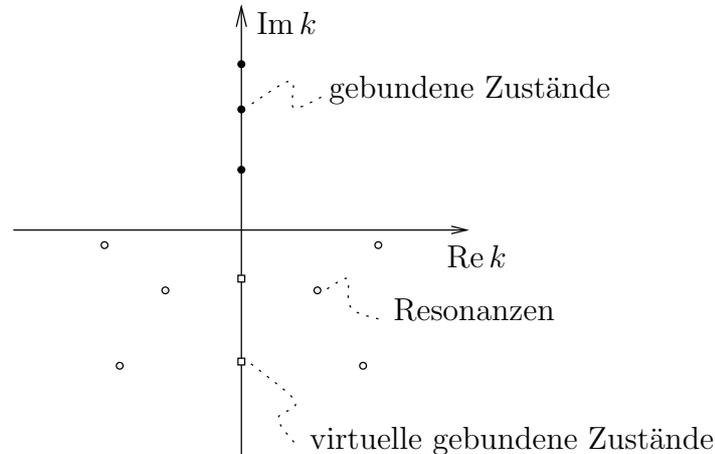
In der radialen Schrödinger-Gleichung (4.9) ist die Abhängigkeit nach  $\varepsilon = k^2$  analytisch. Sie wird an die reguläre Lösung  $u_l(k, r)$  vererbt, sofern diese z.B. durch  $r^{-(l+1)}u_l(k, r) \rightarrow 1$ , ( $r \rightarrow 0$ ) eindeutig gemacht wird. Es folgt  $u_l(k, r) = u_l(-k, r) = \overline{u_l(\bar{k}, r)}$ , da die weiteren Ausdrücke alle erwähnten Eigenschaften der Lösung  $u_l(k, r)$  mit ihr teilen. Für  $r > R_0$  kann  $u_l$  nach Lösungen der freien Gleichung (5.19) zerlegt werden,

$$2iu_l(k, r) = f_l^+(k)\tilde{h}_l(kr) - f_l^-(k)\overline{\tilde{h}_l(\bar{k}r)},$$

wobei die Koeffizienten  $f_l^\pm(k)$  (Jost-Funktionen) wiederum analytisch sind. Folglich hat  $S_l(k) = f_l^+(k)/f_l^-(k)$  eine analytische Fortsetzung bis auf Pole mit

$$S_l(-k) = S_l(k)^{-1} = \overline{S_l(\bar{k})}. \quad (5.25)$$

In der Halbebene  $\text{Re } k > 0$  steht  $\tilde{h}_l(kr)$  für eine auslaufende Welle; in  $\text{Im } k > 0$  für eine exponentiell abfallende. Ein Pol in der oberen Halbebene steht für eine Welle ohne exponentiell anwachsenden Teil, d.h. für einen gebundenen Zustand. Solche kann es dort nur für  $k$  rein imaginär geben, da der Eigenwert  $\varepsilon = k^2$  reell ist. Es ergibt sich folgende allgemeine Lage der Pole.



Nach (5.25) ist das Bild symmetrisch bzgl. Spiegelung an der imaginären Achse; jene an der reellen liefert die Lage der Nullstellen. Eine Resonanz liegt vor, wenn sich ein Pol-Nullstellen-Paar nahe der reellen Achse befindet. Deren Lage sei  $E := E_r \mp i\Gamma/2$ , ( $E_r, \Gamma > 0$ ), wenn sie durch  $E$  statt  $k$  parametrisiert wird. Dann ist

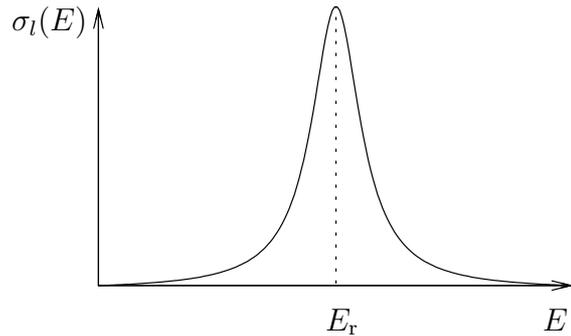
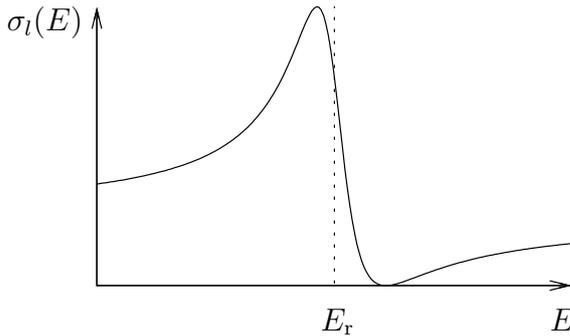
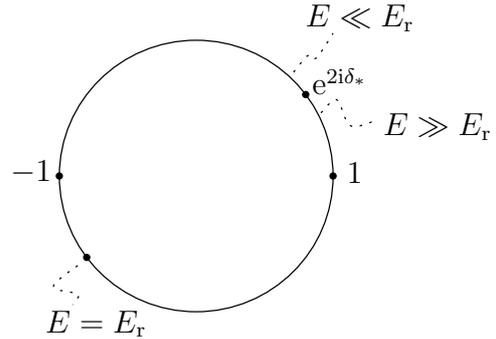
$$e^{2i\delta_l(E)} = \frac{E - (E_r + i\Gamma/2)}{E - (E_r - i\Gamma/2)} \cdot e^{2i\delta_*(E)},$$

wobei der ‘‘Hintergrund’’  $e^{2i\delta_*(E)}$  eine analytische Funktion ohne Pole noch Nullstellen nahe der Resonanzenergie ist, also  $\delta_*(E) \approx \delta_*$  für  $E \approx E_r$ .

Der Verlauf von  $\sigma_l(E)$  kann anhand von

$$4 \sin^2 \delta_l(E) = |e^{2i\delta_l(E)} - 1|^2 \quad (5.26)$$

und des Bilds abgelesen werden: Für  $\delta_* \neq 0$  durchläuft (5.26) ein Maximum bei  $e^{2i\delta_l(E)} = -1$  und ein Minimum bei  $e^{2i\delta_l(E)} = 1$ , wie in der Figur links (Fano-Feshbach Resonanz).



Oft (aber nicht immer) ist aber  $\delta_* \approx 0$  und damit

$$\tan \delta_l = \frac{\Gamma/2}{E_r - E}, \quad \sigma_l(E) = \frac{4\pi}{k^2} (2l + 1) \frac{(\Gamma/2)^2}{(E - E_r)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

(**Breit-Wigner Resonanz**), vgl. Figur rechts. Dabei hat  $\Gamma$  die Bedeutung der Halbwertsbreite.

Ein Wellenpaket der Energie  $\approx E$  weist nach der Streuung eine Verzögerung  $\tau = \hbar d\delta_l/dE$  auf gegenüber einem vor der Streuung gleichen, aber stets freien Wellenpaket (vgl. Übungen). Mit  $\tan' x = 1 + \tan^2 x$  ergibt sich hier

$$\frac{d\delta_l}{dE} = \frac{\Gamma/2}{(E - E_r)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

und mit  $E \approx E_r \pm \Gamma/2$  liefert dies

$$\tau \approx \hbar/\Gamma$$

für die mittlere **Lebensdauer** der Resonanz.

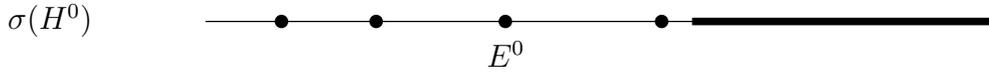
**Beispiel.** Resonanzen mit  $E_r = 0$  treten bei der Proton-Neutron Streuung auf, und zwar infolge eines virtuellen gebundenen Zustand bei antiparallelen Spins, bzw. eines gebundenen Zustands bei parallelen.

## 6 Näherungsmethoden

---

### 6.1 Störung des Eigenwertproblems

$H^0 = H^{0*}$  habe den vom Rest des Spektrums isolierten Eigenwert  $E^0$ :



Es sei  $M^0$  der Eigenraum von  $H^0$  zum Eigenwert  $E^0$ ,  $\dim M^0 \equiv n^0 < \infty$ , und  $P^0$  die Projektion auf  $M^0$ . Dann ist  $Q^0 \equiv 1 - P^0$  die Projektion auf  $M^{0\perp}$ .  $M^0$  und  $M^{0\perp}$  sind invariant unter  $H^0$ , und die Teile von  $H^0$  in  $M^0$  bzw.  $M^{0\perp}$  haben die Spektren  $\{E^0\}$ , bzw.  $\sigma(H^0) \setminus \{E^0\}$ . Insbesondere existiert  $(E^0 - H^0)^{-1}$  auf  $M^{0\perp}$ , d.h. auch die reduzierte Resolvente

$$R^0 = (E^0 - H^0)^{-1}Q^0 = Q^0(E^0 - H^0)^{-1}Q^0. \quad (6.1)$$

Wir untersuchen nun das Verhalten des Eigenwerts  $E^0$  unter dem Einfluss einer **Störung**

$$H^0 \rightsquigarrow H^0 + \varepsilon H^1, \quad (H^1 = H^{1*}) \quad (6.2)$$

für kleine Werte des Störparameters  $\varepsilon$ . Das triviale Beispiel  $H^0 = E^0 \cdot 1$  zeigt schon, was passieren kann: der Eigenwert  $E^0$  spaltet auf in  $n^0$  Eigenwerte

$$E_k = E^0 + \varepsilon E_k^1, \quad (k = 1, \dots, n^0),$$

wobei die  $E_k^1$  die Eigenwerte von  $H^1$  sind. Im Allgemeinen nehmen wir an, dass  $E^0$  in  $n^0$  Eigenwerte  $E_k(\varepsilon)$  mit Eigenvektoren  $\psi_k(\varepsilon)$  aufspaltet, und dass  $E_k(\varepsilon)$  und  $\psi_k(\varepsilon)$  Entwicklungen nach Potenzen von  $\varepsilon$  besitzen. So setzen wir an:

$$(H^0 + \varepsilon H^1 - E^0 - \varepsilon E_k^1 - \varepsilon^2 E_k^2 - \dots)(\psi_k^0 + \varepsilon \psi_k^1 + \varepsilon^2 \psi_k^2 + \dots) = 0, \quad (k = 1, \dots, n^0)$$

und finden durch Koeffizientenvergleich:

$$(H^0 - E^0)\psi_k^0 = 0, \quad (6.3)$$

$$(H^0 - E^0)\psi_k^1 + (H^1 - E_k^1)\psi_k^0 = 0, \quad (6.4)$$

$$(H^0 - E^0)\psi_k^2 + (H^1 - E_k^1)\psi_k^1 - E_k^2\psi_k^0 = 0, \quad (6.5)$$

.....

**Nullte Ordnung.** Gl. (6.3) bedeutet nur

$$Q^0\psi_k^0 = 0, \quad (6.6)$$

d.h.  $\psi_k^0 \in M^0$ . Weiter sind die  $\psi_k^0$  in nullter Ordnung nicht bestimmt. Nur wenn  $E^0$  ein einfacher Eigenwert ist, ist  $\psi_k^0$  (bis auf Vielfache) dadurch bestimmt. Denn ansonsten hängen sie tatsächlich von der Störung ab: sie sind die Grenzwerte der gestörten Eigenvektoren  $\psi_k(\varepsilon)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Die  $E_k^l$  werden in Ordnungen  $l \geq 1$  im Folgenden bestimmt. Bis anhin nicht eindeutig bestimmbar sind hingegen die  $\psi_k^l$ , denn nach (6.4, 6.5) kann ihnen ohne Schaden  $\psi_k^0$

hinzuaddiert werden. Diese Freiheit wird beseitigt etwa durch die Forderung  $P^0\psi_k(\varepsilon) = \psi_k^0$ , d.h.

$$P^0\psi_k^l = 0, \quad (l = 1, 2, \dots). \quad (6.7)$$

**Erste Ordnung.** Wir operieren mit  $P^0$  auf (6.4). Wegen  $P^0(E^0 - H^0) = 0$  und (6.6) ergibt sich

$$P^0H^1P^0\psi_k^0 = E_k^1\psi_k^0, \quad (k = 1, \dots, n^0). \quad (6.8)$$

Die Eigenwertstörungen erster Ordnung  $E_k^1$  sind die Eigenwerte des Operators  $P^0H^1P^0$  auf  $M^0$ : ein  $n^0$ -dimensionales Eigenwertproblem. Dieses bestimmt die  $\psi_k^0$  (bis auf Normierung) soweit keine Entartungen auftreten. Praktisch wählt man in  $M^0$  eine orthonormierte Basis  $\{\varphi_r\}$  ungestörter Eigenvektoren. Dann ist der Operator  $P^0H^1P^0$  dargestellt durch die Matrix

$$\langle \varphi_r | H^1 | \varphi_s \rangle, \quad (r, s = 1, \dots, n^0).$$

Die  $E_k^1$  sind die Eigenwerte dieser Matrix, die zugehörigen Eigenvektoren (Spaltenvektoren) die Entwicklungskoeffizienten von  $\psi_k^0$  in der Basis  $\{\varphi_r\}$ . Im Spezialfall  $n^0 = 1$  ist bei Normierung  $\|\psi^0\| = 1$

$$E^1 = \langle \psi^0 | H^1 | \psi^0 \rangle \quad (6.9)$$

die **Eigenwertverschiebung 1. Ordnung**. Wir operieren noch mit  $Q^0$  auf (6.4) und finden wegen  $Q^0\psi_k^0 = 0$ :

$$(H^0 - E^0)Q^0\psi_k^1 = -Q^0H^1\psi_k^0,$$

also

$$Q^0\psi_k^1 = R^0H^1\psi_k^0, \quad (6.10)$$

und mit (6.7)

$$\psi_k^1 = R^0H^1\psi_k^0. \quad (6.11)$$

**Zweite Ordnung.** Wir greifen einen  $n^1$ -fachen Eigenwert  $E^1$  von (6.8) heraus mit Eigenvektoren  $\psi_k^0$ , ( $k = 1, \dots, n^1$ ), welche den zugehörigen Eigenraum  $M^1 \subset M^0$  von  $P^0H^1P^0$  aufspannen ( $n^1 \leq n^0$ ). Es sei  $P^1$  die Projektion auf  $M^1$ , also  $P^1\psi_k^0 = \psi_k^0$ ;  $P^1 = P^1P^0$ ;  $P^1(H^0 - E^0) = 0$  und  $P^1P^0(H^1 - E^1)P^0 = 0$ . Operieren wir mit  $P^1$  auf (6.5) so ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} E_k^2\psi_k^0 &= P^1(H^1 - E^1)\psi_k^1 = P^1P^0(H^1 - E^1)(P^0 + Q^0)\psi_k^1 \\ &= P^1H^1Q^0\psi_k^1, \end{aligned}$$

und aus (6.10):

$$P^1H^1R^0H^1P^1\psi_k^0 = E_k^2\psi_k^0. \quad (6.12)$$

Dies ist ein  $n^1$ -dimensionales Eigenwertproblem zur Bestimmung der Eigenwertstörungen  $E_k^2$  und derjenigen  $\psi_k^0$ , die in erster Ordnung noch unbestimmt geblieben sind. Im Fall  $n^1 = 1$  ist  $\psi^0$  schon durch (6.8) bestimmt, und für  $\|\psi^0\| = 1$  ist

$$E^2 = \langle \psi^0 | H^1 R^0 H^1 | \psi^0 \rangle \quad (6.13)$$

die **Eigenwertverschiebung 2. Ordnung**. Wenn  $E^0$  der tiefste Eigenwert von  $H^0$  ist (Grundzustand), so ist  $(E^0 - H^0) < 0$  auf  $M^{0\perp}$ , also  $R^0 \leq 0$  und folglich auch  $E^2 \leq 0$ .

Das Auftreten der reduzierten Resolvente  $R^0$  verunmöglicht oft die exakte Auswertung der Störungsformeln 2. Ordnung. Im Fall, dass  $H^0$  nebst  $E^0$  ein diskretes Spektrum besitzt, mit Eigenwerten  $E_m^\perp \neq E^0$  und normierten Eigenvektoren  $\psi_m^\perp$ , so ist

$$R^0|\varphi\rangle = \sum_m |\psi_m^\perp\rangle \frac{\langle \psi_m^\perp | \varphi \rangle}{E^0 - E_m^\perp}$$

mit entsprechenden Ausdrücke für (6.11, 6.13).

**Beispiel: Stark-Effekt.** Wir untersuchen die Störung des Niveaus  $n = 2$  des Wasserstoffatoms

$$H^0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$$

durch ein homogenes elektrisches Feld  $(0, 0, E)$ :

$$H^1 = -eEx_3.$$

Hier spielt  $E$  die Rolle des Störparameters. Die 4 Funktionen

$$\psi_{2lm}(\vec{x}) = \frac{u_{2l}(r)}{r} Y_{lm}(\vec{x}), \quad (l = 0, 1; m = -l, \dots, l).$$

bilden eine orthonormierte Basis im Raum der Eigenfunktionen von  $H^0$  zur Energie  $E_2 = -1/4 \text{ Ry}$ . Allgemein ist

$$\langle \psi_{nlm} | x_3 | \psi_{n'l'm'} \rangle = 0, \quad (6.14)$$

falls  $m \neq m'$ , da  $M_3$  mit  $x_3$  vertauscht. Ebenso gilt (6.14) falls  $l \neq l'$ , da dann die beiden Faktoren des Skalarprodukts ungleiche Parität haben. Die  $4 \times 4$ -Matrix  $\langle \psi_{2lm} | H^1 | \psi_{2l'm'} \rangle$  hat also die sehr einfache Form:

	$\psi_{200}$	$\psi_{210}$	$\psi_{211}$	$\psi_{21-1}$	
$\psi_{200}$	0	$\varepsilon$	0	0	
$\psi_{210}$	$\bar{\varepsilon}$	0	0	0	(6.15)
$\psi_{211}$	0	0	0	0	
$\psi_{21-1}$	0	0	0	0	

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -eE \langle \psi_{200} | x_3 | \psi_{210} \rangle = -eE \underbrace{\int_0^\infty dr u_{20}(r) r u_{21}(r)}_{-3\sqrt{3}a_0} \underbrace{\int d\Omega Y_{00} \cos(\theta) Y_{10}}_{1/\sqrt{3}} \\ &= 3ea_0E, \quad (a_0 = \text{Bohr-Radius}). \end{aligned}$$

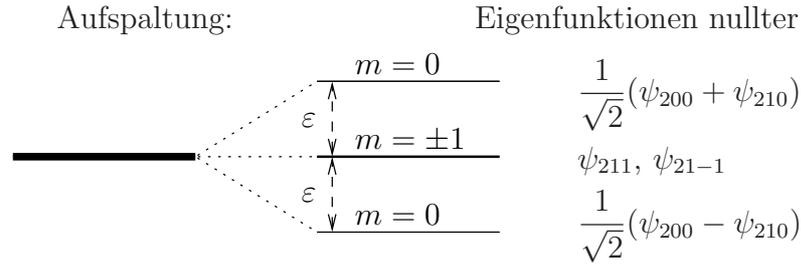
Diese Werte erhält man durch Berechnung der normierten radialen Eigenfunktionen  $u_{20}(r)$  und  $u_{21}(r)$  unter Benutzung von (4.13). Ausgedrückt durch das Feld des Kerns

$$E_{\text{Bohr}} \equiv \frac{e}{a_0^2} = 5.14 \cdot 10^{11} \text{ Volt} \cdot \text{m}^{-1}$$

im Abstand eines Bohr-Radius schreibt sich

$$\varepsilon = 3 \frac{E}{E_{\text{Bohr}}} \cdot E_{\text{Bohr}} a_0 e = 6 \frac{E}{E_{\text{Bohr}}} \frac{me^4}{2\hbar^2} = 6 \frac{E}{E_{\text{Bohr}}} \text{Ry},$$

ist also praktisch sehr klein gegen die Bindungsenergie des  $H$ -Atoms. Aus der Lösung des Eigenwertproblems für die Matrix (6.15) ergibt sich folgendes Bild:

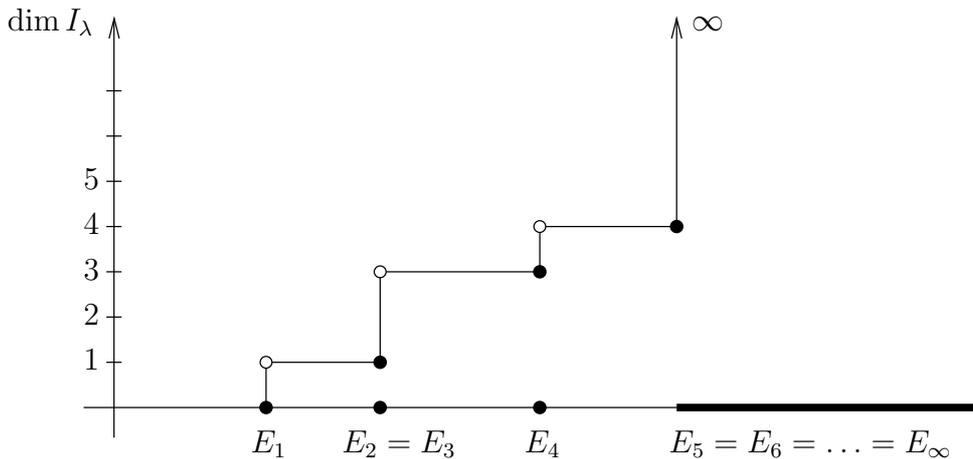


## 6.2 Variationsmethoden

Es sei  $H = H^*$  nach unten beschränkt,  $I_\lambda$  das Intervall  $(-\infty, \lambda)$  und  $I_\lambda(H)$  die spektrale Projektion von  $H$  für dieses Intervall. Definition:

$$E_N \equiv \inf\{\lambda \mid \dim I_\lambda(H) \geq N\}, \quad (N = 1, 2, \dots). \quad (6.16)$$

Typischer Fall:



Es ist  $E_1 \leq E_2 \leq E_3 \dots$ , also existiert  $\lim_{N \rightarrow \infty} E_N \equiv E_\infty$ , wobei auch  $E_\infty = \infty$  möglich ist. Die Zahlen  $E_N < E_\infty$  bilden die Folge der aufsteigend geordneten, endlich entarteten Eigenwerte von  $H$  unterhalb  $E_\infty$ , wobei mehrfache Eigenwerte entsprechend oft auftreten.

**Satz 1.** (Min–Max Prinzip)

$$E_N = \inf_{\dim M=N} \max_{\psi \in M} \langle \psi | H | \psi \rangle, \quad (6.17)$$

wobei das Infimum über alle Unterräume  $M$  der Dimension  $N$  zu nehmen ist und stets  $\|\psi\| = 1$  vorausgesetzt wird. Im Fall  $E_N < E_\infty$  ist das Infimum ein Minimum.

**Bemerkung.** Das Beispiel  $H = \vec{p}^2$  (kinetische Energie eines Teilchens) zeigt, warum die Unterscheidung von Infimum und Minimum nötig ist. Hier ist

$$\dim I_\lambda(H) = \begin{cases} \infty, & (\lambda > 0), \\ 0, & (\lambda \leq 0), \end{cases} \quad \text{also} \quad E_1 = E_2 = \dots = E_\infty = 0,$$

aber es gibt keinen Zustand  $\psi$  mit  $\langle \psi | H | \psi \rangle = 0$ .

**Beweis von Satz 1.** Die Eigenvektoren von  $H$  zu allen Eigenwerten  $< E_N$  spannen einen Raum der Dimension  $< N$  auf. Jeder  $N$ -dimensionale Unterraum  $M$  enthält also einen Zustand  $\psi$ , der zu all diesen Eigenvektoren orthogonal ist, so dass

$$E_N \leq \langle \psi | H | \psi \rangle \leq \max_{\psi \in M} \langle \psi | H | \psi \rangle .$$

Da dies für jeden Unterraum  $M$  der Dimension  $N$  gilt, ist auch

$$E_N \leq \inf_{\dim M=N} \max_{\psi \in M} \langle \psi | H | \psi \rangle .$$

Sei nun  $\lambda > E_N$ . Dann ist  $\dim I_\lambda(H) \geq N$ . Der Bildraum von  $I_\lambda(H)$  enthält also einen  $N$ -dimensionalen Unterraum  $M$  und es ist

$$\max_{\psi \in M} \langle \psi | H | \psi \rangle \leq \lambda .$$

Somit ist

$$\inf_{\dim M=N} \max_{\psi \in M} \langle \psi | H | \psi \rangle \leq \lambda$$

für alle  $\lambda > E_N$ , also auch für  $\lambda = E_N$ . Falls  $E_N < E_\infty$ , so wählen wir  $M$  aufgespannt durch  $N$  Eigenvektoren  $\psi_1, \dots, \psi_N$  zu den Eigenwerten  $E_1, \dots, E_N$ . Dann ist

$$E_N = \max_{\psi \in M} \langle \psi | H | \psi \rangle$$

für dieses  $M$ , und

$$E_N \leq \max_{\psi \in M} \langle \psi | H | \psi \rangle$$

für alle  $M$  der Dimension  $N$ , also das Infimum in (6.17) ein Minimum.

**Satz 2.** Sei  $H^{(1)} \leq H^{(2)}$ , beide beschränkt nach unten. Dann gilt für die entsprechenden Folgen

$$E_N^{(1)} \leq E_N^{(2)} , \quad (N = 1, 2, \dots) . \quad (6.18)$$

**Beweis.** Sei  $\dim M = N$ . Für alle  $\psi \in M$  ist

$$\langle \psi | H^{(1)} | \psi \rangle \leq \langle \psi | H^{(2)} | \psi \rangle \leq \max_{\psi \in M} \langle \psi | H^{(2)} | \psi \rangle ,$$

also

$$E_N^{(1)} \leq \max_{\psi \in M} \langle \psi | H^{(2)} | \psi \rangle$$

für alle  $M$  der Dimension  $N$  und folglich  $E_N^{(1)} \leq E_N^{(2)}$ .

**Satz 3.** Sei  $M$  ein  $m$ -dimensionaler Unterraum ( $m < \infty$ ) und  $\psi_1, \dots, \psi_m$  eine orthonormierte Basis in  $M$ . Dann ist

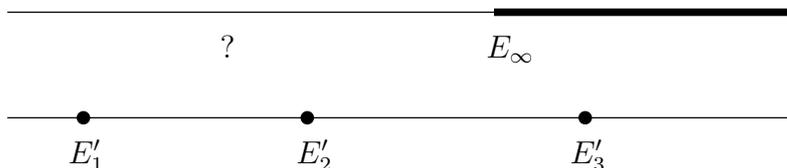
$$E_N \leq E'_N , \quad (N = 1, \dots, m) , \quad (6.19)$$

wobei die  $E'_N$  die aufsteigend geordneten Eigenwerte der Matrix  $\langle \psi_i | H | \psi_k \rangle$  sind.

**Beweis.** Die  $E'_N$ , ( $N = 1, \dots, m$ ) sind die Eigenwerte des Operators  $PHP$  auf  $M$ ,  $P$ =Projektion auf  $M$ . Es sei  $N \leq m$  und  $M_N$  der Unterraum, aufgespannt durch Eigenvektoren  $\psi_1, \dots, \psi_N$  von  $PHP$  zu den Eigenwerten  $E'_1, \dots, E'_N$ . Dann ist

$$E'_N = \max_{\psi \in M_N} \langle \psi | H | \psi \rangle \geq \inf_{\dim M=N} \max_{\psi \in M} \langle \psi | H | \psi \rangle = E_N .$$

**Beispiel.**



In dieser Situation kann man nur schliessen, dass  $H$  mindestens zwei Eigenwerte  $E_1 \leq E'_1$  und  $E_2 \leq E'_2$  besitzt — die  $E'_N \geq E_\infty$  geben keine Information. Ein wichtiger Spezialfall ist

**Satz 4.** (Grundzustand) Sei  $\langle \psi | H | \psi \rangle < E_\infty$  für irgend ein  $\psi$ , ( $\|\psi\| = 1$ ). Dann hat  $H$  einen endlich entarteten Grundzustand der Energie

$$E_1 \leq \langle \psi | H | \psi \rangle . \tag{6.20}$$

### 6.3 Das Beispiel Helium

Das Helium-Atom besteht aus einem Kern ( $Z = 2$ ) und zwei Elektronen, deren Wechselwirkung wir als Störung auffassen:  $H = H^0 + H^1$  auf  $L^2(\mathbb{R}^6)$  mit

$$H^0 = -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_1 + \Delta_2) - 2e^2\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \quad H^1 = \frac{e^2}{r_{12}},$$

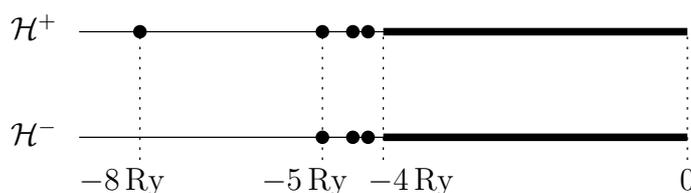
wobei  $r_k = |\vec{x}_k|$  und  $r_{12} = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$ . Der Kern ist fest bei  $\vec{x} = 0$  angenommen.  $H$  vertauscht mit

$$U : \quad \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \mapsto \psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1)$$

und lässt daher die beiden Eigenräume von  $U$  (Symmetrie-Sektoren) invariant, nämlich

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^+ &= \{ \psi \mid U\psi = \psi \}, & (\psi \text{ symmetrisch}), \\ \mathcal{H}^- &= \{ \psi \mid U\psi = -\psi \}, & (\psi \text{ antisymmetrisch}). \end{aligned} \tag{6.21}$$

Dies gilt auch für  $H^0$ , man kann daher das Störungsproblem in  $\mathcal{H}^+$  und  $\mathcal{H}^-$  getrennt betrachten. Die entsprechenden Spektren von  $H^0$  sind:



mit den normierten Eigenfunktionen

$$\begin{aligned}\psi_{100}^+(\vec{x}_1, \vec{x}_2) &= \varphi_{100}(\vec{x}_1)\varphi_{100}(\vec{x}_2), \quad (n = 1), \\ \psi_{nlm}^\pm(\vec{x}_1, \vec{x}_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{nlm}(\vec{x}_1)\varphi_{100}(\vec{x}_2) \pm \varphi_{nlm}(\vec{x}_2)\varphi_{100}(\vec{x}_1)), \quad (n > 1),\end{aligned}$$

zu den isolierten Eigenwerten

$$E_n^0 = -4 \cdot \frac{me^4}{2\hbar^2} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right). \quad (6.22)$$

Dabei sind die  $\varphi_{nlm}$  die Wasserstoff-Zustände für die Kernladung  $Z = 2$  ( $\text{He}^+$ -Ion). Im Intervall  $(-4 \text{ Ry}, 0)$  hat  $H^0$  noch  $\infty$  viele Eigenwerte, die im Kontinuum eingebettet sind — diese betrachten wir hier nicht. Unter dem Einfluss der positiven Störung  $H^1$  werden die Eigenwerte (6.22) nach oben verschoben, s. (6.18). Die Schwelle  $-4 \text{ Ry}$  zum Kontinuum bleibt jedoch unverändert, da der Grundzustand von  $\text{He}^+$  von der Abstossung der Elektronen nicht berührt wird.

**Der Grundzustand.** Im normierten Zustand

$$\varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = f(r_1)f(r_2), \quad f(r) = (\pi a^3)^{-1/2} e^{-r/a}, \quad (a > 0)$$

wird

$$\begin{aligned}\langle \Delta_1 \rangle &= \langle \Delta_2 \rangle = - \int d^3x (\nabla f)^2 = -4\pi \int_0^\infty dr r^2 |f'(r)|^2 = -a^{-2}, \\ \langle r_1^{-1} \rangle &= \langle r_2^{-1} \rangle = 4\pi \int_0^\infty dr r |f(r)|^2 = a^{-1}, \\ \langle r_{12}^{-1} \rangle &= 2 \int d^3x_1 f^2(r_1) \int_{r_2 \leq r_1} d^3x_2 r_{12}^{-1} f^2(r_2) \\ &= 2 \int d^3x_1 f^2(r_1) 4\pi r_1^{-1} \int_0^{r_1} dr_2 r_2^2 f^2(r_2) \\ &= a^{-1} \int_0^\infty dx x e^{-x} \int_0^x dy y^2 e^{-y} \\ &= -a^{-1} \frac{\partial^3}{\partial \sigma \partial \rho^2} \int_0^\infty dx e^{-\sigma x} \int_0^x dy e^{-\rho y} \Big|_{\sigma=\rho=1} = \frac{5}{8} a^{-1}.\end{aligned}$$

Bei der Berechnung von  $\langle r_{12}^{-1} \rangle$  wurde verwendet, dass das Coulombpotential einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung ausserhalb von ihr so ist, als ob sich die gesamte Ladung in ihrem Mittelpunkt befände. Insgesamt:

$$\begin{aligned}\langle H^0 \rangle &= 2 \text{ Ry} \cdot (\alpha^2 - 4\alpha), \quad \langle H^1 \rangle = 2 \text{ Ry} \cdot \frac{5}{8} \alpha, \\ \text{Ry} &= \frac{me^4}{2\hbar^2}, \quad \alpha = \frac{a_0}{a}, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = \text{Bohr-Radius}.\end{aligned}$$

• **Störungsrechnung 1. Ordnung.** Hier wählt man  $\varphi$  als Grundzustand von  $H^0$  ( $f =$  Grundzustand von  $\text{He}^+$ ), d.h.  $\alpha$  so dass  $\langle H^0 \rangle$  minimal wird:

$$\alpha = 2 : \quad \left. \begin{aligned}\langle H^0 \rangle &= E_1^0 = -8 \text{ Ry} \\ \langle H^1 \rangle &= +2.5 \text{ Ry}\end{aligned} \right\} \quad \langle H \rangle = -5.5 \text{ Ry},$$

entsprechend einer Energiedifferenz (Ionisierungsenergie) von 1.5 Ry zur Grundzustandsenergie des  $\text{He}^+$ .

• **Variationsrechnung.** Hier wählt man  $\alpha$  so dass

$$\langle H \rangle = 2 \text{ Ry} \cdot \left( \alpha^2 - \frac{27}{8} \alpha \right)$$

minimal wird:

$$\alpha = \frac{27}{16} : \quad \langle H \rangle = -2 \text{ Ry} \left( \frac{27}{16} \right)^2 = -5.695 \text{ Ry} .$$

Da die Eigenwerte in  $\mathcal{H}^- \geq -5 \text{ Ry}$  sind, liegt der Grundzustand von Helium in  $\mathcal{H}^+$ , mit einer Ionisierungsenergie  $\geq 1.695 \text{ Ry}$ .

**Angeregte Zustände.** In erster Ordnung Störungsrechnung ist die Verschiebung der Eigenwerte in  $\mathcal{H}^\pm$ :

$$\Delta E_{nl}^\pm = \langle \psi_{nlm}^\pm | \frac{e^2}{r_{12}} | \psi_{nlm}^\pm \rangle > 0 ,$$

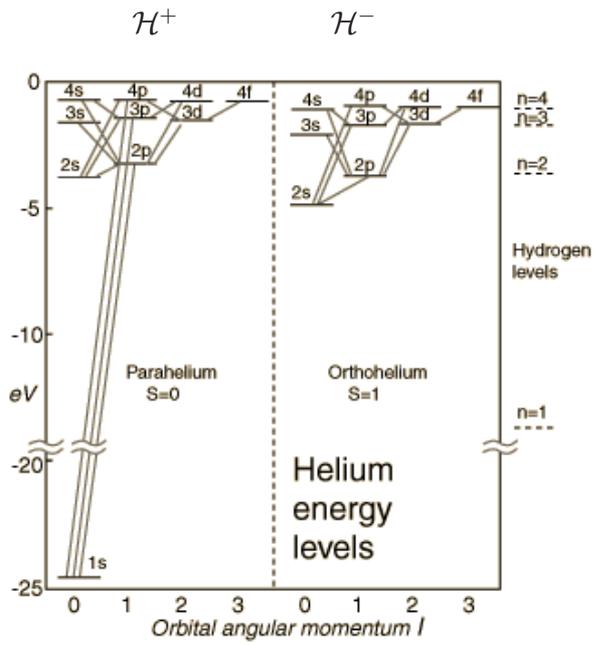
unabhängig von  $m$ . (Dies ist eine Folge des auf Seite 80 behandelten Wigner–Eckart Theorems.) Die  $l$ -Entartung hingegen wird aufgehoben, ebenso die Entartung zwischen  $\mathcal{H}^+$  und  $\mathcal{H}^-$ : man findet

$$\begin{aligned} \Delta E_{nl}^\pm &= D_{nl} \pm A_{nl} , \\ D_{nl} &= e^2 \int d^3x_1 d^3x_2 \frac{1}{r_{12}} |\varphi_{100}(\vec{x}_1) \varphi_{nlm}(\vec{x}_2)|^2 , \\ A_{nl} &= e^2 \int d^3x_1 d^3x_2 \frac{1}{r_{12}} \overline{\varphi_{100}(\vec{x}_1)} \varphi_{nlm}(\vec{x}_1) \varphi_{100}(\vec{x}_2) \overline{\varphi_{nlm}(\vec{x}_2)} , \end{aligned}$$

beide unabhängig von  $m$ . Nebst dem **direkten Integral**  $D_{nl}$  ist auch das **Austauschintegral**  $A_{nl}$  positiv, denn  $A_{nl}$  ist von der Form

$$A_{nl} = \int d^3x d^3y \frac{\rho(\vec{x}) \overline{\rho(\vec{y})}}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{1}{4\pi} \int d^3x \vec{E}(\vec{x}) \cdot \overline{\vec{E}(\vec{x})} > 0 , \quad (6.23)$$

wobei — in Analogie zur Elektrostatik —  $\vec{E}(\vec{x})$  das von der komplexen Dichte  $\rho(\vec{x})$  erzeugte elektrische Feld ist. Das Austauschintegral sorgt also für die Aufhebung der Entartung zwischen  $\mathcal{H}^+$  und  $\mathcal{H}^-$ , und zwar so, dass die entsprechenden Eigenwerte in  $\mathcal{H}^-$  tiefer liegen als in  $\mathcal{H}^+$ .



Experimentell findet man 2 Termschemata, zwischen denen es keine (oder nur sehr schwache) Übergänge gibt. Denn: Auch die Störung durch ein elektromagnetisches Feld erhält die Symmetrie bezüglich Vertauschung der beiden Elektronen.

Quelle: [hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum/helium.html](http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum/helium.html)

## 7 Drehimpuls und Spin

---

### 7.1 Symmetrien im Hilbertraum

Bevor wir zum eigentlichen Thema des Kapitels gelangen, soll der Zustandsbegriff und insbesondere (3.3) nochmals erörtert werden. Dem folgenden Satz gehen zwei Definitionen voran.

Der Zustandsraum eines quantenmechanischen Systems ist ein Hilbertraum  $\mathcal{H}$  über  $\mathbb{C}$ . Ein (reiner) Zustand ist ein **Strahl**:  $\{\lambda\psi\}$ , wobei  $\psi \in \mathcal{H}$ ,  $\|\psi\| = 1$  fest und  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $|\lambda| = 1$  beliebig ist, und umgekehrt. Eindeutig sind reine Zustände gegeben durch **1-dimensionale orthogonale Projektoren**  $\Pi$  auf  $\mathcal{H}$ :

$$\Pi\phi = |\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle$$

(bzw.  $\Pi = |\psi\rangle\langle\psi|$ ). Sei  $\Pi(\mathcal{H})$  die Menge aller solcher Projektoren.

**Definition.** Eine **Symmetrie** (zwischen  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{H}'$ ) ist eine Abbildung  $S : \Pi(\mathcal{H}) \rightarrow \Pi(\mathcal{H}')$ ,  $\Pi \mapsto \Pi'$ , derart dass

$$\text{tr}(\Pi_1\Pi_2) = \text{tr}(\Pi'_1\Pi'_2) . \quad (7.1)$$

Durch Strahlen ausgedrückt:

$$|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2 = |\langle\psi'_1|\psi'_2\rangle|^2 .$$

**Definition.** Ein **antilinearer Operator**  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  ist eine Abbildung mit

$$A(\lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle) = \bar{\lambda}_1 A|\psi_1\rangle + \bar{\lambda}_2 A|\psi_2\rangle , \quad (\lambda_i \in \mathbb{C}, |\psi_i\rangle \in \mathcal{H}) .$$

Sein adjungierter Operator ist durch

$$\langle\phi|A^*\psi\rangle = \langle\psi|A\phi\rangle , \quad (|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H})$$

definiert (beachte den Unterschied zu (3.4)). Eine antilineare **Isometrie** liegt vor, falls

$$\langle A\phi|A\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle ,$$

d.h.  $A^*A = 1$ . Ist ferner  $A$  invertierbar oder, äquivalent dazu,  $AA^* = 1$ , so heisst  $A$  **antiunitär**.

Es gelten die Regeln wie im linearen Fall. Beachte allerdings

$$(\lambda A)^* = A^*\bar{\lambda} = \lambda A^* . \quad (7.2)$$

**Satz.** (Wigner) Jede Symmetrie ist dargestellt als

$$S(\Pi) = U\Pi U^* \quad (7.3)$$

(d.h.  $\psi' = U\psi$ ) mit  $U$  einer entweder linearen oder antilinearen Isometrie.  $U$  ist eindeutig bis auf Multiplikation mit einer Phase  $c \in \mathbb{C}$ ,  $|c| = 1$ .

**Beweis.** s. Anhang D.

**Bemerkung.** Ist die Symmetrie umkehrbar, so ist  $U$  unitär oder antiunitär.

**Diskrete Symmetrien.** Wir betrachten zunächst ein klassisches Teilchen im Raum (oder stillschweigend mehrere), bei dem dynamischer und kinematischer Impuls übereinstimmen:  $\vec{p} = m\dot{\vec{x}}$ . Die diskreten Symmetrien **Raumspiegelung**  $P$  und **Zeitumkehr**  $T$  sind

$$\begin{aligned} P : (\vec{x}, \vec{p}) &\rightarrow (-\vec{x}, -\vec{p}) , \\ T : (\vec{x}, \vec{p}) &\rightarrow (\vec{x}, -\vec{p}) . \end{aligned}$$

Sollen  $P, T$  auch Symmetrien im Sinne obiger quantenmechanischer Definition sein, so ist von den Operatoren  $U_P, U_T$  aus Gl. (7.3)

$$\begin{aligned} U_P^* x_i U_P &= -x_i , & U_P^* p_i U_P &= -p_i , \\ U_T^* x_i U_T &= x_i , & U_T^* p_i U_T &= -p_i \end{aligned}$$

zu verlangen. Insbesondere ist  $U_P^*[p_i, x_j]U_P = [p_i, x_j]$ ,  $U_T^*[p_i, x_j]U_T = -[p_i, x_j]$ . Vergleich mit  $[p_i, x_j] = -i\hbar\delta_{ij}$  zeigt, dass  $U_P$  **linear** und  $U_T$  **antilinear** sein muss.

Für eine Symmetrie  $S$  mit  $S^2 = 1$  folgt aus (7.3) für das entsprechende  $U$

$$U^2 = c$$

mit  $|c| = 1$ . Im linearen Fall kann durch Wahl der (unbestimmten) Phase von  $U$   $c = 1$  erreicht werden. Im antilinearen bringt dies nichts; hingegen folgt aus  $U^2 U = U U^2$ , dass  $c = \bar{c}$ . Also

$$U^2 = \begin{cases} 1 , & \text{(linear),} \\ \pm 1 , & \text{(antilinear),} \end{cases}$$

wobei das Vorzeichen eindeutig durch  $S$  bestimmt ist. Insbesondere folgt aus  $P^2 = T^2 = 1$

$$U_P^2 = 1 , \quad U_T^2 = c_T = \pm 1 .$$

Für ein Teilchen im  $\mathbb{R}^3$  ohne weitere Freiheitsgrade (Spin), also  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ , erfüllen die Abbildungen

$$(U_P\psi)(\vec{x}) = -\psi(-\vec{x}) , \quad (U_T\psi)(\vec{x}) = \overline{\psi(\vec{x})}$$

alle obigen Vorgaben und zwar mit  $c_T = +1$ . Allgemein ist  $S$  eine **Symmetrie des Hamiltonoperators**  $H$ , falls für das entsprechende  $U$  gilt

$$U e^{-iHt/\hbar} = c(t) \begin{cases} e^{-iHt/\hbar} U , & \text{(linear),} \\ e^{+iHt/\hbar} U , & \text{(antilinear),} \end{cases} \quad (7.4)$$

mit  $|c(t)| = 1$ . Im Fall  $S^2 = 1$  folgt daraus

$$c(t) = 1 , \quad (7.5)$$

(s. unten). Äquivalent zu (7.4) ist dann, und zwar in beiden Fällen,

$$[U, H] = 0 ,$$

wie man durch Ableitung nach  $t$  sieht.

Beweis von (7.5). Im linearen Fall folgt aus  $(Ue^{-iHt/\hbar})U = U(e^{-iHt/\hbar}U)$  und (7.4), dass  $c(t) = \overline{c(t)}$ , also  $c(t) = \pm 1$  und  $c(t) = 1$  aus  $c(0) = 1$  und Stetigkeit. Im antilinearen Fall multipliziert man (7.4) mit  $(U^*)^2$ ; da  $(U^*)^2 = \pm 1$  kann dies links von links und rechts von rechts geschehen:  $U^*e^{-iHt/\hbar} = c(t)e^{iHt/\hbar}U^*$ . Das Adjungierte davon (beachte (7.2)) ist (7.4) mit  $c(t) \rightarrow \overline{c(t)}$ . Es folgt  $c(t) = 1$  wie vorher.

Auch für Systeme, bei welchen  $\vec{x}, \vec{p}$  keine Observablen sind, ist die Zeitumkehr antilinear. Denn  $t \rightarrow -t$  als Symmetrie des Hamiltonoperators bedeutet sinngemäss  $U_T e^{-iHt/\hbar} = e^{2i\alpha(t)/\hbar} e^{iHt/\hbar} U_T$ . Wäre  $U_T$  linear, so würde folgen

$$U_T^*(H + \dot{\alpha})U_T = -(H + \dot{\alpha})$$

und insbesondere müsste das Spektrum bei geeigneter Verschiebung des Energienullpunkts symmetrisch bzgl.  $\lambda \rightarrow -\lambda$  sein. Diese an sich schon restriktive Bedingung steht im Widerspruch zum Spektrum typischer Hamiltonoperatoren, welches nach unten beschränkt, nach oben aber unbeschränkt ist.

**Kontinuierliche Symmetrien.** Sei  $G$  eine zusammenhängende Lie-Gruppe. Eine **projektive Darstellung** von  $G$  in  $\mathcal{H}$  ist eine (umkehrbare) Symmetrie  $S_g : \Pi(\mathcal{H}) \rightarrow \Pi(\mathcal{H})$  für  $g \in G$  mit

$$S_g \circ S_h = S_{gh}, \quad S_g(\Pi) \text{ stetig in } g. \quad (7.6)$$

Nach dem Satz entspricht der Symmetrie  $S_g$  eine (bis auf eine Phase eindeutigen) Abbildung  $U_g : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  mit

$$S_g(\Pi) = U_g \Pi U_g^*$$

und (7.6) bedeutet

$$U_g U_h = \omega(g, h) U_{gh}$$

mit  $\omega(g, h) \in U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . ( $g \mapsto U_g$  heisst ebenfalls projektive Darstellung von  $G$ ). Insbesondere ist  $U_g$  unitär (und nicht antiunitär), da jedes  $g \in G$  von der Form  $g = h^2$  ist. Durch Betrachtung von  $U_f U_g U_h$  folgt

$$\omega(f, g)\omega(fg, h) = \omega(f, gh)\omega(g, h) \quad (7.7)$$

und speziell  $\omega(g, e) = \omega(e, g) = \omega(e, e)$ , ( $e$ : Einheit in  $G$ ). Die Phase  $\omega(g, h)$  ist nicht eindeutig: Unter der "Eichtransformation"  $U_g \mapsto \lambda(g)U_g$  mit  $\lambda(g) \in U(1)$  geht sie über in die äquivalente Phase

$$\omega'(g, h) = \omega(g, h)\lambda(g)\lambda(h)\lambda(gh)^{-1}. \quad (7.8)$$

Insbesondere ist  $U_g$  äquivalent zu einer (üblichen) Darstellung, falls  $\omega'(g, h) \equiv 1$  erzielt werden kann.

**Satz.** Betrachte die Listen von zusammenhängenden Lie-Gruppen:

- (i)  $SO(n)$ , Euklidische Bewegungsgruppe,  $\Lambda(4)$  (Lorentz-Gruppe),  $\mathcal{P}(4)$  (inhomogene Lorentz-Gruppe);
- (ii)  $\mathbb{R}$  (bzgl. +),  $SU(n)$ ,  $Spin(n)$  ( $n \geq 2$ ), universelle Überlagerungsgruppen aus (i).

In einer genügend kleinen Umgebung von  $e \in G$  kann  $\omega(g, h) = 1$  gewählt werden. Für die **einfach zusammenhängenden** unter ihnen (Liste (ii)) gilt dies global. Dann ist jede projektive Darstellung von  $G$  zu einer (üblichen) unitären Darstellung äquivalent.

Nicht in die Liste aufgenommen werden dürfen  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ), sowie die Galilei-Gruppe.

## 7.2 Drehungen

Unter einer Drehung  $R \in \text{SO}(3)$ ,  $\vec{x} \mapsto R\vec{x}$  eines quantenmechanischen Systems ändern sich seine Zustände  $\psi \in \mathcal{H}$  gemäss  $\psi \mapsto U(R)\psi$ , wobei  $U(R)$  eine **unitäre Darstellung** von  $\text{SO}(3)$  ist, d.h.

$$\begin{aligned} U : \text{SO}(3) &\rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) = \{\text{lineare Abbildungen } \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}\}, \\ R &\mapsto U(R) \end{aligned} \quad (7.9)$$

ein Homomorphismus ist,

$$U(R_1)U(R_2) = U(R_1R_2), \quad U(1) = \mathbf{1},$$

der unitär ist:  $U(R)^{-1} = U(R)^*$ .

**Beispiel.** Vgl. (3.58):

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3), \quad (U_0(R)\psi)(\vec{x}) = \psi(R^{-1}\vec{x}). \quad (7.10)$$

**Bemerkung.** Nach dem vorigen Abschnitt erfordert die Quantenmechanik bloss, dass die Darstellung der  $\text{SO}(3)$  eine projektive ist. Wir übersehen dies zunächst, kommen aber später auf Seite 76 darauf zurück.

**Infinitesimale Drehungen** sind Elemente  $\Omega$  des Tangentialraums an  $\text{SO}(3)$  im Punkt  $\mathbf{1}$ ,

$$\Omega = \left. \frac{d}{dt} R(t) \right|_{t=0}, \quad (7.11)$$

wobei  $t \mapsto R(t)$  eine differenzierbare Kurve in  $\text{SO}(3)$  durch  $R(0) = \mathbf{1}$  ist. Mit  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  sind dann auch

$$\begin{aligned} \alpha_1\Omega_1 + \alpha_2\Omega_2 &= \left. \frac{d}{dt} R_1(\alpha_1 t) R_2(\alpha_2 t) \right|_{t=0}, \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}), \\ R\Omega_1 R^{-1} &= \left. \frac{d}{dt} R R_1(t) R^{-1} \right|_{t=0}, \quad (R \in \text{SO}(3)), \\ [\Omega_1, \Omega_2] &= \left. \frac{d}{dt} R_1(t) \Omega_2 R_1(t)^{-1} \right|_{t=0} \end{aligned} \quad (7.12)$$

infinitesimale Drehungen: Diese bilden mit der Klammer  $[\cdot, \cdot]$  die **Lie-Algebra**  $\mathfrak{so}(3)$  von  $\text{SO}(3)$ . Wegen

$$\begin{aligned} R^T(t)R(t) = \mathbf{1} &\quad \Rightarrow \quad \Omega^T + \Omega = 0, \\ \Omega^T + \Omega = 0 &\quad \Rightarrow \quad (e^{\Omega t})^T (e^{\Omega t}) = e^{(\Omega^T + \Omega)t} = \mathbf{1} \end{aligned}$$

besteht  $\mathfrak{so}(3)$  aus allen antisymmetrischen  $3 \times 3$ -Matrizen. Jede solche Matrix ist von der Form

$$\Omega(\vec{\omega}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h.

$$\Omega(\vec{\omega})\vec{x} = \vec{\omega} \wedge \vec{x} \quad (7.13)$$

mit  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^3$ . So ist  $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{so}(3) = 3$ , z.B. mit Basisvektoren

$$\Omega_i := \Omega(\vec{e}_i), \quad (i = 1, 2, 3),$$

wobei  $\{\vec{e}_i\}$  die Standardbasis für  $\mathbb{R}^3$  ist. Für  $\vec{\omega} = \omega\vec{e}$ , ( $|\vec{e}| = 1$ ) ist  $e^{\Omega(\vec{\omega})t} = R(\vec{e}, \omega t)$  die Drehung um Achse  $\vec{e}$  und Winkel  $\omega t$ . Es gilt:

$$R\Omega(\vec{\omega})R^{-1} = \Omega(R\vec{\omega}), \quad (R \in \text{SO}(3)),$$

also  $[\Omega(\vec{\omega}_1), \Omega(\vec{\omega}_2)] = \Omega(\vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2)$  und insbesondere

$$[\Omega_1, \Omega_2] = \Omega_3 \quad (\text{und zyklisch}). \quad (7.14)$$

Jeder unitären Darstellung (7.9) der  $\text{SO}(3)$  auf  $\mathcal{H}$  entspricht nun eine Darstellung der  $\mathfrak{so}(3)$ :

$$U(\Omega) := \left. \frac{d}{dt} U(R(t)) \right|_{t=0} \quad (7.15)$$

mit  $\Omega$ ,  $R(t)$  wie in (7.11). (1. Genau: falls  $\dim \mathcal{H} < \infty$ ; ansonsten ist  $U(\Omega)$  ein unbeschränkter Operator mit  $\psi \in D(U(\Omega))$  genau dann, falls  $U(R(t))\psi$  differenzierbar ist. 2.  $U(\Omega)$  ist eindeutig durch  $\Omega$  bestimmt, obschon es  $R(t)$  in (7.11) nicht ist.) Die Abbildung  $\Omega \mapsto U(\Omega)$  ist nämlich ein Homomorphismus der  $\mathfrak{so}(3)$ :

$$\begin{aligned} U(\alpha_1\Omega_1 + \alpha_2\Omega_2) &= \alpha_1U(\Omega_1) + \alpha_2U(\Omega_2), & (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}), \\ U([\Omega_1, \Omega_2]) &= [U(\Omega_1), U(\Omega_2)], \end{aligned} \quad (7.16)$$

wobei letzteres aus

$$U(R\Omega R^{-1}) = U(R)U(\Omega)U(R)^{-1}, \quad (R \in \text{SO}(3))$$

folgt. Dass die Darstellung unitär ist, bedeutet nun

$$U(\Omega)^* = -U(\Omega).$$

Für jedes  $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$  definieren wir den selbstadjungierten **Drehimpulsoperator**

$$M(\vec{\omega}) := iU(\Omega(\vec{\omega})), \quad (7.17)$$

also

$$M(\vec{\omega}) = \sum_{i=1}^3 M_i \omega_i,$$

wobei die Vertauschungsrelationen der  $M_i = M(\vec{e}_i)$

$$[M_1, M_2] = iM_3 \quad (\text{und zyklisch}) \quad (7.18)$$

lauten.

### 7.3 Irreduzible Darstellungen

Eine Darstellung auf  $\mathcal{H}$  heisst **irreduzibel**, falls  $\{0\}$ ,  $\mathcal{H}$  ihre einzigen invarianten Teilräume sind. Jede Darstellung zerfällt in eine direkte Summe irreduzibler, sodass es genügt, letztere zu klassifizieren. Wir tun dies für  $\mathfrak{so}(3)$ , denn damit erfasst man wegen (7.15) auch die von  $\mathrm{SO}(3)$ . Ferner setzen wir  $\dim \mathcal{H} < \infty$  voraus (was für die Anwendungen genügt), nicht aber, dass die Darstellung unitär ist ( $M_i = M_i^*$ ,  $i = 1, 2, 3$ ). Sei

$$M_{\pm} = M_1 \pm iM_2 ,$$

(**Auf- und Absteigeoperatoren**), sodann (7.18) gleichbedeutend ist mit

$$[M_3, M_{\pm}] = \pm M_{\pm} , \quad [M_+, M_-] = 2M_3 . \quad (7.19)$$

Sei  $\psi$  ein Eigenvektor von  $M_3$ :

$$M_3\psi = z\psi$$

für ein  $z \in \mathbb{C}$ . Damit ist auch  $z \pm 1$  ein Eigenwert, sofern  $M_{\pm}\psi \neq 0$ :

$$M_3M_{\pm}\psi = M_{\pm}M_3\psi + [M_3, M_{\pm}]\psi = (z \pm 1)M_{\pm}\psi .$$

Da  $\dim \mathcal{H} < \infty$ , kann dieses Argument nicht beliebig wiederholt werden: Es gibt einen Eigenwert  $j \in \mathbb{C}$  mit Eigenvektor  $\psi_j$ , derart dass

$$M_3\psi_j = j\psi_j , \quad M_+\psi_j = 0 .$$

Wir setzen induktiv

$$M_-\psi_m =: \psi_{m-1} \quad (7.20)$$

für  $m = j, j-1, \dots$ ; somit ist

$$M_3\psi_m = m\psi_m . \quad (7.21)$$

Auch diese Folge muss abbrechen, d.h. es gibt ein  $k \in \mathbb{N}$ , sodass

$$\psi_{j-k} \neq 0 , \quad M_-\psi_{j-k} = 0 . \quad (7.22)$$

Falls

$$M_+\psi_m = \mu_m\psi_{m+1} \quad (7.23)$$

(was für  $m = j$  zutrifft mit  $\mu_j = 0$ ), so gilt auch

$$\begin{aligned} M_+\psi_{m-1} &= M_+M_-\psi_m = [M_+, M_-]\psi_m + M_-M_+\psi_m \\ &= (2m + \mu_m)\psi_m \equiv \mu_{m-1}\psi_m . \end{aligned}$$

Es folgt induktiv

$$\mu_m = j(j+1) - m(m+1) = (j-m)(j+1+m) .$$

Die Bedingung (7.22) besagt  $\mu_{j-k-1} = 0$ , also  $2j = k$ :

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots . \quad (7.24)$$

Jeder irreduziblen Darstellung entspricht damit ein solches  $j$ . Umgekehrt verifiziert man, dass  $M_3, M_\pm$ , durch (7.20, 7.21, 7.23) auf Basisvektoren  $\psi_j, \dots, \psi_{-j}$  definiert, (7.19) erfüllen und somit eine Darstellung  $\mathcal{D}_j$  der  $\mathfrak{so}(3)$  liefern. Darin ist

$$\vec{M}^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M_\pm M_\mp + M_3(M_3 \mp 1)$$

ein Vielfaches der 1:

$$\vec{M}^2 \psi = j(j+1)\psi, \quad (\psi \in \mathcal{D}_j), \quad (7.25)$$

denn dies gilt für  $\psi = \psi_j$  und  $\vec{M}^2$  vertauscht mit  $M_i$ , ( $i = 1, 2, 3, +, -$ ).

**Satz.** Die endlich dimensionalen irreduziblen Darstellungen  $\mathcal{D}_j$ , der  $\mathfrak{so}(3)$ , s. (7.14) sind parametrisiert durch (7.24) mit  $\dim \mathcal{D}_j = 2j + 1$ . Es gilt (7.25).

Ist die Darstellung unitär, d.h.  $M_i = M_i^*$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), und damit  $M_\pm^* = M_\mp$ , so ist eine orthonormierte Basis (**Normalbasis**)

$$\{|j, m\rangle\}_{m=-j}^j$$

für  $\mathcal{D}_j$  durch

$$|j, j\rangle := \frac{\psi_j}{\|\psi_j\|}, \quad \sqrt{\mu_m}|j, m\rangle := M_-|j, m+1\rangle$$

gegeben. Diesbezüglich ist

$$\begin{aligned} \vec{M}^2|j, m\rangle &= j(j+1)|j, m\rangle, \\ M_3|j, m\rangle &= m|j, m\rangle, \\ M_\pm|j, m\rangle &= \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|j, m \pm 1\rangle. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Führt man umgekehrt ein Skalarprodukt ein, indem man die Basis  $\{|j, m\rangle\}_{m=-j}^j$  als orthonormiert erklärt, so ist die Darstellung  $\mathcal{D}_j$  unitär.

**Beispiele. 1.** Die 1-dim. Darstellung  $\mathcal{D}_0$  ist **trivial**:  $M_i = 0$ .

**2.** Die **fundamentale** Darstellung ist auf  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^3$  (besser:  $\mathbb{C}^3$ ) mit  $U(R) = R$ , bzw.  $U(\Omega) = \Omega$ . Sie ist irreduzibel, hat Dimension 3 und ist somit isomorph zu  $\mathcal{D}_1$ . Dasselbe gilt für die **adjungierte** Darstellung auf  $\mathcal{H} = \mathfrak{so}(3)$  (besser: die Komplexifizierung  $\mathfrak{so}(3)_\mathbb{C}$ ) mit, s. (7.12, 7.15),

$$U(R)\Omega = R\Omega R^{-1}, \quad U(\Omega_1)\Omega_2 = [\Omega_1, \Omega_2].$$

Für späteren Gebrauch sei hier die Normalbasis  $\{|1, m\rangle\}_{m=-1}^1$  der Darstellung  $\mathcal{D}_1$  auf  $\mathbb{C}^3$  angegeben:

$$|1, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + i\vec{e}_2), \quad |1, 0\rangle = -\vec{e}_3, \quad |1, -1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 - i\vec{e}_2) (= -\overline{|1, 1\rangle}). \quad (7.27)$$

Es ist nämlich  $M_i \vec{x} = i\vec{e}_i \wedge \vec{x}$ , also  $M_\pm \vec{x} = i(\vec{e}_1 \pm i\vec{e}_2) \wedge \vec{x}$ . Offenbar genügt der erste Vektor  $\langle 1, 1|1, 1\rangle = 1$  und  $M_+|1, 1\rangle = 0$ , und die restlichen beiden folgen durch Anwendung von  $M_-$ . Damit ist (7.26) erfüllt.

**3.** Der Raum  $\mathcal{Y}_l$  der Kugelfunktionen zum Index  $l = 0, 1, 2, \dots$  (s. Anhang B) trägt die Darstellung  $\mathcal{D}_l$ , da  $\vec{M}^2 = l(l+1)$  und  $\dim \mathcal{Y}_l = 2l + 1$ .

Für jede Darstellung  $\mathcal{D}_j$ , die aus  $\text{SO}(3)$  stammt, ist  $j$  ganzzahlig, d.h.  $j = 0, 1, 2, \dots$ , denn wegen  $U(R(\vec{e}_3, \varphi)) = e^{-iM_3\varphi}$  und  $R(\vec{e}_3, 2\pi) = 1$  ist  $|j, m\rangle = e^{-2\pi im}|j, m\rangle$ , also  $m \in \mathbb{Z}$ .

## 7.4 Einschub: Zusammengesetzte Quantensysteme

Wie baut man zwei Teilsysteme zu einem Gesamtsystem zusammen? Beispiel: der Hilbertraum  $L^2(\mathbb{R}^6)$  der 2-Teilchen-Wellenfunktionen  $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  wird aufgespannt durch die (Tensor)produkte:

$$\psi^{(1)}(\vec{x}_1)\psi^{(2)}(\vec{x}_2) = (\psi^{(1)} \otimes \psi^{(2)})(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$$

von 1-Teilchen Wellenfunktionen  $\psi^{(i)} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ . Allgemein: der Hilbertraum des Gesamtsystem ist das **Tensorprodukt** der Hilberträume der Teilsysteme:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}. \quad (7.28)$$

Die Definition davon ist durch folgenden Satz gegeben:

**Satz.** Das Tensorprodukt  $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$  zweier Vektorräume,  $\mathcal{H}^{(i)}$ , ( $i = 1, 2$ ), und eine Abbildung  $\otimes : \mathcal{H}^{(1)} \times \mathcal{H}^{(2)} \rightarrow \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$  sind (bis auf Isomorphie) durch folgende Eigenschaft bestimmt: Zu jeder Bilinearform  $b : \mathcal{H}^{(1)} \times \mathcal{H}^{(2)} \rightarrow \mathbb{C}$  gibt es genau eine Linearform  $l : \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$l(v^{(1)} \otimes v^{(2)}) = b(v^{(1)}, v^{(2)}), \quad (v^{(i)} \in \mathcal{H}^{(i)}), \quad \text{d.h.}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^{(1)} \times \mathcal{H}^{(2)} & \xrightarrow{b} & \mathbb{C} \\ \downarrow \otimes & \nearrow l & \\ \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)} & & \end{array}$$

Sind  $\mathcal{H}^{(i)}$  Hilberträume, so auch  $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ , und zwar mit Skalarprodukt bestimmt durch

$$(v^{(1)} \otimes v^{(2)}, w^{(1)} \otimes w^{(2)}) = (v^{(1)}, w^{(1)}) \cdot (v^{(2)}, w^{(2)}).$$

Die konkrete Herstellung des Tensorprodukts ist: Sind  $\{e_m^{(i)}\}_{m=1}^{n_i}$ , ( $n_i = \dim \mathcal{H}^{(i)}$ ), Basen für  $\mathcal{H}^{(i)}$ , so ist die **Produktbasis**

$$\{e_{m_1}^{(1)} \otimes e_{m_2}^{(2)}\}_{m_1, m_2=1}^{n_1, n_2}$$

eine für  $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ .

Eine Motivation des Postulats (7.28) ist: Der Raum der Zustände des zusammengesetzten Systems enthält solche die durch Angabe der Zustände der Teilsysteme gegeben sind,  $\psi^{(1)} \otimes \psi^{(2)}$ , sowie auch deren linearen Superpositionen. Man beachte den Unterschied zu klassischen Systemen, wo es beim kartesischen Produkt  $\Omega_1 \times \Omega_2$  der Zustandsräume der Teilsysteme bleibt. Der Unterschied ist weniger eklatant, wenn auf der klassischen Seite nicht Zustände, sondern Wahrscheinlichkeitsverteilungen über diesen herangezogen werden. Solche Verteilungen werden ebenfalls über das Tensorprodukt aus denjenigen der Teilsystemen erzeugt:  $M(\Omega_1 \times \Omega_2) = M(\Omega_1) \otimes M(\Omega_2)$ , wobei  $M(\Omega)$  der Raum der Masse über  $\Omega$  bezeichnet. (Diese Tatsache widerspiegelt sich in der Möglichkeit von Korrelationen zwischen den Teilsystemen.) In Anbetracht der probabilistischen Interpretation der Quantenmechanik ist letzterer Vergleich eher berechtigt.

## 7.5 Addition von Drehimpulsen

Drehungen eines zusammengesetzten Systems sind durch die **Tensorprodukt-darstellung**

$$U(R) = U^{(1)}(R) \otimes U^{(2)}(R), \quad (R \in \text{SO}(3)) \quad (7.29)$$

gegeben, wobei das Tensorprodukt von Operatoren  $A^{(i)}$  auf  $\mathcal{H}^{(i)}$ , ( $i = 1, 2$ ), erklärt ist durch

$$(A^{(1)} \otimes A^{(2)})(\psi^{(1)} \otimes \psi^{(2)}) = A^{(1)}\psi^{(1)} \otimes A^{(2)}\psi^{(2)}$$

auf  $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ . Aus (7.15) folgt für die Drehimpulsoperatoren (7.17)

$$M_i = M_i^{(1)} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes M_i^{(2)}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (7.30)$$

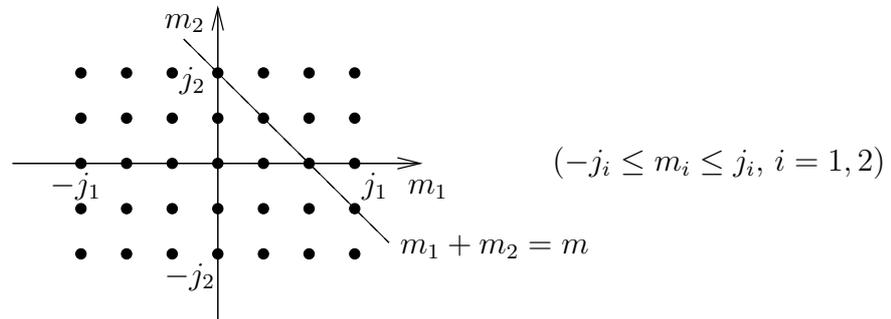
und dies soll auch die Definition des Produkts zweier Darstellungen der  $\text{so}(3)$  sein, die nicht notwendigerweise von  $\text{SO}(3)$  stammen.

Das Produkt von zwei irreduziblen Darstellungen  $\mathcal{D}_j$  zerfällt gemäss der **Clebsch-Gordan Reihe**

$$\mathcal{D}_{j_1} \otimes \mathcal{D}_{j_2} = \mathcal{D}_{j_1+j_2} \oplus \mathcal{D}_{j_1+j_2-1} \oplus \dots \oplus \mathcal{D}_{|j_1-j_2|}. \quad (7.31)$$

**Beweis.** Die Vektoren der Produktbasis sind Eigenvektoren von  $M_3$ , vgl. (7.26, 7.30),

$$M_3|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = (m_1 + m_2)|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle.$$



Aus der Figur ersieht man: Die Vielfachheiten des Eigenwertes  $m = m_1 + m_2$  ist

$$\begin{aligned} \text{für } m = j_1 + j_2 & : 1 \\ \text{für } m = j_1 + j_2 - 1 & : 2 \\ \vdots & \vdots \\ \text{für } m = |j_1 - j_2| & : 2 \min(j_1, j_2) + 1 \\ \text{für } m = |j_1 - j_2| - 1 & : 2 \min(j_1, j_2) + 1 \\ \vdots & \vdots \end{aligned}$$

falls  $m \geq 0$  und gleich unter  $m \rightarrow -m$ . Daraus folgt: Keine irreduzible Darstellung  $\mathcal{D}_j$  mit  $j > j_1 + j_2$  kommt in  $\mathcal{D}_{j_1} \otimes \mathcal{D}_{j_2}$  vor;  $\mathcal{D}_{j_1+j_2}$  kommt einmal vor und enthält je einen Eigenvektor mit Eigenwert mit  $m = -j, \dots, j$ . Der verbleibende Eigenvektor mit  $m = j_1 + j_2 - 1$  bedingt eine Darstellung  $\mathcal{D}_{j_1+j_2-1}$ , und so weiter bis  $\mathcal{D}_{|j_1-j_2|}$ .  $\square$

**Bemerkung.** Im Fall  $j_1 = j_2 \equiv j$  kann man auf  $\mathcal{D}_j \otimes \mathcal{D}_j$  die Vertauschung  $P_{(12)} : \psi_1 \otimes \psi_2 \mapsto \psi_2 \otimes \psi_1$  definieren. Dann ist  $\mathcal{D}_{2j}$  in (7.31) symmetrisch unter Vertauschung ( $P_{(12)}\psi = \psi$  für  $\psi \in \mathcal{D}_{2j}$ ) und  $\mathcal{D}_{2j-1}$  antisymmetrisch; und so alternierend weiter. Dies folgt aus obigem Beweis, denn  $|j, j\rangle \otimes |j, j\rangle \in \mathcal{D}_{2j}$  ist symmetrisch und dasselbe gilt für alle weiteren Vektoren in  $\mathcal{D}_{2j}$ , da  $[P_{(12)}, M_-] = 0$ . Für festes  $m$  zerlege man den Eigenraum  $M_3\psi = m\psi$  in den symmetrischen und antisymmetrischen Unterraum. Die Figur zeigt: Bei  $m \rightsquigarrow m - 1$  wachsen die Dimensionen der beiden Unterräume alternierend (bis zu  $m = 0$ ). Die Behauptung folgt induktiv.

**Beispiel.** Es ist  $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{D}_{\frac{1}{2}} \cong \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_0$  mit Tensorproduktbasis  $\{|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, |-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\}$ . Basisvektoren für die Teildarstellung  $\mathcal{D}_1$  (**Tripletzustände**) sind  $|1, 1\rangle \equiv |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ , da  $M_3|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ , sowie die weiteren durch  $M_-$  erzeugten Vektoren:

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + |-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle), \\ |1, -1\rangle &= |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle; \end{aligned} \tag{7.32}$$

für die Teildarstellung  $\mathcal{D}_0$  (**Singlett**) einer zu (7.32) orthogonaler Vektor  $|0, 0\rangle$  mit  $M_3|0, 0\rangle = 0$ :

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle - |-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle). \tag{7.33}$$

Die Symmetrieeigenschaften von Triplet- und Singlettzuständen sind evident.

## 7.6 Die quantenmechanische Drehgruppe SU(2)

SU(2) ist die Gruppe der komplexen  $2 \times 2$ -Matrizen  $V$  mit

$$V^*V = 1, \quad \det V = 1.$$

Infinitesimale Elemente

$$A = \left. \frac{dV(t)}{dt} \right|_{t=0} \tag{7.34}$$

( $V(t)$  differenzierbar,  $V(0) = 1$ ) sind komplexe Matrizen mit

$$A^* + A = 0, \quad \text{tr } A = 0,$$

(verwende  $\log \det V(t) = \text{tr } \log V(t)$ ). Sie bilden die Lie-Algebra  $\mathfrak{su}(2)$ , versehen mit

$$[A_1, A_2] = A_1A_2 - A_2A_1,$$

vgl. (7.12). Wieder enthält sie nämlich mit  $A$  auch

$$A' = VAV^*, \quad (V \in \text{SU}(2)). \tag{7.35}$$

Die Elemente  $A \in \mathfrak{su}(2)$  sind von der Form

$$A \equiv A(\vec{a}) = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \sum_{j=1}^3 \sigma_j a_j \equiv -\frac{i}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{a}$$

( $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ ) mit **Pauli-Matrizen**

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.36)$$

Insbesondere ist  $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{su}(2) = 3$  und eine Basis ist

$$A_j = -i \frac{\sigma_j}{2}, \quad (j = 1, 2, 3).$$

Die Matrizen (7.36) erfüllen

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbf{1} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$$

( $\varepsilon_{123} = +1$  und  $\varepsilon_{ijk}$  total antisymmetrisch), d.h.

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \mathbf{1} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}). \quad (7.37)$$

Damit ist

$$[A(\vec{a}), A(\vec{b})] = A(\vec{a} \wedge \vec{b}), \quad (7.38)$$

bzw.

$$[A_1, A_2] = A_3 \quad (\text{und zyklisch}).$$

Die Lie-Algebren  $\mathfrak{su}(2)$  und  $\mathfrak{so}(3)$ , s. (7.14), sind isomorph über

$$R : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{so}(3), \quad A(\vec{\omega}) \mapsto \Omega(\vec{\omega}), \quad (7.39)$$

d.h.  $A_j \mapsto \Omega_j$ , ( $j = 1, 2, 3$ ). Die Abbildung  $R : A \mapsto \Omega$  ist durch

$$[A, A(\vec{a})] = A(\Omega \vec{a}) \quad (7.40)$$

charakterisiert, wie man mit  $A = A(\vec{\omega})$ ,  $\Omega = \Omega(\vec{\omega})$  aus (7.13, 7.38) sieht. Die irreduziblen Darstellungen der  $\mathfrak{su}(2)$  sind damit die  $\mathcal{D}_j$  aus dem Satz auf Seite 70.

Jede Darstellung  $U(V)$  der  $SU(2)$  liefert eine der  $\mathfrak{su}(2)$  durch, vgl. (7.15, 7.16),

$$U(A) = \left. \frac{d}{dt} U(V(t)) \right|_{t=0} \quad (7.41)$$

mit  $a$ ,  $V(t)$  wie in (7.34). Diese bestimmt  $U(V)$  wegen

$$U(e^{At}) = e^{U(A)t}.$$

**Beispiele. 1.** Die fundamentale Darstellung der  $SU(2)$  ist auf  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$  mit  $U(V) = V$ , bzw.  $U(A) = A$ . Sie ist irreduzibel, hat Dimension 2 und ist somit isomorph zu  $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}$ .

**2.** Die adjungierte Darstellung der  $SU(2)$  auf  $\mathcal{H} = \mathfrak{su}(2)$  (oder  $\mathcal{H} = \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ ) ist, s. (7.35),

$$U(V)A = VAV^{-1}, \quad (V \in SU(2)).$$

Als Darstellung der  $\mathfrak{su}(2)$ ,  $U(A)B = [A, B]$ , ist sie wegen (7.38) isomorph zur fundamentalen Darstellung  $\mathcal{D}_1$  der  $\mathfrak{so}(3)$ . Insbesondere hat sie Dimension 3.

Im Unterschied zum Fall von  $SO(3)$  gilt hier auch die Umkehrung von (7.41):

**Satz.** Jeder Darstellung  $\mathcal{D}_j, (j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots)$ , der  $\mathfrak{su}(2)$  entspricht eine,  $U_j$ , der  $SU(2)$ . Dabei gilt

$$U_j(-V) = (-1)^{2j}U_j(V) . \quad (7.42)$$

**Beweis:** induktiv nach  $j$ . Die Behauptung gilt für  $j = 0, \frac{1}{2}$ . Gilt sie für  $j$ , so ist  $U(V) := U_j(V) \otimes V$  eine Darstellung auf  $\mathcal{D}_j \otimes \mathcal{D}_{\frac{1}{2}} = \mathcal{D}_{j-\frac{1}{2}} \oplus \mathcal{D}_{j+\frac{1}{2}}$ , s. (7.31), mit  $U(-V) = (-1)^{2j+1}U(V)$ . Dies gilt auch für die irreduzible Teildarstellung  $\mathcal{D}_{j+\frac{1}{2}}$ .  $\square$

**Notation.** Die entsprechenden Darstellungsmatrizen bzgl. der Normalbasis bezeichnen wir mit  $U_{m'm}^{(j)}(V)$ :

$$U(V)|jm\rangle = \sum_{m'=-j}^j U_{m'm}^{(j)}(V)|jm'\rangle , \quad (V \in SU(2)) \quad (7.43)$$

(Normalform der Darstellung).

**Bemerkung.** Es gibt keine  $\infty$ -dimensionale unitäre irreduzible Darstellungen der  $\mathfrak{so}(3)$ , wohl aber nicht unitäre.

Nach dem Satz lässt sich die Darstellung (7.39) zu einer von  $SU(2)$  heben. So erscheint  $SO(3)$  als Darstellung der  $SU(2)$ :

$$R : SU(2) \rightarrow SO(3) , \quad V \mapsto R = R(V) \quad (7.44)$$

mit

$$V = e^{A(\vec{a})t} \mapsto R = e^{\Omega(\vec{a})t} . \quad (7.45)$$

Die Abbildung ist charakterisiert durch

$$VA(\vec{a})V^{-1} = A(R\vec{a}) , \quad (7.46)$$

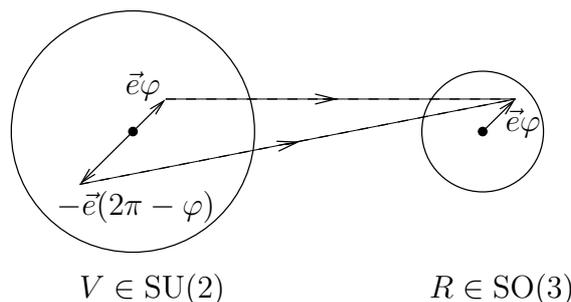
denn infinitesimal ist dies (7.40), vgl. Bsp. 2. Der Homomorphismus (7.44) ist surjektiv (da jedes  $R \in SO(3)$  von der Form (7.45) ist), nicht aber injektiv, da

$$R(V) = R(-V) , \quad (7.47)$$

s. (7.46); ja es ist  $VAV^{-1} = A$  für alle  $A \in \mathfrak{su}(2)$  genau dann, wenn  $V = \pm 1$ . Also:

$$SO(3) \cong SU(2)/\{\pm 1\} . \quad (7.48)$$

Die Zuordnung (7.44) kann anhand zweier Vollkugeln der Radien  $2\pi$  und  $\pi$  veranschaulicht werden:



- Durch  $R = R(\vec{e}, \varphi) = e^{\Omega(\vec{e}\varphi)}$  ist jede Drehung eindeutig durch einen Punkt  $\vec{e}\varphi$  der Vollkugel vom Radius  $\pi$ ,  $\{\vec{e}\varphi \mid |\vec{e}| = 1, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ , gegeben, bis auf die Identifikation der Diametralpunkte  $(\pm\vec{e}, \pi)$  wegen

$$R(\vec{e}, \varphi) = R(-\vec{e}, 2\pi - \varphi)$$

für  $\varphi = \pi$ . Insbesondere ist  $SO(3)$  nicht einfach zusammenhängend. Eine zweimal durchlaufene, nicht zusammenziehbare Schleife wird es aber. (Genauer: die 1. Homotopiegruppe ist  $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z} \bmod 2$ .)

- Wegen  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{e})^2 = \mathbb{1}$  für  $|\vec{e}| = 1$  ist durch Summation der Exponentialreihe

$$e^{A(\vec{e}\varphi)} = e^{-\frac{i}{2}(\vec{\sigma} \cdot \vec{e})\varphi} = \mathbb{1} \cos \frac{\varphi}{2} - i(\vec{\sigma} \cdot \vec{e}) \sin \frac{\varphi}{2} ;$$

damit ist jedes  $V = e^{A(\vec{a})} \in SU(2)$  eindeutig durch einen Punkt  $\vec{e}\varphi$  der Vollkugel vom Radius  $2\pi$  gegeben, bis auf die Identifikation aller Punkte des Randes wegen  $e^{A(2\pi\vec{e})} = -\mathbb{1}$ . Insbesondere ist  $SU(2)$  einfach zusammenhängend.

**Bemerkung.** Mit (7.47, 7.42) liefert jede Darstellung  $\mathcal{D}_j$  mit  $j$  halbzahlig, d.h.  $j = 1/2, 3/2, \dots$ , eine projektive Darstellung der  $SO(3)$ . Umgekehrt sind die  $\mathcal{D}_j$ 's alle solche Darstellungen der  $SO(3)$ , denn sie stiften ebensolche der  $SU(2)$ , also nach dem Satz auf Seite 66 Darstellungen im engeren Sinn.

## 7.7 Der Spin des Elektrons

In einer Theorie ohne Spin wäre ein Atom mit festem Kern (bei  $\vec{x} = 0$ ) und  $N$  Elektronen in einem äusseren homogenen Magnetfeld (in 3-Richtung  $\vec{B} = B\vec{e}_3$ ) beschrieben durch

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} (\vec{p}_i - (e/c)\vec{A}(\vec{x}_i))^2 + V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N), \quad \vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{2}(\vec{B} \wedge \vec{x}). \quad (7.49)$$

Hier ist  $m$  die Masse der Elektronen und  $V$  das Coulomb-Potential der Wechselwirkung der Elektronen zum Kern sowie untereinander. Es ist rotationssymmetrisch:

$$V(R\vec{x}_1, \dots, R\vec{x}_N) = V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N), \quad (R \in SO(3)).$$

Behält man nur die in  $B$  linearen Glieder, so ist

$$(\vec{p} - (e/c)\vec{A})^2 = \vec{p}^2 - (e/c)(\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p}) + (e/c)^2 \vec{A}^2 = \vec{p}^2 - (e/c)\vec{B} \cdot (\vec{x} \wedge \vec{p}) + O(B^2),$$

da  $\vec{p} \cdot \vec{A} = (1/2)\varepsilon_{ijk}p_i B_j x_k = (1/2)\varepsilon_{ijk}B_j x_k p_i = \vec{A} \cdot \vec{p}$ , und folglich

$$H = H_0 + \mu_B B M_3, \quad (\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2mc} = \text{Bohrsches Magneton}), \quad (7.50)$$

wobei  $H_0$  das ungestörte Atom beschreibt und

$$\sum_{i=1}^N \vec{x}_i \wedge \vec{p}_i = \vec{L} =: \hbar \vec{M} \quad (7.51)$$

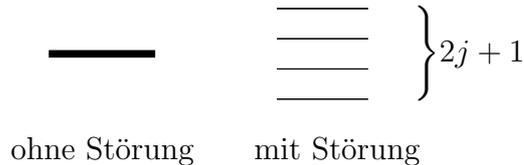
der Gesamtdrehimpuls ist. Im Unterschied zu  $H$  ist  $H_0$  invariant unter Drehungen

$$(U_0(R)\psi)(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = \psi(R\vec{x}_1, \dots, R\vec{x}_N), \quad (R \in \text{SO}(3)).$$

Sei  $E_0$  ein endlich entarteter Eigenwert von  $H_0$ . Der zugehörige Eigenraum ist ebenfalls invariant unter  $U_0$  und trägt somit eine Darstellung der  $\text{SO}(3)$ . In der Regel ist diese irreduzibel, denn die Wechselwirkungen zwischen den Elektronen heben allfällige Entartungen zwischen verschiedenen Darstellungen auf, so wie beim He-Atom, vgl. Seite 62. Jeder solche "einfache Term"  $E_0$  von  $H_0$  trägt eine Drehimpulsquantenzahl  $j = 0, 1, \dots$  und die natürliche Vielfachheit  $2j + 1$ . Diese Entartung kann erst durch eine nicht rotationssymmetrische Störung des Hamiltonoperators aufgehoben werden, wie z.B. jene in (7.50). In diesem Fall ist

$$H|j, m\rangle = (E_0 + \mu_B B m)|j, m\rangle, \quad (m = j, \dots, -j), \quad (7.52)$$

wobei  $|j, m\rangle$  die durch  $\mathcal{D}_j$  gestiftete Basis des Eigenraums von  $E_0$  ist. Demnach wäre die Aufspaltung  $\Delta E_m = \mu_B B m$  proportional zu  $B$  und ansonsten universell, d.h. unabhängig von  $N$  und  $E_0$ .



Aus der Beobachtung der Spektren (**Zeeman-Effekt**) findet man hingegen

- $2j + 1$  gerade, also  $j$  halbganz, für  $N$  ungerade;
- die Aufspaltung ist nicht universell.

Die theoretische Möglichkeit, dass die Drehimpulsquantenzahl  $j$  eines Systems halbzahlig ist, wird offenbar durch das Elektron verwirklicht. Zu ihrer Implementierung soll der Hilbertraum eines einzelnen Elektrons nicht  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , sondern (Pauli 1927)

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$$

sein. Darauf wirkt  $V \in \text{SU}(2)$  gemäss

$$U(V) = U_0(R(V)) \otimes V,$$

wobei  $U_0(R)$  die Darstellung von  $R \in \text{SO}(3)$ , s. (7.10), in der Theorie ohne Spin ist und  $R(V)$  der Abbildung (7.44) entspricht. Der Freiheitsgrad mit Hilbertraum  $\mathbb{C}^2$  und Darstellung  $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}$  heisst **Spin**

$$\vec{S} = \hbar \vec{M} \quad (7.53)$$

des Elektrons. In der (fundamentalen) Darstellung  $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}$  ist  $M_j = iU(A_j)$  gegeben durch

$$M_j = \frac{\sigma_j}{2}.$$

Damit ist

$$M_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Basis (7.26) ist gerade die Standardbasis für  $\mathbb{C}^2$ ,

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |\vec{e}_3\rangle, \quad |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |-\vec{e}_3\rangle : \quad (7.54)$$

Spin nach oben, bzw. unten bezüglich der Quantisierungsrichtung  $\vec{e}_3$ . Eigenbasen für  $M_1$  bzw.  $M_2$  sind

$$\begin{aligned} M_1 : \quad |\vec{e}_1\rangle &= \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & |-\vec{e}_1\rangle &= \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ M_2 : \quad |\vec{e}_2\rangle &= \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, & |-\vec{e}_2\rangle &= \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der **Gesamtdrehimpuls** des Elektrons ist nun, vgl. (7.30),

$$\vec{J} = \vec{L} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \vec{S}, \quad (7.55)$$

wobei  $\vec{L} = \vec{x} \wedge \vec{p}$  neu als Bahndrehimpuls bezeichnet wird.

Für die Zustände  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$  gibt es verschiedene Schreibweisen. In der Spinorschreibweise wird  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2, \vec{x} \mapsto \psi(\vec{x})$  aufgefasst als 2-komponentige Wellenfunktion von  $\vec{x}$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int d^3x (\psi(\vec{x}), \varphi(\vec{x}))_{\mathbb{C}^2}.$$

In der Basis (7.54) wird man also  $\psi(\vec{x})$  darstellen durch den Spaltenvektor

$$\psi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \psi_{+1/2}(\vec{x}) \\ \psi_{-1/2}(\vec{x}) \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad \psi(\vec{x}) = \psi_{+1/2}(\vec{x})|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \psi_{-1/2}(\vec{x})|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle,$$

auf den die Spinoperatoren in offensichtlicher Weise wirken. Alternativ lässt sich  $\psi$  auffassen als komplexe Funktion von zwei Variablen  $\vec{x}, s$ :

$$\psi : \mathbb{R}^3 \times \{-1/2, 1/2\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\vec{x}, s) \mapsto \psi(\vec{x}, s), \quad (7.56)$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \sum_{s=\pm 1/2} \int d^3x \overline{\psi(\vec{x}, s)} \varphi(\vec{x}, s).$$

Der Zusammenhang mit der Spinorschreibweise ist  $\psi(\vec{x}, s) = \psi_s(\vec{x})$ , und die Bedeutung der Spinvariablen  $s$  erhellt aus

$$(S_3\psi)(\vec{x}, s) = \hbar s \psi(\vec{x}, s).$$

Zur Beschreibung der Zustände mehrerer Elektronen wird sich diese zweite Form besser eignen.

## 7.8 Der Satz von Wigner–Eckart

Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum mit Darstellung  $U(V)$  der  $SU(2) \ni V$ . Definition: Ein **Vektoroperator**  $\vec{W} = \sum_{j=1}^3 W_j \vec{e}_j$  hat Operatoren  $W_j$  als kartesische Komponenten mit dem Transformationsverhalten

$$U(V)W_jU(V)^{-1} = \sum_{i=1}^3 R_{ij}W_i, \quad (7.57)$$

wobei  $R = R(V) \in SO(3)$  wie in (7.44). Durch die Skalarprodukte  $\vec{W} \cdot \vec{e}$ , ( $\vec{e} \in \mathbb{R}^3$ ) ausgedrückt bedeutet dies

$$U(V)(\vec{W} \cdot \vec{e})U(V)^{-1} = \vec{W} \cdot R\vec{e} \quad (7.58)$$

wegen  $R\vec{e}_j = \sum_{i=1}^3 R_{ij}\vec{e}_i$ . Interpretation: Die Messung der Komponenten von  $\vec{W}$  in der gedrehten Richtung  $R\vec{e}$  läuft auf jene in Richtung  $\vec{e}$  hinaus nach inverser Drehung des Systems ( $U(V)^{-1}$ ).

**Beispiele. 1.** Der Drehimpulsoperator  $\vec{M}$  einer Darstellung  $U(V)$ , vgl. (7.17). Seine Komponenten  $\vec{M} \cdot \vec{\omega} = iU(\Omega(\vec{\omega}))$  erfüllen (7.58). Denn: Mit (7.41) folgt

$$U(V)U(A)U(V)^{-1} = U(VAV^{-1}), \quad (A \in \mathfrak{su}(2))$$

und daraus mit (7.39, 7.46)

$$U(V)U(\Omega(\vec{\omega}))U(V)^{-1} = U(\Omega(R\vec{\omega})),$$

wie behauptet. Beispiele: Drehimpulsoperator  $\vec{L}$  der Darstellung (7.10) auf  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ ; Spin  $\vec{S}$  auf  $\mathbb{C}^2$ .

**2.** Der Ortsoperator  $\vec{x}$  auf  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ . Denn mit  $(R^{-1}\vec{x})_j = \sum_{i=1}^3 R_{ij}x_i$  folgt (7.57) aus (7.10).

Die **Normalkomponenten**  $W_m^{(1)} := \vec{W} \cdot |1, m\rangle$  bzgl. der Basis (7.27) sind

$$W_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1 + iW_2), \quad W_0^{(1)} = -W_3, \quad W_{-1}^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(W_1 - iW_2). \quad (7.59)$$

Falls, wie in den Beispielen,  $W_i = W_i^*$ , so  $W_m^{(1)} = (-1)^m W_{-m}^{(1)*}$ . Beachte das lineare (statt antilineare) Skalarprodukt von  $\vec{W}$  mit der Normalbasis. So transformieren die  $W_m^{(1)}$  nach (7.43) gemäss

$$U(V)W_m^{(1)}U(V)^{-1} = \sum_{m'=-1}^1 U_{m'm}^{(1)}(V)W_{m'}^{(1)}.$$

Vektoroperatoren entsprechen dem Spezialfall  $k = 1$  folgender Verallgemeinerung des Begriffs: Allgemein heissen  $2k + 1$  Operatoren  $T_m^{(k)}$ , ( $m = -k, \dots, k$ ) auf  $\mathcal{H}$  Normalkomponenten eines **irreduziblen Tensoroperators** vom Typ  $k$ , falls

$$U(V)T_m^{(k)}U(V)^{-1} = \sum_{m'=-k}^k U_{m'm}^{(k)}(V)T_{m'}^{(k)}, \quad (7.60)$$

wobei  $U_{m'm}^{(k)}(V)$  die Normalform der Darstellung  $\mathcal{D}_k$  der  $SU(2)$  ist. Im selbstadjungierten Fall ist  $T_m^{(k)} = (-1)^m T_{-m}^{(k)*}$ .

**Satz** (Wigner–Eckart). Sei  $U(V)$  eine unitäre Darstellung von  $SU(2)$  auf  $\mathcal{H}$ ; ferner  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}$  invariante Teilräume, in denen  $U$  auf die irreduziblen Darstellungen  $\mathcal{D}_{j_1}, \mathcal{D}_{j_2}$  reduziert, und  $|j_1, m_1\rangle, |j_2, m_2\rangle$  die entsprechenden Normalbasen. Seien  $T^{(k)}, \tilde{T}^{(k)}$  irreduzible Tensoroperatoren vom selben Typ. Dann gilt:

$$\lambda \langle j_2, m_2 | T_m^{(k)} | j_1, m_1 \rangle = \tilde{\lambda} \langle j_2, m_2 | \tilde{T}_m^{(k)} | j_1, m_1 \rangle \quad (7.61)$$

mit  $\lambda, \tilde{\lambda}$  nicht beide Null und unabhängig von  $m, m_1, m_2$ . Weiter gelten die **Auswahlregeln**: Notwendige Bedingungen für  $\langle j_2, m_2 | T_m^{(k)} | j_1, m_1 \rangle \neq 0$  sind

$$j_2 \in \{|j_1 - k|, |j_1 - k| + 1, \dots, j_1 + k\}, \quad m_2 = m_1 + m. \quad (7.62)$$

Kurz: Die Matrixelemente eines Tensoroperators vom Typ  $k$  sind bis auf ein gemeinsames Vielfaches eindeutig bestimmt.

**Beweis.** Zuerst der skalare Fall  $k = 0$ : hier ist  $[T_0^{(0)}, U(A)] = 0$  und folglich  $[T_0^{(0)}, M_i] = 0$ . Da die  $|j_1, m_1\rangle, |j_2, m_2\rangle$  Eigenvektoren von  $\vec{M}^2$  und  $M_3$  sind, verschwinden beide Matrixelemente (7.61), ausser es gilt (7.62). Es bleibt also der Fall  $m_1 = m_2 \equiv m$  zu behandeln. Das Verhältnis (7.61) für ein  $m$  vererbt sich auf  $m \pm 1$  dank (7.26) und  $[T_0^{(0)}, M_{\pm}] = 0$ . Nun betrachten wir den allgemeinen Fall. Nach (7.43, 7.60) ist

$$U(V)T_m^{(k)}|j_2, m_2\rangle = U(V)T_m^{(k)}U(V)^{-1}U(V)|j_2, m_2\rangle = U_{m'm}^{(k)}(V)U_{m'_2 m_2}^{(j_2)}(V)T_{m'}^{(k)}|j_2, m'_2\rangle,$$

d.h. die Vektoren  $T_m^{(k)}|j_2, m_2\rangle$  transformieren sich unter  $U(V)$  wie die Vektoren  $|k, m\rangle \otimes |j_1, m_1\rangle$  der Produktbasis für die Darstellung  $\mathcal{D}_k \otimes \mathcal{D}_{j_2}$ . Seien  $P_l$  die orthogonalen Projektoren auf die irreduziblen Teildarstellungen  $\mathcal{D}_l$  der Clebsch-Gordan Reihe (7.31). Dann ist  $P_l T_m^{(k)}|j_2, m_2\rangle =: |l, m + m_2\rangle$  eine Normalbasis für  $\mathcal{D}_l$  (bis auf die Normierung) und

$$\langle j_1, m_1 | T_m^{(k)} | j_1, m_1 \rangle = \sum_{l=|j_1-k|}^{j_1+k} \langle j_1, m_1 | P_l T_m^{(k)} | j_2, m_2 \rangle = \langle j_1, m_1 | P_{j_2} T_m^{(k)} | j_2, m_2 \rangle,$$

falls  $j_2$  (7.62) erfüllt, und  $= 0$  sonst. Die Behauptung folgt nun aus dem skalaren Fall. Entscheidend war, dass jede irreduzible Darstellung in (7.31) mit Vielfachheit 1 vorkommt.

## 7.9 Der anomale Zeeman–Effekt

Der Zeeman–Effekt besteht in einer Aufspaltung der Energieniveaus infolge eines Magnetfelds und folglich auch der Spektrallinien, die den Übergängen zwischen diesen entsprechen. “Anomal” bezieht sich darauf, dass die Aufspaltung nicht universell ist, vgl. S. 77. Der Spin erklärt, nebst dem Auftreten halbganzer  $j$ , auch diesen Sachverhalt.

Der Atombau wird in Kap. 13 behandelt. Hier reicht: Energieniveaus (Terme) tragen u.A. die Quantenzahlen  $l, s$  für den Bahndrehimpuls  $\vec{L}$ , s. (7.51), und den Spin  $\vec{S}$  aller Elektronen; sowie  $j$  für den Gesamtdrehimpuls  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  mit  $j = |l - s|, \dots, l + s - 1, l + s$  nach (7.31). Die Energien sind bzgl.  $j$  nicht entartet, sondern bloss bzgl. der weiteren Quantenzahl  $m = -j, \dots, j$  für  $J_3$ .

Die semi–empirische Beschreibung (Landé 1921) des Effekts lautet:

- Die Aufspaltung eines Terms im Magnetfeld ist

$$\Delta E_m = g\mu_B B m$$

mit **gyromagnetischem Faktor**

$$g = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)} \quad (7.63)$$

- Die Übergänge genügen den Auswahlregeln

$$j \rightarrow |j-1|, \dots, j+1, \quad m \rightarrow m, m \pm 1 \quad (7.64)$$

**Bemerkungen. 1.** Historisch richtig: Die Regel wurde anhand von Atomen mit *einem* Leuchtelektron aufgestellt (Na,  $\text{Mg}^+$ , ...), also für  $s = 1/2$ . Dort besteht die Feinstruktur nur aus den Termen  $j = 1/2$ , ( $l = 0$ ), bzw.  $j = l \pm 1/2$ , ( $l > 0$ ) und (7.63) lautet

$$g = \frac{2j+1}{2l+1}. \quad (7.65)$$

**2.** Falls  $s = 0$ , so  $g = 1$ , vgl. (7.52). Falls  $l = 0$ , so  $g = 2$ .

**3.** Für zwei Terme mit ungestörten Energien  $E_1 < E_2$  sind die möglichen Übergangsennergien

$$E_{m_1 m_2} = E_2 - E_1 + \mu_B B (g_2 m_2 - g_1 m_1).$$

In der Regel sind die  $E_{m_1 m_2}$  für alle zulässigen Übergänge (7.63) verschieden. Z.B. für  $j_2 = j_1 + 1$  sind dies  $3(2j_1 + 1)$  verschiedene Werte. Falls aber  $g_1 = g_2 = g$  ("normaler" Zeeman-Effekt) liefert  $E_{m_1 m_2} = E_2 - E_1 + \mu_B B g (m_2 - m_1)$  bloss 3 Werte.

Die dynamische Wirkung des Spins beruht auf einem **magnetischen Moment**

$$\vec{\mu} = g_0 \frac{e}{2mc} \vec{S},$$

bzw. nach Abspaltung  $\vec{S} \rightsquigarrow \hbar \vec{S}$

$$\vec{\mu} = -g_0 \mu_B \vec{S},$$

wobei  $g_0$  der (postulierte) gyromagnetische Faktor des Elektrons ist. (Der klassische Wert ist  $g_0 = 1$ , insofern dieser einer rotierenden Kugel mit zueinander proportionalen Massen- und Ladungsdichten entspricht.) Das magnetische Moment gibt Anlass zur Wechselwirkungsenergie  $-\vec{B} \cdot \vec{\mu}$  im Magnetfeld.

Im Folgenden beziehen sich  $\vec{L}$ ,  $\vec{S}$ ,  $\vec{J}$  wieder auf *alle* Elektronen. Der Zeeman-Effekt wird nun beschrieben durch  $H = H_0 + H_1$ , wobei  $H_0$  rotationssymmetrisch ist,

$$[H_0, \vec{J}] = 0, \quad (7.66)$$

die Feinstruktur bereits berücksichtigt und

$$H_1 = \mu_B \vec{B} \cdot (\vec{L} + g_0 \vec{S}) = \mu_B \vec{B} \cdot (\vec{J} + (g_0 - 1) \vec{S}). \quad (7.67)$$

Hingegen gelten  $[H_0, \vec{L}] = 0$ ,  $[H_0, \vec{S}] = 0$  nur, falls  $H_0$  unter separaten Drehungen in Orts- und Spinraum invariant ist. Wegen der Spin–Bahn–Kopplung (einer relativistischen Störung, s. unten) gilt dies zwar nicht; immerhin wird aber

$$[H_0, \vec{L}^2] \approx 0, \quad [H_0, \vec{S}^2] \approx 0 \quad (7.68)$$

in guter Näherung zutreffen. Insbesondere tragen Eigenzustände von  $H_0$  die erwähnten Quantenzahlen  $l, s, j$ .

Störungsrechnung: Sei  $P_0$  der Eigenprojektor eines Terms von  $H_0$ . Seine Aufspaltung ist nach (6.8) durch die Eigenwerte von  $P_0 H_1 P_0$  gegeben. Nun ist

$$P_0 \vec{S} P_0 = \kappa P_0 \vec{J} P_0,$$

denn nach dem Satz von Wigner–Eckart sind die Matrixelemente eines Vektoroperators im Unterraum einer irreduziblen Darstellung  $\mathcal{D}_j$  bis auf einen Faktor bestimmt. Wegen (7.66) ist auch  $[\vec{J}, P_0] = 0$ , also

$$P_0 \vec{J} \cdot \vec{S} P_0 = P_0 \vec{J} P_0 \cdot P_0 \vec{S} P_0 = \kappa P_0 \vec{J}^2 P_0 = \kappa j(j+1) P_0. \quad (7.69)$$

Nun benützen wir die Operatoridentitäten

$$\begin{aligned} \vec{J} \cdot \vec{S} &= \frac{1}{2}(\vec{J}^2 + \vec{S}^2 - \vec{L}^2), \\ P_0 \vec{S}^2 P_0 &\approx s(s+1) P_0, \quad P_0 \vec{L}^2 P_0 \approx l(l+1) P_0, \end{aligned}$$

wobei die erste aus  $\vec{L} = \vec{J} - \vec{S}$  folgt und die Näherung auf (7.68) basiert. Aus (7.69) ergibt sich so

$$\kappa = \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

und mit  $\vec{B} = (0, 0, B)$  die Zeeman–Aufspaltung: Die Eigenvektoren von  $P_0 H_1 P_0$  sind die von  $P_0 J_3 P_0$ , d.h.  $|j, m\rangle$ , mit Eigenwerten

$$\Delta E_m = (1 + (g_0 - 1)\kappa)\mu_B B m.$$

Daraus folgt (7.63) sofern

$$g_0 = 2, \quad (7.70)$$

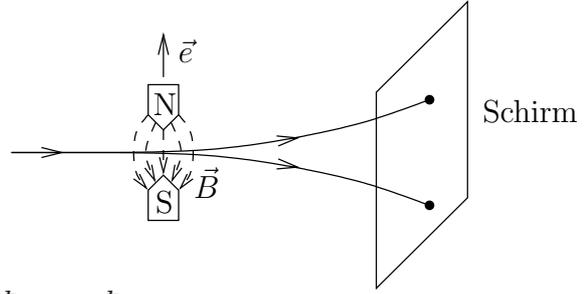
was bereits für den Spezialfall (7.65) erforderlich ist. Der Grund für (7.70) liegt in im relativistischen Ersatz der Schrödinger–Gleichung (2.4), der Dirac–Gleichung. Diese begründet auch die Spin–Bahn–Kopplung, womit sich auch die Feinstruktur als relativistischer Effekt quantitativ erklären lässt. In der Näherung, in welcher die Elektronen einem Zentralfeld  $V(r)$  unterliegen (die Wechselwirkung zum Kern ist von dieser Form, jene zwischen den Elektronen grundsätzlich nicht) lautet die Störung für *ein* Elektron

$$H_{\text{SB}} = \frac{\hbar^2}{2m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \vec{L} \cdot \vec{S}. \quad (7.71)$$

Da  $[f(r), L_i] = 0$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) für jede radiale Funktion  $f$ , vertauscht diese Störung mit  $\vec{L}^2$  und  $\vec{S}^2$  (nicht aber mit  $L_i, S_i$ ). In dieser Näherung ist (7.68) exakt.

## 7.10 Einschub: Gemischte Zustände

Ein Stern-Gerlach Analysator lenkt durch ein inhomogenes Magnetfeld  $\vec{B}$  (neutrale) Spin  $\frac{1}{2}$ -Teilchen je nach Wert von  $\vec{S} \cdot \vec{e}$  unterschiedlich ab; er bildet zusammen mit dem Schirm die Messapparatur für diese Observable. Ihre Spektraldarstellung ist



$$\vec{S} \cdot \vec{e} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{e} = \frac{\hbar}{2} P_+ - \frac{\hbar}{2} P_-$$

mit

$$P_{\pm} = |\pm \vec{e}\rangle \langle \pm \vec{e}| = P_{\pm}^* = P_{\pm}^2, \quad (7.72)$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{e} |\pm \vec{e}\rangle = \pm |\pm \vec{e}\rangle. \quad (7.73)$$

Teilchen im Zustand  $|\psi\rangle$  treten nach der Wahrscheinlichkeitsinterpretation auf Seite 25 an je einer den beiden Stellen des Schirms mit Wahrscheinlichkeiten

$$w_{\pm} = \langle \psi | P_{\pm} | \psi \rangle = |\langle \pm \vec{e} | \psi \rangle|^2 \quad (7.74)$$

auf. Dasselbe Ergebnis (für dieses Experiment) würde ein Strahl liefern, in dem Teilchen mit Zuständen  $|+\vec{e}\rangle$  und  $|-\vec{e}\rangle$  in den Anteilen  $w_+$  bzw.  $w_-$  vorhanden wären. Es wäre aber falsch, eine solche **statistische Mischung** mit irgend einem (reinen) Zustand  $|\psi\rangle$  zu identifizieren, denn andere Experimente vermögen sie zu unterscheiden. Beispiel: Besteht die Mischung je zur Hälfte aus Zuständen  $|+\vec{e}_3\rangle$  und  $|-\vec{e}_3\rangle$ , so betragen die beiden Wahrscheinlichkeiten

$$w_{\pm} = \frac{1}{2} |\langle \pm \vec{e} | \vec{e}_3 \rangle|^2 + \frac{1}{2} |\langle \pm \vec{e} | -\vec{e}_3 \rangle|^2 = \frac{1}{2} \langle \pm \vec{e} | \pm \vec{e} \rangle = \frac{1}{2},$$

unabhängig von der Richtung  $\vec{e}$  des Analysators. Für jeden reinen Zustand  $|\psi\rangle$  ist aber (7.74) von  $\vec{e}$  abhängig.

Statistische Mischungen, die der klassischen Vorstellung von Wahrscheinlichkeit als unvollständige Information über den reinen Zustand des Einzelfalls entsprechen, gibt es offenbar auch in der Quantenmechanik (**gemischte Zustände**). Sie sind gegeben durch **Dichtematrizen**, d.h. durch Operatoren  $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  mit

$$P = P^* \geq 0, \quad (7.75)$$

$$\text{tr } P = 1. \quad (7.76)$$

Bei derer Spektraldarstellung

$$P = \sum_k w_k |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k|$$

gilt wegen (7.75, 7.76)

$$w_k \geq 0, \quad \sum_k w_k = 1,$$

was ihre Interpretation stiftet:  $P$  ist eine Mischung der reinen Zuständen  $|\varphi_k\rangle$  mit Wahrscheinlichkeiten  $w_k$ . Reine Zustände entsprechen dem Spezialfall, wo ein  $w_k = 1$  ist und

die restlichen = 0 sind, d.h. wo  $P = P^2$  ein Projektor ist (der wegen (7.76) 1-dimensional ist). Der Erwartungswert der Observablen  $A$  im gemischten Zustand  $P$  ist

$$\langle A \rangle = \text{tr} PA = \sum_k w_k \text{tr} (|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|A) = \sum_k w_k \langle\varphi_k|A|\varphi_k\rangle,$$

d.h. gleich dem gewichteten Mittelwert der Erwartungswerte von  $A$  in den beteiligten reinen Zuständen  $|\varphi_k\rangle$ . Gemischte Zustände können "konvex kombiniert" werden: mit  $P_i$ , ( $i = 1, 2$ ), ist

$$P = w_1 P_1 + w_2 P_2 \quad (7.77)$$

( $w_i \geq 0, w_1 + w_2 = 1$ ) auch einer, vgl. (7.75, 7.76). Falls Systeme in den Zuständen  $P_i$  vorliegen, so präpariert man  $P$  dadurch, dass man zufällig mit Wahrscheinlichkeiten  $w_i$  eines aus der beiden Sorten wählt.

Sie nun  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ , wie im Fall eines Spins  $\frac{1}{2}$ . Der reelle Vektorraum

$$\{\text{komplexe } 2 \times 2\text{-Matrizen } P \mid P = P^*\}$$

ist 4-dimensional. Eine bezüglich des Skalarprodukts

$$(P_1, P_2) = \frac{1}{2} \text{tr} (P_1 P_2)$$

orthonormierte Basis ist

$$\sigma_0 \equiv \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 p_i \sigma_i = \frac{1}{2} (p_0 \mathbf{1} + \vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \quad (7.78)$$

mit

$$p_i = \text{tr} (\sigma_i P). \quad (7.79)$$

**Satz.** Die Menge der gemischten Zustände  $P$  über  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$  entspricht der Vollkugel  $\{\vec{p} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{p}| \leq 1\}$  (**Bloch-Kugel**) mittels

$$P = \frac{1}{2} (\mathbf{1} + \vec{p} \cdot \vec{\sigma}). \quad (7.80)$$

Dabei gilt

- Der konvexen Kombination (7.77) entspricht

$$\vec{p} = w_1 \vec{p}_1 + w_2 \vec{p}_2. \quad (7.81)$$

- Die reinen Zustände  $P = |\varphi\rangle\langle\varphi|$  bilden die Kugelfläche  $\{\vec{p} \mid |\vec{p}| = 1\}$ .
- Zwei reine Zustände  $|\varphi_i\rangle$ , ( $i = 1, 2$ ), sind orthogonal genau dann, falls  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$  Diametralpunkte sind.

**Beweis.** Wegen  $(\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^2 = \vec{p}^2$ , s. (7.37), und  $\text{tr}(\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) = 0$  sind die beiden Eigenwerte von  $\vec{p} \cdot \vec{\sigma}$  gleich  $\pm|\vec{p}|$ , die von  $P$  also  $\frac{1}{2}(p_0 \pm |\vec{p}|)$ . Die Bedingungen (7.75, 7.76) bedeuten somit  $p_0 = 1$  und  $\frac{1}{2}(1 \pm |\vec{p}|) \geq 0$ , d.h. (7.80) mit  $|\vec{p}| \leq 1$ . Gleichung (7.81) ist klar. Rein ist der Zustand, falls  $\frac{1}{2}(1 \pm |\vec{p}|) = 0, 1$ , d.h. falls  $|\vec{p}| = 1$ . Falls zwei davon orthogonal sind, so bilden sie eine orthonormierte Basis:

$$\mathbf{1} = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| = P_1 + P_2 .$$

Mit  $\text{tr} \sigma_i = 0$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), und (7.79) folgt  $0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ . □

**Bemerkung.** Im Fall eines Spins  $\frac{1}{2}$  sind die Zustände  $|\pm \vec{e}\rangle$ , wo der Spin bzgl.  $\vec{e}$  nach oben bzw. unten zeigt, vgl. (7.73), identisch mit den reinen Zuständen (7.80) mit  $\vec{p} = \pm\vec{e}$ :

$$|\pm \vec{e}\rangle\langle\pm \vec{e}| = \frac{1}{2}(1 \pm \vec{e} \cdot \vec{\sigma}) . \quad (7.82)$$

Beide Seiten sind nämlich gleich den spektralen Projektoren  $P_{\pm}$ , s. (7.72), von  $\vec{\sigma} \cdot \vec{e}$ .

## 8 Zeitabhängige Störungsrechnung

---

### 8.1 Das Wechselwirkungs-Bild

Die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = (H_0 + H_1(t))|\psi\rangle$$

wird durch den Ansatz

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0t\right)|\tilde{\psi}(t)\rangle$$

transformiert auf

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d|\tilde{\psi}\rangle}{dt} &= \tilde{H}_1(t)|\tilde{\psi}(t)\rangle, \\ \tilde{H}_1(t) &= \exp\left(\frac{i}{\hbar}H_0t\right)H_1(t)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0t\right). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Man nennt dies das **Wechselwirkungs-Bild**, da sich  $|\tilde{\psi}\rangle$  nur dank der Störung  $H_1(t)$  zeitlich ändert. Zusammen mit einer Anfangsbedingung schreibt sich (8.1) als Integralgleichung

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = |\tilde{\psi}(t_0)\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \tilde{H}(t_1)|\tilde{\psi}(t_1)\rangle$$

mit der formalen Iterationslösung:

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = |\tilde{\psi}(t_0)\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_n \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \tilde{H}(t_n) \dots \tilde{H}(t_1)|\tilde{\psi}(t_0)\rangle. \quad (8.2)$$

Wir nehmen an, dass  $H_1(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \pm\infty$ , und wir wählen als Anfangszustand für  $t = -\infty$  einen stationären Zustand von  $H_0$ :

$$|\tilde{\psi}(-\infty)\rangle = |\psi_0\rangle, \quad H_0|\psi_0\rangle = E_0|\psi_0\rangle.$$

Es sei  $|\tilde{\psi}(t)\rangle$  die Lösung von (8.1) zu diesem Anfangszustand. Weiter sei

$$H_0|\psi_1\rangle = E_1|\psi_1\rangle, \quad E_1 \neq E_0,$$

mit einem einfachen Eigenwert  $E_1$ . Dann ist

$$W_{10} = |\langle\psi_1|\tilde{\psi}(+\infty)\rangle|^2$$

die Wahrscheinlichkeit, dass das System für  $t = +\infty$  die Energie  $E_1$  hat (Übergangswahrscheinlichkeit). Wegen  $\langle\psi_1|\psi_0\rangle = 0$  ergibt sich aus (8.2) in erster Ordnung Störungsrechnung ( $n = 1$ ):

$$\begin{aligned} W_{10} &= \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle\psi_1|\tilde{H}_1(t)|\psi_0\rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_1 - E_0)t\right) \langle\psi_1|H_1(t)|\psi_0\rangle \right|^2. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Massgebend für  $W_{10}$  ist die Fourier-Transformierte der Anregung  $\langle \psi_1 | H_1(t) | \psi_0 \rangle$  zur Frequenz

$$\omega_{10} = \frac{1}{\hbar}(E_1 - E_0) . \quad (8.4)$$

Nur wenn die Fourier-Transformierte bei dieser Frequenz wesentlich  $\neq 0$  ist, ergibt sich eine merkliche Übergangswahrscheinlichkeit, entsprechend der Bohrschen Frequenzbedingung.

## 8.2 Atomare Übergänge

Als Beispiel untersuchen wir Übergänge in einem Atom unter dem Einfluss einer (endlichen) Lichtwelle. In der Coulomb-Eichung ( $\text{div } \vec{A} = 0, \varphi = 0$ ) lautet das elektromagnetische Feld

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A},$$

und damit der Hamiltonoperator für ein System geladener Teilchen:

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2m_k} \left( \vec{p}_k - \frac{e_k}{c} \vec{A}(\vec{x}_k, t) \right)^2 + V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = H_0 + H_1(t), \\ H_0 &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2m_k} \vec{p}_k^2 + V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N), \\ H_1(t) &= - \sum_{k=1}^N \frac{e_k}{m_k c} \vec{A}(\vec{x}_k, t) \cdot \vec{p}_k + \sum_{k=1}^N \frac{e_k^2}{2m_k c^2} \vec{A}(\vec{x}_k, t)^2, \end{aligned} \quad (8.5)$$

(beachte  $\sum_{i=1}^3 [p_i, A_i] = -i\hbar \sum_{i=1}^3 \partial_i A_i = \text{div } \vec{A} = 0$ ).

**Dipolnäherung.** Atom bei  $\vec{x}_0 = 0$ . Die Wellenlänge des Lichts sei gross gegen den Atomdurchmesser:

$$\vec{A}(\vec{x}_k, t) \psi_0(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \approx \vec{A}(0, t) \psi_0(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N).$$

Dann ist der letzte Term in  $H_1(t)$  ein nur von  $t$  abhängiges Vielfaches der 1 und trägt zu  $|\tilde{\psi}(t)\rangle$  bloss einen Phasenfaktor bei, der in  $W_{10}$  herausfällt. Es bleibt

$$\begin{aligned} H_1(t) &= -\frac{1}{c} \vec{A}(0, t) \cdot \sum_k \frac{e_k \vec{p}_k}{m_k} = -\frac{1}{c} \vec{A}(0, t) \cdot \frac{i}{\hbar} [H_0, \vec{D}], \\ \vec{D} &= \sum_{k=1}^N e_k \vec{x}_k, \quad (\text{Elektrisches Dipolmoment}), \end{aligned}$$

unter Benutzung von

$$\frac{i}{\hbar} [H_0, \vec{x}_k] = \frac{\vec{p}_k}{m_k}.$$

Mit  $\langle \psi_1 | [H_0, \vec{D}] | \psi_0 \rangle = \hbar \omega_{10} \langle \psi_1 | \vec{D} | \psi_0 \rangle$  und partieller Integration wird

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega_{10}t} \langle \psi_1 | H_1(t) | \psi_0 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega_{10}t} \left( -\frac{1}{c} \vec{A}(0, t) \right) \cdot i\omega_{10} \langle \psi_1 | \vec{D} | \psi_0 \rangle \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega_{10}t} \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(0, t) \right) \cdot \langle \psi_1 | \vec{D} | \psi_0 \rangle \\ &= -\widehat{\vec{E}}(\omega_{10}) \cdot \langle \psi_1 | \vec{D} | \psi_0 \rangle, \end{aligned}$$

wobei

$$\widehat{\vec{E}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \vec{E}(t) e^{i\omega t}$$

die Fourier-Transformierte des elektrischen Feldes  $\vec{E}(t) = \vec{E}(0, t)$  an der Stelle  $\vec{x} = 0$  ist. So ergibt sich:

$$W_{10} = \frac{1}{\hbar^2} |\widehat{\vec{E}}(\omega_{10}) \cdot \langle \psi_1 | \vec{D} | \psi_0 \rangle|^2. \quad (8.6)$$

Da  $\vec{E}(t)$  reell ist, gilt

$$\overline{\widehat{\vec{E}}(\omega)} = \widehat{\vec{E}}(-\omega)$$

und somit durch Fourier-Umkehr:

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \left( \widehat{\vec{E}}(\omega) e^{-i\omega t} + \overline{\widehat{\vec{E}}(\omega)} e^{i\omega t} \right).$$

Das physikalische Feld ist im Wesentlichen der Realteil des komplexen Felds  $\widehat{\vec{E}}(\omega) e^{-i\omega t}$  mit  $\omega > 0$ . Auf solche Frequenzen beziehen wir nun die Übergangswahrscheinlichkeiten (8.6) aus. Wir erörtern den Fall einer festen Polarisation  $\vec{e} \in \mathbb{C}^3$ , ( $|\vec{e}| = 1$ ). Dann ist  $\widehat{\vec{E}}(\omega) = \widehat{E}(\omega) \vec{e}$  und  $\widehat{\vec{E}}(-\omega) = \overline{\widehat{E}(\omega)} \vec{e}$ . Bei **Absorption** ist  $E_1 > E_0$ , also  $\omega_{10} > 0$ , und

$$W_{10} = \frac{1}{\hbar^2} |\widehat{E}(\omega_{10})|^2 |\langle \psi_1 | \vec{D} \cdot \vec{e} | \psi_0 \rangle|^2; \quad (8.7)$$

bei **Emission** ist  $E_1 < E_0$ , also  $\omega_{01} = -\omega_{10} > 0$ , und

$$W_{10} = \frac{1}{\hbar^2} |\widehat{E}(\omega_{01})|^2 |\langle \psi_1 | \vec{D} \cdot \vec{e} | \psi_0 \rangle|^2. \quad (8.8)$$

Der erste Faktor in diesen Formeln hängt mit der Intensität der Strahlung zusammen, oder besser mit der Energie  $F$  pro Flächeneinheit (senkrecht zum Strahl), die ein Puls endlicher Dauer mitführt: Einerseits ist

$$F = \int dt |\vec{S}(t)| = \frac{c}{4\pi} \int dt |\vec{E}(t)|^2 = \frac{c}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\widehat{\vec{E}}(\omega)|^2 = \frac{c}{4\pi^2} \int_0^\infty d\omega |\widehat{\vec{E}}(\omega)|^2,$$

wobei  $\vec{S}$  der Poynting-Vektor ist. Betrachte andererseits Strahlung der spektralen Energiedichte  $u(\omega)$  (insbesondere nicht monochromatische Strahlung) der Dauer  $T$ . Dann ist

$$F = c \int_0^\infty d\omega u(\omega) T.$$

Der Vergleich liefert  $u(\omega)T = |\widehat{\vec{E}}(\omega)|^2/4\pi^2$  und zeigt, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten proportional zur Zeit  $T$  sind:  $W = \Gamma T$  mit **Raten**

$$\begin{aligned}\Gamma_{10} &= u(\omega_{10}) \cdot \frac{4\pi^2}{\hbar^2} |\langle \psi_1 | \vec{D} \cdot \vec{e} | \psi_0 \rangle|^2 =: u(\omega_{10}) B_{01}, & (\text{Absorption}), \\ \Gamma_{10} &= u(\omega_{01}) \cdot \frac{4\pi^2}{\hbar^2} |\langle \psi_1 | \vec{D} \cdot \vec{e} | \psi_0 \rangle|^2 =: u(\omega_{01}) B_{01}, & (\text{Emission}).\end{aligned}\tag{8.9}$$

Sie liefern Ausdrücke für die Einstein-Koeffizienten aus (1.35) (beachte die umgekehrte Reihenfolge der Indizes in  $B$  und  $\Gamma$ ) und bestätigen (1.37), d.h.  $B_{01} = B_{10}$ , da  $\overline{\langle \psi_1 | A | \psi_0 \rangle} = \langle \psi_0 | A^* | \psi_1 \rangle$ . Die Beschreibung der **spontanen Emission** (ohne Anregung durch ein äußeres Feld) erfordert die Quantisierung des elektromagnetischen Felds, s. Kap. 9.

Es sei  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_3$  eine positiv orientierte kartesische Basis im  $\mathbb{R}^3$ . Wir unterscheiden folgende Polarisierungen  $\vec{e}$  einer Welle der Fortpflanzungsrichtung  $\vec{e}_0$ :

- Rechts-/links-zirkulare Polarisation  $\vec{e} = (\vec{e}_1 \pm i\vec{e}_2)/\sqrt{2}$  für  $\vec{e}_0 = \vec{e}_3$ ;
- Lineare Polarisation  $\vec{e} = \vec{e}_3$  für  $\vec{e}_0 \perp \vec{e}_3$ .

Die für den Übergang  $|\psi_0\rangle \rightarrow |\psi_1\rangle$  massgebenden Matrixelemente  $\langle \psi_1 | A | \psi_0 \rangle$  sind somit:

	rechts zirkular	links zirkular	linear
Absorption: $E_0 < E_1$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(D_1 + iD_2)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(D_1 - iD_2)$	$D_3$
	$m_0 \rightarrow m_1 = m_0 + 1$	$m_0 \rightarrow m_1 = m_0 - 1$	$m_0 \rightarrow m_0$
Emission: $E_0 > E_1$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(D_1 - iD_2)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(D_1 + iD_2)$	$D_3$
	$m_0 \rightarrow m_1 = m_0 - 1$	$m_0 \rightarrow m_1 = m_0 + 1$	$m_0 \rightarrow m_0$

Ebenfalls angegeben sind die Auswahlregeln für einen Übergang  $|\psi_0\rangle = |j_0 m_0\rangle \rightarrow |\psi_1\rangle = |j_1 m_1\rangle$ : Notwendig dafür, dass das Matrixelement nicht verschwindet, ist

$$j_0 \rightarrow j_1 = |j_0 - 1|, j_0, j_0 + 1$$

und  $m_0 \rightarrow m_1$  wie in der Tabelle. Dies folgt aus (7.59, 7.62). Übergänge, die demnach verboten sind, können aber in höher Ordnung der Störungsrechnung auftreten.

**Bemerkung.** Zumindest in den mittleren Ausdrücken (8.9) bezieht sich die spektrale Energiedichte  $u(\omega)$  auf eine bestimmte Polarisation  $\vec{e}$ . Ist sie unabhängig davon und steht sie, wie oft, bereits für die Summe über  $\vec{e}$ , so ist das Matrixelement diesbezüglich zu mitteln. Das Resultat ist

$$\Gamma = u(|\omega_{10}|) \cdot \frac{4\pi^2}{3\hbar^2} |\langle \psi_1 | \vec{D} | \psi_0 \rangle|^2\tag{8.10}$$

in beiden Fällen. Denn: für jeden Vektor  $\vec{d} \in \mathbb{C}^3$  ist  $\sum_{i=1}^3 |\vec{d} \cdot \vec{e}_i|^2 = |\vec{d}|^2/3$ .

### 8.3 Die Goldene Regel

Als Vorbereitung berechnen wir die Übergangswahrscheinlichkeit (8.3) innerhalb einer Zeit  $0 \leq t \leq T$  bei

- (i) stationärer Störung  $H_1(t) = H_1 = H_1^*$ ;
- (ii) monochromatischer Störung  $H_1(t) = H_1 e^{-i\omega t} + H_1^* e^{i\omega t}$ , ( $\omega > 0$ ).

Wir führen die Rechnung zunächst für  $H_1(t) = H_1 e^{-i\omega t}$ . Dann ist die Zeitabhängigkeit in (8.3) proportional zu  $e^{i(\omega_{10} - \omega)t} \equiv e^{i\tilde{\omega}t}$ . Mit

$$\int_0^T e^{i\tilde{\omega}t} dt = \frac{e^{i\tilde{\omega}T} - 1}{i\tilde{\omega}} = e^{i\tilde{\omega}T/2} \frac{\sin(\tilde{\omega}T/2)}{\tilde{\omega}/2} \quad (8.11)$$

ist

$$W_{10} = |\langle \psi_1 | \tilde{\psi}(T) \rangle|^2 = \frac{1}{\hbar^2} |\langle \psi_1 | H_1 | \psi_0 \rangle|^2 \left( \frac{\sin(\omega_{10} - \omega)T/2}{(\omega_{10} - \omega)/2} \right)^2. \quad (8.12)$$

Für grosse  $T$  finden Übergänge  $|\psi_0\rangle \rightarrow |\psi_1\rangle$  im Wesentlichen nur für

$$\hbar|\omega_{10} - \omega| = |(E_1 - E_0) - \hbar\omega| < \frac{2\pi\hbar}{T} \quad (8.13)$$

statt. Im Fall (i) genügt es  $\omega = 0$  zu setzen. Im Fall (ii) kommt ein weiterer Beitrag mit  $H_1 \rightsquigarrow H_1^*$ ,  $\omega \rightsquigarrow -\omega$  hinzu, sowie vernachlässigbare Interferenzterme, falls die beiden Intervalle (8.13) disjunkt sind.

Nun zum eigentlichen Thema, und zwar zu den Übergängen nach Kontinuumszuständen: Sei  $\Delta \subset \mathbb{R}$  ein Intervall im kontinuierlichen Spektrum von  $H_0$  mit spektralem Projektor, s. S. 25,

$$P_\Delta(H_0) = \int_\Delta dE |\psi(E)\rangle \langle \psi(E)|$$

und Kontinuumseigenzuständen  $|\psi(E)\rangle$ :  $\langle \psi(E) | \psi(E') \rangle = \delta(E - E')$  (wir sehen vorderhand von entartetem Spektrum ab). Die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs von  $|\psi_0\rangle$  nach  $|\psi(E)\rangle$ , ( $E \in \Delta$ ) ist

$$W = \langle \tilde{\psi}(T) | P_\Delta(H_0) | \tilde{\psi}(T) \rangle = \int_\Delta dE |\langle \psi(E) | \tilde{\psi}(T) \rangle|^2.$$

Aus (8.12) erhält man

$$W = \frac{1}{\hbar^2} \int_\Delta dE |\langle \psi(E) | H_1 | \psi_0 \rangle|^2 \left( \frac{\sin(\omega_{10} - \omega)T/2}{(\omega_{10} - \omega)/2} \right)^2,$$

wobei  $E - E_0 = \hbar\omega_{10}$ , also weiter unten  $\delta(\omega_{10} - \omega) = \hbar\delta(E - E_0 - \hbar\omega)$ . Als Distribution ist

$$\left( \frac{\sin \tilde{\omega}T/2}{\tilde{\omega}/2} \right)^2 \approx 2\pi T \delta(\tilde{\omega}), \quad (T \rightarrow \infty),$$

Zum Beweis sei bemerkt, dass wegen (8.13) nur der Vorfaktor der  $\delta$ -Funktion zu bestätigen ist: Nach (8.11) und der Parseval-Identität ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin \tilde{\omega} T / 2}{\tilde{\omega} / 2} \right)^2 d\tilde{\omega} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} P_{[0, T]}^2(t) dt = 2\pi T ,$$

wobei  $P_{[0, T]}$  die charakteristische Funktion des Intervalls  $[0, T]$  ist. So ergibt sich, dass  $W$  proportional zu  $T$  ist mit Rate

$$\Gamma_{\Delta 0} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi(E_0 + \hbar\omega) | H_1 | \psi_0 \rangle|^2 \quad (8.14)$$

**(Goldene Regel).** Voraussetzung ist  $T \gtrsim 2\pi\hbar/|\Delta|$ ,  $\Gamma T \ll 1$ .

Im Fall (ii) ist dies die Übergangsrate  $\Gamma_{\text{abs}}$  für Absorption  $E_0 \rightarrow E \approx E_0 + \hbar\omega$ . Hinzu kommt jene für Emission  $E_0 \rightarrow E \approx E_0 - \hbar\omega$ .

$$\Gamma_{\text{em}} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi(E_0 - \hbar\omega) | H_1^* | \psi_0 \rangle|^2 \quad (8.15)$$

Alternative Schreibweisen: • Mit

$$P_{(-\infty, \lambda)}(H_0) = \int_{-\infty}^{\lambda} dE |\psi(E)\rangle \langle \psi(E)|$$

ist

$$\Gamma_{\text{abs}} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{d}{d\lambda} \langle \psi_0 | H_1 P_{(-\infty, \lambda)}(H_0) H_1 | \psi_0 \rangle \Big|_{\lambda=E_0+\hbar\omega} ,$$

ohne Bezug auf Kontinuumszustände.

•

$$\Gamma_{\text{abs}} = \frac{2\pi}{\hbar} \int dE |\langle \psi(E) | H_1 | \psi_0 \rangle|^2 \delta(E - (E_0 + \hbar\omega)) .$$

Oft werden Kontinuums-eigenzustände nicht durch  $E$  selbst, sondern durch eine andere Quantenzahl (z.B. Impuls  $\vec{k}$ ) gekennzeichnet, insbesondere bei Entartung. Zudem kann selektiv nach Übergängen mit  $\vec{k} \in M$  (z.B. der Kegel zu einem bestimmten Raumwinkel-element) gefragt werden. Es ist  $H_0 |\psi_0(\vec{k})\rangle = E(\vec{k}) |\psi_0(\vec{k})\rangle$  mit  $\langle \psi_0(\vec{k}) | \psi_0(\vec{k}') \rangle = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$ . Wegen

$$|\psi(E)\rangle \langle \psi(E)| dE = |\psi(\vec{k})\rangle \langle \psi(\vec{k})| d^3k$$

für  $E = E(\vec{k})$  ist

$$\Gamma_{\text{abs}} = \frac{2\pi}{\hbar} \int_M d^3k |\langle \psi(\vec{k}) | H_1 | \psi_0 \rangle|^2 \delta(E(\vec{k}) - (E_0 + \hbar\omega)) .$$

Zusammenfassend: Die Rate erhält man durch Integration von

$$\frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_1 | H_1 | \psi_0 \rangle|^2 \delta(E_1 - (E_0 + \hbar\omega)) \quad (8.16)$$

über alle gewählten Endzustände  $|\psi_1\rangle$  eines Kontinuums. Es sei hier noch ein (grundsätzlich vermeidbarer) Kunstgriff erwähnt, um die Tücken der Kontinuumszustände zu vermeiden: Man ersetzt zuerst die Distribution  $\delta$  durch eine approximierende Funktion  $\delta_\varepsilon$ , ( $\rightarrow \delta$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), was ohne Einfluss auf das Resultat bleibt. Dann sperrt man das physikalische System in ein grosses, aber endliches Quantisierungsvolumen  $V$ , womit das Spektrum von  $H_0$  diskret wird (**Quasi-Kontinuum**) und die Eigenvektoren  $|\psi_1\rangle$  entsprechend orthonormiert sind. Die diesbezügliche Summe der Ausdrücke (8.16) bleibt für  $\varepsilon \neq 0$  sinnvoll. Erst nach  $V \rightarrow \infty$  lässt man  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## 9 Quantentheorie der Hohlraumstrahlung

---

### 9.1 Das klassische Feld

Das elektromagnetische Feld in einem Hohlraum  $V \subset \mathbb{R}^3$  mit ideal leitender Wand  $\partial V$  wird in der Coulomb–Eichung beschrieben durch

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (9.1)$$

mit der Nebenbedingung

$$\text{div } \vec{A} = 0. \quad (9.2)$$

$\vec{A}$  ist bestimmt bis auf Eichtransformationen

$$\vec{A}(\vec{x}, t) \rightarrow \vec{A}(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} \chi(\vec{x}), \quad \Delta \chi(\vec{x}) = 0. \quad (9.3)$$

Die Randbedingungen  $\vec{E}_{\parallel} = 0$ ,  $\vec{B}_{\perp} = 0$  auf  $\partial V$  sind äquivalent zu

$$\vec{A}_{\parallel} = 0 \quad (9.4)$$

in passender Eichung. Zum Beweis wendet man den Satz von Stokes an auf beliebige Teilflächen  $F \subset \partial V$ :

$$\oint_{\partial F} \vec{A}_{\parallel} \cdot d\vec{s} = \int_F \vec{B}_{\perp} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Aus  $\vec{A}_{\parallel} = 0$  folgt damit  $\vec{B}_{\perp} = 0$ . Umgekehrt folgt aus  $\vec{B}_{\perp} = 0$  dass  $\vec{A}_{\parallel}$  ein Gradientenfeld ist auf  $\partial V$ :

$$\vec{A}_{\parallel} = -\vec{\nabla} \chi_0$$

für eine Funktion  $\chi_0(\vec{x})$  auf  $\partial V$ . Durch Lösung des Randwertproblems  $\Delta \chi = 0$  mit  $\chi = \chi_0$  auf  $\partial V$  und nachfolgende Eichtransformation (9.3) wird  $\vec{A}_{\parallel}$  auf Null transformiert.

Die Bewegungsgleichung des Feldes ist die Wellengleichung

$$\square \vec{A}(\vec{x}, t) \equiv \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{A}(\vec{x}, t) = 0. \quad (9.5)$$

Ihre Äquivalenz mit den Maxwell–Gleichungen ergibt sich aus

$$-\Delta \vec{A} = \text{rot rot } \vec{A} \quad (9.6)$$

für  $\text{div } \vec{A} = 0$ . Die Eigenschwingungen

$$\vec{A}_{\alpha}(\vec{x}) e^{\pm i \omega_{\alpha} t} \quad (9.7)$$

ergeben sich als Lösungen des Eigenwertproblems

$$-\Delta \vec{A}_{\alpha}(\vec{x}) = k_{\alpha}^2 \vec{A}_{\alpha}(\vec{x}), \quad \omega_{\alpha} = c k_{\alpha} \quad (9.8)$$

mit Nebenbedingung (9.2) und Randbedingung (9.4). Dies fassen wir auf als Eigenwertproblem im Hilbertraum der *transversalen* (divergenzfreien) Vektorfelder  $\vec{A}(\vec{x})$  auf  $V$  mit dem Skalarprodukt

$$(\vec{A}_1, \vec{A}_2) \equiv \int_V d^3x \overline{\vec{A}_1(\vec{x})} \cdot \vec{A}_2(\vec{x}). \quad (9.9)$$

Für zwei solche Felder mit Randwerten (9.4) ist nach (9.6)

$$(\vec{A}_1, -\Delta \vec{A}_2) = (\vec{A}_1, \text{rot } \vec{B}_2) = (\vec{B}_1, \vec{B}_2) . \quad (9.10)$$

Die zweite Gleichung ergibt sich dabei aus der Identität

$$\vec{A}_1 \cdot \text{rot } \vec{B}_2 - \vec{B}_2 \cdot \text{rot } \vec{A}_1 = \text{div} (\vec{B}_2 \wedge \vec{A}_1) , \quad (9.11)$$

denn wegen  $(\vec{B}_2 \wedge \vec{A}_1)_\perp = 0$  verschwindet das Volumenintegral über diese Divergenz. (9.10) zeigt dass  $-\Delta$  selbstadjungiert und  $\geq 0$  ist. Wie für den Laplace-Operator auf  $L^2(V)$  mit Dirichlet-Randbedingung lässt sich zeigen, dass  $\Delta$  ein rein diskretes Spektrum besitzt. Somit gibt es ein vollständiges Orthogonalsystem von Eigenschwingungen  $\vec{A}_\alpha(\vec{x})$  zu Eigenwerten  $k_\alpha^2 \geq 0$ , die wir normieren durch

$$(\vec{A}_\alpha, \vec{A}_\beta) = 4\pi c^2 \delta_{\alpha\beta} . \quad (9.12)$$

Die Eigenschwingungen können reell gewählt werden, da  $-\Delta$  mitsamt Randbedingungen reell ist. Ferner gilt sogar  $k_\alpha^2 > 0$ , falls  $\partial V \neq \emptyset$ . Aus  $(\vec{A}, -\Delta \vec{A}) = 0$  und (9.10) folgt nämlich  $\vec{B} = 0$ , also  $\vec{A} = \vec{\nabla} \chi$  mit  $\Delta \chi = 0$  und  $\chi = \chi_0 = \text{konstant}$  auf  $\partial V$ . Die einzige Lösung ist  $\chi \equiv \chi_0$ , also  $\vec{A} = 0$ .

**Beispiele. 1.** Eine Lösung von (9.8) für den Würfel  $0 \leq x_i \leq L$  ist, vgl.

$$A_i(\vec{x}) = e_i \cos(k_i x_i) \sin(k_{i+1} x_{i+1}) \sin(k_{i+2} x_{i+2}) , \quad (9.13)$$

falls

$$\begin{aligned} k_i &= \frac{\pi}{L} \nu_i , & \nu_i \text{ ganz} , & & (\vec{A}_\parallel = 0) , \\ \sum e_i k_i &= \vec{e} \cdot \vec{k} = 0 , & & & (\text{div } \vec{A} = 0) . \end{aligned}$$

Ein vollständiges Orthogonalsystem entsteht durch Wahl der Wellenvektoren

$$\vec{k} = \frac{\pi}{L} (\nu_1, \nu_2, \nu_3) , \quad \nu_i \text{ ganz } \geq 0$$

(höchstens ein  $\nu_i = 0$ ), und für jedes  $\vec{k}$  durch Wahl von zwei orthogonalen Polarisationsvektoren  $e_\lambda(\vec{k}) \perp \vec{k}$ ,  $\lambda = 1, 2$ . Diese Eigenschwingungen sind charakterisiert durch das Paar  $\alpha = (\vec{k}, \lambda)$  und haben die Eigenfrequenzen  $\omega_\alpha = c|\vec{k}|$ . Die Zahl  $N(\omega)$  der Eigenschwingungen mit Frequenzen  $\leq \omega$  ist asymptotisch für  $\omega \gg c/L$ :

$$N(\omega) = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \left( \frac{\omega L}{c\pi} \right)^3 = \frac{\omega^3 V}{3\pi^2 c^3} , \quad (9.14)$$

also die Dichte der Eigenfrequenzen auf der  $\omega$ -Skala:

$$\frac{dN}{d\omega} = \frac{\omega^2 V}{\pi^2 c^3} . \quad (9.15)$$

**2.** Versieht man den Würfel stattdessen mit periodischen Randbedingungen (also  $\partial V = \emptyset$ ), so sind die normierten Lösungen

$$\vec{A}(\vec{x}) = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \vec{e}_i \quad (9.16)$$

mit  $k_j = (2\pi/L)\nu_j$ , ( $\nu_j \in \mathbb{Z}$ ),  $\vec{e}_i \cdot \vec{k} = 0$ , ( $i = 1, 2$ ) und  $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$ . In (9.14) entfällt nun der Faktor  $1/8$ , aber  $\pi$  ist durch  $2\pi$  zu ersetzen, was das Resultat nicht verändert.

Die asymptotischen Formel (9.14) gilt auch bei allgemeiner Form des Hohlraums (Weyl 1911).

**Entwicklung nach Eigenschwingungen.** Wir gehen zunächst von reellen Eigenschwingungen  $\vec{A}_\alpha$  aus. In der Entwicklung

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha}(t) \vec{A}_{\alpha}(\vec{x}) \quad (9.17)$$

wird (9.5) äquivalent zu

$$\ddot{q}_{\alpha} + \omega_{\alpha}^2 q_{\alpha} = 0, \quad (9.18)$$

also das Strahlungsfeld abgebildet auf ein System von  $\infty$  vielen ungekoppelten harmonischen Oszillatoren. Dies ist ein Hamiltonsches System mit

$$H = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} (p_{\alpha}^2 + \omega_{\alpha}^2 q_{\alpha}^2) \quad (9.19)$$

und den Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}_{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} = p_{\alpha}, \quad \dot{p}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} = -\omega_{\alpha}^2 q_{\alpha}. \quad (9.20)$$

Die Bedeutung der  $p_{\alpha}$  erhellt aus

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \sum_{\alpha} p_{\alpha}(t) \vec{A}_{\alpha}(\vec{x}). \quad (9.21)$$

Die Erhaltungsgrösse  $H$  ist dank der (deshalb so gewählten) Normierung (9.12) gerade die **Feldenergie**:

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3x (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = \frac{1}{8\pi} \sum_{\alpha, \beta} \left( p_{\alpha} p_{\beta} \frac{1}{c^2} (\vec{A}_{\alpha}, \vec{A}_{\beta}) + q_{\alpha} q_{\beta} (\vec{B}_{\alpha}, \vec{B}_{\beta}) \right).$$

Nach (9.10) und (9.12) ist

$$\frac{1}{c^2} (\vec{A}_{\alpha}, \vec{A}_{\beta}) = 4\pi \delta_{\alpha\beta}, \quad (\vec{B}_{\alpha}, \vec{B}_{\beta}) = (\vec{A}_{\alpha}, -\Delta \vec{A}_{\beta}) = 4\pi c^2 k_{\alpha}^2 \delta_{\alpha\beta},$$

und somit

$$U = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} (p_{\alpha}^2 + \omega_{\alpha}^2 q_{\alpha}^2) = H. \quad (9.22)$$

## 9.2 Quantisierung des Strahlungsfeldes

(Dirac 1927) Ausgangspunkt sind die kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[p_{\alpha}, p_{\beta}] = [q_{\alpha}, q_{\beta}] = 0, \quad [p_{\alpha}, q_{\beta}] = \frac{\hbar}{i} \delta_{\alpha\beta}, \quad (9.23)$$

wobei  $p_\alpha$  und  $q_\alpha$  selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  sein sollen. Äquivalent dazu sind die Vertauschungsrelationen

$$[a_\alpha, a_\beta] = [a_\alpha^*, a_\beta^*] = 0, \quad [a_\alpha, a_\beta^*] = \delta_{\alpha\beta} \quad (9.24)$$

für

$$a_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_\alpha}}(\omega_\alpha q_\alpha + ip_\alpha), \quad a_\alpha^* = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_\alpha}}(\omega_\alpha q_\alpha - ip_\alpha). \quad (9.25)$$

Als Operatoren werden die  $a_\alpha$  nun definiert durch die **Fock–Darstellung**: Es gibt einen Vakuum Zustand  $|0\rangle$  mit

$$a_\alpha|0\rangle = 0,$$

und  $\mathcal{H}$  wird aufgespannt durch die orthonormierten Zustände

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!\dots}}(a_1^*)^{n_1}(a_2^*)^{n_2}\dots|0\rangle, \quad n_\alpha \text{ ganz } \geq 0, \quad \sum_\alpha n_\alpha < \infty, \quad (9.26)$$

wobei  $\alpha = 1, 2, \dots$  eine willkürliche Abzählung der Eigenschwingungen ist. Die Operatoren  $a_\alpha$  und  $a_\alpha^*$  wirken dann gemäss

$$a_k^* |n_1 \dots n_k \dots\rangle = \sqrt{n_k + 1} |n_1 \dots n_k + 1 \dots\rangle, \quad (9.27)$$

$$a_k |n_1 \dots n_k \dots\rangle = \sqrt{n_k} |n_1 \dots n_k - 1 \dots\rangle, \quad (9.28)$$

analog zu (3.43). Speziell ist

$$a_\alpha^* a_\alpha |n_1, n_2, \dots\rangle = n_\alpha |n_1, n_2, \dots\rangle,$$

d.h.  $a_\alpha^* a_\alpha$  misst die Zahl der Teilchen (**Photonen**) im 1–Teilchenzustand  $a_\alpha^*|0\rangle$ . Aus (9.25) folgt

$$a_\alpha^* a_\alpha = \frac{1}{2\hbar\omega_\alpha}(p_\alpha^2 + \omega_\alpha^2 q_\alpha^2) - \frac{1}{2},$$

also

$$H = \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha a_\alpha^* a_\alpha \quad (9.29)$$

unter Weglassung der **divergenten Nullpunktsenergie**

$$\sum_\alpha \frac{1}{2} = \infty.$$

Dies entspricht einer Renormierung der Vakuum–Energie auf Null. Damit ist

$$H|n_1, n_2, \dots\rangle = \left(\sum_\alpha \hbar\omega_\alpha n_\alpha\right)|n_1, n_2, \dots\rangle. \quad (9.30)$$

**Bemerkung.** Im allgemeineren Fall komplexer Eigenschwingungen  $\vec{A}_\alpha$  ist  $\overline{\vec{A}_\alpha}$  auch eine. Wir können deshalb von einer Zuordnung  $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$  ausgehen, derart dass  $\overline{\vec{A}_\alpha} = \vec{A}_{\bar{\alpha}}$ . (Im Bsp. 2, wo  $\alpha = (\vec{k}, \vec{e}_i)$ , ist  $\bar{\alpha} = (-\vec{k}, \vec{e}_i)$ ; bei reellen Eigenschwingungen ist  $\alpha = \bar{\alpha}$ .) Die Entwicklung (9.17) gilt nach wie vor, allerdings ist i.A.  $q_\alpha$  nicht reell. Da das Feld es ist, gilt stattdessen  $\overline{q_\alpha} = q_{\bar{\alpha}}$ ; ebenso  $\overline{p_\alpha} = p_{\bar{\alpha}}$  in (9.21). Gl. (9.22) gilt dann mit den Ersetzungen  $q_\alpha^2 \rightsquigarrow q_\alpha q_{\bar{\alpha}}$ ,  $p_\alpha^2 \rightsquigarrow p_\alpha p_{\bar{\alpha}}$ . Zur Quantisierung (9.23), die für selbstadjungierte Operatoren

gedacht ist, ist auf die reellen, orthonormierten Eigenschwingungen  $\sqrt{2}\text{Re } \vec{A}_\alpha$ ,  $\sqrt{2}\text{Im } \vec{A}_\alpha$  auszuweichen (mit Koeffizienten  $\sqrt{2}\text{Re } q_\alpha$ ,  $-\sqrt{2}\text{Im } q_\alpha$ ). Es folgt (9.23), wobei die letzte Gleichung durch

$$[p_\alpha, q_\beta] = \frac{\hbar}{i} \delta_{\alpha\beta}$$

ersetzt wird. Daraus folgt (9.24) für  $a_\alpha$  wie in (9.25) und

$$a_\alpha^* = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_\alpha}} (\omega_\alpha q_{\bar{\alpha}} - ip_{\bar{\alpha}}) .$$

Insbesondere gilt (9.29).

### 9.3 Der Feldoperator

Wir gehen von möglicherweise komplexen Eigenschwingungen aus. Durch Einsetzen von

$$q_\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\alpha}} (a_\alpha + a_\alpha^*)$$

in die klassische Entwicklung (9.17) zur Zeit  $t = 0$  erhält man den **Feldoperator in der Schrödinger-Darstellung**:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \sum_\alpha \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\alpha}} (a_\alpha \vec{A}_\alpha(\vec{x}) + a_\alpha^* \overline{\vec{A}_\alpha(\vec{x})}) , \quad (9.31)$$

formal eine operatorwertige Funktion von  $\vec{x} \in V$ . Tatsächlich ist dieses Objekt singular, denn damit z.B.

$$\vec{A}(\vec{x})|0\rangle = \sum_\alpha \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\alpha}} \vec{A}_\alpha(\vec{x}) a_\alpha^* |0\rangle$$

ein Fockraum-Vektor ist, müsste

$$\sum_\alpha \frac{\hbar}{2\omega_\alpha} |\vec{A}_\alpha(\vec{x})|^2 < \infty$$

sein, was aber in den Beispielen offensichtlich nicht der Fall ist. (Das Feld erweist sich als eine operatorwertige Distribution in  $\vec{x}$ .) In der folgenden Anwendung (1. Ordnung Störungstheorie) wird sich diese Problematik allerdings nicht bemerkbar machen. Für den **Feldoperator in der Heisenberg-Darstellung** ergibt sich:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) \equiv e^{iHt/\hbar} \vec{A}(\vec{x}) e^{-iHt/\hbar} = \sum_\alpha \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\alpha}} (a_\alpha e^{-i\omega_\alpha t} \vec{A}_\alpha(\vec{x}) + a_\alpha^* e^{i\omega_\alpha t} \overline{\vec{A}_\alpha(\vec{x})}) . \quad (9.32)$$

Diese Formel gilt auch für das klassische Feld  $\vec{A}(\vec{x}, t)$ , wenn  $a_\alpha$  und  $a_\alpha^*$  analog zu (9.25) als **klassische, konjugiert komplexe Amplituden** definiert werden. Aufgrund von (9.20) erfüllen sie dann die Differentialgleichungen *erster Ordnung*:

$$\dot{a}_\alpha = -i\omega_\alpha a_\alpha , \quad \dot{a}_\alpha^* = +i\omega_\alpha a_\alpha^* .$$

Formal dieselben Gleichungen ergeben sich für die Heisenberg-Operatoren  $a_\alpha(t)$  und  $a_\alpha^*(t)$ , so dass auch dann

$$a_\alpha(t) = e^{-i\omega_\alpha t} a_\alpha , \quad a_\alpha^*(t) = e^{+i\omega_\alpha t} a_\alpha^* . \quad (9.33)$$

## 9.4 Das Atom im Strahlungsfeld

Der Feldoperator (9.31) dient zur korrespondenzmässigen Einführung der Wechselwirkung geladener Teilchen mit dem quantisierten Strahlungsfeld nach dem Schema

$$\vec{p}_k \longrightarrow \vec{p}_k - \frac{e_k}{c} \vec{A}_k(\vec{x}) .$$

Ausgehend von einem Atommodell wie etwa (12.1) mit festem Kern an der Stelle  $\vec{x}_0 = 0 \in V$  erhalten wir in der Dipolnäherung analog zu Abschnitt 8.2:

$$\begin{aligned} H &= H_{\text{Atom}} + H_{\text{Strahlung}} + H_1 \equiv H_0 + H_1 , \\ H_1 &= -\frac{1}{c} \vec{A}(0) \cdot \sum_{k=1}^N \frac{e_k}{m_k} \vec{p}_k = -\frac{1}{c} \vec{A}(0) \cdot \frac{i}{\hbar} [H_{\text{Atom}}, \vec{D}] \end{aligned} \quad (9.34)$$

auf dem Hilbertraum

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{Atom}} \otimes \mathcal{H}_{\text{Strahlung}} .$$

Dabei ist  $H_{\text{Strahlung}}$  der Hamiltonoperator (9.29) des freien Strahlungsfeldes. Formal sind die Ausdrücke wie in (8.5); allerdings ist das klassische, äussere Feld  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  durch den quantenmechanischen, dynamischen Feldoperator  $\vec{A}(\vec{x})$  aus (9.31) ersetzt. Wir betrachten nun Übergänge zwischen zwei stationären Zuständen von  $H_0$ :

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= |\phi_0\rangle \otimes |n_1, n_2, \dots\rangle , & H_{\text{Atom}}|\phi_0\rangle &= \varepsilon_0|\phi_0\rangle , \\ |\psi_1\rangle &= |\phi_1\rangle \otimes |n'_1, n'_2, \dots\rangle , & H_{\text{Atom}}|\phi_1\rangle &= \varepsilon_1|\phi_1\rangle , \end{aligned}$$

mit  $\varepsilon_0 \neq \varepsilon_1$  und folglich  $\langle \phi_1 | \phi_0 \rangle = 0$ . Die zugehörigen Energien sind

$$E_0 = \varepsilon_0 + \sum_{\alpha} \hbar \omega_{\alpha} n_{\alpha} , \quad E_1 = \varepsilon_1 + \sum_{\alpha} \hbar \omega_{\alpha} n'_{\alpha} .$$

Zur Zeit  $t = 0$  sei das System im Zustand  $|\psi_0\rangle$ . Gesucht ist Übergangsrate in die Zustände  $|\psi_1\rangle$  mit festem  $|\phi_1\rangle$  aber beliebigem  $|n'_1, n'_2, \dots\rangle$ . Für grosse  $V$  ist  $E_1$  Teil eines Quasi-Kontinuums von Eigenwerten. Da  $\vec{A}(0)$  die Photonenzahl nur um  $\pm 1$  verändert, ist  $\langle \psi_1 | H_1 | \psi_0 \rangle \neq 0$  nur, falls

$$n'_{\beta} = \begin{cases} n_{\beta} - 1 , & \text{(Absorption)} \\ n_{\beta} + 1 , & \text{(Emission)} \end{cases}$$

für eine Mode  $\beta$  und  $n'_{\alpha} = n_{\alpha}$ , ( $\alpha \neq \beta$ ). Dabei ist

$$E_1 - E_0 = \varepsilon_1 - \varepsilon_0 \mp \hbar \omega_{\beta} \equiv \hbar(\omega_{10} \mp \omega_{\beta}) . \quad (9.35)$$

Das in beiden Fällen auftretende (vektorielle) atomare Matrixelement ist

$$\frac{i}{\hbar} \langle \phi_1 | [H_{\text{Atom}}, \vec{D}] | \phi_0 \rangle = i\omega_{10} \langle \phi_1 | \vec{D} | \phi_0 \rangle , \quad (9.36)$$

**Absorption.** Nach (9.31, 9.28) ist

$$\langle n_1, n_2, \dots, n_{\beta} - 1, \dots | \vec{A}(0) | n_1, n_2, \dots, n_{\beta}, \dots \rangle = \sqrt{\frac{\hbar n_{\beta}}{2\omega_{\beta}}} \vec{A}_{\beta}(0) , \quad (9.37)$$

Zusammen mit (9.16) ist

$$|\langle \psi_1 | H_1 | \psi_0 \rangle|^2 = \frac{\omega_{10}^2}{c^2} \cdot \frac{\hbar n_\beta}{2\omega_\beta} \cdot \frac{4\pi c^2}{V} |\langle \phi_1 | \vec{D} \cdot \vec{e}_i | \phi_0 \rangle|^2 = \frac{2\pi}{V} \left( \frac{\omega_{10}}{\omega_\beta} \right)^2 \hbar \omega_\beta n_\beta |\langle \phi_1 | \vec{D} \cdot \vec{e}_i | \phi_0 \rangle|^2.$$

Zur Berechnung der Summe über die Endzustände, wie nach (8.16) erklärt, treffen wir eine Annahme: Die Energieverteilung der Photonen sei durch eine **spektrale Energiedichte**  $u(\omega)$  (unabhängig von der Polarisation) beschreibbar:

$$\frac{1}{V} \sum_{\beta} \hbar \omega_\beta n_\beta f_\beta \delta_\varepsilon(\omega_\beta - \omega_0) \rightarrow u(\omega_0) f(\omega_0) \quad (V \rightarrow \infty, \text{ dann } \varepsilon \rightarrow 0), \quad (9.38)$$

wobei

$$\frac{\sum_{\beta} f_\beta \delta_\varepsilon(\omega_\beta - \omega_0)}{\sum_{\beta} \delta_\varepsilon(\omega_\beta - \omega_0)} \rightarrow f(\omega_0). \quad (9.39)$$

Für  $f_\beta = |\langle \phi_1 | \vec{D} \cdot \vec{e}_i | \phi_0 \rangle|^2$ , ( $\beta = (\vec{k}, \vec{e}_i)$  mit  $\vec{k} = k\vec{e}_0 \perp \vec{e}_i$ ) läuft die Mittelung (9.39) hinaus auf

$$\frac{1}{4\pi} \int d^2 e_0 \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 |\vec{d} \cdot \vec{e}_i|^2 = \frac{1}{3} |\vec{d}|^2.$$

So liefert (8.16) mit  $\omega = 0$  (stationäre Störung) und (9.35)

$$\Gamma_{\text{abs}} = \frac{4\pi^2}{3\hbar^2} u(\omega_{10}) |\langle \phi_1 | \vec{D} | \phi_0 \rangle|^2. \quad (9.40)$$

Das Ergebnis stimmt mit der klassischen Behandlung des elektromagnetischen Felds, Gl. (8.10), überein.

**Emission.** An die Stelle von (9.37) tritt nach (9.27)

$$\langle n_1, n_2, \dots, n_\beta + 1, \dots | \vec{A}(0) | n_1, n_2, \dots, n_\beta, \dots \rangle = \sqrt{\frac{\hbar(n_\beta + 1)}{2\omega_\beta}} \vec{A}_\beta(0).$$

Neben (9.38) braucht man deshalb auch die aus (9.15) folgende Beziehung

$$\frac{1}{V} \sum_{\beta} f_\beta \delta_\varepsilon(\omega_\beta - \omega_0) \rightarrow \frac{\omega_0^2}{\pi^2 c^3} f(\omega_0).$$

So ergibt sich statt (9.40):

$$\Gamma_{\text{em}} = \frac{4\pi^2}{3\hbar^2} \left( u(\omega_{01}) + \frac{\hbar \omega_{01}^3}{\pi^2 c^3} \right) |\langle \phi_1 | \vec{D} | \phi_0 \rangle|^2. \quad (9.41)$$

Das Ergebnis weicht diesmal von (8.10) ab. Neu sind angeregte Zustände  $|\phi_0\rangle$  des Atoms auch für  $u(\omega) \equiv 0$  (Vakuum) instabil: es gibt Übergänge in energetisch tiefere Zustände  $|\phi_1\rangle$  unter **spontaner Emission** eines Photons:

$$\Gamma_{\text{sp em}} = \frac{4\omega_{01}^3}{3\hbar c^3} |\langle \phi_1 | \vec{D} | \phi_0 \rangle|^2.$$

Gl. (9.41) beinhaltet die Einsteinsche Beziehung (1.38).

**Beispiel.** Übergang  $2p \rightarrow 1s$  beim H-Atom. Man findet  $|\langle 1s | \vec{D} | 2p \rangle|^2 \cong 0.55 a_0^2 e^2$ , ( $a_0$ : Bohr-Radius) und damit

$$\Gamma_{\text{sp em}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \left( \frac{\omega_{01} a_0}{c} \right)^2 \omega_{01} \cdot 0.55 = 6.3 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$$

Dies führt auf eine Zerfallszeit  $\Gamma_{\text{sp em}}^{-1} \approx 10^{-9} \text{ s}^{-1}$  und zu einer Verbreiterung der Absorptionslinie  $\omega_{01}$  durch spontane Zerfälle. Sie ist aber sehr klein:

$$\frac{\Gamma_{\text{sp em}}}{\omega_{01}} \approx 4 \cdot 10^{-8} \text{ :}$$

## 10 Identische Teilchen

### 10.1 Die Permutationsgruppe

**Permutationen**  $\sigma$  von  $N$  Elementen sind bijektive Abbildungen auf der Menge  $\{1, \dots, N\}$ ,

$$\sigma : i \mapsto \sigma(i), \quad (i = 1, \dots, N).$$

Sie bilden die Permutationsgruppe  $S_N$ , wobei das Produkt die Zusammensetzung ist. Das Neutralelement ist die identische Abbildung,  $\text{id}$ . Transpositionen, d.h. Vertauschungen zweier Elemente  $i \neq j$ , werden  $(ij)$  notiert. Die Gruppe wird erzeugt durch Transpositionen benachbarter Elemente,  $(ii+1)$ .

Für gegebenes  $\sigma$  bezeichnet man als Inversion ein Paar  $i < j$  mit  $\sigma(i) > \sigma(j)$ . Die **Parität** von  $\sigma$ , notiert  $\text{sgn } \sigma = \pm 1$ , ist die Parität der Anzahl Inversionen. Es gilt

$$\text{sgn } \tau\sigma = (\text{sgn } \tau)(\text{sgn } \sigma),$$

denn, verfolgt man ein Paar  $i < j$  unter  $\sigma$  und anschliessend unter  $\tau$ , so resultiert eine Inversion für  $\tau\sigma$ , genau dann falls das Paar ein, aber nicht zweimal invertiert wird. So ist die Anzahl Inversionen additiv modulo 2. Nebenbei ist  $\text{sgn } (ii+1) = -1$ .

Sei  $\chi$  eine Funktion  $S_N \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\chi(\tau\sigma) = \chi(\tau)\chi(\sigma)$  und  $\chi \not\equiv 0$ . Dann ist entweder

$$\chi(\sigma) \equiv 1 \quad \text{oder} \quad \chi(\sigma) = \text{sgn } \sigma. \quad (10.1)$$

Denn: Aus  $\sigma = \sigma \cdot \text{id}$  folgt  $\chi(\sigma) = \chi(\sigma)\chi(\text{id})$ , also  $\chi(\text{id}) = 1$ . Für eine Transposition  $(ij)$  ist  $(ij)^2 = \text{id}$ , also  $\chi((ij)) = \pm 1$ . Die Alternative (10.1) trifft so zumindest für jedes  $\sigma = (ii+1)$  einzeln zu; aber auch gemeinsam, da  $\tau \cdot (ij) = (\tau(i)\tau(j)) \cdot \tau$ . Sie vererbt sich dann auf alle  $\sigma$ .

Sei  $\mathcal{H}$  ein abstrakter Hilbertraum (physikalisch: 1-Teilchen Hilbertraum). Nach bisheriger Auffassung wäre das Tensorprodukt

$$\otimes^N \mathcal{H} = \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H} \quad (10.2)$$

der Hilbertraum der Zustände  $N$  identischer Teilchen. Auf  $\otimes^N \mathcal{H}$  operiert die Gruppe  $S_N \ni \sigma$  mittels

$$P_\sigma : \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n \mapsto \psi_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \psi_{\sigma^{-1}(n)} \quad (10.3)$$

und Linearität. Es handelt sich um eine unitäre Darstellung:

$$P_{\text{id}} = \mathbf{1}, \quad P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\tau}, \quad P_\sigma^* = P_{\sigma^{-1}}. \quad (10.4)$$

**Beispiel.** Teilchen mit Spin  $j$ , s. (7.56). Der 1-Teilchen Hilbertraum ist  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^{2j+1}$ . Wir benutzen die verkürzte Notation

$$\begin{aligned} \langle \xi | \psi \rangle &= \psi(\xi), \quad \xi \equiv (\vec{x}, s), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \quad s \in \{j, \dots, -j\}, \\ \langle \psi | \phi \rangle &= \int d\xi \bar{\psi}(\xi) \phi(\xi), \quad \int d\xi \dots = \sum_s \int d^3x \dots \end{aligned} \quad (10.5)$$

Entsprechend sind Zustände  $|\psi\rangle \in \otimes^N \mathcal{H}$  durch Wellenfunktionen  $\psi(\xi_1, \dots, \xi_N)$  gegeben. Dann ist

$$(P_\sigma \psi)(\xi_1, \dots, \xi_N) = \psi(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(N)}) . \quad (10.6)$$

Dies folgt aus (10.3), und zwar zunächst für reine Tensorprodukte  $\psi = \prod_i^N \psi_i(\xi_i)$  dank der Substitution  $i = \sigma(j)$ , bei der  $\psi_{\sigma^{-1}(i)}(\xi_i) = \psi_j(\xi_{\sigma(j)})$ . Der Vergleich zeigt: Teilchen permutieren nach  $\sigma$ , Zustände nach  $\sigma^{-1}$ .

## 10.2 Das Pauli-Prinzip

Der Ausdruck **identische Teilchen** bedeutet, dass die Teilchen der betrachteten Sorte *prinzipiell ununterscheidbar* sind: es gibt keine Observable, welche den Zustand  $P_\sigma|\psi\rangle$  vom Zustand  $|\psi\rangle$  zu unterscheiden vermag. Die zulässigen Observablen  $A$  auf dem Raum (10.2) sind demnach charakterisiert durch die Bedingung

$$\langle P_\sigma \psi | A | P_\sigma \psi \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$$

für alle  $\sigma, |\psi\rangle$ , also durch die Invarianz

$$P_\sigma^{-1} A P_\sigma = A \quad \text{d.h.} \quad [A, P_\sigma] = 0 , \quad (10.7)$$

für alle  $\sigma \in S_N$ . Abstrakte Beispiele sind Observablen der Form

$$A = \sum_{k=1}^N a_i , \quad \text{oder} \quad A = \sum_{1 \leq i < k \leq N} a_{ik} , \quad (10.8)$$

wobei alle  $a_i = \mathbf{1} \otimes \dots \otimes a \otimes \dots \otimes \mathbf{1}$  (mit dem Faktor  $a$  an  $i$ -ter Stelle) durch *einen* 1-Teilchen-Operator  $a$  bestimmt sind; ebenso ist  $a_{ik}$  ein selber 2-Teilchenoperator wirkend auf dem Tensorprodukt der Faktoren  $i$  und  $k$  in (10.2). Konkreter sind sie im Rahmen des obigen Beispiels:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{k=1}^N \vec{x}_k \wedge \vec{p}_k , & \vec{S} &= \sum_{k=1}^N \vec{S}_k , \\ H &= \sum_{k=1}^N \left( \frac{\vec{p}_k^2}{2m} - \frac{Ze^2}{|\vec{x}_k|} \right) + \sum_{1 \leq i < k \leq N} \frac{e^2}{|\vec{x}_i - \vec{x}_k|} . \end{aligned}$$

Die einzelnen Summanden sind hingegen nicht invariant, da  $P_\sigma^{-1} a_i P_\sigma = a_{\sigma^{-1}(i)}$ .

Ganz allgemein sind Vektoren  $|\psi\rangle$  und  $\chi|\psi\rangle$ , ( $|\chi| = 1$ ) ununterscheidbar und definieren deshalb nach (3.3) ja auch den selben Zustand. In Umkehrung davon sei postuliert: Zustände  $|\psi\rangle \in \otimes^N \mathcal{H}$  sind nur dann zulässig, falls

$$P_\sigma |\psi\rangle = \chi(\sigma) |\psi\rangle$$

für ein  $|\chi(\sigma)| = 1$ . Es folgt  $\chi(\tau\sigma) = \chi(\tau)\chi(\sigma)$  und somit (10.1). In  $\otimes^N \mathcal{H}$  betrachten wir folglich die Unterräume der total symmetrischen bzw. antisymmetrischen Zuständen:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s^{(N)} &= \{ |\psi\rangle \mid P_\sigma |\psi\rangle = |\psi\rangle, \forall \sigma \in S_N \} , \\ \mathcal{H}_a^{(N)} &= \{ |\psi\rangle \mid P_\sigma |\psi\rangle = \text{sgn } \sigma |\psi\rangle, \forall \sigma \in S_N \} . \end{aligned} \quad (10.9)$$

Nach (10.7) bildet jede Observable  $A$  diese Unterräume in sich ab. Dies gilt auch für die Bewegungsabbildung  $\psi_0 \mapsto \psi_t$ , da auch der Hamiltonoperator (10.7) erfüllen muss. Das **Pauli–Prinzip** – in der Form des sogenannten **Spin–Statistik Zusammenhangs** – lautet:

*Der Hilbertraum eines Systems von  $N$  identischen Teilchen vom Spin  $j$  ist nicht  $\otimes^N \mathcal{H}$ , sondern*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s^{(N)} & \text{ falls } j \in \{0, 1, 2, \dots\} & \text{ (**Bosonen**)}, \\ \mathcal{H}_a^{(N)} & \text{ falls } j \in \{\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \dots\} & \text{ (**Fermionen**)}. \end{aligned}$$

“Statistik” steht für die Unterscheidung Bosonen/Fermionen. (Der Grund der Wortwahl wird aus Kap. 15 erhellen.)

**Bemerkungen 1.** Das Pauli–Prinzip für Elektronen wurde von Pauli (1925) noch im Rahmen der Bohr–Sommerfeldschen Quantentheorie aufgestellt. Die wellenmechanische Fassung und die Verallgemeinerung auf Teilchen vom Spin  $j$  stammt von Dirac (1926) und Heisenberg (1926). Begründet werden kann der Zusammenhang erst im Rahmen der relativistischen Quantenfeldtheorie (Pauli 1940 für freie Felder, Jost 1957).

**2.** Für Systeme aus mehreren Teilchensorten gilt die entsprechende Symmetriebedingung bei Permutationen gleicher Teilchen.

**3.** Ein zusammengesetztes Teilchen ist, soweit seine Bestandteile nicht einzeln beobachtbar sind, ein Fermion, falls es eine ungerade Anzahl Fermionen enthält; und sonst ein Boson. Diese Regel ist konsistent mit dem Zusammenhang aufgrund der Clebsch–Gordan Reihe (7.31). Beispiel: Proton  $p$ , Neutron  $n$  und Elektron  $e$  sind Fermionen;  ${}^3\text{He}=2p+n+2e$  ist ein Fermion,  ${}^4\text{He}=2p+2n+2e$  ein Boson.

**4.** Für Wellenfunktionen ist

$$\begin{aligned} |\psi\rangle \in \mathcal{H}_s^{(N)} & \iff \psi(\xi_1, \dots, \xi_N) = \psi(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(N)}), \\ |\psi\rangle \in \mathcal{H}_a^{(N)} & \iff \psi(\xi_1, \dots, \xi_N) = (\text{sgn } \sigma)\psi(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(N)}). \end{aligned}$$

**5.** Die orthogonalen Projektoren auf  $\mathcal{H}_s^{(N)}$ , bzw.  $\mathcal{H}_a^{(N)}$  sind die Operatoren auf  $\otimes^N \mathcal{H}$

$$\mathcal{S} = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in S_N} P_\sigma, \quad \mathcal{A} = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in S_N} (\text{sgn } \sigma) P_\sigma. \quad (10.10)$$

Denn:  $\mathcal{S}$  lässt Vektoren aus  $\mathcal{H}_s^{(N)}$  fest. Ferner folgt aus (10.4)  $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}$ ,  $P_\sigma \mathcal{S} = \mathcal{S}$  und daraus  $\mathcal{S}^2 = \mathcal{S}$ .

### 10.3 Unabhängige Fermionen oder Bosonen

Als Beispiel betrachten wir Elektronen in einem Potential  $V(\vec{x})$ . Der 1–Teilchen Hamiltonoperator ist

$$h = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}) \quad \text{auf } \mathcal{H}.$$

$N$  voneinander **unabhängige Elektronen** sind beschrieben durch

$$H = \sum_{k=1}^N \left( \frac{\vec{p}_k^2}{2m} + V(x_k) \right) \equiv \sum_{k=1}^N h_k \quad \text{auf} \quad \mathcal{H}_a^{(N)} .$$

Hier wirkt  $h_k$  nur auf die Variablen des  $k$ -ten Teilchens, bzw. auf den  $k$ -ten Faktor im Tensorprodukt (10.2). Das Eigenwertproblem von  $h$  besitze in  $\mathcal{H}$  die Lösungen

$$h|\phi_\alpha\rangle = \varepsilon_\alpha|\phi_\alpha\rangle, \quad \langle\phi_\alpha|\phi_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} .$$

Dabei steht  $\alpha$  für irgendwelche Quantenzahlen der 1-Teilchenzustände. Für die folgende Betrachtung setzen wir  $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ , mit der Ordnung

$$\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \dots \quad .$$

Im Hilbertraum  $\otimes^N \mathcal{H}$  (d.h. ohne Pauli-Prinzip) hat das Eigenwertproblem von  $H$  die entsprechenden Lösungen:

$$\begin{aligned} H|\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_N}\rangle &= E|\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_N}\rangle, & E &= \varepsilon_{\alpha_1} + \dots + \varepsilon_{\alpha_N}, \\ \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_N}(\xi_1, \dots, \xi_N) &= \phi_{\alpha_1}(\xi_1) \cdots \phi_{\alpha_N}(\xi_N). \end{aligned} \quad (10.11)$$

Durch Antisymmetrisierung dieser Produktzustände erhalten wir die dem Pauli-Prinzip genügenden Lösungen in  $\mathcal{H}_a^{(N)}$ :

$$\psi_{\{\alpha_1 \dots \alpha_N\}} = (N!)^{-1/2} \sum_{\sigma \in S_N} (\text{sgn } \sigma) \phi_{\alpha_1}(\xi_{\sigma(1)}) \cdots \phi_{\alpha_N}(\xi_{\sigma(N)}) \quad (10.12)$$

$$= (N!)^{-1/2} \begin{vmatrix} \phi_{\alpha_1}(\xi_1) & \cdots & \phi_{\alpha_N}(\xi_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{\alpha_1}(\xi_N) & \cdots & \phi_{\alpha_N}(\xi_N) \end{vmatrix} \quad (10.13)$$

(**Slater-Determinante**). Offensichtlich hängt dieser Zustand nur von der Menge  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$  ab – denn eine Permutation der  $\alpha$ 's ändert höchstens das Vorzeichen. Ferner ist die Determinante nur dann  $\neq 0$  wenn die  $\alpha$ 's alle verschieden sind. Dann sind die Summanden in (10.12) paarweise orthogonale Einheitsvektoren, was den Normierungsfaktor  $(N!)^{-1/2}$  erklärt:

$$\langle \mathcal{A}(\phi_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{\alpha_N}) | \mathcal{A}(\phi_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{\alpha_N}) \rangle = \langle \phi_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{\alpha_N} | \mathcal{A} | \phi_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{\alpha_N} \rangle = \frac{1}{N!} .$$

Statt durch  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$  beschreiben wir nun diese Zustände durch eine Folge  $(n_0, n_1, \dots)$  von **Besetzungszahlen**:  $n_\alpha$  ist die Vielfachheit von  $\alpha$  in  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ , also

$$n_\alpha \in \{0, 1\} \quad \text{und} \quad \sum_{\alpha} n_\alpha = N . \quad (10.14)$$

Im Fall **unabhängiger Fermionen** (und nur dann) gilt also das Pauli-Prinzip in der ursprünglichen Fassung: *Jeder Einteilchenzustand kann höchstens einfach besetzt werden.* Mit der Bezeichnung  $|\psi_{\{\alpha_1 \dots \alpha_N\}}\rangle \equiv |n_0, n_1, \dots\rangle$  ist nun:

$$H|n_0, n_1, \dots\rangle = E|n_0, n_1, \dots\rangle, \quad E = \sum_{\alpha} n_\alpha \varepsilon_\alpha . \quad (10.15)$$

Im Grundzustand ist  $E$  minimal unter der Bedingung  $\sum n_\alpha = N$ , also für die Besetzung  $n_0 = n_1 = \dots = n_{N-1} = 1, n_\alpha = 0, (\alpha \geq N)$ . Die Grundzustandsenergie ist

$$E_0 = \sum_{\alpha=0}^{N-1} \varepsilon_\alpha . \quad (10.16)$$

Die grösste 1-Teilchenenergie eines besetzten Zustands,  $\varepsilon_{N-1}$ , heisst **Fermi-Energie**.

**Bosonen:** Durch Symmetrisierung erhält man aus (10.11) die Eigenvektoren von  $H$  in  $\otimes^N \mathcal{H}_s$ :

$$\psi_{\{\alpha_1 \dots \alpha_N\}} = (N! n_0! n_1! \dots)^{-1/2} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_N} \phi_{\alpha_1}(\xi_{\sigma(1)}) \dots \phi_{\alpha_N}(\xi_{\sigma(N)}) , \quad (10.17)$$

wobei jetzt in der Menge  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$  derselbe Index  $\alpha$  *mehrfach* auftreten kann: die Besetzungszahlen sind

$$n_\alpha \in \{0, 1, 2, \dots\} , \quad \sum_{\alpha} n_\alpha = N . \quad (10.18)$$

Der Normierungsfaktor in (10.17) ergibt sich, weil jeweils  $n_0! n_1! \dots$  der Summanden gleich sind:

$$\langle \mathcal{S}(\phi_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \phi_{\alpha_N}) | \mathcal{S}(\phi_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \phi_{\alpha_N}) \rangle = \frac{n_0! n_1! \dots}{N!} .$$

Der Grundzustand entspricht der Besetzung  $n_0 = N$  und  $n_\alpha = 0$  für  $\alpha > 0$ , entsprechend der symmetrischen Wellenfunktion  $\phi_0(\xi_1) \dots \phi_0(\xi_N)$ . Seine Energie ist

$$E_0 = N \varepsilon_0 . \quad (10.19)$$

Dies ist auch der tiefste Eigenwert von  $H$  in  $\otimes^N \mathcal{H}$ , d.h. ohne Berücksichtigung des Pauli-Prinzips.

**Beispiel.** Freie Teilchen in einem Gefäss vom Volumen  $V$ . Das Gefäss sei der Würfel  $0 \leq x_i \leq L$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Bei der Randbedingung  $\phi = 0$  sind die (nicht normierten) Eigenfunktionen eines freien Teilchens vom Spin  $j$ :

$$\phi_{\vec{k}, m}(\vec{x}, s) = \delta_{ms} \prod_{i=1}^3 \sin(k_i x_i) ,$$

$$\vec{k} \in \mathbb{R}^3 , \quad k_i = \frac{\pi}{L} \nu_i , \quad \nu_i \text{ ganz } > 0 , \quad m \in \{j, \dots, -j\} .$$

Die oben benützte Quantenzahl  $\alpha$  für die 1-Teilchenzustände ist hier das Paar  $(\vec{k}, m)$ . Die 1-Teilchen Energie ist

$$\varepsilon_{\vec{k}, m} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m L^2} \sum_{i=1}^3 \nu_i^2 ,$$

mit dem minimalen Wert für  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 1$ .

**Bosonen:** Daraus ergibt sich die Grundzustandsenergie von  $N$  Bosonen im Volumen  $V = L^3$ :

$$E_0 = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{2m} N V^{-2/3} . \quad (10.20)$$

**Fermionen:** Auf jeden Gitterpunkt  $(k_1, k_2, k_3)$  entfallen  $2j + 1$  Einteilchenzustände. Wegen  $\varepsilon \sim \sum k_i^2$  ergibt sich der Grundzustand durch Besetzung aller Gitterpunkte im Oktanten  $k_i > 0$  innerhalb einer Kugel (mit je  $2j + 1$  Teilchen). Für  $N \gg 1$  ist der Radius  $k_F$  dieser Kugel bestimmt durch

$$N = (2j + 1) \frac{1}{8} \left( \frac{L}{\pi} \right)^3 \cdot 4\pi \int_0^{k_F} dk k^2 = V \frac{2j + 1}{6\pi^2} k_F^3 .$$

Also ist  $k_F$  durch die Dichte  $n = N/V$  bestimmt,

$$k_F = \left( \frac{6\pi^2 n}{2j + 1} \right)^{1/3} , \quad (10.21)$$

und so ist die Fermi-Energie  $\varepsilon_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$ . Die Energie des Grundzustandes ist

$$E_0 = (2j + 1) \frac{1}{8} \left( \frac{L}{\pi} \right)^3 \cdot 4\pi \int_0^{k_F} dk k^2 \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = V \frac{\hbar^2}{2m} \frac{2j + 1}{6\pi^2} \frac{3}{5} k_F^5 .$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{V} &= \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{6\pi^2}{2j + 1} \right)^{2/3} \cdot \frac{3}{5} n^{5/3} , \\ \frac{E_0}{N} &= \frac{3}{5} \varepsilon_F . \end{aligned} \quad (10.22)$$

Die Wirkung des Pauli-Prinzips zeigt sich im Vergleich von (10.20) mit (10.22): Bei gleichem  $V$  und  $N \gg 1$  ist die fermionische Grundzustandsenergie um rund einen Faktor  $N^{2/3}$  grösser als die bosonische!

# 11 Das Thomas–Fermi Atom

---

## 11.1 Das Atommodell

Einheiten: für Elektronen setzen wir

$$\frac{\hbar^2}{2m} = |e| = 1. \quad (11.1)$$

Die Einheiten von Länge und Energie sind dann:

$$\frac{1}{2} \text{Bohr-Radius} = \frac{\hbar^2}{2me^2} = 1, \quad 4 \text{Rydberg} = \frac{2me^4}{\hbar^2} = 1.$$

Das Atom (oder Ion) besteht aus einem festen Kern der Ladung  $Z$  bei  $\vec{x} = 0$  und einer Hülle aus  $N$  Elektronen, die als geladenes Fermi–Gas der Teilchendichte  $n(\vec{x})$  aufgefasst wird. Die gesuchte Dichte  $n(\vec{x})$  soll die Energie

$$E[n] = \int d^3x \gamma \frac{3}{5} n(\vec{x})^{5/3} - \int d^3x n(\vec{x}) \frac{Z}{|\vec{x}|} + \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \frac{n(\vec{x})n(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}, \quad (\gamma = (3\pi^2)^{2/3}) \quad (11.2)$$

minimisieren unter den Nebenbedingungen

$$n(\vec{x}) \geq 0, \quad \int d^3x n(\vec{x}) = N. \quad (11.3)$$

Der letzte Term in (11.2) beschreibt die **elektrostatische Energie** der Wechselwirkung zwischen den Elektronen in der Näherung, dass die Dichten bei  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  unkorreliert sind. Der mittlere Term beschreibt die Anziehung zum Kern exakt. Der erste Term in (11.2) beschreibt die **kinetische Energie** der Elektronen und folgt aus (10.22) unter der Näherung, dass der dort gefundene Zusammenhang zwischen (kinetischer) Energiedichte und Teilchendichte auch *lokal* gilt. Das Thomas–Fermi Modell beschreibt also nur den Grundzustand, und dabei geht über (10.22) das Pauli–Prinzip wesentlich ein.

## 11.2 Die Thomas–Fermi Gleichung

Die Menge der Dichten (11.3) ist konvex, und auf dieser Menge ist das Thomas–Fermi Funktional  $E[n]$  strikt konvex:

$$E[\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2] < \alpha_1 E[n_1] + \alpha_2 E[n_2] \quad (11.4)$$

für  $n_1 \neq n_2$ ,  $\alpha_i > 0$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ .

**Beweis.** Der erste Term (11.2) ist strikt konvex, da  $n \mapsto n^{5/3}$  es ist für  $n \geq 0$ ; der letzte wegen

$$\sum_{i=1}^2 \alpha_i n_i(\vec{x}) n_i(\vec{y}) - \sum_{i=1}^2 \alpha_i n_i(\vec{x}) \sum_{i=1}^2 \alpha_i n_i(\vec{y}) = \alpha_1 \alpha_2 (n_1(\vec{x}) - n_2(\vec{x})) (n_1(\vec{y}) - n_2(\vec{y})),$$

zusammen mit (6.23)

Es gibt daher höchstens *eine* minimisierende Dichte  $n(\vec{x})$ , bestimmt durch

$$\begin{aligned}\delta E &\equiv \left. \frac{d}{dt} E[n + t\delta n] \right|_{t=0} \\ &= \int d^3x \delta n(\vec{x}) \left( \gamma n(\vec{x})^{2/3} - \frac{Z}{|x|} + \int d^3y \frac{n(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \geq 0\end{aligned}\quad (11.5)$$

für alle mit (11.3) verträglichen Variationen  $\delta n(\vec{x})$ :

$$\delta n(\vec{x}) \geq 0 \quad \text{falls } n(\vec{x}) = 0, \quad \int d^3x \delta n(\vec{x}) = 0. \quad (11.6)$$

Anschaulich: eine konvexe Funktion  $E(n)$  auf  $0 \leq n < \infty$  kann ein Minimum im Innern dieses Gebietes haben ( $E'(n) = 0$ ) oder auf dem Rand bei  $n = 0$  ( $E'(0) \geq 0$ ). Wählen wir zuerst  $\delta n(\vec{x})$  mit Träger im Gebiet  $n(\vec{x}) > 0$  so ist nur die zweite der Bedingungen (11.6) relevant. In diesem Gebiet ist also

$$\gamma n(\vec{x})^{2/3} + \Phi(\vec{x}) = \text{konst} \equiv \mu, \quad (11.7)$$

wobei

$$\Phi(\vec{x}) \equiv -\frac{Z}{|\vec{x}|} + \int d^3y \frac{n(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (11.8)$$

das potentielle Energie eines Elektrons im Feld des Atoms ist. Damit und unter Berücksichtigung von (11.6) schreibt sich (11.5) als

$$\begin{aligned}\delta E &= \int_{n(\vec{x})>0} d^3x \delta n(\vec{x}) \mu + \int_{n(\vec{x})=0} d^3x \delta n(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) \\ &= - \int_{n(\vec{x})=0} d^3x \delta n(\vec{x}) (\mu - \Phi(\vec{x})) \geq 0.\end{aligned}$$

Im Gebiet des letzten Integral ist die Variation nun beliebig bis auf  $\delta n(\vec{x}) \geq 0$ , also ist dort  $\mu - \Phi(\vec{x}) \leq 0$ . Insgesamt gilt also die **Thomas–Fermi Gleichung**

$$\gamma n(\vec{x})^{2/3} = (\mu - \Phi(\vec{x}))_+, \quad (11.9)$$

wobei  $t_+ = \max(t, 0)$  der positive Teil von  $t \in \mathbb{R}$  ist. Dies ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die minimisierende Dichte  $n(\vec{x})$ . Der vorerst unbekannte ‘‘Lagrange-Multiplikator’’  $\mu$  ergibt sich aus der Nebenbedingung  $\int d^3x n(\vec{x}) = N$ . Ohne Bezug auf das Funktional zu nehmen, können die Gleichungen (11.8, 11.9) wie folgt durch die Selbstkonsistenz der Dichte  $n(\vec{x})$  begründet werden: Bei Fermi-Energie  $\mu$  ist die maximale kinetische Energie eines Elektrons im Feld (11.8) durch  $(\mu - \Phi(\vec{x}))_+$  gegeben. Ihr entspricht nach (10.21) die Dichte (11.9).

Wir zeigen nun, dass (11.9) für  $N \leq Z$  eine sphärisch-symmetrische Lösung besitzt, was wegen der Eindeutigkeit genügt. Ansatz:

$$(\mu - \Phi(r))_+ = \frac{Z}{r} \chi(r) \quad (11.10)$$

mit  $\chi(r) \geq 0$  und  $\chi(0) = 1$ , weil  $\Phi(r)$  für  $r \rightarrow 0$  die Coulomb-Singularität  $-Z/r$  haben muss. (Für  $\mu=0$  kann  $\chi(r)$  als die Abschirmung des Coulomb-Potentials angesehen werden.) Aus der Poisson-Gleichung  $-\Delta\Phi(\vec{x}) = -4\pi Z\delta(\vec{x}) + 4\pi n(\vec{x})$  folgt für  $r > 0$

$$n(r) = -\frac{\Delta\Phi(r)}{4\pi} = \frac{Z}{4\pi r}\chi''(r) \quad (11.11)$$

solange  $\chi(r) > 0$ , und damit aus (11.9) die Thomas-Fermi Differentialgleichung

$$\chi''(r) = \frac{4}{3\pi}Z^{1/2}r^{-1/2}\chi(r)^{3/2}. \quad (11.12)$$

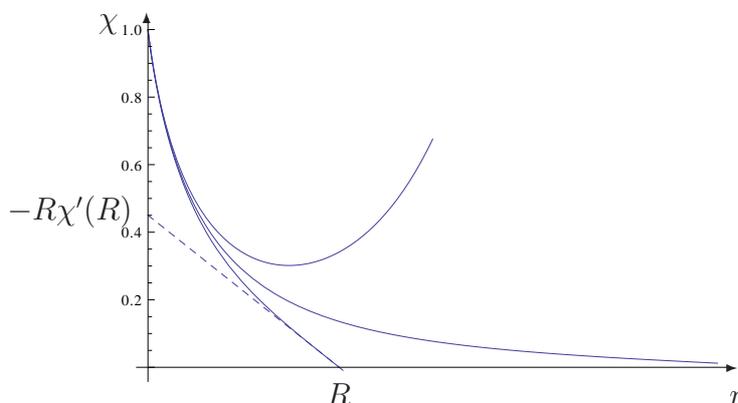
Fasst man  $\chi$  auf als Funktion der skalierten Variablen

$$\xi = \left(\frac{4}{3\pi}\right)^{2/3}Z^{1/3}r$$

so nimmt diese Gleichung eine von  $Z$  unabhängige Form an:

$$\chi''(\xi) = \xi^{-1/2}\chi(\xi)^{3/2}. \quad (11.13)$$

Der typische Radius von Atomen ist deshalb fest auf der  $\xi$ -Skala, d.h.  $\sim Z^{-1/3}$  auf der  $r$ -Skala. Die Lösungen der TF-Differentialgleichung mit  $\chi(0) = 1$  sind durch  $\chi'(0)$  parametrisiert. Sie sind konvex und definiert soweit  $\chi(r) > 0$ . In (11.10) sind sie dann gegebenenfalls durch  $\chi(r) = 0$  fortgesetzt.



Brauchbar sind nur Lösungen  $\chi(r)$  mit einer Nullstelle,  $\chi(R) = 0$ , oder mit  $\chi(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ . Alle andern divergieren für  $r \rightarrow \infty$  (folglich  $N = \infty$ ). Im ersten Fall ist  $\chi'(R) < 0$ , denn  $\chi'(R) = 0$  würde  $\chi \equiv 0$  implizieren.

### 11.3 Positive Ionen

Für hinreichend negatives  $\chi'(0)$  hat  $\chi(r)$  eine Nullstelle  $R$ , die als Funktion dieser Ableitung das Intervall  $R \in (0, \infty)$  durchläuft. Dann ist nach (11.11):

$$N = Z \int_0^R dr r \chi''(r) = Z(r\chi' - \chi)|_0^R = ZR\chi'(R) + Z,$$

also

$$\chi(R) = 0, \quad R\chi'(R) = \frac{N-Z}{Z} < 0 : \quad (11.14)$$

Die Lösung beschreibt ein positives Ion ( $0 < N < Z$ ). Umgekehrt gibt es für jedes solche Ion eine entsprechende Lösung  $\chi = \chi_R$ , denn es gilt  $R\chi'_R(R) \rightarrow 0$ , ( $R \rightarrow \infty$ ). Dies folgt über die Konvexität (s. Figur) aus

$$\chi_\infty(r) \geq \chi_R(r) \geq \chi_R(R) + \chi'_R(R)(r-R) = -R\chi'_R(R)\left(1 - \frac{r}{R}\right), \quad (r \leq R)$$

im Limes  $R \rightarrow \infty$  bei festem  $r/R < 1$ . Wegen  $n(r) = 0$ , ( $r \geq R$ ) ist nach (11.7)  $\mu = \Phi(R)$ , andererseits  $\Phi(r) = -(Z-N)/r$  für  $r \geq R$  nach (11.8). Insbesondere ist  $\mu < 0$ . Das elektrische Potential des Ions ist somit:

$$-\Phi(r) = \begin{cases} \frac{Z-N}{R} + \frac{Z}{r}\chi(r), & (r \leq R), \\ \frac{Z-N}{r}, & (r \geq R). \end{cases} \quad (11.15)$$

#### 11.4 Das neutrale Atom

Für  $N \rightarrow Z$  wandert  $R \rightarrow \infty$ : man erhält die "neutrale" Lösung  $\chi(r)$ , die überall  $> 0$  ist und im  $\infty$  verschwindet. Tatsächlich besitzt (11.13) eine explizite Lösung

$$f(\xi) = 144\xi^{-3}. \quad (11.16)$$

Diese erfüllt zwar nicht  $f(0) = 1$ , ist aber eine obere Schranke für jede beschränkte Lösung  $\chi(\xi)$  (ohne Beweis). Für die neutrale Lösung  $\chi(\xi)$  ist numerisch:

$$\frac{d\chi}{d\xi}(0) = -1.588\dots \quad (11.17)$$

Ferner ist  $\Phi(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ , also nach (11.7)  $\mu = 0$ . Aus (11.5) folgt damit

$$\delta E = \int d^3x \delta n(\vec{x}) (\gamma n(\vec{x})^{2/3} + \Phi(\vec{x})) = 0 \quad (11.18)$$

für beliebige Variationen der neutralen Dichte  $n(\vec{x})$ . Dies nützen wir aus zur Berechnung der Energie des neutralen Atoms. Wir schreiben

$$E[n] = T[n] - V[n] + D[n],$$

wobei  $T, V, D$  der Reihe nach die Integrale in (11.2) bezeichnen. Es sei nun  $n$  die neutrale Dichte und

$$\begin{aligned} n_t(r) &\equiv t n(r), \quad (t \geq 0), \\ E[n_t] &= t^{5/3} T[n] - t V[n] + t^2 D[n]. \end{aligned}$$

Nach (11.18) gilt

$$0 = \frac{d}{dt} E[n_t] \Big|_{t=1} = \frac{5}{3} T[n] - V[n] + 2D[n]. \quad (11.19)$$

Analog findet man für  $n_t \equiv t^3 n(tr)$ :

$$0 = \left. \frac{d}{dt} E[n_t] \right|_{t=1} = 2T[n] - V[n] + D[n], \quad (11.20)$$

und aus diesen beiden Gleichungen das Verhältnis

$$T : V : D = 3 : 7 : 1 \quad (11.21)$$

für das neutrale Atom. Am einfachsten berechnet sich

$$\begin{aligned} V &= Z 4\pi \int_0^\infty dr r n(r) = Z^2 \int_0^\infty dr \chi''(r) = -Z^2 \chi'(0) \\ &= -Z^{7/3} \left( \frac{4}{3\pi} \right)^{2/3} \frac{d\chi}{d\xi}(0). \end{aligned}$$

Aus (11.21) und mit dem Zahlenwert (11.17) ergibt sich so die Energie des neutralen Atoms der Kernladung  $Z$  (in Einheiten 4 Rydberg):

$$E_{\text{TF}}(Z) = -\frac{3}{7}V = Z^{7/3} \frac{3}{7} \left( \frac{4}{3\pi} \right)^{2/3} \frac{d\chi}{d\xi}(0) = -0.3844 Z^{7/3}. \quad (11.22)$$

**Bemerkungen. 1.** Keine Lösung von (11.12) mit  $N < \infty$  entspricht einem negativen Ion  $N > Z$ . Eine Ladung  $Ze$  schirmt den Kern gegen (weit) aussen elektrostatisch ab. Genauer: Das Funktional  $E[n]$  ist dann zwar immer noch nach unten beschränkt, hat aber keinen Minimierer  $n$  mehr. Bei einer minimisierenden Folge von Dichten  $n$  wandert die Überschussladung  $N - Z$  ins räumliche Unendliche ab.

**2.** Die Thomas–Fermi Theorie beschreibt die quantenmechanische Grundzustandsenergie  $E_0$  asymptotisch korrekt (Lieb, Simon 1977): Für neutrale Atome ( $N = Z$ ) gilt (vgl. (11.22))

$$E_0(Z) = E_{\text{TF}}(Z) + O(Z^2), \quad (Z \rightarrow \infty).$$

**3.** Es gibt viele Varianten der Thomas–Fermi Theorie, z.B. die von Dirac:

$$E_{\text{TFD}}[n] = E_{\text{TF}}[n] - \left( \frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \int d^3x \frac{3}{4} n(\vec{x})^{4/3}. \quad (11.23)$$

Der zusätzliche Austauschterm soll die in  $D[n]$  vernachlässigten Korrelationen teilweise berücksichtigen. Er wird in Abs. (??) begründet.

## 12 Die Hartree–Fock Näherung

---

Die  $HF$ -Approximation spielt eine wichtige Rolle in der Atom- und Molekülphysik. Wir behandeln die einfachste Version samt Anwendung auf Atome mit abgeschlossenen Konfigurationen.

### 12.1 Das Atommodell

In Einheiten  $\hbar = 2m = e = 1$  ist

$$H = \sum_{k=1}^N \left( \vec{p}_k^2 - \frac{Z}{|x_k|} \right) + \sum_{i < k}^{1 \dots N} \frac{1}{|x_i - x_k|} \quad \text{auf } \otimes^N \mathcal{H}_a . \quad (12.1)$$

Es lässt sich zeigen, dass  $H$  für  $N \leq Z$  ein Spektrum  $\sigma(H)$  folgender Art besitzt:

$\sigma(H)$  besteht aus einem Kontinuum  $[\Sigma, \infty)$  ( $\Sigma =$  Grundzustandsenergie des Ions mit  $N-1$  Elektronen), und unterhalb davon aus  $\infty$  vielen Eigenwerten endlicher Vielfachheit, die sich nur bei  $\Sigma$  häufen. Insbesondere besitzt  $H$  einen Grundzustand der Energie

$$E_0 = \min_{\psi} \langle \psi | H | \psi \rangle , \quad (12.2)$$

wobei das minimisierende  $\psi$  nicht eindeutig sein muss (Entartung).

### 12.2 Die Hartree–Fock Näherung

Das Ziel ist eine approximative Bestimmung von  $E_0$  und eines Grundzustandes  $\psi$ . Dazu wird (12.2) ersetzt durch

$$E_{HF} = \min_{\psi=SD} \langle \psi | H | \psi \rangle , \quad (12.3)$$

wobei das Minimum über alle Slater–Determinanten

$$\psi = SD(\phi_1, \dots, \phi_N)$$

von  $N$  orthonormierten 1–Teilchenzuständen  $\phi_\alpha \in \mathcal{H}$  (Orbitale) zu nehmen ist. Sicher ist also

$$E_0 \leq E_{HF} , \quad (12.4)$$

und hoffentlich  $E_{HF} \approx E_0$  in guter Näherung. Für  $N \leq Z$  ist wieder bekannt, dass das Minimum (12.3) tatsächlich existiert, wobei die minimisierende Slater–Determinante  $\psi$  nicht

eindeutig zu sein braucht. Nicht eindeutig sind auf jeden Fall die Orbitale  $(\phi_1, \dots, \phi_N)$ . Es sei nämlich

$$\phi'_\alpha = U_{\alpha\beta} \phi_\beta \quad (12.5)$$

eine unitäre Transformation auf neue Orbitale  $(\phi'_1, \dots, \phi'_N)$  und  $\psi' = SD(\phi'_1, \dots, \phi'_N)$ . Dann ist

$$\psi' = \det(U) \psi. \quad (12.6)$$

Wegen  $|\det(U)| = 1$  stellen  $\psi$  und  $\psi'$  denselben Zustand dar: insbesondere ist  $\langle \psi | H | \psi \rangle = \langle \psi' | H | \psi' \rangle$ . Als **Zustand** ist also eine Slater–Determinante gänzlich bestimmt durch den  $N$ –dimensionalen Unterraum

$$M = \mathcal{L}(\phi_1, \dots, \phi_N) \subset \mathcal{H}, \quad (12.7)$$

der durch  $(\phi_1, \dots, \phi_N)$  aufgespannt wird – die Wahl der Orbitale entspricht der Wahl einer beliebigen orthonormierten Basis in  $M$ . Aus (12.1) und aus der Definition (10.12) der Slater–Determinante ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle \psi | H | \psi \rangle &= \sum_\alpha \int d\xi_1 \bar{\phi}_\alpha(\xi_1) \left( \bar{p}_1^2 - \frac{Z}{|x_1|} \right) \phi_\alpha(\xi_1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \int d\xi_1 d\xi_2 \bar{\phi}_\alpha(\xi_1) \bar{\phi}_\beta(\xi_2) \frac{1}{|x_1 - x_2|} \phi_\alpha(\xi_1) \phi_\beta(\xi_2) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \int d\xi_1 d\xi_2 \bar{\phi}_\alpha(\xi_1) \bar{\phi}_\beta(\xi_2) \frac{1}{|x_1 - x_2|} \phi_\beta(\xi_1) \phi_\alpha(\xi_2). \end{aligned} \quad (12.8)$$

Der letzte Term heisst **Austauschenergie**, in ihr treten wie schon früher beim  $He$ –Atom die **Austauschintegrale** auf, die stets positiv sind. Auch aus (12.8) ist ersichtlich, dass  $\langle \psi | H | \psi \rangle$  nicht von der Wahl der Orbitale in  $M$  abhängt, denn

$$\sum_\alpha \bar{\phi}_\alpha(\xi) \phi_\alpha(\eta) \quad (12.9)$$

ist invariant unter den unitären Transformationen (12.5).

### 12.3 Die Hartree–Fock Gleichungen

Notwendig für ein Minimum  $\psi$  in (12.3) ist das Verschwinden der ersten Variation:

$$\delta \langle \psi | H | \psi \rangle = 0 \quad (12.10)$$

für beliebige Variationen der Slater–Determinante  $\psi$ . Diese ergeben sich durch Variationen  $\delta\phi_\alpha$  der Orbitale unter den Nebenbedingungen

$$0 = \delta \langle \phi_\alpha | \phi_\beta \rangle = \langle \delta\phi_\alpha | \phi_\beta \rangle + \langle \phi_\alpha | \delta\phi_\beta \rangle. \quad (12.11)$$

Da sich  $\langle \psi | H | \psi \rangle$  nicht ändert unter Variationen der  $\phi_\alpha$  *innerhalb*  $M$ , können wir sogar die stärkere Bedingung

$$\delta\phi_\alpha \perp M \quad \forall \alpha \quad (12.12)$$

stellen. Bei Variation eines einzigen Orbitals  $\phi_\alpha$  folgt aus (12.8):

$$\delta\langle\psi|H|\psi\rangle = \langle\delta\phi_\alpha|h|\phi_\alpha\rangle + \langle\phi_\alpha|h|\delta\phi_\alpha\rangle, \quad (12.13)$$

der allgemeine Fall ergibt sich durch Summation über  $\alpha$ . Dabei ist  $h = h(\phi_1 \dots \phi_N)$  ein Operator auf  $\mathcal{H}$ :

$$\begin{aligned} (h\phi)(\xi_1) &= \left( \bar{p}_1^2 - \frac{Z}{|x_1|} \right) \phi(\xi_1) \\ &+ \sum_\beta \int d\xi_2 \bar{\phi}_\beta(\xi_2) \frac{1}{|x_1 - x_2|} \phi(\xi_1) \phi_\beta(\xi_2) \\ &- \sum_\beta \int d\xi_2 \bar{\phi}_\beta(\xi_2) \frac{1}{|x_1 - x_2|} \phi_\beta(\xi_1) \phi(\xi_2), \end{aligned} \quad (12.14)$$

den wir den **Hartree–Fock Operator** nennen.  $h$  ist selbstadjungiert und hängt auch wieder nur vom Unterraum  $M$  ab, nicht von der Wahl der  $(\phi_1, \dots, \phi_N)$ . Da  $\delta\phi_\alpha$  in  $M^\perp$  beliebig ist, folgt aus (12.13)

$$\delta\langle\psi|H|\psi\rangle = 0 \iff h\phi_\alpha \in M \quad \forall \alpha. \quad (12.15)$$

Das heisst einfach: *der  $N$ -dimensionale Unterraum  $M \subset \mathcal{H}$  muss so bestimmt werden, dass er durch  $h = h(M)$  in sich abgebildet wird.* Dann kann man die Orbitale als Eigenvektoren von  $h$  wählen und erhält eine Lösung der **Hartree–Fock Gleichungen**:

$$h(\phi_1, \dots, \phi_N)\phi_\alpha = \varepsilon_\alpha \phi_\alpha \quad \forall \alpha. \quad (12.16)$$

Umgekehrt bestimmt jede orthonormierte Lösung  $(\phi_1, \dots, \phi_N)$  dieses nicht-linearen Eigenwertproblems eine Slater–Determinante  $\psi$ , für die  $\delta\langle\psi|H|\psi\rangle = 0$  ist. Für jede solche Lösung ist nach (12.14) und (12.8)

$$\sum_\alpha \varepsilon_\alpha = \sum_\alpha \langle\phi_\alpha|h|\phi_\alpha\rangle = 2\langle\psi|H|\psi\rangle - \sum_\alpha \langle\phi_\alpha| \left( p^2 - \frac{Z}{|x|} \right) |\phi_\alpha\rangle,$$

und damit die zur Lösung gehörende  $HF$ -Energie:

$$E_{HF} = \langle\psi|H|\psi\rangle = \frac{1}{2} \sum_\alpha \left[ \langle\phi_\alpha| \left( p^2 - \frac{Z}{r} \right) |\phi_\alpha\rangle + \varepsilon_\alpha \right]. \quad (12.17)$$

Auch in der  $HF$ -Näherung gilt der **Virialsatz**:

$$2T + V = 0 \iff E_{HF} = -T, \quad (12.18)$$

wobei  $T$  und  $V$  die Erwartungswerte der kinetischen und der potentiellen Energie im Zustand  $\psi$  sind. Zum Beweis skaliert man die Orbitale:  $\phi_\alpha(\vec{x}, s) \rightarrow t^{3/2}\phi_\alpha(t\vec{x}, s)$  und benützt  $\delta\langle\psi|H|\psi\rangle = 0$  für die entsprechende Variation von  $\psi$ .

Zum späteren Gebrauch schreiben wir den Hartree–Fock Operator (12.14) aus:

$$\begin{aligned} (h\phi)(\vec{x}, s) &= \left( -\Delta - \frac{Z}{|x|} + \Phi(\vec{x}) \right) \phi(\vec{x}, s) \\ &- \sum_\beta \phi_\beta(\vec{x}, s) \int d^3x' \frac{1}{|x - x'|} \sum_{s'} \bar{\phi}_\beta(x', s') \phi(x', s'), \end{aligned} \quad (12.19)$$

$$\Phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(x')}{|x - x'|}, \quad \rho(\vec{x}) = \sum_{\beta, s} |\phi_\beta(\vec{x}, s)|^2. \quad (12.20)$$

$\rho(\vec{x})$  ist die Teilchendichte der Elektronen (mittlere Teilchenzahl pro Volumeneinheit im Zustand  $\psi$ ):

$$\int d^3x \rho(\vec{x}) = N .$$

# 13 Schalenmodell und Periodensystem

## 13.1 Das Atommodell

Das Atommodell ist

$$H = \sum_{k=1}^N \left( \vec{p}_k^2 - \frac{Z}{|\vec{x}_k|} \right) + \sum_{i < k}^{1 \dots N} \frac{l}{|\vec{x}_i - \vec{x}_k|} \quad (13.1)$$

auf  $\mathcal{H}_a^{(N)}$ . Seine Symmetrien sind:

- (i) gemeinsame Drehungen aller Elektronen, jedoch *separat* für Ort und Spin. Die Symmetriegruppe  $SO(3) \times SU(2)$  besteht aus den Paaren  $(R, V)$ ,  $R \in SO(3)$ ,  $V \in SU(2)$ , und ist auf  $\mathcal{H}_a^{(N)}$  unitär dargestellt durch

$$(U(R, V)\psi)(\vec{x}_1, s_1, \dots, \vec{x}_N, s_N) = V_{s_1 s'_1} \dots V_{s_N s'_N} \psi(R^{-1}\vec{x}_1, s'_1, \dots, R^{-1}\vec{x}_N, s'_N). \quad (13.2)$$

Die entsprechenden Erhaltungsgrößen sind Bahndrehimpuls und Spin.

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^N \vec{x}_k \wedge p_k, \quad \vec{S} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \vec{\sigma}_k, \quad (13.3)$$

- (ii) Raumspiegelung und Zeitumkehr, s. S. 65;
- (iii) Permutation der Teilchen. Die Symmetriegruppe ist  $S_N$

Typischerweise sind Entartungen Konsequenz der Symmetrien. So trägt ein Eigenraum von  $H$  eine irreduzible Darstellung des Produkts der Gruppen (i-iii), d.h. ein Tensorprodukt von irreduziblen Darstellungen der einzelnen Gruppen. Jene von (i) sind von der Form  $\mathcal{D}_L \otimes \mathcal{D}_S$ . Was (ii) angeht, sind die der Raumspiegelung,  $p = \pm 1$ , und der Zeitumkehr,  $t^2 = \pm 1$ , durch jene von  $SO(3) \times SU(2)$  bestimmt, und zwar  $p = (-1)^L$ ,  $t = (-1)^{2S}$ . Das Pauli-Prinzip lässt nur die antisymmetrische Darstellung von (iii) zu. So liefern (ii, iii) nur 1-dimensionale irreduzible Darstellungen. Jeder Eigenraum trägt folglich bloss eine irreduzible Darstellung  $\mathcal{D}_L \otimes \mathcal{D}_S$  der  $SO(3) \times SU(2)$ . In diesem Kapitel soll diejenige des Grundzustands bestimmt werden.

Der Hamiltonoperator kann zunächst auch auf  $\otimes^N \mathcal{H}$  betrachtet werden. Dann tritt anstelle von (iii):

- (iii)' separate Permutationen der Bahn- bzw. Spinzustände der Elektronen. Die Symmetriegruppe ist  $S_N^{(B)} \times S_N^{(S)}$

Die irreduziblen Darstellungen dieser Gruppe sind i.A. mehrdimensional. Ohne Beweis (s. Übungen für Spezialfälle): Die irreduzible Darstellung von  $S_N^{(S)}$  ist durch den Spin  $S$  bestimmt. Ferner zerfallen die irreduziblen Darstellungen in solche der Untergruppe  $S_N \subset S_N^{(B)} \times S_N^{(S)}$  gemeinsamer Permutationen der Bahn- bzw. Spinzustände. Antisymmetrische Darstellungen der Untergruppe entstehen nur, und zwar einmal, falls die irreduziblen

Darstellungen von  $S_N^{(B)}$  und  $S_N^{(S)}$  bijektiv zueinander passen (wieder ohne Beweis). Die Entartung bei Berücksichtigung des Pauli-Prinzips ist somit wie bereits erwähnt.

In Abschnitt 13.4 wird eine Ergänzung des Hamiltonoperators (13.2) untersucht, die eine geringere Symmetrie aufweist.

### 13.2 Konfigurationen

Eine erste Näherung ist das **Schalenmodell**. Es entspricht dem Hamiltonoperator

$$H_{\text{SM}} = \sum_{k=1}^N (\vec{p}_k^2 + \Phi(r_k)) =: \sum_{k=1}^N h_k \quad (13.4)$$

mit  $r_k = |\vec{x}_k|$ . Elektronen sind hier unabhängige Teilchen im Zentralpotential  $\Phi(r)$ , welches eine summarische Beschreibung der Wechselwirkung eines Elektrons mit dem Kern und den anderen Elektronen darstellt. Konkret ist  $\Phi$  das Potential (11.8), worin  $n$  die minimisierende Dichte von  $N - 1$  Elektronen gemäss der Thomas-Fermi oder TF-Dirac-Theorie ist. Der Operator  $H_{\text{SM}}$  weist eine höhere Symmetrie auf als  $H$  und folglich seine Eigenwerte in der Regel eine grössere Entartung, da er invariant ist unter Drehungen einzelner Elektronen (auf  $\otimes^N \mathcal{H}$  betrachtet).

Der 1-Teilchenoperator  $h = \vec{p}^2 + \Phi(r)$  hat Eigenwerte  $\varepsilon_{nl}$ . Die entsprechenden Eigenvektoren  $|nlms\rangle$  bilden zusammen eine **Schale**. Die Quantenzahlen sind

$n = l + 1, l + 2, \dots$	radiale Quantenzahl
$l = 0, 1, \dots$	Drehimpulsquantenzahl
$m = -l, \dots$	magnetische Quantenzahl
$s = \pm 1/2$	Spinquantenzahl

und folglich die Entartung der Schale gleich  $2(2l + 1)$ . Die spektroskopische Bezeichnung der Schalen ist

Schale $nl$	Bezeichnung	Entartung
$l = 0$	$ns$ ( $n = 1, 2 \dots$ )	2
$l = 1$	$np$ ( $n = 2, 3 \dots$ )	6
$l = 2$	$nd$ ( $n = 3, 4 \dots$ )	10
$l = 3$	$nf$ ( $n = 4, 5 \dots$ )	14

Der Grundzustand von  $H_{\text{SM}}$  ergibt sich nach (10.16) durch Besetzung der  $N = Z$  kleinsten Eigenwerte  $\varepsilon_{nl}$  unter Einbezug ihrer Entartung. Die entsprechenden  $N$ -Teilchenzustände bilden eine **Konfiguration**.

Empirisch (Janet 1927, Madelung 1936) und numerisch (Latter 1955) ist die Reihenfolge der  $\varepsilon_{nl}$  (Ausnahmen vorbehalten) durch folgende Regeln gegeben:

- $\varepsilon_{nl}$  wächst mit  $n + l$ ;
- bei gleichem  $n + l$  wächst  $\varepsilon_{nl}$  mit  $n$ .

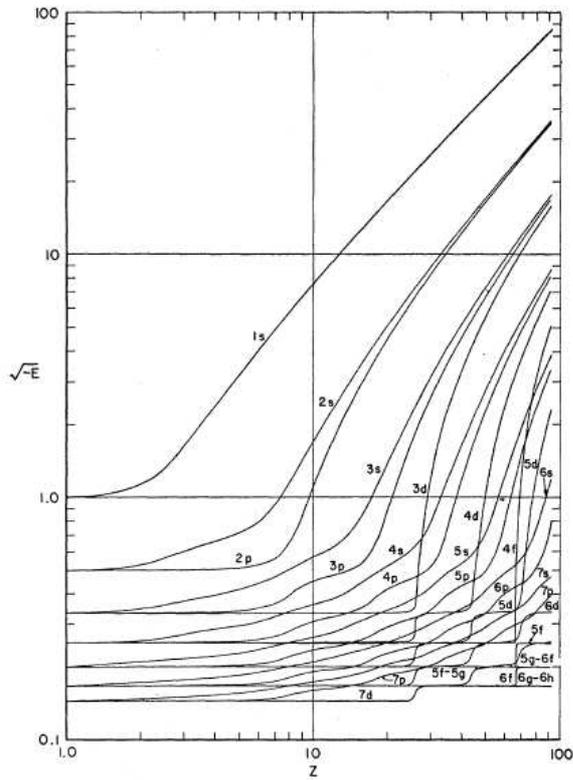


FIG. 7. The square root of the term values of Table I for the Thomas-Fermi atom is shown as a function of  $Z$ .

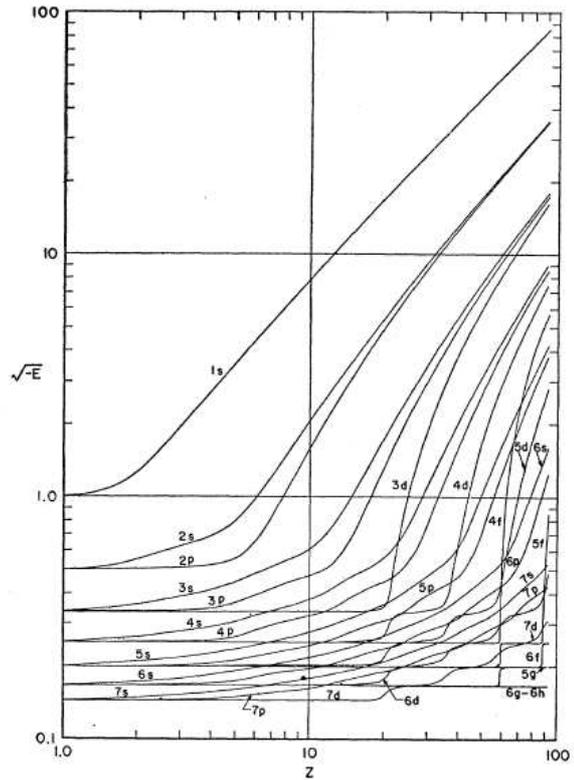


FIG. 8. The square root of the term values of Table II for the Thomas-Fermi-Dirac atom is shown as a function of  $Z$ .

$\sqrt{-\epsilon_{nl}}$  als Funktion von  $Z$  (links TF, rechts TFD).

Quelle: R. Latter, Phys. Rev. 99, 510-519 (1955).

Genau genommen trifft die Regel nur auf den jeweils zu besetzenden Zustand zu (offene Schalen), d.h. die Reihenfolge unter den bereits besetzten Zuständen (geschlossene Schalen) kann davon abweichen.

Die Reihenfolge ist graphisch wie folgt dargestellt:

$2(2l + 1) =$	2	6	10	14	18	22
$l =$	0	1	2	3	4	5
$n = 1$	•					
2	•	•				
3	•	•	•			
4	•	•	•	•		
5	•	•	•	•	•	
6	•	•	•	•	•	•

Die Schalen füllen sich dann gemäss der Tabelle:

Schale	# Zustände	# Zustände (kumulativ)	Schalenummer
1s	2	2	1
2s	2	4	2
2p	6	10	
3s	2	12	3
3p	6	18	
4s	2	20	4
3d	10	30	
4p	6	36	
5s	2	38	5
...			

Jede Schalenummer entspricht einer Zeile der **periodischen Tafel**: Sie beginnt damit, dass eine s-Schale neu besetzt wird (horizontale Unterteilung der Tabelle). Offensichtlich haben die Zeilen wachsende Längen und enthalten (ausser anfänglich) Schalen zu verschiedenen Quantenzahlen  $n$ . Atome in einer selben Spalte der Tafel entsprechen Konfigurationen, die in der offenen Schale gleich sind. Diese Anordnung ist durch die ähnlichen chemischen und physikalischen Eigenschaften motiviert.

**Beispiele. 1.**  $Z = 6$  (Kohlenstoff C). Die Konfiguration ist  $(1s)^2(2s)^2(2p)^2$ . Die Entartung ist

$$\binom{6}{2} = 15. \quad (13.5)$$

Letzteres gilt auch für  $Z = 14$  (Silizium Si), denn in  $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^2$  ist die offene Schale ebenfalls  $p^2$ .

**2.**  $Z = 7$  (Stickstoff N). Konfiguration  $(1s)^2(2s)^2(2p)^3$ . Entartung

$$\binom{6}{3} = 20. \quad (13.6)$$

### 13.3 Multipletts

Wir fassen  $H$  als Störung von  $H_{SM}$  auf:

$$H = H_{SM} + W$$

mit

$$\begin{aligned}
 W &= \sum_{i < j}^{1 \dots N} \frac{l}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} - \sum_{k=1}^N \int d^3y \frac{n(\vec{y})}{|\vec{x}_k - \vec{y}|} \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \frac{(\sum_i^* \delta(\vec{x}_i - \vec{x}) - n(\vec{x})) (\sum_j^* \delta(\vec{x}_j - \vec{y}) - n(\vec{y}))}{|\vec{x} - \vec{y}|} - \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \frac{n(\vec{x})n(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|},
 \end{aligned}$$

wobei \* bedeutet, dass bei Ausmultiplikation die Terme  $i = j$  (Selbstwechselwirkung) wegzulassen sind. Der letzte Term berichtigt die doppelte Zählung der Wechselwirkung zwischen den Elektronen in  $H_{SM}$ . Da er  $\propto 1$  ist, verschiebt er alle Eigenwerte gleichermaßen und kann im Folgenden ignoriert werden. Die Störung  $W$  ist als Operator nicht klein

gegenüber  $H_{\text{SM}}$ , kann aber einen kleinen Erwartungswert  $\langle \psi | W | \psi \rangle$  im Grundzustand  $|\psi\rangle$  haben, sofern grob gesagt

$$\langle \psi | \sum_i \delta(\vec{x}_i - \vec{x}) | \psi \rangle \approx n(\vec{x}) ,$$

$$\langle \psi | \sum_{i \neq j} \delta(\vec{x}_i - \vec{x}) \delta(\vec{x}_j - \vec{y}) | \psi \rangle \approx n(\vec{x}) n(\vec{y}) ,$$

d.h. falls die TF(D)-Dichte  $n(\vec{x})$  die des Grundzustands gut annähert und die Dichte der Paare annähernd unkorreliert ist.

Die Entartungen von  $H_{\text{SM}}$  werden durch die geringere Symmetrie von  $W$  teilweise aufgehoben. Die Eigenräume tragen von  $H$  irreduziblen Darstellungen der  $\text{SO}(3) \times \text{SU}(2)$ , genannt **Multipletts**. Notation:  $\mathcal{D}_L \otimes \mathcal{D}_S = {}^{2S+1}L$ , wobei S, P, D, ... statt  $L = 0, 1, 2, \dots$  geschrieben wird.

**Beispiel.** Zerlegung einer  $p^2$ -Konfiguration in Multipletts (C, Si). Der Bahndrehimpuls der beiden Elektronen ist

$$\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 \oplus \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_0 ,$$

wobei nach der Bemerkung auf S. 73  $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_0$  symmetrisch und  $\mathcal{D}_1$  antisymmetrisch unter Vertauschung ist. Der Spin ist

$$\mathcal{D}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{D}_{\frac{1}{2}} = \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_0$$

mit  $\mathcal{D}_1$  symmetrisch und  $\mathcal{D}_0$  antisymmetrisch. Die Anti-Symmetrie der Gesamtwellenfunktion (Pauli-Prinzip) lässt aus dem Produkt der Bahn- und Spinwellenfunktionen folgende übrig:

$$p^2 = (\mathcal{D}_2 \otimes \mathcal{D}_0) \oplus (\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_1) \oplus (\mathcal{D}_0 \otimes \mathcal{D}_0) = {}^1D \oplus {}^3P \oplus {}^1S .$$

Zur Kontrolle: Die Anzahl Zustände  $5 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 15$  stimmt mit (13.5) überein.

Es zeigt sich, dass das Multiplett  ${}^3P$  die niedrigste Energie hat.

Das Verfahren im Beispiel eignet sich bloss bei 2 Elektronen in der offenen Schale. Das folgende, alternative Verfahren ist allgemein, obschon ebenfalls an einem Beispiel illustriert.

**Beispiel.** Zerlegung einer  $p^3$ -Konfiguration in Multipletts (N). Die Konfiguration besteht aus einer Anzahl abgeschlossener Schalen und aus einer offenen p-Schale mit 3 Elektronen. Jede aus Orbitalen  $|LM_L \otimes SM_S\rangle$  gebildete Slater-Determinante ist Eigenvektor von  $L_3, S_3$  zu Eigenwerten

$$M_L = \sum_k m_k , \quad M_S = \sum_k \sigma_k , \quad (13.7)$$

wobei die Summen über die jeweils besetzten Orbitale laufen. Dabei tragen volle Schalen nichts bei. In der offenen p-Schale stehen 6 Orbitale mit  $m = 1, 0, -1$  und  $\sigma = \pm 1/2$  zur Besetzung frei, die wir mit Symbolen  $1^\pm, 0^\pm, -1^\pm$  bezeichnen. Die zulässigen Besetzungen (3-Teilchenzuständen) notieren wir mit daraus gebildeten Tripeln (Symbolreihen), wobei kein Symbol zweimal vorkommt und es auf die Ordnung nicht ankommt: Wir ordnen sie nach den Werten von  $(M_L, M_S)$ :

Symbolreihen	$M_L$	$M_S$	Anzahl
$1^+1^-0^+$	2	1/2	4
$1^+1^- - 1^+$	1	1/2	4
$1^+0^+0^-$	1	1/2	4
$1^+0^+ - 1^+$	0	3/2	2
$1^+0^+ - 1^-$	0	1/2	2
$1^+0^- - 1^+$	0	1/2	2
$1^-0^+ - 1^+$	0	1/2	2

Nicht aufgeführt sind Symbolreihen mit  $M_L < 0$  oder  $M_S < 0$ . Sie sind dennoch in der letzten Spalte berücksichtigt, welche die Zustände mit  $(\pm M_L, \pm M_S)$  zählt. Die Zählung dient der Kontrolle: Die Anzahl Zustände (20) stimmt mit (13.6) überein. Für die Vielfachheiten der  $(M_L M_S)$ -Paare ergibt sich daraus das Diagramm

$M_S$	$M_L$	2	1	0
3/2		0	0	1
1/2		1	2	3

Ausgehend vom grössten Wert von  $M_L$  (oder  $M_S$ ) wird eine Normalbasis einer Darstellung  $\mathcal{D}_L \otimes \mathcal{D}_S$  erzeugt durch Anwendung der kommutierenden Absteigeoperatoren  $L_-$  und  $M_-$ . Diese Vektoren bringt man im Diagramm in Abzug und fährt gleichermassen weiter. So erkennt man

$$p^3 = (\mathcal{D}_2 \otimes \mathcal{D}_{\frac{1}{2}}) \oplus (\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_{\frac{1}{2}}) \oplus (\mathcal{D}_0 \otimes \mathcal{D}_{\frac{3}{2}}) = {}^2D \oplus {}^2P \oplus {}^4S .$$

Hier hat das Multipllett  ${}^4S$  die niedrigste Energie hat.

Die beiden Beispiele illustrieren die allgemeinen, empirischen **Hundschen Regeln**:

1. Das  $LS$ -Multipllett mit dem grössten  $S$  hat die kleinste Energie.
2. Falls mehrere  $L$  mit dem selben  $S$  vorkommen, so hat das Multipllett mit dem grössten  $L$  die kleinste Energie.

**Bemerkungen.** 1. Volle Schalen können weggelassen werden.

2. Für höchstens halb gefüllte Schalen ( $N \leq 2l + 1$ ) ist

$$S = N/2 , \quad L = N(2l + 1 - N)/2 . \quad (13.8)$$

Die Symbolreihe

$$l^+(l-1)^+ \dots (l-N+1)^+ \quad (13.9)$$

ist wegen  $l - N + 1 \geq -l$  zulässig. Sie hat  $M_S = N/2$ . Da kein grösserer Wert möglich ist, folgt  $S = N/2$ . Unter solchen Multipletts liefert sie auch den grössten Wert von  $M_L$  und zwar  $M_L = \sum_{k=1}^N (l + 1 - k) = N(2l + 1 - N)/2$ .

3. Es gilt Äquivalenz von Elektronen und Löchern, bzw. einer Konfiguration und ihrer komplementärer: Jede Symbolreihe (besetzter Zustände) definiert eine unbesetzter Zustände. Dabei gilt  $M_L \rightsquigarrow -M_L$ ,  $M_S \rightsquigarrow -M_S$ ; an der Zerlegung der Konfiguration nach Multipletts ändert sich nichts. Beispiel:  $p^4 \cong p^2$ .

### 13.4 Terme

Ein besseres Atommodell als (13.1) berücksichtigt die Spin–Bahn–Kopplung (7.71)

$$\tilde{H} = H + H_{\text{SB}} ,$$

$$H_{\text{SB}} = \sum_{k=1}^N \frac{\hbar^2}{2m^2c^2} \frac{1}{r_k} \frac{d\Phi}{dr_k} \vec{L}_k \cdot \vec{S}_k .$$

Die Symmetrie (i) auf S. 115 verringert sich auf *gemeinsame* Drehungen von Ort und Spin. Die Eigenwerte von  $H$  spalten auf (**Feinstruktur**) und die Eigenräume von  $\tilde{H}$ , genannt **Terme**, tragen nur noch Darstellungen der Gruppe  $SU(2) \ni V$ , aufgefasst als die diagonale Untergruppe der Elemente  $(R(V), V) \in SO(3) \times SU(2)$ . Anstelle von (13.3) verbleibt als Erhaltungsgrösse  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ .

Die vorkommenden Terme sind durch das Multiplett  $LS$  anhand der Clebsch-Gordan Reihe (7.31) bestimmt:  $J = |L - S|, \dots, L + S$ . Notation:  $^{2S+1}L_J$ .

**Beispiel.** Die Zerlegung des Multiplett  $^3P$  aus  $p^2$  ist

$$^3P = ^3P_0 \oplus ^3P_1 \oplus ^3P_2 .$$

Die niedrigste Energie hat der Term  $^3P_0$ . Dieselbe Zerlegung hat  $^3P$  aus  $p^4$ ; allerdings hat hier  $^3P_2$  die niedrigste Energie. Keine Zerlegung hat  $^4S$  aus  $p^3$ :  $^4S = ^4S_{3/2}$ .

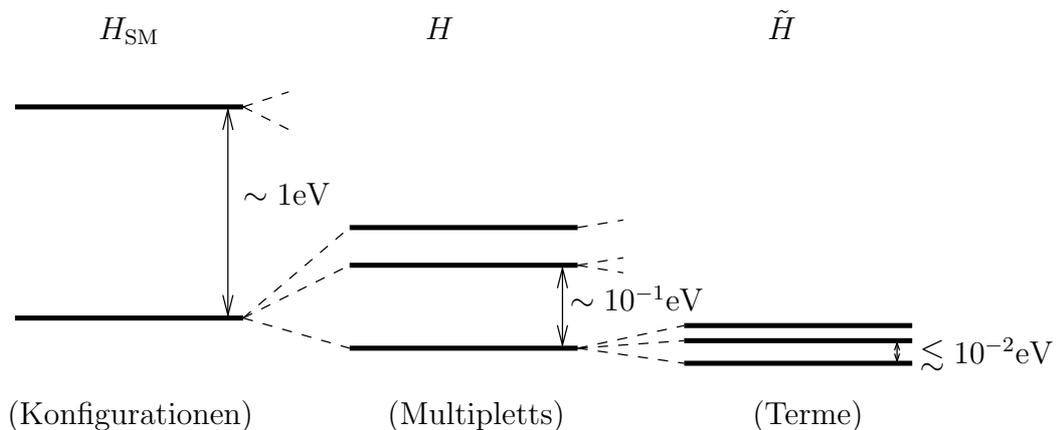
Das Beispiel illustriert eine weitere Hundsche Regel:

3. Die kleinste Energie hat der Term

$$J = \begin{cases} |L - S| & \text{bei höchstens halb gefüllten Schalen,} \\ L + S & \text{bei mindestens halb gefüllten Schalen.} \end{cases}$$

**Bemerkung.** Bei halbgefüllten Schalen greifen beide Varianten; sie stimmen aber überein, denn nach (13.8) ist  $L = 0$ , also  $J = S$ .

Zusammenfassung: Die Aufspaltung der Eigenwerte erfolgt nach dem Schema



Es ist aber nicht immer gerechtfertigt. Abgesehen von der beschränkten Gültigkeit der Störungsrechnung erster Ordnung gilt es zu berücksichtigen:

- (i) Bei nahezu entarteten Konfigurationen (Konkurrenz mehrerer Schalen) muss  $H$  im Unterraum diagonalisiert werden, der durch alle beteiligten Schalen aufgespannt wird.
- (ii) Schon im Raum *einer* Konfiguration können mehrere Multipletts mit gleichen  $(LS)$ -Werten auftreten, wenn auch nicht solche, die den Hundischen Regeln entsprechen. Dann führt die Diagonalisierung von  $H$  auf ein Eigenwertproblem entsprechender Dimension.
- (iii) Nur für leichte Atome ist die Spin–Bahn Kopplung klein gegen die Coulomb Wechselwirkung der Elektronen. Für schwere Atome müssen beide Störungen im Raum einer Konfiguration gleichzeitig behandelt werden.

### 13.5 Begründung der Hundischen Regeln

Wir behandeln nur die dritte Regel. Die Spin–Bahn Kopplung ist

$$H_{\text{SB}} = \sum_{k=1}^N \vec{B}_k \cdot \vec{S}_k$$

mit

$$\vec{B}_k = \xi(r_k) \vec{L}_k, \quad \xi(r) = \frac{\hbar^2}{2m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr}.$$

Dass  $\xi(r) \geq 0$ , wird von Bedeutung sein und folgt aus  $\chi' \leq 0$  in (11.10). Hier sind  $\vec{B}_k = (B_{k1}, B_{k2}, B_{k3})$  und  $\vec{S}_k = (S_{k1}, S_{k2}, S_{k3})$  Vektoroperatoren bezüglich  $\text{SO}(3)$ , bzw.  $\text{SU}(2)$ . Betrachte

$$T_{pq} = \sum_{k=1}^N B_{kp} S_{kq} :$$

Für  $q$  fest ist  $(T_{pq})_{p=1}^3$  ein Vektoroperator bezgl.  $\text{SO}(3)$ ; für  $p$  fest,  $(T_{pq})_{q=1}^3$  einer bezgl.  $\text{SU}(2)$ . Nach (6.8) gilt es,  $H_{\text{SB}} = \sum_{p=1}^3 T_{pp}$  im Raum des Multipletts  $LS$  zu diagonalisieren. Die Basisvektoren  $|M_L M_S\rangle \equiv |L M_L\rangle \otimes |S M_S\rangle$  bilden für  $M_L = -L, \dots, L$  und festes  $S$  eine Normalbasis bezgl.  $\text{SO}(3)$ ; für  $M_S = -S, \dots, S$  und festes  $L$  eine bezgl.  $\text{SU}(2)$ . Anwendung des Satzes von Wigner–Eckart auf S. 80 auf die beiden Gruppen liefert

$$\langle M'_L M'_S | T_{pq} | M_L M_S \rangle = \alpha(q, M'_S, M_S) \langle M'_L | L_p | M_L \rangle = \beta(p, M'_L, M_L) \langle M'_S | S_q | M_S \rangle,$$

also zusammen

$$\langle M'_L M'_S | T_{pq} | M_L M_S \rangle = \kappa \langle M'_L | L_p | M_L \rangle \langle M'_S | S_q | M_S \rangle = \kappa \langle M'_L M'_S | L_p S_q | M_L M_S \rangle.$$

Die Diagonalbasis für  $H_{\text{SB}}$  ist somit die für

$$\sum_{p=1}^3 L_p S_p = \vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2)$$

und die Eigenwerte der Terme relativ zum ungestörten Multiplett

$$E_J = \frac{\hbar}{2} (J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)). \quad (13.10)$$

Eine Folge davon ist die Intervallregel von Landé für die beobachtbaren Energiedifferenzen:

$$E_J - E_{J-1} = \kappa J .$$

Ferner ist  $E_J$  monoton in  $J$ , womit für den Grundzustand nur  $J = |L - S|$  oder  $J = L + S$  in Frage kommen. Es gilt also zu zeigen, dass die beiden Fälle der Regel  $\kappa > 0$ , bzw.  $\kappa < 0$  zur Folge haben. Betrachte vorderhand einen  $N$ -Teilchenzustand der Schale  $nl$  zu einer beliebigen Symbolreihe  $(m_k, \sigma_k)_{k=1}^N$ . Es ist

$$\langle \vec{B}_k \cdot \vec{S}_k \rangle = \langle \xi \rangle \langle \vec{L}_k \cdot \vec{S}_k \rangle , \quad \langle \xi \rangle = \int_0^\infty dr u_{nl}^2(r) \xi(r) > 0 ,$$

wobei  $u_{nl}$  die radiale Wellenfunktion der Schale ist; sowie  $\langle \vec{L}_k \cdot \vec{S}_k \rangle = m_k \sigma_k$ , denn in

$$\vec{L}_k \cdot \vec{S}_k = \frac{1}{2}(L_{k+} S_{k-} + L_{k-} S_{k+}) + L_{k3} S_{k3}$$

tragen wegen  $\langle \sigma_k | S_{k\pm} | \sigma_k \rangle = 0$  die ersten beiden Terme nicht zum Erwartungswert bei. Es folgt  $\langle H_{\text{SB}} \rangle = \langle \xi \rangle \sum_{k=1}^N m_k \sigma_k$ . Bei einer höchstens halb gefüllten Schale ist die Symbolreihe (13.9) für den Grundzustand relevant. Darin ist  $\sigma_k = +1/2$ , also

$$\langle H_{\text{SB}} \rangle = \frac{L}{2} \langle \xi \rangle .$$

Ebenso folgt aus

$$\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}(L_+ S_- + L_- S_+) + L_3 S_3 ,$$

dass im selben Zustand  $\langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle = \langle L_3 S_3 \rangle = LS$ . Die in (13.10) unbestimmte Konstante  $\kappa$  hat also den Wert  $\kappa = \langle \xi \rangle / 2S > 0$ . Bei einer mindestens halb gefüllten Schale bleibt der Zustand (13.9) relevant, falls er als Besetzung der Löcher im Grundzustand aufgefasst wird. Einerseits ist  $\sum_{k=1}^{2(2l+1)} m_k \sigma_k = 0$  (volle Schale), also  $\langle H_{\text{SB}} \rangle = -(L/2) \langle \xi \rangle$ ; andererseits ist mit  $\vec{L} \rightarrow -\vec{L}$ ,  $\vec{S} \rightarrow -\vec{S}$  weiterhin  $\langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle = LS$ . So folgt  $\kappa < 0$ .

## 14 Zweite Quantisierung

### 14.1 Der Fock-Raum

“Zweite Quantisierung” ist die geläufige aber unpräzise Bezeichnung eines Formalismus zur Beschreibung von Systemen mit beliebiger (endlicher) Teilchenzahl. Der Fockraum ist der Hilbertraum der entsprechenden Zustände. Der Formalismus ist nützlich selbst bei Systemen fester Teilchenzahl, z.B. einem Atom mit  $N$  Elektronen. Darüber hinaus dient er zur kanonischen Quantisierung von Systemen mit  $\infty$  vielen Freiheitsgraden und verallgemeinert die des elektromagnetischen Feldes, s. Kap. 9. Dort verändert sich die Teilchenzahl durch Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse, z.B. durch Emission und Absorption von Photonen.

Für eine bestimmte Teilchensorte (Bosonen oder Fermionen) sei  $\mathcal{H}$  der 1-Teilchen Hilbertraum,  $\mathcal{H}^{(n)}$  der  $n$ -Teilchen Hilbertraum (10.9), d.h.  $\mathcal{H}_s^{(n)}$  oder  $\mathcal{H}_a^{(n)}$ . Insbesondere ist  $\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}$ . Weiter sei  $\mathcal{H}^{(0)} = \mathbb{C}$  der Hilbertraum der komplexen Zahlen. Der Fockraum ist

$$\mathcal{F} \equiv \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{(n)}. \quad (14.1)$$

Das heisst: Die Vektoren  $\Psi \in \mathcal{F}$  sind die Folgen

$$\Psi = (\psi^0, \psi^1, \psi^2, \dots, \psi^n \dots) \quad (14.2)$$

mit  $\psi^n \in \mathcal{H}^{(n)}$  und mit endlicher Norm entsprechend dem Skalarprodukt

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \phi^n | \psi^n \rangle_{\mathcal{H}^{(n)}}. \quad (14.3)$$

Im Beispiel auf S. 100, das identische Spin- $\frac{1}{2}$  Teilchen behandelt, ist  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$ . Das Skalarprodukt lautet dann

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int d\xi_1 \dots d\xi_n \overline{\phi^n(\xi_1 \dots \xi_n)} \psi^n(\xi_1 \dots \xi_n). \quad (14.4)$$

Der **Teilchenzahloperator**  $N$  auf  $\mathcal{F}$  ist definiert durch

$$(N\Psi)^n = n\psi^n. \quad (14.5)$$

$N = N^*$  hat die Eigenräume  $\mathcal{H}^{(n)}$  zu den Eigenwerten  $n = 0, 1, \dots$ . Der Eigenvektor

$$(1, 0, 0, \dots) \equiv |0\rangle$$

zum Eigenwert 0 heisst **Vakuum**.

### 14.2 Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

Für jedes  $f \in \mathcal{H}$  ist der **Vernichtungsoperator**  $a(f) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ , und genauer  $\mathcal{H}^{(n)} \rightarrow \mathcal{H}^{(n-1)}$ , ( $n \geq 1$ ) und  $\equiv 0$  für  $n = 0$ , erklärt. Im Rahmen des Beispiels ist die Definition

$$(a(f)\Psi)^{n-1}(\xi_2 \dots \xi_n) = \sqrt{n} \int d\xi_1 \overline{f(\xi_1)} \psi^n(\xi_1 \dots \xi_n). \quad (14.6)$$

Insbesondere ist

$$a(f)|0\rangle = 0, \quad (f \in \mathcal{H}). \quad (14.7)$$

Diese Aussage charakterisiert das Vakuum als Einheitsvektor (bis auf die Phase). Der adjungierte Operator  $a^*(f) := a(f)^*$  ist der **Erzeugungsoperator**  $a^*(f) : \mathcal{H}^{(n-1)} \rightarrow \mathcal{H}^{(n)}$

$$\begin{aligned} (a^*(f)\Psi)^n(\xi_1 \dots \xi_n) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (\pm 1)^{k-1} f(\xi_k) \psi^{n-1}(\xi_1 \dots \widehat{\xi}_k \dots \xi_n), \\ (a^*(f)\Psi)^0 &= 0. \end{aligned} \quad (14.8)$$

Hier und im Folgenden gilt  $\pm$  für Bosonen / Fermionen, und  $\widehat{\xi}_k$  bedeutet, dass die Variable  $\xi_k$  fehlt. Speziell ist

$$a^*(f)|0\rangle = (0, f(\xi_1), 0, \dots),$$

und durch Induktion ergibt sich, dass

$$\Psi = a^*(f_1)a^*(f_2) \dots a^*(f_n)|0\rangle \quad (14.9)$$

der  $n$ -Teilchenzustand ist mit Wellenfunktion

$$\psi^n(\xi_1 \dots \xi_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\sigma \in S_n} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \text{sgn } \sigma \end{matrix} \right\} f_1(\xi_{\sigma(1)}) \dots f_n(\xi_{\sigma(n)}). \quad (14.10)$$

Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren lassen sich auch auf dem Fockraum über beliebigem  $\mathcal{H}$  definieren. Der Vernichtungsoperator kann zunächst ohne Berücksichtigung des Pauli-Prinzips definiert werden, d.h. als Operator  $\alpha(f) : \otimes^n \mathcal{H} \rightarrow \otimes^{n-1} \mathcal{H}$ , und zwar durch

$$\begin{aligned} \alpha(f)(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n) &= \sqrt{n} \langle f | \varphi_1 \rangle \varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_n, \\ \alpha(f)|0\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Er bewahrt die (Anti-)Symmetrie der Zustände und wir setzen  $a(f) := \alpha(f) \upharpoonright \mathcal{H}^{(n)}$ . Sein Adjungiertes ist

$$\alpha^*(f)\psi = \sqrt{n}(f \otimes \psi), \quad (\psi \in \mathcal{H}^{(n-1)}),$$

denn für  $|\phi\rangle = |\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n\rangle$  ist

$$\langle \phi | \alpha^*(f)\psi \rangle = \langle \alpha(f)\phi | \psi \rangle = \sqrt{n} \langle \varphi_1 | f \rangle \langle \varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_n | \psi \rangle = \sqrt{n} \langle \phi | f \otimes \psi \rangle.$$

Allerdings lässt  $\alpha^*(f)$  die (anti-)symmetrischen Unterräume nicht invariant. Damit gilt  $a^*(f) = \mathcal{P}_n \alpha^*(f) \upharpoonright \mathcal{H}^{(n-1)}$ , wobei  $\mathcal{P}_n = \mathcal{S}, \mathcal{A}$  die Projektoren (10.10) sind. Es gilt

$$\mathcal{P}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\pm 1)^{k-1} P_{\pi_k} \mathcal{P}_{n-1}, \quad (14.12)$$

wobei  $\pi_k^{-1} = (k, 1, 2, \dots, k-1)$  (mit  $\pi_1 = \text{id}$ ) eine zyklische Permutation ist und  $S_{n-1} \subset S_n$  aus den Permutationen  $\tau$  mit  $\tau(1) = 1$  besteht. In der Tat ist jede Permutation  $\sigma \in S_n$  von der Form  $\sigma = \pi_k \cdot \tau$  für ein eindeutiges  $k$ , wobei  $\text{sgn } \sigma = (-1)^{k-1} \text{sgn } \tau$  und  $P_\sigma(f \otimes \psi) = P_{\pi_k}(f \otimes P_\tau \psi)$ . Mit  $\mathcal{P}_{n-1} \alpha^*(f) = \alpha^*(f) \mathcal{P}_{n-1}$  folgt dann

$$a^*(f)\psi = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\pm 1)^{k-1} P_{\pi_k} \alpha^*(f)\psi = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (\pm 1)^{k-1} P_{\pi_k}(f \otimes \psi).$$

Im Fall  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$  stimmen diese Ausdrücke für  $a(f)$ ,  $a^*(f)$  mit (14.6, 14.8) überein. Allgemein verringert  $a(f)$  die Teilchenzahl um 1 und  $a^*(f)$  erhöht sie, was sich über  $Na(f) = a(f)(N - 1)$  auch durch

$$[N, a(f)] = -a(f) , \quad [N, a^*(f)] = a^*(f) .$$

ausdrückt. Man beachte, dass  $a^*(f)$  *linear* ist in  $f$ ,  $a(f)$  entsprechend *antilinear*.

Sei  $[A, B]_{\mp} := AB \mp BA$ , wobei die beiden Vorzeichen für Bosonen / Fermionen relevant sind. Es gelten die **kanonischen Vertauschungsrelationen**: für alle  $f, g \in \mathcal{H}$  ist

$$[a(f), a(g)]_{\mp} = 0 , \quad [a^*(f), a^*(g)]_{\mp} = 0 , \quad [a(f), a^*(g)]_{\mp} = \langle f|g \rangle . \quad (14.13)$$

**Beweis.** Die erste Gleichung folgt aus  $\alpha(f)\alpha(g) = \alpha(g)\alpha(f)P_{(12)}$  auf  $\otimes^n \mathcal{H}$  und aus  $P_{(12)} = \pm 1$  auf  $\mathcal{H}^{(n)}$ ; die mittlere durch Adjunktion. Was die letzte angeht, ist  $P_{\pi_k}(g \otimes \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_{n-1}) = \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_{k-1} \otimes g \otimes \varphi_k \dots \otimes \varphi_{n-1}$  und damit auf  $\mathcal{H}^{(n-1)}$

$$\frac{1}{n}\alpha(f)P_{\pi_k}\alpha^*(g) = \frac{1}{n-1}P_{\pi_{k-1}}\alpha^*(g)\alpha(f) , \quad (k \neq 1) ,$$

sowie  $\alpha(f)\alpha^*(g) = n\langle f|g \rangle$ . Mit (14.12) folgt so

$$\begin{aligned} a(f)a^*(g) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\pm 1)^{k-1} \alpha(f)P_{\pi_k}\alpha^*(g) = \langle f|g \rangle + \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n (\pm 1)^{k-1} P_{\pi_{k-1}}\alpha^*(g)\alpha(f) \\ &= \langle f|g \rangle \pm a^*(g)a(f) \end{aligned}$$

nach Substitution  $k = k' + 1$  in der letzten Summe. □

Die Eigenschaften (14.7) und (14.13) legen die Konstruktion des Fockraums und der Operatoren  $a(f)$  und  $a^*(f)$  im Wesentlichen eindeutig fest: Ihre Wirkung auf die Zustände (14.9) ist dadurch erklärt. Dies reicht, da sie den Fockraum aufspannen, bis auf Abschluss.

### 14.3 Besetzungszahl–Basis

Sei  $|f_i\rangle$ , ( $i = 1, 2, \dots$ ) eine orthonormierte Basis für  $\mathcal{H}$ :  $\langle f_i|f_j\rangle = \delta_{ij}$ ,  $\sum_j |f_j\rangle\langle f_j| = 1$ . Wir setzen  $a_k := a(f_k)$ . Äquivalent zu (14.13) sind dann die Vertauschungsrelationen

$$[a_i, a_k]_{\mp} = [a_i^*, a_k^*]_{\mp} = 0 , \quad [a_i, a_k^*]_{\mp} = \delta_{ik} , \quad (14.14)$$

und das Vakuum ist charakterisiert als Einheitsvektor  $|0\rangle$  mit

$$a_k|0\rangle = 0 , \quad (k = 1, 2, \dots) . \quad (14.15)$$

Beachte die Übereinstimmung zwischen (14.14) im bosonischen Fall und den Vertauschungsrelationen (9.25) harmonischer Oszillatoren: Die Photonen erweisen sich als Bosonen.

Sei  $|\tilde{f}_i\rangle$  eine weitere orthonormierte Basis mit Basiswechsel

$$|\tilde{f}_i\rangle = \sum_j |f_j\rangle\langle f_j|\tilde{f}_i\rangle .$$

Aus der Linearität von  $a^*(f)$  folgen

$$\tilde{a}_i^* = \sum_j a_j^* \langle f_j | \tilde{f}_i \rangle, \quad \tilde{a}_i = \sum_j a_j \langle \tilde{f}_i | f_j \rangle. \quad (14.16)$$

Wir betrachten die Folgen von **Besetzungszahlen**  $n_1, n_2, \dots$  mit

$$n_k = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots & \text{(Bosonen)} \\ 0, 1. & \text{(Fermionen)} \end{cases} \quad (n \equiv \sum_k n_k < \infty). \quad (14.17)$$

Die entsprechenden Vektoren

$$|n_1 n_2, \dots\rangle \equiv (n_1! n_2! \dots)^{-1/2} (a_1^*)^{n_1} (a_2^*)^{n_2} \dots |0\rangle \quad (14.18)$$

bilden eine orthonormierte Basis für  $\mathcal{F}$ ; solche mit festem  $n$  eine für den Unterraum  $\mathcal{H}^{(n)}$ . In dieser Basis ist die Darstellung der  $a_k, a_k^*$  im bosonischen Fall durch (9.27, 9.28) gegeben und im fermionischen gemäss

$$a_k^* |n_1 \dots n_k \dots\rangle = (-1)^{n_1 + \dots + n_{k-1}} (1 - n_k) |n_1 \dots n_k + 1 \dots\rangle, \quad (14.19)$$

$$a_k |n_1 \dots n_k \dots\rangle = (-1)^{n_1 + \dots + n_{k-1}} n_k |n_1 \dots n_k - 1 \dots\rangle. \quad (14.20)$$

#### 14.4 Observablen in der Fock-Darstellung

Beliebigen 1- und 2-Teilchenoperatoren entsprechen auf natürliche Weise Operatoren auf  $\mathcal{F}$ . Dies geschieht in Erweiterung von (10.8) und ist ebenfalls durch die dortigen Beispiele motiviert, wie im Folgenden dargelegt. Sei weiterhin  $|f_i\rangle$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) eine orthonormierte Basis für  $\mathcal{H}$ .

Gegeben ein **1-Teilchenoperator**  $b$  auf  $\mathcal{H}$  ist  $d\Gamma(b)$  auf  $\mathcal{F}$  definiert als

$$d\Gamma(b)\Psi = (0, b^{(1)}\psi^1, (b^{(1)} + b^{(2)})\psi^2, \dots),$$

mit  $\Psi$  wie in (14.2); d.h. auf  $n$ -Teilchenzuständen  $\psi^n$  durch

$$d\Gamma(b)\psi^n = \sum_{i=1}^n b^{(i)}\psi^n. \quad (14.21)$$

Die **Fock-Darstellung** von  $d\Gamma(b)$  lautet:

$$d\Gamma(b) = \sum_{kl} b_{kl} a_k^* a_l, \quad (14.22)$$

wobei  $b_{kl} = \langle f_k | b | f_l \rangle$  die Matrixelemente von  $b$  sind.

Beachte den Unterschied zwischen (14.21) und (14.22):  $d\Gamma(b)$  ergibt sich in der einen Schreibweise als Summe über Teilchen  $i$ , in der anderen über 1-Teilchenzustände  $k, l$ . Für das Beispiel  $b = 1$  auf  $\mathcal{H}$  ist  $b_{kl} = \delta_{kl}$  und somit

$$d\Gamma(1) = N = \sum_k a_k^* a_k. \quad (14.23)$$

**Beweis.** Der 1–Teilchenoperator  $b$  lässt sich schreiben als  $b = \sum_{kl} |f_k\rangle b_{kl} \langle f_l|$ . Da  $d\Gamma(b)$  mit  $N$  kommutiert, genügt es, Matrixelemente beider Seiten von (14.22) zwischen Zuständen fester Teilchenzahl  $n$  zu vergleichen:

$$\begin{aligned} \langle \phi^n | d\Gamma(b) | \psi^n \rangle &= \sum_{kl} b_{kl} \langle \phi^n | d\Gamma(|f_k\rangle \langle f_l|) | \psi^n \rangle = \sum_{kl} b_{kl} \sum_{i=1}^n \langle \phi^n | (|f_k\rangle \langle f_l|)^{(i)} | \psi^n \rangle \\ &= \sum_{kl} b_{kl} n \langle \phi^n | (|f_k\rangle \langle f_l|)^{(1)} | \psi^n \rangle = \sum_{kl} b_{kl} \langle a(f_k) \phi^n | a(f_l) \psi^n \rangle \\ &= \langle \phi^n | \sum_{kl} b_{kl} a_k^* a_l | \psi^n \rangle, \end{aligned}$$

wobei im dritten Schritt die Symmetrie von  $\phi^n$ ,  $\psi^n$  verwendet wurde; und (14.11) im vierten.  $\square$

Analog lässt sich einem **2–Teilchenoperator**  $b$  auf  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ , der mit der Permutation der Faktoren vertauscht ( $bP_{(12)} = P_{(12)}b$ ), ein Operator  $d\Gamma(b)$  auf  $\mathcal{F}$  zuordnen:

$$d\Gamma(b)\Psi = (0, 0, b^{(12)}\psi^2, (b^{(12)} + b^{(23)} + b^{(23)})\psi^3, \dots),$$

d.h.

$$d\Gamma(b) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} b^{(ij)} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} b^{(ij)}.$$

auf  $n$ –Teilchenzuständen. Seine Fock–Darstellung lautet:

$$d\Gamma(b) = \frac{1}{2} \sum_{k_1 k_2 l_1 l_2} b_{k_1 k_2 l_1 l_2} a_{k_2}^* a_{k_1}^* a_{l_1} a_{l_2} \quad (14.24)$$

mit den Matrixelementen  $b_{k_1 k_2 l_1 l_2} = \langle f_{k_1} \otimes f_{k_2} | b | f_{l_1} \otimes f_{l_2} \rangle$ .

**Beweis.** Analog wie oben oder alternativ wie folgt. Es genügt, den Fall  $b = d \otimes d$  für einen 1–Teilchenoperator  $d$  zu betrachten, da ein allgemeines  $b$  Linearkombination von solchen ist. Dann ist

$$d\Gamma(b) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} d^{(i)} d^{(j)} = \frac{1}{2} \left( \sum_{ij} d^{(i)} d^{(j)} - \sum_i (d^2)^{(i)} \right) = \frac{1}{2} (d\Gamma(d)^2 - d\Gamma(d^2))$$

und somit nach (14.22)

$$2d\Gamma(b) = \sum_{k_1 l_1} d_{k_1 l_1} a_{k_1}^* a_{l_1} \sum_{k_2 l_2} d_{k_2 l_2} a_{k_2}^* a_{l_2} - \sum_{k_1 l_2} (d^2)_{k_1 l_2} a_{k_1}^* a_{l_2} = \sum_{k_1 k_2 l_1 l_2} d_{k_1 l_1} d_{k_2 l_2} a_{k_2}^* a_{k_1}^* a_{l_1} a_{l_2},$$

wobei

$$a_{k_1}^* a_{l_1} a_{k_2}^* a_{l_2} = a_{k_1}^* (\pm a_{k_2}^* a_{l_1} + \delta_{k_2 l_1}) a_{l_2} = a_{k_2}^* a_{k_1}^* a_{l_1} a_{l_2} + \delta_{k_2 l_1} a_{k_1}^* a_{l_2}$$

verwendet wurde. Das Resultat folgt mit  $b_{k_1 k_2 l_1 l_2} = d_{k_1 l_1} d_{k_2 l_2}$ .  $\square$

## 14.5 Korrelationsfunktionen für Fermionen

## 14.6 Korrelationsfunktionen für Bosonen

# 15 Quantenstatistik

---

## 15.1 Zustände und Gesamtheiten

Reine Zustände eines quantenmechanischen Systems sind gegeben durch Vektoren

$$\psi \in \mathcal{H}, \quad \|\psi\| = 1$$

eines Hilbertraums  $\mathcal{H}$  (bis auf die Phase:  $\psi \rightarrow c\psi$ ,  $|c| = 1$ ). Gemischte Zustände sind Dichtematrizen über  $\mathcal{H}$

$$P = P^* \geq 0, \quad \text{tr } P = 1.$$

Die Spektraldarstellung davon ist

$$P = \sum_k w_k P_k, \quad (15.1)$$

wo

$$w_k = \bar{w}_k \geq 0, \quad \sum_k w_k = 1,$$

die Eigenwerte von  $P$  sind und

$$\varphi_k \in \mathcal{H}, \quad \|\varphi_k\| = 1; \quad P_k = |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$$

die Eigenvektoren und Eigenprojektoren. Insbesondere ist jeder gemischte Zustand eine konvexe Kombination von reinen Zuständen  $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ . Erwartungswerte einer beliebigen Observablen  $A = A^*$  in einem reinen oder gemischten Zustand sind durch  $(\psi, A\psi)$ , bzw.  $\text{tr}(PA)$  gegeben.

Wir betrachten ein System mit **rein diskrettem Energiespektrum** (typisch: Teilchen in einem Kasten). Dann gibt es eine orthonormierte Basis von Eigenvektoren des Hamiltonoperators  $H$ :

$$H\psi_n = E_n\psi_n, \quad (\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm}.$$

Jede Bewegung lässt sich darstellen durch

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \sum_n c_n e^{-i\omega_n t} \psi_n, \\ c_n &= (\psi_n, \psi(0)), \quad E_n = \hbar\omega_n. \end{aligned} \quad (15.2)$$

Die (zeitlich konstante) Energieverteilung ist gegeben durch

$$\rho_n = |c_n|^2 = \text{Wahrscheinlichkeit, dass } H \text{ den Wert } E_n \text{ annimmt.}$$

In Analogie zum klassischen Wiederkehratz von Poincaré gilt: Zu jedem  $\psi(0)$  und jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es beliebig grosse  $t$  so, dass

$$\|\psi(t) - \psi(0)\| < \varepsilon;$$

d.h. das System kehrt immer wieder beliebig genau in den Anfangszustand zurück.

**Beweis.** Approximiere in (8.2)  $\psi(0)$  durch eine endliche Summe (und damit auch  $\psi(t)$ , gleichmässig in  $t$ ) und benütze die Kompaktheit der Einheitskugel in diesem endlich-dimensionalen Hilbertraum:  $\psi(t)$  enthält eine konvergente Teilfolge  $\psi(t_n)$ ,  $t_n \rightarrow \infty$  und somit  $\|\psi(t_n) - \psi(t_m)\| \leq \varepsilon$  für  $n, m \rightarrow \infty$ . Da  $e^{-iHt/\hbar}$  unitär ist, gilt auch  $\|\psi(t_n - t_m) - \psi(0)\| \leq \varepsilon$ .

Auch der Erwartungswert

$$\langle A \rangle_t = (\psi(t), A\psi(t))$$

irgendeiner Observablen  $A$  kommt daher seinem Anfangswert  $\langle A \rangle_0$  immer wieder beliebig nahe. Wie im klassischen Fall kann daher die Einstellung des Gleichgewichts nicht im Sinn der Konvergenz von  $\langle A \rangle_t$  im Limes  $t \rightarrow \infty$  verstanden werden: Erwartungswerte schwanken um ihren **Zeitmittelwert**

$$\langle A \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \langle A \rangle_t ,$$

den wir wie in der klassischen Statistischen Mechanik als Erwartungswert im **thermodynamischen Gleichgewicht** auffassen. Nach (15.1) ist

$$\langle A \rangle = \sum_{n,m} \bar{c}_n c_m \underbrace{(\psi_n, A\psi_m)}_{A_{nm}} \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{i(\omega_n - \omega_m)t}}_{\begin{array}{l} 0 \text{ falls } E_n \neq E_m \\ 1 \text{ falls } E_n = E_m \end{array}} .$$

Wenn die Eigenwerte  $E_n$  alle einfach sind (vgl. Ergodenhypothese: nur ein invarianter Zustand pro Energiefläche), so ergibt sich

$$\langle A \rangle = \sum_n \rho_n A_{nn} \tag{15.3}$$

d.h. das thermodynamische Gleichgewicht ist alleine durch die **Energieverteilung** bestimmt. Man kann (15.3) auch schreiben als

$$\langle A \rangle = \text{tr } P_\infty A ,$$

wobei  $P_\infty$  die Dichtematrix

$$P_\infty = \sum_n \rho_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$$

ist (diagonal in der Eigenbasis  $\{\psi_n\}$  der Energie). Es ist  $[P_\infty, H] = 0$ , d.h.  $P_\infty$  ist stationär.

**Entropie:** In Anlehnung an die Definition im klassischen Fall sei

$$S(P) = -k \text{tr}(P \log P) \tag{15.4}$$

die Entropie des Zustandes  $P$ .

### Eigenschaften

1)  $S(P) \geq 0$ , und = 0 nur für reine Zustände  $P = P_\psi$  (denn:  $0 \leq w_i \leq 1$  in (15.1), also  $-w_i \log w_i \geq 0$ , und 0 nur für  $w_i = 0, 1$ ).

2)  $S$  ist strikt konkav in  $P$ : Für  $P = \lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$  ( $P_{1,2}$ : Zustände) gilt

$$S(P) \geq \lambda S(P_1) + (1 - \lambda)S(P_2) \tag{15.5}$$

mit “=” nur für  $\lambda = 0, 1$  oder  $P_1 = P_2$ .

**Beweis.** Allgemein, für eine konvexe Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und selbstadjungierte Operatoren  $A, B$  mit Spektrum in  $D \subset \mathbb{R}$ , gilt:

$$\text{tr } f(B) \geq \text{tr}[f(A) + f'(A) \cdot (B - A)] \tag{15.6}$$

(falls  $f$  strikt konvex: “=” nur für  $B = A$ ). Denn sei  $\{\psi_j\}$  eine o.n. Eigenbasis für  $B$ ,  $B\psi_j = b_j\psi_j$ . Dann gilt für  $\psi$  mit  $\|\psi\| = 1$

$$(\psi, f(B)\psi) = \sum_j |c_j|^2 f(b_j) \geq f\left(\sum_j |c_j|^2 b_j\right) = f((\psi, B\psi)), \quad (15.7)$$

da  $\sum_j |c_j|^2 = 1$  für  $c_j = (\psi_j, \psi)$ . Durch nochmalige Anwendung der Konvexität ist

$$f((\psi, B\psi)) \geq f((\psi, A\psi)) + f'((\psi, A\psi)) \cdot (\psi, (B - A)\psi)$$

und für einen Eigenvektor  $\psi$  von  $A$  ist die rechte Seite gleich

$$(\psi, [f(A) + f'(A) \cdot (B - A)]\psi). \quad (15.8)$$

Summation von (15.7, 15.8) über eine Eigenbasis von  $A$  liefert (15.6). Eine Anwendung davon ist ( $0 \leq \lambda \leq 1$ )

$$\text{tr} f(\lambda B_1 + (1 - \lambda)B_2) \leq \lambda \text{tr} f(B_1) + (1 - \lambda) \text{tr} f(B_2) \quad (15.9)$$

(falls  $f$  strikt konvex: “=” nur  $\lambda = 0, 1$  oder  $B_1 = B_2$ ). Mit  $A = \lambda B_1 + (1 - \lambda)B_2$  ist nämlich

$$B_1 = A - (1 - \lambda)(B_2 - B_1), \quad B_2 = A + \lambda(B_2 - B_1),$$

also

$$\begin{aligned} \text{tr} f(B_1) &\geq \text{tr} f(A) - (1 - \lambda) \text{tr}[f'(A)(B_2 - B_1)], \\ \text{tr} f(B_2) &\geq \text{tr} f(A) + \lambda \text{tr}[f'(A)(B_2 - B_1)]. \end{aligned}$$

Die gewichtete Summe davon ist (15.9). Der Spezialfall  $f(x) = x \log x$  ist (15.5). Für diesen Fall halten wir noch (15.6) fest ( $A, B \geq 0$ )

$$\text{tr}(B \log B) \geq \text{tr}(B \log A + B - A) \quad (15.10)$$

(= nur für  $B = A$ ; **Kleinsche Ungleichung**). □

3) Trennungssatz: Sei  $P$  ein Zustand auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  eines zusammengesetzten Systems “1+2”. Die partiellen Spuren

$$P_1 = \text{tr}_{\mathcal{H}_2} P, \quad P_2 = \text{tr}_{\mathcal{H}_1} P$$

( $\text{tr}_{\mathcal{H}_2} P$  ist ein Operator auf  $\mathcal{H}_1$  definiert durch

$$\text{tr}_{\mathcal{H}_1}(A \cdot \text{tr}_{\mathcal{H}_2} P) = \text{tr}_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2}((A \otimes \text{id})P)$$

für alle Operatoren  $A$  auf  $\mathcal{H}_1$ ) sind Zustände auf  $\mathcal{H}_1$  bzw.  $\mathcal{H}_2$ . Es gilt

$$S(P) \leq S(P_1) + S(P_2)$$

mit “=” genau dann, falls  $P_1$  und  $P_2$  unkorreliert sind, d.h. falls  $P = P_1 \otimes P_2$ .

**Beweis.** Wegen  $\text{tr} P = \text{tr} P_1 \otimes P_2 = 1$  lautet (15.10) für  $B = P$ ,  $A = P_1 \otimes P_2$

$$\begin{aligned} \text{tr}_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2}(P \log P) &\geq \text{tr}_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2}(P \underbrace{\log(P_1 \otimes P_2)}) = \text{tr}_{\mathcal{H}_1}(P_1 \log P_1) + \text{tr}_{\mathcal{H}_2}(P_2 \log P_2) . \\ &(\log P_1) \otimes \text{id} + \text{id} \otimes (\log P_2) \end{aligned} \quad \square$$

4)  $S$  ist invariant unter der Zeitevolution:

$$S(P_t) = S(P),$$

wo  $P_t = e^{-itH/\hbar} P e^{itH/\hbar}$ .

**Beweis.** Für eine beliebige unitäre Abbildung  $U$  ist  $f(UPU^*) = Uf(P)U^*$ , also  $\text{tr} f(UPU^*) = \text{tr} f(P)$ , wegen der Zyklizität der Spur. □

Analog zum klassischen Fall kann man verschiedene statistische Gesamtheiten einführen. Wir betrachten ein  $N$ -Teilchensystem im Volumen  $\Lambda$  mit Hamiltonoperator  $H_{\Lambda,N}$  auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H}_{\Lambda,N}$ .

1) Die **mikrokanonische Gesamtheit**:  $E, N, \Lambda$  fest. Die Dichtematrix ist

$$P = \frac{1}{\Sigma_{\Delta}(E, \Lambda, N)} P_{\Delta}(E, \Lambda, N) , \quad (15.11)$$

$$\Sigma_{\Delta}(E, \Lambda, N) = \text{tr } P_{\Delta}(E, \Lambda, N) ,$$

wo  $P_{\Delta}(E, \Lambda, N)$  der Projektor auf die Eigenvektoren von  $H_{\Lambda,N}$  mit Eigenwerten in  $[E - \Delta, E]$  ist, und  $\Sigma_{\Delta}(E, \Lambda, N)$  deren Anzahl. Die Entropie (15.4) ist

$$S(E, \Lambda, N) = k \log \Sigma_{\Delta}(E, \Lambda, N) . \quad (15.12)$$

Typischerweise ist für grosse Systeme die Wahl von  $\Delta$  unwesentlich, solange  $\Delta \geq \varepsilon N$  ( $\varepsilon > 0$  fest).

2) Die **kanonische Gesamtheit**:  $\langle H \rangle, N, \Lambda$  fest.

$$P = \frac{1}{Z(\beta, \Lambda, N)} e^{-\beta H_{\Lambda,N}} , \quad (15.13)$$

$$Z(\beta, \Lambda, N) = \text{tr } e^{-\beta H_{\Lambda,N}} .$$

Die freie Energie ist

$$F(\beta, \Lambda, N) = -\frac{1}{\beta} \log Z(\beta, \Lambda, N) . \quad (15.14)$$

Ist  $\tilde{P}$  ein weiterer Zustand mit demselben Energiemittelwert  $\langle H \rangle = \text{tr}(\tilde{P}H) = \text{tr}(PH)$ , so ist nach (15.10)

$$\begin{aligned} \text{tr}(\tilde{P} \log \tilde{P}) &\geq \text{tr}(\tilde{P} \log P) \\ &= \text{tr}(\tilde{P}(-\beta H - \log Z)) = \text{tr}(P(-\beta H - \log Z)) \\ &= \text{tr}(P \log P) , \end{aligned}$$

d.h. seine Entropie ist kleiner:  $S(\tilde{P}) \leq S(P)$ .

3) Die **grosskanonische Gesamtheit**:  $\langle H \rangle, \langle N \rangle, \Lambda$  fest. Der Hilbertraum ist der **Fockraum**

$$\mathcal{H}_{\Lambda} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}_{\Lambda,N}$$

mit Zuständen

$$\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots) ,$$

wobei  $\psi_N \in \mathcal{H}_{\Lambda,N}$  (und  $\mathcal{H}_{\Lambda,0} = \mathbb{C}$ ) und Skalarprodukt

$$(\psi, \varphi) = \sum_{N=0}^{\infty} (\psi_N, \varphi_N)_{\mathcal{H}_{\Lambda,N}} .$$

Der Teilchenzahloperator ist

$$N\psi = (0, \psi_1, 2\psi_2, 3\psi_3, \dots)$$

und der Hamiltonoperator

$$H_\Lambda \psi = (0, H_{\Lambda,1} \psi_1, H_{\Lambda,2} \psi_2, \dots) .$$

Die Dichtematrix im Gleichgewicht ist

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\Xi(\beta, \mu, \Lambda)} e^{-\beta(H_\Lambda - \mu N)} , \\ \Xi(\beta, \mu, \Lambda) &= \text{tr} e^{-\beta(H_\Lambda - \mu N)} . \end{aligned} \quad (15.15)$$

Das grosskanonische Potential ist

$$\Omega(\beta, \mu, \Lambda) = -pV = -\frac{1}{\beta} \log \Xi(\beta, \mu, \Lambda) . \quad (15.16)$$

Alle diese Gleichgewichtszustände sind Zustände **maximaler Entropie** bei passenden Nebenbedingungen (Gibbs'sches Variationsprinzip).

## 15.2 Unabhängige Teilchen

Wir betrachten unabhängige Fermionen oder Bosonen ( $F/B$ ) mit 1-Teilchen-Energiespektrum

$$\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \dots \leq \varepsilon_\alpha \leq \dots , \quad \varepsilon_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \infty .$$

Im Fockraum (s. S. 132) benützen wir die entsprechende Besetzungszahlbasis  $|n_0, n_1, \dots\rangle$ , wobei

$$n_\alpha = \begin{cases} 0, 1 & (F) \\ 0, 1, 2, 3, \dots & (B) \end{cases}$$

mit  $\sum_\alpha n_\alpha < \infty$ . In dieser Basis sind  $N$  und  $H$  diagonal:

$$\begin{aligned} N |n_0, n_1, \dots\rangle &= \left( \sum_\alpha n_\alpha \right) |n_0, n_1, \dots\rangle , \\ H |n_0, n_1, \dots\rangle &= \left( \sum_\alpha \varepsilon_\alpha n_\alpha \right) |n_0, n_1, \dots\rangle . \end{aligned}$$

Somit ist die grosskanonische Zustandssumme

$$\begin{aligned} \Xi &= \sum_{n_0, n_1, \dots} \prod_\alpha e^{\beta(\mu - \varepsilon_\alpha) n_\alpha} = \prod_\alpha \sum_n e^{\beta(\mu - \varepsilon_\alpha) n} \\ &= \prod_\alpha (1 \pm e^{\beta(\mu - \varepsilon_\alpha)})^{\pm 1} \quad \begin{pmatrix} F \\ B \end{pmatrix} , \end{aligned} \quad (15.17)$$

wobei im Fall ( $B$ )  $\mu < \varepsilon_0$  sein muss, damit die geometrische Reihe konvergiert. Also ist

$$\log \Xi = \pm \sum_\alpha \log(1 \pm e^{\beta(\mu - \varepsilon_\alpha)}) \quad \begin{pmatrix} F \\ B \end{pmatrix} . \quad (15.18)$$

Für die mittleren Besetzungszahlen  $\langle n_\alpha \rangle$  findet man daraus:

$$\begin{aligned} \langle n_\alpha \rangle &= \frac{\sum_{n_0, n_1, \dots} n_\alpha e^{\beta \sum_\gamma (\mu - \varepsilon_\gamma) n_\gamma}}{\sum_{n_0, n_1, \dots} e^{\beta \sum_\gamma (\mu - \varepsilon_\gamma) n_\gamma}} \\ &= -\frac{1}{\beta} \left( \frac{\partial \log \Xi}{\partial \varepsilon_\alpha} \right)_{\mu, \beta} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_\alpha - \mu)} \pm 1} \quad \begin{pmatrix} F \\ B \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (15.19)$$

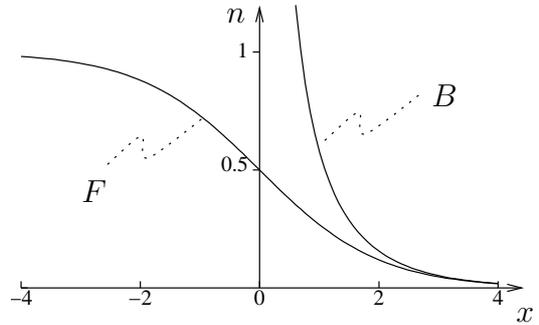
Es ist also

$$\langle n_\alpha \rangle = n\left(\frac{\varepsilon_\alpha - \mu}{kT}\right)$$

mit der Fermi/Bose Verteilung

$$n(x) = (e^x \pm 1)^{-1}.$$

Insbesondere gilt im fermionischen Fall die Teilchen-Loch Symmetrie  $n(x) + n(-x) = 1$ .



### 15.3 Ideale Quantengase

Freie Teilchen im Würfel  $0 \leq x_i \leq L$ , periodische Randbedingungen. Einteilchenzustände

$$\psi_{\vec{k}, \sigma}(\vec{x}, m) = \delta_{\sigma m} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)}$$

mit  $\sigma, m = -s, -s+1, \dots, +s$  (Spin  $s$ ) und

$$k_i = \frac{2\pi}{L} \nu_i, \quad (\nu_i \in \mathbb{Z}).$$

Die 1-Teilchen-Energien sind

$$\varepsilon_{\vec{k}, \sigma} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}.$$

Damit folgt ( $z = e^{\beta\mu}$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \log \Xi &= \frac{2s+1}{(2\pi)^3} \frac{(2\pi)^3}{L^3} \underbrace{\sum_{\vec{k}} \pm \log(1 \pm z e^{-\beta \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}})}_{\text{Riemann-Summe für}} \\ &\quad \pm \int d^3 k \log(1 \pm z e^{-\beta \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}}) \end{aligned}$$

also im thermodynamischen Limes

$$\frac{p}{kT} = \frac{2s+1}{\lambda^3} \cdot \underbrace{\frac{\pm 2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \sqrt{x} \log(1 \pm z e^{-x})}_{=: f_{5/2}^\pm(z)} \quad \begin{pmatrix} F \\ B \end{pmatrix} \quad (15.20)$$

vermittels der Substitution

$$x = \beta \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}, \quad d^3k = 4\pi k^2 dk = 2\pi \left( \frac{2m}{\beta \hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{x} dx.$$

Hier ist  $\lambda$  die "thermische Wellenlänge"

$$\lambda = \hbar \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{mkT}} = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}} \quad (15.21)$$

( $\sim$  de Broglie-Wellenlänge eines Teilchens der Energie  $kT$ ). Mit  $1/v = z \frac{\partial}{\partial z} (p/kT)$  folgt die **thermische Zustandsgleichung** in Parameterform

$$\begin{aligned} \frac{p}{kT} &= \frac{2s+1}{\lambda^3} f_{5/2}^\pm(z), & (F) \\ \frac{1}{v} &= \frac{2s+1}{\lambda^3} f_{3/2}^\pm(z) & (B) \end{aligned} \quad (15.22)$$

mit

$$f_{3/2}^\pm(z) = z \frac{d}{dz} f_{5/2}^\pm(z).$$

Analog zu (15.19) ist

$$U = - \left( \frac{\partial \log \Xi}{\partial \beta} \right)_{z,V}, \quad (15.23)$$

also beträgt in beiden Fällen die mittlere Energie pro Volumeneinheit

$$\frac{U}{V} = - \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta p)_z = \frac{3}{2} p,$$

da  $\beta p \propto \beta^{-3/2}$  bei festem  $z$ . Für die **mittlere Energie pro Teilchen** folgt

$$u = \frac{3}{2} p v.$$

Da die rechte Seite in

$$\frac{p v}{kT} = \frac{f_{5/2}^\pm(z)}{f_{3/2}^\pm(z)}$$

i.A.  $\neq 1$  ist, weichen die Zustandsgleichungen von den klassischen ab.

### Klassischer Limes

Aus  $\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ , ( $|x| < 1$ ) und

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx \sqrt{x} e^{-nx} = n^{-3/2}$$

erhält man die Potenzreihen

$$\begin{aligned} f_{5/2}^\pm(z) &= \mp \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\mp z)^l}{l^{5/2}}, \\ f_{3/2}^\pm(z) &= \mp \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\mp z)^l}{l^{3/2}}. \end{aligned} \quad (|z| < 1), \quad (15.24)$$

Für  $z \ll 1$  genügen die Glieder  $l = 1$ . Dann  $f_{5/2}^{\pm}(z) \approx f_{3/2}^{\pm}(z) (\approx z)$  und es resultieren die Zustandsgleichungen eines klassischen (monoatomaren) idealen Gases:  $pv = kT$ ,  $u = (3/2)kT$ . Dies bedeutet

$$v \gg \lambda^3 : \quad \text{Bedingung für den klassischen Limes,}$$

d.h. der mittlere Teilchenabstand ist gross gegen  $\lambda$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} pv &= kT, \\ u &= \frac{3}{2}kT \end{aligned} \quad (15.25)$$

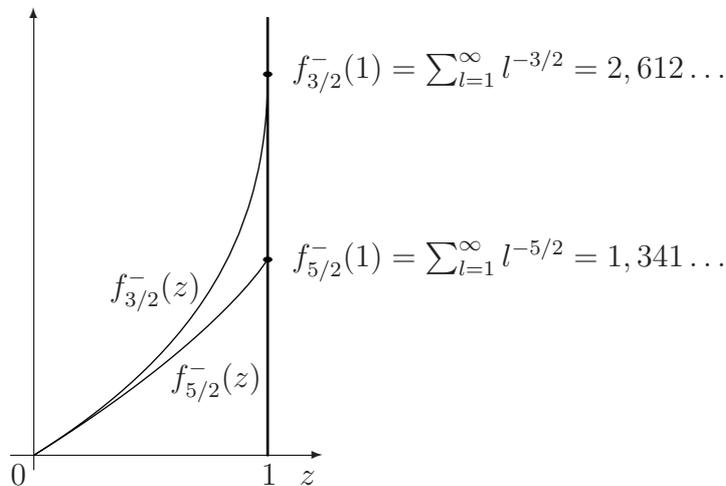
(klassisches ideales Gas!) Unter Berücksichtigung der nächsten Ordnung in  $z$  lautet (15.25)

$$pv = kT \left( 1 \pm \frac{1}{(2s+1)2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{v} + O\left(\left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^2\right) \right) \quad \begin{pmatrix} F \\ B \end{pmatrix} :$$

das Fermigas hat (bei selben  $T, v$ ) einen höheren Druck (Pauli Prinzip!), das Bosegas einen kleineren Druck als das klassische Gas.

#### 15.4 Entartetes Bose-Gas und Bose-Einstein Kondensation

Die grosskanonische Gesamtheit existiert im endlichen Würfel (Länge  $L$ , periodische Randbedingung) für  $\mu < \varepsilon_0 = 0$ . Ebenso der thermodynamische Limes  $L \rightarrow \infty$ , d.h. nur für  $0 < z = e^{\beta\mu} < 1$ . Wir können in diesem Bereich die Potenzreihen (15.24) benützen



$f_{3/2}^-(z)$  hat bei  $z = 1$  eine vertikale Tangente (mit Steigung  $f_{1/2}^-(1) = \sum_{l=1}^{\infty} l^{-1/2} = \infty$ ).

Für  $\mu \nearrow 0$  (bzw.  $z \nearrow 1$ ) ist

$$\begin{aligned} p &\longrightarrow p^*(T) = kT \cdot \frac{2s+1}{\lambda^3} f_{5/2}^-(1), \\ \rho &\longrightarrow \rho^*(T) = \frac{2s+1}{\lambda^3} f_{3/2}^-(1), \end{aligned} \quad (15.26)$$

wobei  $\rho = 1/v$  die Dichte ist. Nach (15.22) ist (für festes  $T$ )  $\rho < \rho^*(T)$ . Nun ist es aber möglich, das System beliebig zu komprimieren. Was passiert für  $\rho \geq \rho^*(T)$ ? Die

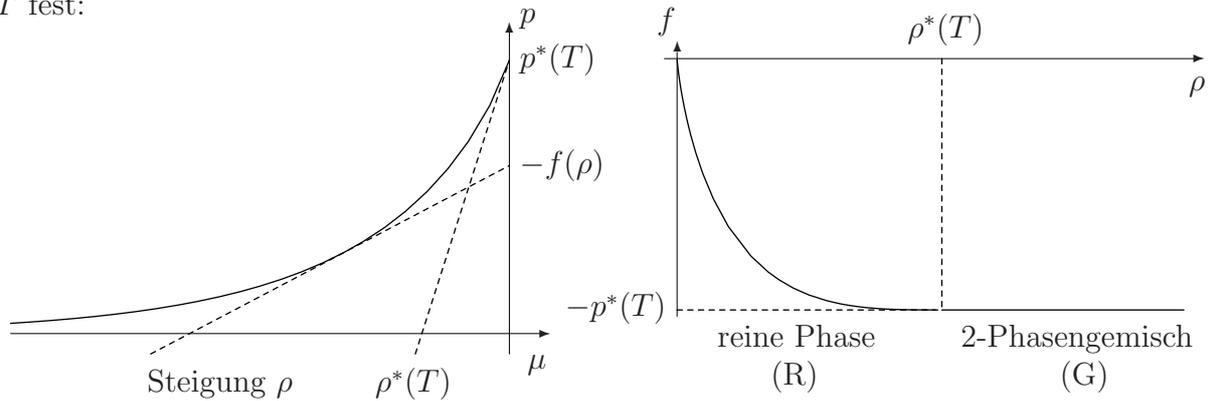
Thermodynamik ergibt sich über die Legendre-Transformation (s. Theorie der Wärme):  
 Die freie Energie  $f$  pro Volumeneinheit ist

$$f(T, \rho) = \sup_{\mu} (\mu\rho - p(T, \mu))$$

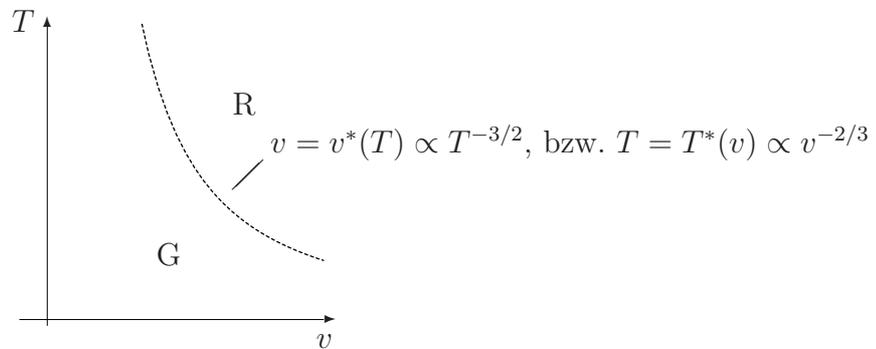
$$df = -s dT + \mu d\rho$$

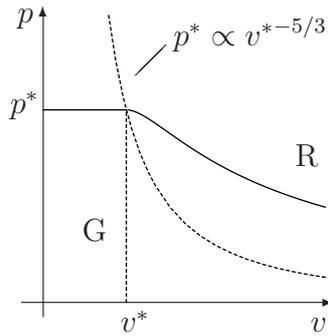
( $s$ : Entropie pro Volumeneinheit).

$T$  fest:

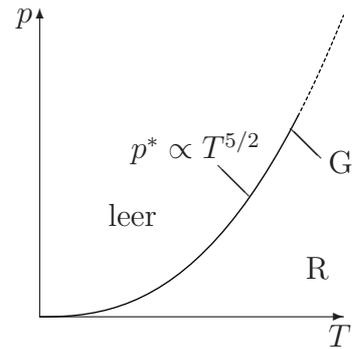


Die Strecke G entspricht der Koexistenz zweier Phasen, vgl. die Bemerkung auf S. ??.  
 Die letzte Figur bestimmt dann die restliche Thermodynamik:

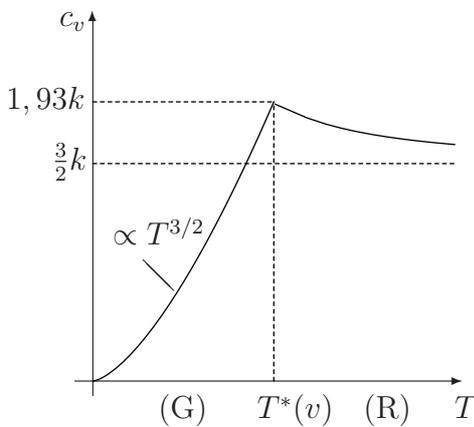




**Isothermen**  
(kein kritischer Punkt)



**Zustandsdiagramm**  
(leer oberhalb Koexistenzkurve)



**Pro Volumeneinheit** ist wegen  $p^* \propto T^{5/2}$  für  $\rho > \rho^*$  (d.h. für  $T < T^*(v)$ )

$$s = -\frac{\partial f}{\partial T} = \frac{dp^*}{dT} = \frac{5 p^*}{2 T} \propto T^{3/2}$$

(3. Hauptsatz ist erfüllt!) und

$$c_v = T \frac{ds}{dT} = \frac{15 p^*}{4 T} ,$$

**Spezifische Wärme**  $c_v(T)$  pro Teilchen bei festem  $v$

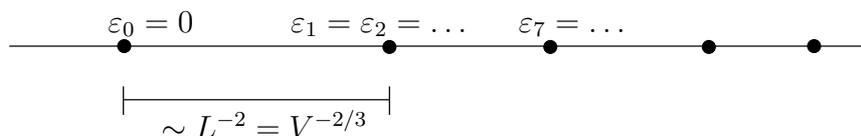
also **pro Teilchen**

$$c_v = \frac{15 p^* v}{4 T} ,$$

speziell für  $T = T^*$ :

$$c_v = k \frac{15 f_{5/2}^-(1)}{4 f_{3/2}^-(1)} = 1,93k .$$

Der statistische Zustand der Dichte  $\rho < \rho^*(T)$  wurde durch die grosskanonische Gesamtheit konstruiert. Für allgemeine Dichten kann dies durch die kanonische Gesamtheit geschehen, die wegen der Bedingung "N fest" allerdings etwas unpraktisch ist. Für  $\rho \geq \rho^*(T)$  kann er im thermodynamischen Limes auch durch eine Variante der grosskanonischen Gesamtheit konstruiert werden. Das 1-Teilchenspektrum im Würfel der Kantenlänge  $L = V^{1/3}$  (periodische Randbedingung) hat die Form



**Vorher:** Limes  $L \rightarrow \infty$  mit  $z < 1$  fest. Dann ist die mittlere Besetzungszahl (15.19) eines jeden Niveaus

$$\langle n_{\vec{k}} \rangle = \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon_{\vec{k}}} - 1} \leq \frac{1}{z^{-1} - 1}$$

unabhängig von  $L$ ,  $\vec{k}$  beschränkt (Spin  $\sigma$  weggelassen)

**Hier:**  $L \rightarrow \infty$  mit  $z = z(V) = 1 - \frac{1}{\xi V}$ , ( $0 < \xi < \infty$  fest). Dann ist

$$\langle n_{\vec{0}} \rangle = \frac{z}{1 - z} = \xi V + o(V), \quad (15.27)$$

wogegen für  $\vec{k} \neq 0$  gilt

$$\langle n_{\vec{k}} \rangle = \frac{1}{\underbrace{z^{-1}}_{\geq 1} \underbrace{e^{\beta \varepsilon_{\vec{k}}}}_{\geq 1 + \beta \varepsilon_{\vec{k}}} - 1} \leq \frac{1}{\beta \varepsilon_{\vec{k}}} \leq \text{konst } V^{2/3} :$$

der 1-Teilchengrundzustand  $\vec{k} = 0$  (und nur dieser) ist **makroskopisch besetzt** (“Kondensation im Impulsraum”). Für die Grenzverteilung der Besetzungszahlen gilt (im Sinne der Verteilungen, d.h. integriert gegen eine Testfunktion  $\varphi(k)$ ):

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \langle n_{\vec{k}} \rangle \varphi(\vec{k}) \longrightarrow \int n(\vec{k}) \varphi(\vec{k}) d^3 k ,$$

$$n(\vec{k}) = n^*(\vec{k}) + \xi \delta^{(3)}(\vec{k}) ,$$

wobei

$$n^*(\vec{k}) = \frac{(2\pi)^{-3}}{e^{\beta \hbar^2 \vec{k}^2 / 2m} - 1} \quad (15.28)$$

die Verteilung im Limes (15.26) ist: zuerst  $L \rightarrow \infty$ , dann  $z \nearrow 1$ .

**Beweis.** Die  $\delta$ -Funktion stammt vom Term  $\vec{k} = 0$ , vgl. (15.27). Für die restlichen Terme gilt

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k} \neq 0} |\langle n_{\vec{k}} \rangle - (2\pi)^3 n^*(\vec{k})| \leq \underbrace{(z^{-1} - 1)}_{\leq (\xi V)^{-1}} \frac{(2\pi)^3}{V} \sum_{\vec{k} \neq 0} e^{\beta \varepsilon_{\vec{k}}} \langle n_{\vec{k}} \rangle \cdot n^*(\vec{k}) ,$$

wobei  $e^{\beta \varepsilon_{\vec{k}}} \langle n_{\vec{k}} \rangle \leq 1 + \langle n_{\vec{k}} \rangle = O(V^{2/3})$ . Der Ausdruck wird dann abgeschätzt durch

$$\leq \text{konst } V^{-1/3} \cdot \underbrace{\frac{(2\pi)^3}{V} \sum_{\vec{k} \neq 0} n^*(\vec{k})}_{\leq \int d^3 k n^*(\vec{k}) < \infty} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} 0 ,$$

da die Funktion (15.28) (in mehr als 2 Dimensionen) integrierbar ist.

Insbesondere gilt

$$\rho(T) = \rho^*(T) + \xi ;$$

der Anteil der Teilchen im Kondensat ist

$$\frac{\xi}{\rho} = \frac{\rho - \rho^*}{\rho} = 1 - \frac{v}{v^*} ,$$

der komplementäre Anteil  $v/v^*$ . Druck, Energie und Entropie kann man nach (15.18, 15.19, 15.23) durch die Besetzungszahlen ausdrücken:

$$\begin{aligned}\beta pV &= \sum_{\vec{k}} \log(1 + \langle n_{\vec{k}} \rangle) , \\ U &= \sum_{\vec{k}} \varepsilon_{\vec{k}} \langle n_{\vec{k}} \rangle , \\ k^{-1} S &= \sum_{\vec{k}} [(1 + \langle n_{\vec{k}} \rangle) \log(1 + \langle n_{\vec{k}} \rangle) - \langle n_{\vec{k}} \rangle \log \langle n_{\vec{k}} \rangle] .\end{aligned}$$

Die Terme  $\vec{k} = 0$  dieser Summen sind der Reihe nach:  $O(\log V)$ , (s. (15.27)), 0 (da  $\varepsilon_0 = 0$ ),  $O(\log V)$  (da  $\approx \log \langle n_{\vec{0}} \rangle$ ). Also folgt

$$pV = p^*V + o(V) , \quad U = U^* + o(V) , \quad S = S^* + o(V)$$

und  $p = p^*$ ,

$$u := \frac{U}{\langle N \rangle} = \frac{U^*}{N^*} \cdot \frac{N^*}{\langle N \rangle} = \frac{v}{v^*} \cdot u^* , \quad s = \frac{v}{v^*} s^* , \quad v = \frac{v}{v^*} \cdot v^* :$$

$(u, s, v)$  ist das Gemisch im Sinne der Thermodynamik des Kondensats

$$(u, s, v) = (0, 0, 0) , \quad \text{Anteil } 1 - \frac{v}{v^*} ,$$

mit dem Gas

$$(u, s, v) = (u^*, s^*, v^*) , \quad \text{Anteil } \frac{v}{v^*} .$$

# 16 Zurück zu den Grundlagen

## 16.1 Das EPR-Paradoxon

(Einstein, Podolsky, Rosen, Phys. Rev. **47** (1935), 77)

Die Quantenmechanik liefert nur ausnahmsweise sichere Aussagen (d.h. solche mit Wahrscheinlichkeit 1) für das Eintreffen eines Ereignisses, wie z.B. einen bestimmten Messwert einer Observablen. Ist dies überwindbar?

In dieser Stossrichtung formulierten EPR die Frage: “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?” Im Folgenden ist (i, ii) ihre Präzisierung der Frage, (iii) die Antwort (nein) und (iv) die Begründung:

- (i) Ein (hinreichendes) Kriterium für ein **Element physikalischer Wirklichkeit** ist: “If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e., with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an **element of physical reality** corresponding to this physical quantity.” Der Begriff ist unabhängig von einer bestimmten Theorie und die Voraussage kann z.B. durch Erfahrung geschehen.
- (ii) Ein (notwendiges) Kriterium, damit eine physikalische Theorie **vollständig** (complete) ist, lautet: “Every element of physical reality must have a counterpart in the physical theory.”
- (iii) “While we have thus shown that the wave function **does not provide** a complete description of the physical reality, we left open the question of whether or not such a description exists. We believe, however, that such a theory is possible.”
- (iv) (Variante von Bohm) Zwei Spin  $\frac{1}{2}$ -Teilchen, (1) und (2), befinden sich zusammen im Spin 0-Zustand

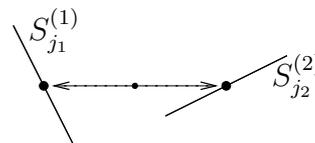
$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\vec{e}_3, -\vec{e}_3\rangle - |-\vec{e}_3, \vec{e}_3\rangle), \quad (16.1)$$

der sich nach (7.33) bzgl. aller Quantisierungsrichtungen gleich schreibt (**EPR-Paar**). (Ein solcher Zustand ist eine der Zerfallsmöglichkeiten des Pions,  $\pi \rightarrow e^-e^+$ , in ein Elektron und ein Positron.) Die Teilchen laufen danach frei auseinander, was ihren Spinzustand (16.1) nicht ändert. Je eine Spinkomponente  $S_j^{(i)}$ , ( $j = 1, 2, 3$ ), der beiden Teilchen, ( $i = 1, 2$ ), wird dann gemessen. Die beiden Messungen seien raumartig getrennte Ereignisse, sodass nach der SRT eine kausale Beeinflussung ausgeschlossen ist. Die Messung von  $S_j^{(1)}$  und  $S_j^{(2)}$  (gleiche Richtung  $j$ ) ergibt entweder  $(\hbar/2, -\hbar/2)$  oder  $(-\hbar/2, \hbar/2)$ , je mit Wahrscheinlichkeit 1/2. Also **kann**  $S_1^{(1)}$

vorher:



nachher:



vorausgesagt werden, ohne das Teilchen (1) zu stören, nämlich durch Messung von  $S_1^{(2)}$ . Nach (i, ii) hat  $S_1^{(1)}$  einen bestimmten Wert, der zwar ohne Messung von  $S_1^{(2)}$  niemandem bekannt ist. Ebenso für  $S_2^{(1)}$  und  $S_3^{(1)}$ . Nach der QM hat eine Observable im Zustand  $|\psi\rangle$  nur dann einen bestimmten Wert, wenn  $|\psi\rangle$  ein Eigenvektor davon ist, vgl. (3.22). Ein gemeinsamer Eigenvektor für  $S_j^{(1)}$ , ( $j = 1, 2, 3$ ), ist aber wegen  $[S_1^{(1)}, S_2^{(1)}] = i\hbar S_3^{(1)}$  unmöglich!

Bohr (Phys. Rev. **48** (1935) 696) räumt zwar ein, dass “there is no question of a mechanical disturbance of the system under investigation”. Jede der drei Spinkomponenten  $S_j^{(1)}$  kann nicht, sondern **könnte** bloss vorausgesagt werden. Die blosse Möglichkeit (i) einer Vorhersage reicht ihm zur Begründung eines Elements physikalischer Wirklichkeit nicht aus: “There is essentially the question of an influence on the very conditions which define the possible types of predictions regarding the future behavior of the system. Since these conditions constitute an inherent element of the description of any phenomenon to which the term “physical reality” can be properly attached, we see that the argumentation of the mentioned authors does not justify their conclusion that quantum-mechanical description is essentially incomplete.” Einstein liess sich umgekehrt davon nicht überzeugen.

Eine im Sinne von EPR vollständige (und erhoffte) Theorie würde sich rechtfertigen, falls ihre Voraussagen

- (a) die der QM reproduzieren, oder
- (b) sofern sie von denen der QM abweichen, durch das Experiment bestätigt werden.

In den nächsten beiden Abschnitten werden wir sehen, dass beides im Wesentlichen nicht zutrifft.

## 16.2 Verborgene Variablen

Eine Theorie “verborgener Variablen” ist eine, wo in jedem Zustand des Systems (reiner Zustand) die Werte aller Observablen festgelegt sind; es ist aber zulässig, dass der einzelne Zustand nicht bekannt ist (oder es gar nicht sein kann), sondern bloss eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (gemischter Zustand). Die QM ist keine solche Theorie, da der Zustand  $|\psi\rangle$  nur die Verteilung der Werte einer Observablen bei Messung bestimmt. Kann die QM durch eine Theorie verborgener Variablen reproduziert werden? Diese Frage kann auf mindestens zwei Arten präzisiert werden. Zunächst die schwächere Auslegung:

(V-) Es gibt einen Raum  $\Omega$  (Wahrscheinlichkeitsraum;  $\omega \in \Omega$  ist die verborgene Variable) und zwei Abbildungen:

$$\text{Zustände } \psi \quad \mapsto \quad \text{Wahrscheinlichkeitsverteilungen } d\rho_\psi(\omega) \text{ auf } \Omega, \quad (16.2)$$

$$\text{Observablen } A = A^* \quad \mapsto \quad \text{Funktionen } A(\omega) \text{ auf } \Omega \quad (16.3)$$

( $A(\omega)$  ist der Wert von  $A$  in  $\omega$ ), sodass die quantenmechanischen Wahrscheinlichkeiten für die Messwerte wiedergegeben werden: Ist  $A = \sum_i a_i P_i$  ihre Spektralzerlegung, so gilt

$$\langle \psi | P_i | \psi \rangle = \rho_\psi(\{\omega \in \Omega \mid A(\omega) = a_i\}). \quad (16.4)$$

Insbesondere ist der Erwartungswert von  $A$

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \int_{\Omega} A(\omega) d\rho_{\psi}(\omega) . \quad (16.5)$$

**Beispiel.** (Bell 1964) Verborgene Variablen für ein Spin  $\frac{1}{2}$ ,  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ :

$$\begin{aligned} \Omega &= \{ \omega = (|\psi\rangle, \lambda) \mid \psi \in \mathbb{C}^2, \|\psi\| = 1, \lambda \in [-1, 1] \} , \\ d\rho_{\psi}(\omega) &= \frac{d\lambda}{2} \quad \text{auf } \omega = (|\psi\rangle, \lambda) . \end{aligned}$$

Für die Observablen  $\vec{\sigma} \cdot \vec{e}$ , ( $|\vec{e}| = 1$ ), sei

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{e})(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \lambda \in [-\langle \psi | \vec{\sigma} \cdot \vec{e} | \psi \rangle, 1] , \\ -1, & \text{falls } \lambda \in [-1, -\langle \psi | \vec{\sigma} \cdot \vec{e} | \psi \rangle) . \end{cases} \quad (16.6)$$

Damit ist

$$\rho_{\psi}(\{ \omega \in \Omega \mid (\vec{\sigma} \cdot \vec{e})(\omega) = \pm 1 \}) = \frac{1 \pm \langle \psi | \vec{\sigma} \cdot \vec{e} | \psi \rangle}{2} ,$$

in Übereinstimmung mit  $\langle \psi | P_{\pm} | \psi \rangle$ , s. (7.82). (Ähnliche Beispiele gibt es auch für  $\dim \mathcal{H} > 2$ .) In Zuständen  $\omega = (|\psi\rangle, \lambda)$  mit

$$\lambda \geq \max(-\langle \psi | \vec{\sigma} \cdot \vec{e} | \psi \rangle, -\langle \psi | \vec{\sigma} \cdot (-\vec{e}) | \psi \rangle) = |\langle \psi | \vec{\sigma} \cdot \vec{e} | \psi \rangle|$$

gilt sowohl  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{e})(\omega) = +1$  wie auch  $(\vec{\sigma} \cdot (-\vec{e}))(\omega) = +1$ . Dies ist unbefriedigend, denn letzteres ist physikalisch dasselbe wie  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{e})(\omega) = -1$ , was mit ersterem inkompatibel ist. Anders gesagt: Der Stern-Gerlach Analysator auf Seite 83 bestimmt nicht nur den Wert der Observablen  $\vec{\sigma} \cdot \vec{e}$ , sondern auch der Ereignisse  $P_{\pm} = |\pm \vec{e}\rangle \langle \pm \vec{e}|$ , ja nach (3.13) jeder Observablen, die bzgl.  $|\pm \vec{e}\rangle$  diagonal ist. Wir verschärfen deshalb (V-) zu

**(V+)** Sei  $\Omega$  und (16.2) wie vorher. Statt (16.3) sei eine Abbildung

$$\text{Projektoren } P = P^2 = P^* \quad \mapsto \quad \text{Teilmengen } P \subset \Omega \quad (16.7)$$

gegeben, sodass

$$\langle \psi | P | \psi \rangle = \rho_{\psi}(P) , \quad (16.8)$$

$$\sum_i P_i = \mathbb{1} \quad \implies \quad \{P_i\} \text{ ist eine Partition von } \Omega . \quad (16.9)$$

**Bemerkungen. 1.** Dies impliziert (V-): Falls  $A = \sum_i a_i P_i$  (Spektralzerlegung), folgen (16.4, 16.5) mit

$$A(\omega) = \sum_i a_i \chi_{P_i}(\omega) \quad (16.10)$$

( $\chi_P$ : charakteristische Funktion von  $P \subset \Omega$ ).

2. Mit  $f(A) = \sum_i f(a_i)P_i$  folgt aus (16.10)

$$f(A)(\omega) = f(A(\omega)) . \quad (16.11)$$

3. Gilt  $[A_1, A_2] = 0$ , so folgt

$$(A_1 A_2)(\omega) = A_1(\omega) A_2(\omega) . \quad (16.12)$$

Dies, weil  $A_1, A_2$  bzgl. einer selben orthonormierten Basis diagonal sind, und damit von der Form  $A_i = f_i(A)$ , ( $i = 1, 2$ ), für einen geeigneten Operator  $A = A^*$  mit derselben Eigenschaft.

**Beispiel** (Fortsetzung). Sei  $\tilde{S}$  eine ‘‘Kugelhälfte’’, d.h. für jedes  $\vec{e}$ , ( $|\vec{e}| = 1$ ), sei entweder  $\vec{e} \in \tilde{S}$  oder  $-\vec{e} \in \tilde{S}$ . Die Abbildung (16.7) sei  $0 \mapsto \emptyset$ ,  $\mathbf{1} \mapsto \Omega$  und, für 1-dimensionale Projektoren  $P = P(\vec{e}) = (1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{e})/2$ , vgl. (16.6),

$$P = \begin{cases} [-\langle \psi | \vec{\sigma} \cdot \vec{e} | \psi \rangle, 1] , & (\vec{e} \in \tilde{S}) , \\ [-1, \langle \psi | \vec{\sigma} \cdot \vec{e} | \psi \rangle) , & (-\vec{e} \in \tilde{S}) . \end{cases}$$

Gleichung (16.8) ist erfüllt. Die nicht trivialen Zerlegungen  $\sum_i P_i = \mathbf{1}$  sind die in zwei 1-dimensionalen Projektoren,  $P(\vec{e}) + P(-\vec{e}) = \mathbf{1}$ , ( $\vec{e} \in \tilde{S}$ ). Die entsprechenden Intervalle  $[-\langle \psi | \vec{\sigma} \cdot \vec{e} | \psi \rangle, 1]$ ,  $[-1, \langle \psi | \vec{\sigma} \cdot (-\vec{e}) | \psi \rangle)$  erfüllen (16.9). Somit ist (V+) für ein Spin  $\frac{1}{2}$  möglich.

Das letzte Argument beruht darauf, dass es für  $\dim \mathcal{H} = 2$  zu jeder Richtung nur **eine** orthogonale gibt.

**Satz.** (Kochen, Specker 1967) Sei  $\dim \mathcal{H} \geq 3$ . Dann ist (V+) nicht möglich. (Es genügt, die Abbildung (16.7) für endlich viele, geeignete  $P$ 's zu postulieren.)

**Beweis.** (nach Mermin 1990, für  $\dim \mathcal{H} = 8$  und somit auch für  $\dim \mathcal{H} \geq 8$ ). Sei  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  der Hilbertraum dreier Spin  $\frac{1}{2}$ . Betrachte die selbstadjungierten Operatoren

$$\sigma_i^{(1)} = \sigma_i \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} , \quad \sigma_i^{(2)} = \mathbf{1} \otimes \sigma_i \otimes \mathbf{1} , \quad \sigma_i^{(3)} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \sigma_i , \quad (i = 1, 2, 3) ,$$

die Produkte

$$Q_1 = \sigma_1^{(1)} \sigma_2^{(2)} \sigma_2^{(3)} , \quad Q_2 = \sigma_2^{(1)} \sigma_1^{(2)} \sigma_2^{(3)} , \quad Q_3 = \sigma_2^{(1)} \sigma_2^{(2)} \sigma_1^{(3)} , \quad (16.13)$$

sowie das Produkt davon

$$Q_1 Q_2 Q_3 = -\sigma_1^{(1)} \sigma_1^{(2)} \sigma_1^{(3)} . \quad (16.14)$$

Es gilt

$$[\sigma_a^{(i)}, \sigma_b^{(j)}] = 0 , \quad (i \neq j) , \quad (16.15)$$

$$[Q_i, Q_j] = 0 ; \quad (16.16)$$

so ist z.B.  $Q_1 Q_2 = \sigma_1^{(1)} \sigma_2^{(1)} \sigma_2^{(2)} \sigma_1^{(2)} (\sigma_2^{(3)})^2 = (-1)^2 \sigma_2^{(1)} \sigma_1^{(1)} \sigma_1^{(2)} \sigma_2^{(2)} = Q_2 Q_1$ , woraus auch (16.14) folgt. Was folgt daraus für die verborgenen Variablen? Da die Faktoren in (16.13) kommutieren, ist nach (16.12)

$$Q_1(\omega) = \sigma_1^{(1)}(\omega) \sigma_2^{(2)}(\omega) \sigma_2^{(3)}(\omega) , \quad (16.17)$$

usw.; da die in  $Q_1Q_2Q_3$  ebenfalls, folgt

$$(Q_1Q_2Q_3)(\omega) = Q_1(\omega)Q_2(\omega)Q_3(\omega) = \sigma_1^{(1)}(\omega)\sigma_1^{(2)}(\omega)\sigma_1^{(3)}(\omega) = (\sigma_1^{(1)}\sigma_1^{(2)}\sigma_1^{(3)})(\omega), \quad (16.18)$$

wobei  $(\sigma_2^{(i)}(\omega))^2 = (\sigma_2^{(i)})^2(\omega) = \mathbf{1}(\omega) = 1$ , s. (16.11, 16.8), verwendet wurde. Da  $Q_1Q_2Q_3 \neq 0$  gibt es Zustände  $|\psi\rangle$  mit  $\langle\psi|Q_1Q_2Q_3|\psi\rangle \neq 0$ . Nach (16.14) ist

$$\langle\psi|Q_1Q_2Q_3|\psi\rangle = -\langle\psi|\sigma_1^{(1)}\sigma_1^{(2)}\sigma_1^{(3)}|\psi\rangle, \quad (16.19)$$

nach (16.5, 16.18) aber auch

$$\langle\psi|Q_1Q_2Q_3|\psi\rangle = +\langle\psi|\sigma_1^{(1)}\sigma_1^{(2)}\sigma_1^{(3)}|\psi\rangle :$$

Widerspruch! □

In der QM kommutieren Observablen  $A, B$ , die verschiedenen Teilsystemen entsprechen, womit  $AB$  auch selbstadjungiert ist:  $(AB)^* = B^*A^* = BA = AB$ . Im Rahmen von (V-) stellen wir für solche Fälle die Lokalitätshypothese:

(L) Gehören die Observablen auch noch zu raumartig getrennten Messungen, so ist

$$(AB)(\omega) = A(\omega)B(\omega). \quad (16.20)$$

**Bemerkungen. 1.** Im Rahmen von (V+) ist (L) wegen (16.12) von selbst erfüllt.

**2.** (L) ist naheliegend, wenn der Zustand  $\omega$  eines zusammengesetzten Systems durch die seiner Teile gegeben sein soll,  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ .

**Satz.** (Bell 1964) Die QM ist unvereinbar mit (V-, L).

**Beweis.** Wir betrachten drei Teilchen im Spinzustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\vec{e}_3\rangle \otimes |\vec{e}_3\rangle \otimes |\vec{e}_3\rangle - |-\vec{e}_3\rangle \otimes |-\vec{e}_3\rangle \otimes |-\vec{e}_3\rangle).$$

die anfänglich räumlich zusammen, später aber entfernt sind, wie bei EPR. Die Messungen je einer Spinkomponente der 3 Teilchen können dann raumartig getrennt sein. Es ist:

$$Q_i|\psi\rangle = |\psi\rangle, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (16.21)$$

denn wegen  $\sigma_1|\pm\vec{e}_3\rangle = |\mp\vec{e}_3\rangle, \sigma_2|\pm\vec{e}_3\rangle = \pm|\mp\vec{e}_3\rangle$  ist z.B.

$$Q_1|\pm\vec{e}_3\rangle \otimes |\pm\vec{e}_3\rangle \otimes |\pm\vec{e}_3\rangle = (\pm i)^2|\mp\vec{e}_3\rangle \otimes |\mp\vec{e}_3\rangle \otimes |\mp\vec{e}_3\rangle.$$

Auf der Seite der verborgenen Variablen gilt weiterhin (16.17), nun wegen (L). Nach (16.4) ist  $\sigma_i(\omega) = \pm 1$ , ( $\rho_\psi$ -fast sicher), also gilt anstelle von (16.18) immerhin noch

$$Q_1(\omega)Q_2(\omega)Q_3(\omega) = (\sigma_1^{(1)}\sigma_1^{(2)}\sigma_1^{(3)})(\omega).$$

Aus (16.21, 16.4) folgt  $Q_i(\omega) = 1$  fast sicher. Damit ist  $\langle\psi|\sigma_1^{(1)}\sigma_1^{(2)}\sigma_1^{(3)}|\psi\rangle = 1$  nach (16.5), aber auch  $= -1$ : Widerspruch. □

### 16.3 Die Bellsche Ungleichung

Die Bellsche Ungleichung bezieht sich nicht auf die QM, sondern gilt für beliebige **lokale** Theorien verborgener Variablen: Zustände (bzw. Observablen) sind Wahrscheinlichkeitsmasse  $d\rho(\cdot)$  (bzw. Funktionen  $A(\cdot)$ ) auf  $\Omega \ni \omega$ ; Erwartungswerte sind durch

$$\langle A \rangle_\rho = \int_\Omega A(\omega) d\rho(\omega)$$

gegeben. (Übereinstimmung mit der QM, s. (16.5), wird hier nicht verlangt). Ferner soll Lokalität gelten: entsprechen  $A, B$  raumartig getrennten Messungen, so soll für  $AB$  (“zuerst  $B$ , dann  $A$  messen”) (16.20) gelten.

**Satz.** (Bell 1964, Clauser et al. 1969) Seien  $A, A'$  von  $B$  wie von  $B'$  raumartig getrennt, alle mit Werten  $\pm 1$ . Dann gilt

$$|\langle AB \rangle + \langle A'B \rangle + \langle AB' \rangle - \langle A'B' \rangle| \leq 2. \quad (16.22)$$

**Beweis.** Es ist

$$-2 \leq (A(\omega) + A'(\omega))B(\omega) + (A(\omega) - A'(\omega))B'(\omega) \leq 2,$$

und zwar ist der Ausdruck  $= \pm 2$ ; denn

$$\begin{aligned} A(\omega) = A'(\omega) &\implies A(\omega) + A'(\omega) = \pm 2, & A(\omega) - A'(\omega) = 0, \\ A(\omega) = -A'(\omega) &\implies A(\omega) + A'(\omega) = 0, & A(\omega) - A'(\omega) = \pm 2. \end{aligned}$$

Bildungs des Mittelwerts liefert (16.22) □

Die Messung der Spinkomponente  $S_{\vec{n}} \equiv \frac{\hbar}{2}\sigma_{\vec{n}}$  in Richtung  $\vec{n}$ , ( $|\vec{n}| = 1$ ), eines Spin  $\frac{1}{2}$ -Teilchens ergibt stets

$$\sigma_{\vec{n}}(\omega) = \pm 1.$$

Bei zwei Teilchen, 1,2, sollen, raumartig getrennt, die Komponenten

$$A = \sigma_{\vec{n}_1}^{(1)}, \quad A' = \sigma_{\vec{n}'_1}^{(1)}, \quad B = \sigma_{\vec{n}_2}^{(2)}, \quad B' = \sigma_{\vec{n}'_2}^{(2)}$$

gemessen werden (vgl. Fig. Seite 141). Bezeichnen wir die **Korrelationen** mit

$$\mathcal{C}(\vec{n}_1, \vec{n}_2) := \langle \sigma_{\vec{n}_1}^{(1)} \cdot \sigma_{\vec{n}_2}^{(2)} \rangle,$$

so folgt aus (16.22)

$$|\mathcal{C}(\vec{n}_1, \vec{n}_2) + \mathcal{C}(\vec{n}'_1, \vec{n}_2) + \mathcal{C}(\vec{n}_1, \vec{n}'_2) - \mathcal{C}(\vec{n}'_1, \vec{n}'_2)| \leq 2. \quad (16.23)$$

Diese Vorhersage soll nun mit der QM verglichen werden, wo  $\sigma_{\vec{n}}^{(i)} = \vec{\sigma}^{(i)} \cdot \vec{n}$ . Der Zustand  $|\psi\rangle$  sei das EPR Paar (16.1), für welches

$$(\vec{\sigma}^{(1)} + \vec{\sigma}^{(2)}) \cdot \vec{v} |\psi\rangle = 0, \quad \langle \psi | \vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{v} | \psi \rangle = 0, \quad (\vec{v} \in \mathbb{R}^3)$$

gelten. Damit ist

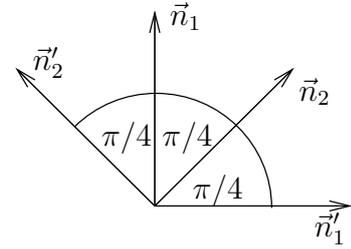
$$\mathcal{C}(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \langle \psi | (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{n}_1) (\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{n}_2) | \psi \rangle = - \langle \psi | \underbrace{(\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{n}_1) (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{n}_2)}_{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 + i\vec{\sigma}^{(1)} \cdot (\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2)} | \psi \rangle = -\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2.$$

Die Ungleichung (16.23), die nun

$$|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 + \vec{n}'_1 \cdot \vec{n}_2 + \vec{n}_1 \cdot \vec{n}'_2 - \vec{n}'_1 \cdot \vec{n}'_2| \leq 2 \quad (16.24)$$

(alle  $|\vec{n}_i| = |\vec{n}'_i| = 1$ ) lautet, ist aber **verletzt**: Für die Vektoren der Figur ist

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= \vec{n}'_1 \cdot \vec{n}_2 = \vec{n}_1 \cdot \vec{n}'_2 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \vec{n}'_1 \cdot \vec{n}'_2 &= \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$



die linke Seite in (16.24) also  $= 2\sqrt{2} > 2$ .

Dies beweist noch einmal den Satz auf Seite 145: die QM kann nicht durch eine lokale Theorie verborgener Variablen reproduziert werden.

Das Experiment von Aspect et al. (1982, anhand von Photonen statt Spin  $\frac{1}{2}$ -Teilchen) bestätigt die Verletzung der Bellschen Ungleichung (16.23).

## 16.4 Quanten Teleportation

(Bennet et al. 1993)

Auf Seite 25 wurden die Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ergebnisse einer Messung gemäss QM angegeben. Was aber ist der Zustand **nach** der Messung? Dazu das (umstrittene) Postulat der “Reduktion des Wellenpakets” (s. Übungen): Infolge einer Messung mit Zerlegung  $\mathbf{1} = \sum_i P_i$  geht der Zustand  $|\psi\rangle = \sum_i P_i |\psi\rangle$  über in  $P_i |\psi\rangle / \|P_i |\psi\rangle\|$  mit Wahrscheinlichkeit  $\langle \psi | P_i | \psi \rangle$ .

Alice und Bob besitzen je ein Spin  $\frac{1}{2}$ -Teilchen eines EPR Paars (Teilchen 1 und 2)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\vec{e}_3, -\vec{e}_3\rangle - |-\vec{e}_3, \vec{e}_3\rangle). \quad (16.25)$$

Alice soll den unbekanntem Zustand  $|\varphi\rangle$  eines weiteren Spins (Teilchen 0) an Bob übermitteln, und zwar unter Verwendung bloss klassischer Information, d.h. endlich vieler Bits. Dies ist (scheinbar) unmöglich: (a) Der Transport des Teilchens würde die Übertragung des Zustands  $|\varphi\rangle$  (QM Information) beinhalten. (b) Alice ist es nicht möglich,  $|\varphi\rangle$  zu messen, sondern nur, ob das Teilchen  $|+\vec{e}\rangle$  oder  $|-\vec{e}\rangle$  ist. Das Erfassen dieser klassischer Information würde  $|\varphi\rangle$  zerstören.

Mit Hilfe von (16.25) können Alice und Bob den Zustand des Teilchens 0 auf das Teilchen 2 übertragen (**Teleportation**). Der Zustand aller drei Teilchen ist

$$|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi, \vec{e}_3\rangle \otimes |-\vec{e}_3\rangle - |\varphi, -\vec{e}_3\rangle \otimes |\vec{e}_3\rangle).$$

Alice kann Messungen an ihren Teilchen 0 und 1 vornehmen, wie z.B. die mit Zerlegung

$$\mathbf{1} = \sum_{i=1}^4 P_i \equiv \sum_{i=1}^4 P_i \otimes \mathbf{1},$$

wobei  $P_i = |\chi_i\rangle\langle\chi_i|$  die Projektoren auf die orthonormierten Zustände

$$\begin{aligned} |\chi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\vec{e}_3, -\vec{e}_3\rangle - |-\vec{e}_3, \vec{e}_3\rangle), \\ |\chi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\vec{e}_3, -\vec{e}_3\rangle + |-\vec{e}_3, \vec{e}_3\rangle), \\ |\chi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\vec{e}_3, \vec{e}_3\rangle - |-\vec{e}_3, -\vec{e}_3\rangle), \\ |\chi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\vec{e}_3, \vec{e}_3\rangle + |-\vec{e}_3, -\vec{e}_3\rangle) \end{aligned}$$

sind. Die Zustände nach der Messung entnimmt man aus

$$\begin{aligned} P_1|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle &= \frac{1}{2}|\chi_1\rangle \otimes ( -|-\vec{e}_3\rangle\langle-\vec{e}_3|\varphi\rangle - |\vec{e}_3\rangle\langle\vec{e}_3|\varphi\rangle ), \\ P_2|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle &= \frac{1}{2}|\chi_2\rangle \otimes ( |-\vec{e}_3\rangle\langle-\vec{e}_3|\varphi\rangle - |\vec{e}_3\rangle\langle\vec{e}_3|\varphi\rangle ), \\ P_3|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle &= \frac{1}{2}|\chi_3\rangle \otimes ( |-\vec{e}_3\rangle\langle\vec{e}_3|\varphi\rangle + |\vec{e}_3\rangle\langle-\vec{e}_3|\varphi\rangle ), \\ P_4|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle &= \frac{1}{2}|\chi_4\rangle \otimes ( |-\vec{e}_3\rangle\langle\vec{e}_3|\varphi\rangle - |\vec{e}_3\rangle\langle-\vec{e}_3|\varphi\rangle ). \end{aligned}$$

Alice übermittelt das Ergebnis  $i = 1, 2, 3, 4$  (2 Bits) an Bob. Je nach Ergebnis wendet er folgende unitäre Operatoren auf sein Teilchen 2 an (realisierbar durch Spinpräzession, vgl. Übungen) und erhält dessen Zustand:

Alices Ergebnis	Bobs Operation	Zustand
1	$\mathbb{1}_2$	$- \varphi\rangle$
2	$\sigma_3$	$- \varphi\rangle$
3	$\sigma_1$	$ \varphi\rangle$
4	$\sigma_2$	$-i \varphi\rangle$

In allen Fällen ist der Zustand  $|\varphi\rangle$  (Phase ohne Bedeutung) wiederhergestellt!

Quanten Teleportation ist mit Photonen experimentell realisiert worden (Zeilinger et al. 1997).

# A Anhang: Selbstadjungierte Operatoren

---

## 1. Grundlagen

- Hilbertraum  $\mathcal{H}$  über  $\mathbb{C}$  mit Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$ ; Norm  $\|u\| := (u, u)^{1/2}$ .

Konvergenzbegriffe in  $\mathcal{H}$ :

— Normkonvergenz:

$$u_n \rightarrow u, \quad \text{d.h.} \quad \|u_n - u\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

— schwache Konvergenz:

$$u_n \xrightarrow{w} u, \quad \text{d.h.} \quad (v, u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (v, u), \quad (\forall v \in \mathcal{H}).$$

Es gilt:

$$u_n \xrightarrow{w} u, \quad \|u_n\| \rightarrow \|u\| \quad \Rightarrow \quad u_n \rightarrow u. \quad (\text{A.1})$$

- Beschränkte Operatoren,  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ :

$$B : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad u \mapsto Bu, \quad \text{linear}$$

mit  $\|Bu\| \leq C\|u\|$  für ein  $C \geq 0$ ;  $\|B\| :=$  kleinstes solches  $C$ .

Konvergenzbegriffe in  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ :

— Normkonvergenz:

$$B_n \rightarrow B, \quad \text{d.h.} \quad \|B_n - B\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

— starke Konvergenz:

$$B_n \xrightarrow{s} B, \quad \text{d.h.} \quad B_n u \rightarrow Bu, \quad (\forall u \in \mathcal{H}).$$

— schwache Konvergenz:

$$B_n \xrightarrow{w} B, \quad \text{d.h.} \quad B_n u \xrightarrow{w} Bu, \quad (\forall u \in \mathcal{H}).$$

Es gilt, s. (A.1):

$$B_n \xrightarrow{w} B, \quad \|B_n u\| \rightarrow \|Bu\| \quad (\forall u \in \mathcal{H}) \quad \Rightarrow \quad B_n \xrightarrow{s} B. \quad (\text{A.2})$$

- Satz von Riesz: Sei  $D \subset \mathcal{H}$  ein dichter Teilraum, d.h.  $\overline{D} = \mathcal{H}$  ( $\overline{D}$ : Normabschluss von  $D$ ). Zu jeder beschränkten Linearform  $l$  auf  $D$ ,

$$l : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad v \mapsto l(v), \quad \text{linear} \\ |l(v)| \leq C\|v\|,$$

gehört ein eindeutiges  $u \in \mathcal{H}$ , sodass

$$l(v) = (u, v). \quad (\text{A.3})$$

Anwendung: Ebenso gehört zu jeder Sesquilinearform  $b$  auf  $D$ ,

$$b : D \times D \rightarrow \mathbb{C}, \quad (u, v) \mapsto b(u, v), \quad \begin{array}{l} \text{linear in } v \\ \text{antilinear in } u \end{array} \\ |b(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|,$$

ein eindeutiges  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , sodass

$$b(u, v) = (u, Bv) . \quad (\text{A.4})$$

**Bemerkungen.** 1)  $b$ , und somit  $B$ , ist durch  $b(u, u)$  über die Polarisationsidentität bestimmt:

$$b(u, v) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^{-k} b(u + i^k v, u + i^k v) . \quad (\text{A.5})$$

2) Ist  $b(u, u) \geq 0$ , ( $\forall u \in \mathcal{H}$ ), so gilt die Cauchy Ungleichung

$$|b(u, v)|^2 \leq b(u, u) \cdot b(v, v) .$$

## 2. Unbeschränkte Operatoren

**Definition.** Ein Operator  $A$  auf  $\mathcal{H}$  ist eine lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} \supset D(A) & \longrightarrow & R(A) \subset \mathcal{H} , \quad u \mapsto Au \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Teilraum} & & \text{Teilraum} \\ \text{Definitionsbereich} & & \text{Wertebereich} \\ \text{von } A \text{ (domain)} & & \text{von } A \text{ (range)} \end{array}$$

**Regeln.**

$$\begin{aligned} A = B & : D(A) = D(B) \text{ und } Au = Bu, (\forall u \in D(A)) \\ A \subset B & : D(A) \subset D(B) \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \\ & (B \text{ heisst Fortsetzung von } A) \\ D(A + B) & = D(A) \cap D(B) \text{ und } (A + B)u = Au + Bu \\ D(AB) & = \{u \in D(B) \mid Bu \in D(A)\} \text{ und } (AB)u = A(Bu) \\ A^{-1} \text{ existiert} & : A \text{ ist injektiv, } D(A^{-1}) = R(A), R(A^{-1}) = D(A) \end{aligned}$$

Der Nullraum von  $A$  ist  $N(A) = \{u \in D(A) \mid Au = 0\}$ .

$$A \text{ injektiv} \Leftrightarrow N(A) = \{0\} .$$

**Definition.** Sei  $A$  ein Operator. Falls

$$\left. \begin{array}{l} u_n \in D(A) \\ u_n \rightarrow 0 \\ Au_n \rightarrow v \end{array} \right\} \Rightarrow v = 0 , \quad (\text{A.6})$$

so heisst  $A$  **abschliessbar**; dann ist der **Abschluss**  $\bar{A} (\supset A)$  definiert durch

$$\left. \begin{array}{l} u_n \in D(A) \\ u_n \rightarrow u \\ Au_n \rightarrow v \end{array} \right\} \Rightarrow: u \in D(\bar{A}) , \quad \bar{A}u = v , \quad (\text{A.7})$$

wobei (A.6) die Eindeutigkeit von  $v$  in (A.7) sichert.  $A$  heisst **abgeschlossen**, falls  $\overline{A} = A$ , d.h. falls die linke Seite von (A.7)  $u \in D(A)$ ,  $Au = v$  impliziert.

**Lemma 1.** Sei  $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  (d.h.  $A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$  ist injektiv und surjektiv, ferner  $A^{-1}$  beschränkt). Dann ist  $A = \overline{A}$ .

**Beweis.** Aus  $u_n \in D(A)$ ,  $u_n \rightarrow u$ ,  $Au_n \rightarrow v$  folgt  $u_n \rightarrow A^{-1}v = u$ . □

**Definition.** Die **Resolventenmenge**  $\rho(A)$  von  $A$  ist

$$\rho(A) := \{z \in \mathbb{C} \mid (z - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\}, \quad (\text{A.8})$$

d.h.  $z \in \rho(A)$  gdf  $N(z - A) = \{0\}$ ,  $R(z - A) = \mathcal{H}$  und die **Resolvente**  $(z - A)^{-1}$  beschränkt ist.

Falls es **ein** solches  $z$  gibt, ist nach dem Lemma  $z - A$  und somit auch  $A$  **abgeschlossen**.

Das **Spektrum** von  $A$  ist

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A). \quad (\text{A.9})$$

$\rho(A)$  ist eine offene Menge (ohne Beweis),  $\sigma(A)$  also eine abgeschlossene.

Für  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  ist

$$(z_1 - A)^{-1} - (z_2 - A)^{-1} = (z_2 - z_1)(z_1 - A)^{-1}(z_2 - A)^{-1},$$

insbesondere kommutieren die Resolventen von  $A$ .

**Definition.** Sei  $A$  ein **dicht definierter** Operator, d.h.  $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$ . Die **Adjungierte**  $A^*$  von  $A$  ist dann wie folgt definiert:  $u \in D(A^*)$ , falls

$$|(u, Av)| \leq C\|v\|, \quad (\forall v \in D(A));$$

dann ist die Linearform  $v \mapsto (u, Av)$  auf  $D(A)$  beschränkt, nach (A.3) also

$$(u, Av) = (w, v)$$

für ein durch  $u$  eindeutig bestimmtes  $w \in \mathcal{H}$ :

$$A^*u := w.$$

Offensichtlich ist  $A^*$  ein linearer Operator auf  $\mathcal{H}$ .

**Bemerkung.** Für  $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  gilt:  $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  mit  $\|A^*\| = \|A\|$ ;  $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*$ ,  $(\lambda \in \mathbb{C})$ ;  $(A + B)^* = A^* + B^*$ ;  $(AB)^* = B^*A^*$ ;  $A^{**} = A$ .

Allgemein gilt für ein dicht definierter Operator  $A$ :

**Lemma 2.** i)  $A^*$  ist abgeschlossen.

ii)  $A^*$  ist dicht definiert gdf  $A$  abschliessbar ist; dann ist  $A^{**} = \overline{A}$ .

iii)  $N(A^*) = R(A)^\perp$ .

iv) Falls  $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , so auch  $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  mit  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ .

v) Ist  $A$  abgeschlossen, so gilt  $\rho(A^*) = \overline{\rho(A)}$  (komplexe Konjugation).

**Beweis.** Nur iii): Für  $u \in D(A^*)$  ist

$$(u, Av) = (A^*u, v), \quad (\forall v \in D(A)). \quad (\text{A.10})$$

Dies verschwindet, falls  $u \in N(A^*)$ , also  $u \in R(A)^\perp$ . Umgekehrt folgt daraus  $u \in D(A^*)$ , dann  $u \in N(A^*)$  aus (A.10).  $\square$

**Definition.** Sei  $A$  dicht definiert.

a)  $A$  heisst **symmetrisch**, falls

$$(u, Av) = (Au, v), \quad (\forall u, v \in D(A)),$$

oder, je gleichbedeutend,

$$(u, Au) \in \mathbb{R}, \quad (\forall u \in D(A)), \quad (\text{A.11})$$

s. (A.5), bzw.

$$A \subset A^*. \quad (\text{A.12})$$

b)  $A$  heisst **selbstadjungiert**, falls

$$A = A^*.$$

Die Unterscheidung zwischen a), b) entfällt für beschränkte Operatoren (also überhaupt, falls  $\dim \mathcal{H} < \infty$ ), ist aber für  $\dim \mathcal{H} = \infty$  echt, selbst für abgeschlossene  $A$ .

Als Vorbereitung für ein Beispiel benötigen wir:

**Lemma 3.** Für  $\psi \in L^2[0, 1]$  sei  $d\psi/dx$  als Distribution definiert,

$$\frac{d\psi}{dx}[v] = -\psi\left[\frac{dv}{dx}\right], \quad (\forall v \in C_0^\infty(0, 1)).$$

Falls  $d\psi/dx \in L^2[0, 1]$ , so ist  $\psi(x)$  stetig (d.h.  $\psi$  kann dann als stetige Funktion gewählt werden). Gilt auch  $d\varphi/dx \in L^2[0, 1]$ , so

$$\int_0^1 \left( \frac{d\psi}{dx} \varphi(x) + \psi(x) \frac{d\varphi}{dx} \right) dx = \psi(x)\varphi(x) \Big|_0^1.$$

**Beweisskizze.** i) Ist  $d\psi/dx = 0$ , so ist  $\psi(x)$  konstant.

ii)  $\tilde{\psi}(x) := \int_0^x \frac{d\psi}{dx'} dx'$  ist wohldefiniert (da  $\int_0^x \left| \frac{d\psi}{dx'} \right| dx' \leq \left( \int_0^x \left| \frac{d\psi}{dx'} \right|^2 dx' \right)^{1/2} \left( \int_0^x 1 dx' \right)^{1/2}$ ) und stetig; ferner als Distribution  $d\tilde{\psi}/dx = d\psi/dx$ .

i), ii) zusammen:  $\psi = \tilde{\psi} + \text{konst.}$   $\square$

**Beispiel.** Sei  $\mathcal{H} = L^2[0, 1]$ .

a) Die Operatoren  $\tilde{p}$ ,  $p$  sind dicht definiert als

$$\begin{aligned} D(\tilde{p}) &= \left\{ \psi \in \mathcal{H} \mid \frac{d\psi}{dx} \in L^2[0, 1] \right\}, & \tilde{p}\psi &= -i \frac{d\psi}{dx}, \\ D(p) &= \left\{ \psi \in D(\tilde{p}) \mid \psi(0) = 0 = \psi(1) \right\}, & p\psi &= \tilde{p}\psi. \end{aligned}$$

Offenbar ist

$$p \subsetneq \tilde{p}.$$

Behauptung. i)  $\tilde{p}$  ist abgeschlossen; ii)  $\tilde{p}^* = p$ . Also ist  $p$  abgeschlossen (s. Lemma 2i)) und symmetrisch, da

$$p \subset \tilde{p} = \bar{\tilde{p}} = p^*$$

(s. Lemma 2ii)), nicht aber selbstadjungiert.

Beweis. i) aus  $\psi_n \in D(\tilde{p})$ ,  $\psi_n \rightarrow \psi$ ,  $\tilde{p}\psi_n \rightarrow \varphi$  folgt für jede Testfunktion  $v \in C_0^\infty(0, 1)$

$$(v, \varphi) = \lim_n -i \underbrace{\left(v, \frac{d\psi_n}{dx}\right)}_{\frac{d\psi_n}{dx}[\bar{v}] = -\psi_n[\frac{d\bar{v}}{dx}]} = \lim_n i \left(\frac{dv}{dx}, \psi_n\right) = i \underbrace{\left(\frac{dv}{dx}, \psi\right)}_{-\frac{dv}{dx}[\bar{v}]},$$

also  $-id\psi/dx = \varphi \in L^2[0, 1]$  und damit  $\psi \in D(\tilde{p})$ ,  $\tilde{p}\psi = \varphi$ .

ii)  $\varphi \in D(\tilde{p}^*)$  bedeutet

$$|(\tilde{p}\psi, \varphi)| \leq C\|\psi\|, \quad (\forall \psi \in D(\tilde{p})) \quad (\text{A.13})$$

und insbesondere

$$\left|\frac{d\varphi}{dx}[\bar{v}]\right| \leq C\|v\|, \quad (\forall v \in C_0^\infty(0, 1)), \quad (\text{A.14})$$

also  $d\varphi/dx \in L^2(0, 1)$ , s. (A.3), d.h.  $\varphi \in D(\tilde{p})$ . Zudem ist für  $\psi \in D(\tilde{p})$

$$\begin{aligned} (\tilde{p}\psi, \varphi) - (\psi, \tilde{p}\varphi) &= i \int_0^1 \left( \frac{d\bar{\psi}}{dx} \varphi(x) + \bar{\psi}(x) \frac{d\varphi}{dx} \right) dx \\ &= \bar{\psi}(1)\varphi(1) - \bar{\psi}(0)\varphi(0). \end{aligned}$$

Hier ist  $|(\psi, \tilde{p}\varphi)|/\|\psi\|$  ( $\leq \|\tilde{p}\varphi\|$ ) beschränkt, nicht aber  $\psi(0)/\|\psi\|$ ,  $\psi(1)/\|\psi\|$ , die unabhängig voneinander durch Wahl von  $\psi$  gross gemacht werden können. Also gilt (A.13) gdf  $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$ , d.h. falls  $\varphi \in D(p)$ ; dann ist auch  $\tilde{p}^*\varphi = \tilde{p}\varphi = p\varphi$ .

b) Sei  $\alpha \in \mathbb{C}$  mit  $|\alpha| = 1$  fest gewählt und  $p_\alpha$  dicht definiert durch

$$D(p_\alpha) = \{\psi \in D(\tilde{p}) \mid \psi(1) = \alpha\psi(0)\}, \quad p_\alpha\psi = \tilde{p}\psi.$$

Ebenfalls ist  $p_\alpha \subset \tilde{p}$ .

Behauptung.  $p_\alpha^* = p_\alpha$ .

Beweis.  $\varphi \in D(p_\alpha^*)$  impliziert wie in (A.14)  $\varphi \in D(\tilde{p})$ , ferner für  $\psi \in D(p_\alpha)$

$$(p_\alpha\psi, \varphi) - (\psi, \tilde{p}\varphi) = \bar{\psi}(0)(\bar{\alpha}\varphi(1) - \varphi(0)) = \bar{\alpha}\bar{\psi}(0)(\varphi(1) - \alpha\varphi(0)).$$

Nun ist  $\varphi \in D(p_\alpha^*)$  äquivalent zu  $\varphi \in D(\tilde{p})$ ,  $\varphi(1) = \alpha\varphi(0)$ , also zu  $\varphi \in D(p_\alpha)$ ; dann ist auch  $p_\alpha^*\varphi = \tilde{p}\varphi = p_\alpha\varphi$ .

**Satz 3.** Sei  $A$  ein symmetrischer Operator. Dann sind äquivalent:

- a)  $A^* = A$
- b)  $\sigma(A)$  ist reell

- c)  $R(z - A) = \mathcal{H}$  für alle  $z$  mit  $\operatorname{Im} z \neq 0$  (oder, äquivalent, für  $z = \pm i$ )  
d)  $A$  ist abgeschlossen und  $N(z - A^*) = \{0\}$  für alle  $z$  mit  $\operatorname{Im} z \neq 0$  (oder  $z = \pm i$ ).

**Beweis.** Wegen (A.11) ist für  $u \in D(A)$

$$|\operatorname{Im} z| \|u\|^2 = |\operatorname{Im} (u, (z - A)u)| \leq \|u\| \|(z - A)u\| ,$$

also

$$\|(z - A)u\| \geq |\operatorname{Im} z| \|u\| , \quad (\forall u \in D(A)) . \quad (\text{A.15})$$

Insbesondere ist  $N(z - A) = \{0\}$  für  $\operatorname{Im} z \neq 0$ .

i) Wäre  $R(z - A) = \mathcal{H}$  für ein  $\operatorname{Im} z \neq 0$ , so wäre nach (A.15)  $z \in \rho(A)$ ; nach Lemma 1  $z - A$  und damit  $A$  abgeschlossen.

ii) Wäre  $A$  abgeschlossen, so wäre es  $R(z - A)$ , ( $\operatorname{Im} z \neq 0$ ), auch. Denn:  $(z - A)u_n \rightarrow v$  mit  $u_n \in D(A)$  impliziert nach (A.15), dass  $u_n$  Cauchy ist, also  $u_n \rightarrow u$ , und wir schliessen  $u \in D(A)$ ,  $(z - A)u = v$ .

Daraus, aus Lemma 2iii) und aus  $M^{\perp\perp} = \overline{M}$  folgt (c)  $\Leftrightarrow$  (d). Die restlichen Äquivalenzen beweisen wir über (a)  $\Rightarrow$  (c/d, "alle")  $\Rightarrow$  (b)  $\Rightarrow$  (c/d, "  $\pm i$  ")  $\Rightarrow$  (a). Die Implikation (c)  $\Rightarrow$  (b) folgt aus (i), (b)  $\Rightarrow$  (c) aus der Definition von  $\sigma(A)$ .

(a)  $\Rightarrow$  (d):  $A$  ist abgeschlossen nach Lemma 2i). Zudem ist  $N(z - A^*) = N(z - A) = \{0\}$ , ( $\operatorname{Im} z \neq 0$ ) nach (A.15).

(c und d)  $\Rightarrow$  (a): Wegen (A.12) genügt es,  $D(A^*) \subset D(A)$  zu zeigen. Sei  $u \in D(A^*)$ . Wegen (c) gibt es  $v \in D(A)$ , sodass  $(i - A^*)u = (i - A)v = (i - A^*)v$ , also  $(i - A^*)(u - v) = 0$ ; wegen (d) ist  $u = v \in D(A)$ .  $\square$

### 3. Projektionswertige Masse

**Definition.** Ein **projektionswertiges Mass** ( $P$ -Mass)  $E$  auf  $\mathbb{R}$  ist ein  $*$ -Homomorphismus  $C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ,  $f \mapsto E(f)$ , d.h.

$$E(\alpha f + \beta g) = \alpha E(f) + \beta E(g) , \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) , \quad (\text{A.16})$$

$$E(fg) = E(f)E(g) , \quad (\text{A.17})$$

$$E(f)^* = E(\bar{f}) . \quad (\text{A.18})$$

Ist zudem

$$\{E(f)u \mid f \in C_0^\infty(\mathbb{R}), u \in \mathcal{H}\} \quad (\text{A.19})$$

dicht in  $\mathcal{H}$ , so ist  $E$  ein **Spektralmaß**.

Wir werden  $E$  auf sukzessiv grössere Funktionenklassen fortsetzen, die schliesslich die charakteristischen Funktionen  $\chi_M$  gewisser Mengen  $M \subset \mathbb{R}$  umfassen. Dann wird  $E_M := E(\chi_M)$  ein orthogonaler Projektor, vgl. (A.17, A.18), sein mit

$$E_{M_1}E_{M_2} = 0 , \quad E_{M_1 \cup M_2} = E_{M_1} + E_{M_2} , \quad (M_1 \cap M_2 = \emptyset) . \quad (\text{A.20})$$

Dies erklärt den Namen " $P$ -Mass". Da die Fortsetzungen eindeutig sein werden, nennen wir sie immer noch  $E$ .

Sei

$$C_\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig mit } \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0\} .$$

Beachte, dass  $C_\infty(\mathbb{R})$  der Abschluss von  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  in der Norm

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$$

ist.

**Lemma 4.** Sei  $E : C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  ein  $P$ -Mass. Dann gilt

$$\|E(f)\| \leq \|f\|_\infty . \quad (\text{A.21})$$

Es hat deshalb eine eindeutige, stetige Fortsetzung zu  $E : C_\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Diese erfüllt wieder (A.16–A.18, A.21), sowie

$$E(f) \geq 0, \quad (f \geq 0) . \quad (\text{A.22})$$

**Beweis.** (A.21): Wegen  $E(\alpha f) = \alpha E(f)$  genügt es zu zeigen, dass  $\|E(f)\| \leq 1$  für  $\|f\|_\infty < 1$ . Dann ist  $g = f\sqrt{1-|f|^2} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , also

$$\begin{aligned} 0 \leq E(g)^* E(g) &= E(|g|^2) = E(|f|^2) - E(|f|^4), \\ E(|f|^2) &\geq E(|f|^4) = E(|f|^2)^* E(|f|^2) \geq 0 . \end{aligned}$$

Mit  $\|B\| = \sup_{\|u\|=1} (u, Bu)$  für  $B \geq 0$  folgt

$$\|E(|f|^2)\| \geq \|E(|f|^4)\| , \quad (\text{A.23})$$

und mit  $\|B^*B\| = \|B\|^2$  auch noch

$$\begin{aligned} \|E(|f|^2)\| &= \|E(f)^* E(f)\| = \|E(f)\|^2, \\ \|E(|f|^4)\| &= \|E(|f|^2)\|^2 = \|E(f)\|^4, \end{aligned}$$

sodass  $\|E(f)\| \leq 1$  nach (A.23).

(A.22): Für  $f \geq 0$ ,  $f \in C_\infty(\mathbb{R})$  ist auch  $\sqrt{f} \in C_\infty(\mathbb{R})$ , also  $E(f) = E(\sqrt{f})^* E(\sqrt{f}) \geq 0$ .  $\square$

**Borel-Funktionen auf  $\mathbb{R}$ .** Für beliebige Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  schreiben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (\text{A.24})$$

für den punktweisen Limes. Falls  $f_n$  beschränkte Funktionen sind mit  $\sup_n \|f_n\| \leq C < \infty$ , so schreiben wir statt (A.24) auch

$$\text{p-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) ,$$

(dann ist  $\|f\|_\infty \leq C$ ).

**Definition.** Die Klasse  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  der Borel-Funktionen auf  $\mathbb{R}$  ist die kleinste Funktionenklasse  $\mathcal{F}$  mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} (\text{a}) \quad & C_\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F} , \\ (\text{b}) \quad & \text{Aus } f_n \in \mathcal{F} \text{ und } f_n \rightarrow f \text{ folgt } f \in \mathcal{F} . \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Ersetzt man  $f_n \rightarrow f$  durch  $f_n \xrightarrow{p} f$ , so erhält man die Klasse der beschränkten Borel-Funktionen  $\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mid \|f\|_\infty < \infty\}$ .

**Lemma 5.** *Jede konstante Funktion  $f(x) = c$  gehört zu  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R})$ . Mit  $f, g$  sind auch  $f + g$ ,  $fg$  und  $\bar{f}$  in  $\mathcal{B}$ :  $\mathcal{B}$  ist eine Funktionenalgebra mit Einselement und komplexer Konjugation.*

**Beweis.** Nur  $fg \in \mathcal{B}$ : Sei  $g \in C_\infty(\mathbb{R})$  fest. Die Klasse  $\mathcal{F}$  aller  $f$  mit  $fg \in \mathcal{B}$  erfüllt (A.25), umfasst also  $\mathcal{B}$ . Nun sei  $f \in \mathcal{B}$  fest. Die Klasse  $\mathcal{F}$  aller  $g$  mit  $fg \in \mathcal{B}$  erfüllt wieder (A.25), also ist  $fg \in \mathcal{B}$  für  $f, g \in \mathcal{B}$ .

**Definition.**  $M \subset \mathbb{R}$  heisst **Borel-Menge**, falls  $\chi_M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

**Lemma 6.** *Borel-Mengen sind*

- das Komplement jeder Borel-Menge.
  - die Vereinigung und der Durchschnitt abzählbar vieler Borelmengen.
  - jede offene und jede abgeschlossene Menge.
- (ohne Beweis).

**Integrale.** Ein **Integral** auf  $\mathbb{R}$  ist ein positives lineares Funktional  $C_\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$I(f) \geq 0, \quad (f \geq 0).$$

**Satz 7.** *Jedes Integral  $I$  mit*

$$I(f) \leq \|f\|_\infty \tag{A.26}$$

*hat eindeutige (lineare, positive) Fortsetzungen auf*

*(i)  $I : \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  mit der Eigenschaft (A.26) und*

$$I(f_n) \rightarrow I(f), \quad (f_n \xrightarrow{p} f), \tag{A.27}$$

*sowie weitergehend auf*

- (ii) • alle  $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $g \geq 0$ , wobei  $0 \leq I(g) \leq \infty$ ,*  
*• alle  $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  mit  $I(|f|) < \infty$ , wobei  $I(f) \in \mathbb{C}$  mit der Eigenschaft (dominierte Konvergenz)*

$$I(f_n) \rightarrow I(f), \tag{A.28}$$

*falls  $f_n \rightarrow f$  mit  $|f_n| \leq g$ ,  $I(g) < \infty$ .*

Dies ist der Satz von Riesz-Markov. Man schreibt auch

$$I(f) = \int f(\lambda) d\mu(\lambda), \tag{A.29}$$

wobei  $\mu$  das entsprechende Borel-Mass ist:  $\mu(M) = I(\chi_M)$ , ( $M$  Borel-Menge).

**Satz 8.** *Jedes  $P$ -Mass  $E : C_\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  hat eine eindeutige Fortsetzung  $E : \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  mit (A.16–A.18, A.21, A.22) und*

$$E(f_n) \xrightarrow{s} E(f), \quad (f_n \xrightarrow{p} f). \tag{A.30}$$

**Beweis.** Eindeutigkeit: Seien  $E_1, E_2$  solche Fortsetzungen mit  $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}) \mid E_1(f) = E_2(f)\}$ . Da  $\mathcal{F}$  (A.25) erfüllt, ist  $\mathcal{F} = \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R})$ .

Existenz: Für jedes  $u \in \mathcal{H}$  ist

$$I_u(f) := (u, E(f)u) \quad (\text{A.31})$$

ein Integral mit  $|I_u(f)| \leq \|u\|^2 \|f\|_\infty$ , das nach Satz 7 eine Fortsetzung auf  $f \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R})$  hat. Die Sesquilinearform

$$b_f(u, v) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^{-k} I_{u+i^k v}(f), \quad (f \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R})), \quad (\text{A.32})$$

erfüllt  $b_f(u, v) = (u, E(f)v)$  für  $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ , s. (A.5). Die Klasse aller  $f \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R})$ , für welche  $b_f$  eine beschränkte Sesquilinearform (mit Norm  $\|f\|_\infty$ ) ist, erfüllt (A.25) wegen (A.27). Somit ist  $E(f) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  durch  $(u, E(f)v) = b_f(u, v)$  definiert für alle  $f \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R})$ , vgl. (A.4). Ferner ist nach (A.27)

$$(u, E(f_n)v) \rightarrow (u, E(f)v), \quad (f_n \xrightarrow{p} f), \quad (\text{A.33})$$

d.h.  $E(f_n) \xrightarrow{w} E(f)$ . Damit zeigt man die Eigenschaften (A.16–A.18), etwa (A.17) nach dem Muster des Beweises von Lemma 5. Aus (A.33) folgt deshalb

$$\|E(f_n)v\|^2 = (v, E(|f_n|^2)v) \rightarrow (v, E(|f|^2)v) = \|E(f)v\|^2,$$

mit (A.2), also  $E(f_n) \xrightarrow{s} E(f)$ . □

**Korollar.** Durch  $E_M = E(\chi_M)$  ist für jede Borel-Menge  $M \subset \mathbb{R}$  ein Projektor  $E_M = E_M^2 = E_M^*$  erklärt mit den Eigenschaften (A.20). Ausserdem gilt für jede Folge  $M_n$  von Borel-Mengen

$$\begin{aligned} E_{M_1 \cap M_2 \cap \dots} &= s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} E_{M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n}, \\ E_{M_1 \cup M_2 \cup \dots} &= s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} E_{M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n}. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

**Bemerkung.** In der Schreibweise (A.29) lautet (A.31)  $I_u(f) = \int f(\lambda) d\mu_u(\lambda)$  mit  $\mu_u(M) = (u, E_M u)$ . Man schreibt deshalb auch

$$E(f) := \int f(\lambda) dE(\lambda). \quad (\text{A.35})$$

**Definition.** Der **Träger**  $\text{supp } E$  eines  $P$ -Masses  $E$  ist

$$x \in \text{supp } E \Leftrightarrow E_M \neq 0 \text{ für jede offene Menge } M \ni x.$$

**Lemma 9.**  $\text{supp } E$  ist abgeschlossen und

$$E_{\mathbb{R} \setminus \text{supp } E} = 0. \quad (\text{A.36})$$

Für jede stetige, beschränkte Funktion  $f$  ist

$$\|E(f)\| = \sup_{x \in \text{supp } E} |f(x)|. \quad (\text{A.37})$$

**Beweis.**  $x \notin \text{supp } E$  gdf  $E_M = 0$  für eine offene Umgebung  $M \ni x$ . Damit ist  $\mathbb{R} \setminus \text{supp } E$  offen und  $E_K = 0$  für jede kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R} \setminus \text{supp } E$ . Wegen  $\mathbb{R} \setminus \text{supp } E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$  mit  $K_n = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq n, \text{dist}(x, \text{supp } E) \geq 1/n\}$  folgt (A.36) aus (A.34).

Sei  $\chi = \chi_{\text{supp } E}$ . Nach (A.36) ist  $E(1 - \chi) = 0$ , also

$$\|E(f)\| = \|E(\chi f)\| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\chi(x)f(x)| = \sup_{x \in \text{supp } E} |f(x)| \quad (\text{A.38})$$

für alle  $f \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R})$ , s. (A.21). Ist  $f$  stetig und  $c < \sup_{x \in \text{supp } E} |f(x)|$ , so enthält  $M = \{x \mid |f(x)| > c\}$  auch ein  $\lambda \in \text{supp } E$ . Da  $M$  offen ist, ist  $E_M \neq 0$ , also gibt es ein  $u \in \mathcal{H}$ , ( $\|u\| = 1$ ), mit  $u = E_M u$ . Für dieses ist

$$\|E(f)u\|^2 = (u, E(|f|^2 \chi_M)u) \geq c^2 (u, E(\chi_M)u) = c^2 \|u\|^2,$$

also  $c \leq \|E(f)\|$ , womit die zu (A.38) umgekehrte Ungleichung auch gilt.  $\square$

Im Anschluss an Satz 8 erlaubt die Zusatzeigenschaft (A.19) eines Spektralmasses eine weitere Formulierung:

**Lemma 10.** *Der Teilraum (A.19) ist dicht in  $\mathcal{H}$  genau dann, falls  $E(1) = \mathbf{1}$ , (d.h.  $E_{\mathbb{R}} = \mathbf{1}$ ).*

**Beweis.** Wegen  $E(f)u = E(1)E(f)u$  ist der Teilraum nicht dicht, falls  $E(1) \neq \mathbf{1}$ . Sei umgekehrt  $E(1) = \mathbf{1}$ . Da die Funktion  $f \equiv 1$  der  $p$ -Limes einer Folge  $f_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  ist, folgt aus (A.30), dass  $u = E(1)u = \lim_n E(f_n)u$ , für alle  $u \in \mathcal{H}$ .  $\square$

Schliesslich erweitern wir ein  $P$ -Mass auf unbeschränkte Funktionen  $f$ , um den Preis, dass  $E(f)$  es auch sein darf.

**Satz 11.** *Jedes  $P$ -Mass  $E$  hat eine eindeutige Fortsetzung*

$$E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \{\text{dicht definierte, abgeschlossene Operatoren auf } \mathcal{H}\}$$

mit

$$D_f := D(E(f)) \supset D_g, \quad (|f| \leq g)$$

und

$$E(f_n)u \rightarrow E(f)u, \quad (u \in D_g), \quad (\text{A.39})$$

falls  $f_n \rightarrow f$ ,  $|f_n| \leq g$ . Diese erfüllt

$$E(\alpha f + \beta g) \supset \alpha E(f) + \beta E(g)$$

(mit  $=$ , falls  $f$  oder  $g \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R})$ ),

$$E(fg) \supset E(f)E(g) \quad (\text{A.40})$$

(mit  $=$ , falls  $g \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R})$ ), sowie (A.18, A.22).

**Beweis.** (nur Konstruktion von  $E(f)$ ). Für festes  $u \in \mathcal{H}$  ist

$$I_u(f) = (u, E(f)u)$$

ein Integral für  $f \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R})$  im Sinn von Satz 7, Teil (i). Es gilt

$$I_u(|f|^2) = (u, E(f)^* E(f)u) = \|E(f)u\|^2, \quad (\text{A.41})$$

nach der Dreiecksungleichung für  $\|E(f)u\|$  also

$$I_{\alpha u + \beta v}(|f|^2)^{1/2} \leq |\alpha| I_u(|f|^2)^{1/2} + |\beta| I_v(|f|^2)^{1/2}, \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}). \quad (\text{A.42})$$

Auch ist

$$I_{u-E(1)u}(|f|^2) = \|E(f)(u - E(1)u)\|^2 = 0. \quad (\text{A.43})$$

Für  $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  setzen wir dann mit Teil (ii) des Satzes

$$D_f := \{u \in \mathcal{H} \mid I_u(|f|^2) < \infty\}$$

und behaupten:  $D_f$  ist (a) ein Teilraum, der (b) dicht in  $\mathcal{H}$  liegt. Sei dazu  $f_n := f\chi_{\Omega_n}$ ,  $\Omega_n = \{x \mid |f(x)| \leq n\}$ , also  $f_n \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R})$ . Wegen  $f_n \rightarrow f$ ,  $|f_n| \leq |f|$  folgt mit (A.28)

$$I_u(|f_n|^2) \rightarrow I_u(|f|^2), \quad (\text{A.44})$$

sodass (A.42, A.43) auch für  $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  gelten. Insbesondere ist (a) gezeigt. Zum Beweis von (b): für  $n \geq m$  ist  $f_n\chi_{\Omega_m} = f_m$ ; damit ist

$$I_{E_{\Omega_m}u}(|f_n|^2) = \|E(f_n)E(\chi_{\Omega_m})u\|^2 = \|E(f_m)u\|^2$$

unabhängig von  $n$ , nach (A.44) also  $E_{\Omega_m}u \in D_f$ . Da  $E_{\Omega_m}u \xrightarrow{m \rightarrow \infty} E(1)u$  und da  $u - E(1)u \in D_f$ , s. (A.43), folgt (b). Nun können wir eine Sesquilinearform  $b_f(u, v)$  wie in (A.32) definieren, diesmal für  $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  und  $u, v \in D_f$ . Für  $f \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R})$  ist

$$b_f(u, v) = (u, E(f)v) \quad (\text{A.45})$$

mit, s. (A.41),

$$|b_f(u, v)| \leq \|u\| \|E(f)v\| = \|u\| I_v(|f|^2)^{1/2}. \quad (\text{A.46})$$

Wegen (A.28) mit  $|f_n| \leq 1 + |f|^2$  ist  $I_{u+i^k v}(f_n) \rightarrow I_{u+i^k v}(f)$  und damit  $b_{f_n}(u, v) \rightarrow b_f(u, v)$ , sodass (A.46) auch für  $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $u, v \in D_f$  gilt. Nach (A.3) definiert dann (A.32)  $E(f)v$  für  $v \in D_f \equiv D(E(f))$ .  $\square$

#### 4. Selbstadjungierte Operatoren, Spektralmasse und 1-parametrische unitäre Gruppen

**Satz** (von Neumann, 1930). Für jedes Spektralmaß  $E$  auf  $\mathbb{R}$  ist

$$A = E(\text{id}), \quad (\text{id} : \lambda \mapsto \lambda), \quad (\text{A.47})$$

d.h. in der Notation (A.35)

$$A = \int \lambda dE_\lambda,$$

selbstadjungiert. Umgekehrt hat jeder Operator  $A = A^*$  eine Spektraldarstellung (A.47), wobei das Spektralmaß  $E$  durch  $A$  eindeutig bestimmt ist.

**Korollar.**  $\text{supp } E = \sigma(A)$ .

**Bemerkung.** Für  $A = A^*$  stimmt somit (3.9) mit der allgemeinen Definition (A.9) des Spektrums überein, vgl. auch (3.21).

Wichtig für den unten dargelegten Beweis des Spektralsatzes ist

**Definition.** Eine 1-parametrische unitäre Gruppe ist eine Abbildung

$$U : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) , \quad t \mapsto U(t)$$

mit den Eigenschaften

$$U(t)^{-1} = U(t)^* , \tag{A.48}$$

$$U(0) = \mathbf{1} , \tag{A.49}$$

$$U(t+s) = U(t) U(s) , \tag{A.50}$$

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow 0} U(t) = \mathbf{1} . \tag{A.51}$$

**Bemerkung.** Es folgt

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow t_0} U(t) = U(t_0) , \quad U(-t) = U(t)^{-1} .$$

**Definition.** Die **Erzeugende**  $A$  von  $U$  ist

$$Av := -i \frac{d}{dt} U(t)v \Big|_{t=0} = -i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (U(t) - \mathbf{1})v , \tag{A.52}$$

wobei  $v \in D(A)$ , falls der Limes existiert.

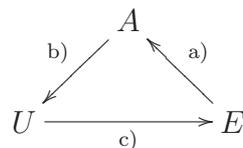
Es ist evident, dass  $A$  mindestens symmetrisch ist:

$$0 = i \frac{d}{dt} (U(t)u, U(t)v) \Big|_{t=0} = (Au, v) - (u, Av) , \quad (u, v \in D(A)) . \tag{A.53}$$

Es gilt aber mehr:

**Satz 12.** Die Erzeugende  $A$  einer 1-parametrischen unitären Gruppe  $U$  ist selbstadjungiert. Umgekehrt ist jeder Operator  $A = A^*$  eine Erzeugende (A.52), wobei  $U$  durch  $A$  eindeutig bestimmt ist.

Zum Beweis der Sätze betrachten wir die beiden Zuordnungen in je nur einer Richtung, sowie eine weitere zwischen 1-parametrischen unitären Gruppen und Spektralmasse:



**Lemma 13.**

- a) Sei  $E$  ein Spektralmaß und  $E \mapsto A$  durch (A.47) gegeben. Dann ist  $A = A^*$ .
- b) Sei  $A = A^*$ . Dann ist  $A$  die Erzeugende (A.52) einer eindeutig bestimmten 1-parametrischen unitären Gruppe, notiert  $A \mapsto U$ .
- c) Sei  $U$  eine 1-parametrische unitäre Gruppe. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Spektralmaß  $E$  (notiert  $U \mapsto E$ ) mit

$$U(t) = E(e^{it\lambda}). \quad (\text{A.54})$$

Die drei Abbildungen sind injektiv.

**Beweis** der Sätze. Es genügt zu zeigen, dass die Zusammensetzung der Abbildungen (a, b, c) die Identität ergibt. Da sie injektiv sind, reicht es, bei einem beliebigen Vertex, z.B.  $A$ , zu beginnen. Nach Konstruktion von (b, c) ist

$$Av = -i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (E(e^{it\lambda}) - \mathbf{1})v = -i \lim_{t \rightarrow 0} E\left(\frac{e^{it\lambda} - 1}{t}\right)v$$

mit  $v \in D(A)$  gdf der Limes existiert. Für  $v \in D(E(\lambda)) (= D(E(|\lambda|)))$  folgt mit (A.39) wegen

$$\frac{e^{it\lambda} - 1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \lambda, \quad \left| \frac{e^{it\lambda} - 1}{t} \right| \leq |\lambda|,$$

dass die rechte Seite gleich  $E(\lambda)v$  ist, also  $A \supset E(\lambda)$ . Zusammen mit der adjungierten Beziehung,  $A = A^* \subset E(\lambda)^* = E(\lambda)$ , folgt  $A = E(\lambda)$ .  $\square$

**Beweis** von a). Sei  $A := E(\lambda)$ .

$A^* = A$ : folgt aus  $E(f)^* = E(\bar{f})$  für  $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , s. Satz 11.  $E \mapsto A$  injektiv: Aus  $(z - \lambda)(z - \lambda)^{-1} = \mathbf{1}$ , ( $\text{Im } z \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$ ) folgt mit (A.40) und Lemma 10

$$\begin{aligned} (z - E(\lambda))E((z - \lambda)^{-1}) &= E(z - \lambda)E((z - \lambda)^{-1}) = \mathbf{1}, \\ E((z - \lambda)^{-1})(z - E(\lambda)) &\subset \mathbf{1}, \end{aligned}$$

also

$$(z - A)^{-1} = E((z - \lambda)^{-1}). \quad (\text{A.55})$$

Wegen (A.16, A.17) ist dann  $E(f)$  für alle  $f$  der Form

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^n a_i (z_i - \lambda)^{-n_i}, \quad (\text{Im } z_i \neq 0, a_i \in \mathbb{C}, n_i = 1, 2, \dots),$$

durch  $A$  bestimmt. Diese  $f$ 's liegen nach dem Satz von Weierstrass dicht in  $C_\infty(\mathbb{R})$  bzgl. der  $\|f\|_\infty$ -Norm. Damit ist das Spektralmaß  $E$  durch  $A$  bestimmt.  $\square$

**Beweis** des Korollars. Nach (A.55, A.37) ist

$$\|(z - A)^{-1}\| = \sup_{x \in \text{supp } E} |z - x|^{-1}, \quad (\text{Im } z \neq 0).$$

Diese Norm divergiert genau dann, wenn  $\text{dist}(z, \sigma(A)) \rightarrow 0$ , die rechte Seite, wenn  $\text{dist}(z, \text{supp } E) \rightarrow 0$ .  $\square$

**Beweis** von b). Nach Definition (A.52) ist  $A$  durch  $U$  bestimmt, d.h.  $A \mapsto U$  injektiv. Die Konstruktion von  $U$  bei gegebenem  $A = A^*$  besteht aus folgenden Schritten.

- i) Approximation von  $A$  durch  $A_n^\pm \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ .
- ii) Definition:  $U(\pm t) = \text{s-lim}_n e^{\pm i A_n^\pm t}$  für  $t \geq 0$ .
- iii)  $U(t)$  ist eine 1-parametrische unitäre Gruppe.
- iv) Die Erzeugende von  $U(t)$  ist  $A$ .

i) Wir setzen, s. Satz 3,

$$A_n^+ = inA(A + in)^{-1} = in + n^2(A + in)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \quad (\text{A.56})$$

und behaupten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^+ v = Av, \quad (\forall v \in D(A)). \quad (\text{A.57})$$

Wegen  $A_n^+ v = in(A + in)^{-1} Av$  genügt es, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} in(A + in)^{-1} u = u, \quad (\forall u \in \mathcal{H}).$$

Wegen  $\|in(A + in)^{-1}\| \leq 1$  genügt es, dies für  $u \in D(A)$  zu zeigen:

$$u = (A + in)^{-1}(A + in)u = in(A + in)^{-1}u + (A + in)^{-1}Au,$$

wobei der letzte Term für  $n \rightarrow \infty$  verschwindet.

ii) 
$$e^{iA_n^+ t} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (iA_n^+ t)^k$$

ist analytisch in  $t$  mit

$$\frac{d}{dt} e^{iA_n^+ t} = iA_n^+ e^{iA_n^+ t}.$$

Für  $t \geq 0$  erfüllt

$$U_n^+(t) := e^{iA_n^+ t} = e^{itn^2(A+in)^{-1}} e^{-tn}$$

(A.49–A.51) sowie

$$\|U_n^+(t)\| \leq e^{t\|n^2(A+in)^{-1}\|} e^{-tn} \leq e^{tn} e^{-tn} = 1. \quad (\text{A.58})$$

Da die  $A_n$ 's miteinander kommutieren, ist

$$\begin{aligned} U_m^+(t) - U_n^+(t) &= \int_0^t ds \frac{d}{ds} (U_n^+(t-s)U_m^+(s)) \\ &= i \int_0^t ds U_n^+(t-s)U_m^+(s)(A_m - A_n) \end{aligned}$$

und somit

$$\|(U_m^+(t) - U_n^+(t))v\| \leq |t| \|(A_m - A_n)v\|.$$

Mit (A.57) ist  $U_n^+(t)v$  Cauchy, also existiert

$$U(t)v := \lim_{n \rightarrow \infty} U_n^+(t)v, \quad (t \geq 0), \quad (\text{A.59})$$

zunächst für  $v \in D(A)$ , gleichmässig in beschränkten  $t$ -Intervallen. Da  $D(A)$  dicht ist und wegen (A.58) gilt dasselbe für  $v \in \mathcal{H}$ . Analog definieren wir  $A_n^-$  durch Ersetzung  $i \rightarrow -i$  in (A.56) und

$$U_n(-t) := e^{-iA_n^- t}, \quad U(-t) := s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} U_n^-( -t)$$

für  $t \geq 0$ . Damit ist  $U(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , ( $t \in \mathbb{R}$ ) mit  $\|U(t)\| \leq 1$ .

iii) Eigenschaften (A.49–A.51) gehen von  $U_n^\pm(t)$  auf  $U(t)$  über, (A.50) allerdings nur für  $t, s$  mit selbem Vorzeichen. Ist ihr Vorzeichen verschieden, so genügt der Spezialfall  $t = -s$ ,

$$U(t)U(-t) = U(-t)U(t) = \mathbf{1} : \quad (\text{A.60})$$

Sei nämlich z.B.  $s \geq t \geq 0$ . Dann folgt aus  $U(s) = U(s-t)U(t) = U(t)U(s-t)$ , dass

$$U(s)U(-t) = U(s-t), \quad U(-t)U(s) = U(s-t).$$

Gl. (A.60) folgt aus

$$\begin{aligned} U_n^+(t)U_n^-(-t) - 1 &= i \int_0^t ds U_n^+(s)U_n^-(-s)(A_n^+ - A_n^-) \\ \|(U_n^+(t)U_n^-(-t) - 1)v\| &\leq |t| \|(A_n^+ - A_n^-)v\| \end{aligned}$$

und (A.57). Wegen (A.60) existiert  $U(t)^{-1}$  und  $\|U(t)v\| \leq \|v\| \leq \|U(t)v\|$ . Damit ist  $U(t)$  unitär.

iv) Es ist

$$U_n^+(t)v - v = i \int_0^t ds U_n^+(s)A_n v, \quad (t \geq 0).$$

Daraus, aus (A.57, A.59) und aus analogen Gleichungen für  $t \leq 0$  folgt

$$U(t)v - v = i \int_0^t ds U(s)A v, \quad (t \in \mathbb{R})$$

für  $v \in D(A)$ . Damit existiert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (U(t) - 1)v = iA v, \quad (v \in D(A)),$$

also  $A \subset B$ , wobei  $B$  die Erzeugende von  $U$  ist. Nach (A.53) ist  $B \subset B^*$ , also auch  $A \supset B$ , d.h.  $B = A$ .  $\square$

**Beweis** von c). Wieder bestimmt (A.54)  $U$  eindeutig aus  $E$ . Konstruktion von  $E$ :

i) Definition von  $E(f)$  für  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ .

ii) Eigenschaften (A.16–A.19).

iii) Gl. (A.54).

$$i) \quad E(f) := \int dt \hat{f}(t) U(t), \quad (f \in C_0^\infty(\mathbb{R})), \quad (\text{A.61})$$

wobei die Fouriertransformierte

$$\hat{f}(t) := (2\pi)^{-1} \int dx f(x) e^{-itx}$$

für  $|t| \rightarrow \infty$  rascher als jede Inverse Potenz von  $t$  abfällt. Damit ist (A.61) als starker Limes von Riemann-Summen wohldefiniert und  $E(f) \in \mathcal{H}$ .

ii) Evident sind (A.16, A.18), letzteres wegen  $U(t)^* = U(-t)$ .

$$(A.17): \quad f(x)g(x) = \int dt ds \hat{f}(t) \hat{g}(s) e^{i(t+s)x} = \int dt e^{itx} \int ds \hat{f}(t-s) \hat{g}(s),$$

also

$$\begin{aligned} E(fg) &= \int dt \left( \int ds \hat{f}(t-s) \hat{g}(s) \right) U(t) \\ &= \int dt ds \hat{f}(t) \hat{g}(s) U(t+s) = E(f)E(g) \end{aligned}$$

wegen (A.50).

(A.19): Zu zeigen ist  $w = 0$ , falls  $w \perp E(f)u$  für alle  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $u \in \mathcal{H}$ . Insbesondere ist dann

$$0 = (w, E(f)w) = \int dt \hat{f}(t) (w, U(t)w).$$

Da  $(w, U(t)w)$  stetig in  $t$  ist, folgt  $(w, U(t)w) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , also auch für  $t = 0$ :  $\|w\|^2 = 0$ .

iii) Für  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  ist

$$e^{itx} f(x) = \int ds \hat{f}(s) e^{i(t+s)x} = \int ds \hat{f}(s-t) e^{isx},$$

also für alle  $u \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} E(e^{itx})E(f)u &= \int ds \hat{f}(s-t) U(s)u \\ &= U(t) \int ds \hat{f}(s) U(s)u = U(t)E(f)u. \end{aligned}$$

Wegen (A.19) folgt nun (A.54). □

**Beispiel.** Auf  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$  ist die Translation um  $t$  definiert als

$$(U(t)\psi)(x) = \psi(x-t). \tag{A.62}$$

$U(t)$  ist eine 1-parametrische unitäre Gruppe mit Erzeugenden  $-p$ , wobei

$$D(p) = \left\{ \psi \in \mathcal{H} \mid \frac{d\psi}{dx} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}, \quad p\psi = -i \frac{d\psi}{dx}.$$

Wir vergleichen dies mit Bsp. a) auf S. 152. Dass dort  $p, \tilde{p}$  nicht selbstadjungiert sind, steht nun im Zusammenhang damit, dass  $x \mapsto x-t$  das Intervall  $[0, 1] \ni x$  nicht bewahrt, also (A.62) keine 1-parametrische unitäre Gruppe mehr definiert. Dies ist wieder der Fall, falls  $[0, 1]$  "zum Kreis geschlossen" wird: Sei  $\alpha \in \mathbb{C}$  mit  $|\alpha| = 1$  und

$$(U_\alpha(t)\psi)(x) = \alpha^{[x-t]} \psi((x-t)), \quad (t \in \mathbb{R}),$$

wobei  $\lambda = [\lambda] + (\lambda)$  in ganzer Teil und Rest zerlegt wurde. Für  $0 < t < 1$  und  $\psi(x)$  stetig ist es  $(U_\alpha(t)\psi)(x)$  auch, ausser allenfalls bei  $x = t$ :

$$(U_\alpha(t)\psi)(t-) = \alpha^{-1}\psi(1) , \quad (U_\alpha(t)\psi)(t+) = \psi(0) .$$

Insbesondere ist  $U_\alpha(t)\psi \in D(\tilde{p})$  gdf  $\psi \in D(\tilde{p})$  und  $\psi(1) = \alpha\psi(0)$ , also  $\psi \in D(p_\alpha)$  aus Bsp. b), S. 153. Man schliesst, dass  $-p_\alpha$  die Erzeugende von  $U_\alpha$  ist.

## B Anhang: Kugelfunktionen

---

Gesucht ist ein “natürliches” vollständiges Funktionensystem auf der Einheitskugel  $S^2 = \{\vec{e} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{e}| = 1\}$ .

**Motivation.** Die analoge Frage für den Einheitskreis  $S^1 = \{\vec{e} \in \mathbb{R}^2 \mid |\vec{e}| = 1\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + ix_2 = e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R} \bmod 2\pi\}$  hat eine von den Fourierreihen her wohlbekannte Antwort:

$$f_n(\vec{e}) = e^{in\theta} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Die Funktionen  $f_n$  sind die Einschränkung auf  $S^1$  folgender Polynome auf  $\mathbb{R}^2$

$$u_n(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1 + ix_2)^n & , \quad n > 0 \\ 1 & , \quad n = 0 \\ (x_1 - ix_2)^{-n} & , \quad n < 0. \end{cases}$$

Beachte, dass  $u_n$  ein homogenes, harmonisches Polynom vom Grad  $|n|$  ist, und dass

$$u_n(r\vec{e}) = r^{|n|} f_n(\vec{e}).$$

Im Falle der Einheitskugel  $\Omega \equiv S^2$  setzen wir deshalb:

**Definition.**  $Y_l : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ist eine Kugelfunktion zum Index  $l = 0, 1, 2, \dots$ , falls  $Y_l$  die Einschränkung auf  $\Omega$  eines homogenen, harmonischen ( $\Delta u_l = 0$ ) Polynoms  $u_l : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  ist:

$$u_l(r\vec{e}) = r^l Y_l(\vec{e}). \quad (\text{B.1})$$

**Satz.**

- $\vec{M}^2 Y_l = l(l+1)Y_l$ .
- $(Y_l, Y_{l'}) = 0$  für  $l \neq l'$ .
- Die  $Y_l$  (zu festem  $l$ ) bilden einen  $(2l+1)$ -dimensionalen Unterraum  $\mathcal{Y}_l \subset L^2(\Omega)$ .
- Diese Unterräume spannen  $L^2(\Omega)$  auf:

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{Y}_l.$$

**Beweis.** a) Aus

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{1}{r^2} \vec{M}^2,$$

vgl. (4.7), folgt mit (B.1)

$$0 = \Delta u_l = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{1}{r^2} \vec{M}^2 \right) r^l Y_l = r^{l-2} (l(l+1) - \vec{M}^2) Y_l.$$

b) Eigenvektoren selbstadjungierter Operatoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal:  $l(l+1)(Y_l, Y_{l'}) = (\vec{M}^2 Y_l, Y_{l'}) = (Y_l, \vec{M}^2 Y_{l'}) = l'(l'+1)(Y_l, Y_{l'})$ .

c) Sei  $H_l$  der Raum aller homogenen Polynome

$$P_l(\vec{x}) = \sum_{\substack{m_i \in \mathbb{N} \\ m_1+m_2+m_3=l}} c_{m_1 m_2 m_3} x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3}$$

vom Grad  $l$ . Die Anzahl der Koeffizienten ist

$$\dim H_l = (l+1) + l + (l-1) + \dots + 1.$$

Offenbar  $\Delta : H_l \rightarrow H_{l-2}$ . Der Raum  $K_l$  der homogenen, harmonischen Polynome von Grad  $l$ , d.h.  $K_l = \text{Ker } \Delta$ , hat also die Dimension

$$\dim K_l \geq \dim H_l - \dim H_{l-2} = (l+1) + l = 2l + 1. \quad (\text{B.2})$$

Andererseits ist nach (b) und  $r^l = (\vec{x}^2)^k r^{l-2k}$

$$H_l \supset r^l (\mathcal{Y}_l \oplus \mathcal{Y}_{l-2} \oplus \dots) \quad (\text{B.3})$$

mit Dimensionen

$$\begin{aligned} \dim H_l &\geq \dim K_l + \dim K_{l-2} + \dots \\ &\geq (l+1) + l + (l-1) + \dots + 1 = \dim H_l. \end{aligned}$$

Es folgt, dass in (B.2, B.3) Gleichheit gilt.

d) Nach (B.3) (mit =) sind die endlichen Linearkombinationen von Kugelfunktionen identisch mit den Einschränkungen von Polynomen auf  $\Omega$ . Nach dem Weierstrassschen Approximationssatz approximieren diese die stetigen Funktionen auf  $\Omega$  gleichmässig. Letztere sind dicht in  $L^2(\Omega)$ .  $\square$

Der Raum  $\mathcal{Y}_l$  trägt nach Beispiel 3 auf S. 70 eine irreduzible Darstellung  $\mathcal{D}_l$ . Er kann somit mit einer orthonormierten Basis  $Y_{lm}(\theta, \varphi) = \langle \theta, \varphi | l, m \rangle$ , ( $m = -l, \dots, l$ ) ausgerüstet werden, die die Gleichungen (7.26), und insbesondere

$$M_3 Y_{lm} = m Y_{lm}, \quad (\text{B.4})$$

erfüllt; durch diese ist die Basis bis auf eine Phase bestimmt. Da  $Y_{l0}(0, 0) \neq 0$ , kann diese konventionsweise durch

$$Y_{l0}(0, 0) > 0 \quad (\text{B.5})$$

festgelegt werden. Aus (B.4) und  $M_3 = -i\partial/\partial\varphi$  folgt, dass  $Y_{l0}(\theta, \varphi)$  (bis auf Vielfache) die einzige Funktion in  $\mathcal{Y}_l$  ist, die invariant unter Drehungen um die 3-Achse, d.h. unabhängig von  $\varphi$ , ist.

Die expliziten Ausdrücke der  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  benötigen wir nicht. Im Folgenden erläutert ist der Bezug zu den Legendre-Polynomen.

**Definition.** Die Legendre-Polynome

$$P_l(u), \quad (u \in [-1, 1]),$$

( $l = 0, 1, 2, \dots$ ) sind definiert durch die erzeugende Funktion

$$g(t, u) := \frac{1}{\sqrt{1 - 2tu + t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(u), \quad (|t| \leq 1), \quad (\text{B.6})$$

d.h.

$$P_l(u) = \frac{1}{l!} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^l \frac{1}{\sqrt{1 - 2tu + t^2}} \Big|_{t=0}.$$

**Bemerkungen:** 1.  $P_l(u)$  ist ein (reelles) Polynom in  $u$ , da Radikand = 1 bei  $t = 0$ .

2. Aus  $g(-t, -u) = g(t, u)$  folgt

$$P_l(-u) = (-1)^l P_l(u). \quad (\text{B.7})$$

3. Aus  $g(t, 1) = (1 - t)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l$  folgt

$$P_l(1) = 1. \quad (\text{B.8})$$

• Bezug auf  $Y_{l0}$ :

$$P_l(\cos \theta) = c_l Y_{l0}(\theta, \varphi) \quad (\text{B.9})$$

mit

$$c_l = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}. \quad (\text{B.10})$$

Denn: Nach (B.7) enthält  $P_l$  für  $l$  gerade (ungerade) nur Monome gerader (ungerader) Ordnung. Damit ist

$$r^l P_l\left(\frac{x_3}{r}\right), \quad (r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad (\text{B.11})$$

ein Polynom in  $(x_1, x_2, x_3)$  und zwar offensichtlich ein homogenes vom Grad  $l$ . Harmonisch ist es auch, denn

$$\sum_{l=0}^{\infty} t^l r^l P_l\left(\frac{x_3}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx_3 + t^2 r^2}} = \frac{1}{|t\vec{x} - \vec{e}_3|}$$

ist es für  $|\vec{x}| < 1$  bei  $|t| \leq 1$ . Schliesslich ist (B.11) invariant unter Drehungen um die 3-Achse. Zusammen: Die Einschränkung  $P_l(\cos \theta)$  auf  $r = 1$  erfüllt (B.9) aufgrund der Definition von  $Y_{l0}$ , wobei  $c_l$  noch zu bestimmen bleibt.

• Orthogonalität:

$$\int_{-1}^1 P_{l'}(u) P_l(u) du = \frac{2}{2l+1} \delta_{l'l}. \quad (\text{B.12})$$

Denn: Für  $l' \neq l$  folgt dies mit  $u = \cos \theta$  aus

$$\int_{-1}^1 \overline{P_{l'}(u)} P_l(u) du = c_{l'} c_l \int_0^\pi \overline{Y_{l'0}(\theta, \varphi)} Y_{l0}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta = \frac{c_{l'} c_l}{2\pi} \int_{\Omega} \overline{Y_{l'0}(\vec{e})} Y_{l0}(\vec{e}) d^2 e \quad (\text{B.13})$$

und aus (b) des Satzes. Für  $l' = l$ : Einerseits ist

$$\begin{aligned} t \int_{-1}^1 g(t, u)^2 du &= \int_{-1}^1 \frac{t}{1 - 2tu + t^2} du = -\frac{1}{2} \log(1 - 2tu + t^2) \Big|_{u=-1}^{u=1} \\ &= -\frac{1}{2} \log \frac{(1-t)^2}{(1+t)^2} = \log \frac{1+t}{1-t}; \end{aligned}$$

andererseits

$$t \int_{-1}^1 g(t, u)^2 du = \sum_{l=0}^{\infty} t^{2l+1} \int_{-1}^1 P_l(u)^2 du .$$

Vergleich und Ableitung nach  $t$  liefern

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)t^{2l} \int_{-1}^1 P_l(u)^2 du = \frac{d}{dt} \log \frac{1+t}{1-t} = \frac{2}{1-t^2} = 2 \sum_{l=0}^{\infty} t^{2l}$$

und so (B.12). Nun folgt Gl. (B.10) aus (B.12, B.13) und aus (B.5, B.8).

• Expliziter Ausdruck:

$$P_l(u) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{du^l} (u^2 - 1)^l .$$

Denn: Für kleine  $t$  und  $|u| \leq 1$  liegen die Nullstellen  $z_1$  und  $z_2$  von  $z \mapsto z^2 + z + (2ut - t^2)/4$  in der Nähe von  $z = 0$ , bzw.  $z = -1$ . So kann die erzeugende Funktion als

$$g(t, u) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^2 + z + (2ut - t^2)/4} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

geschrieben werden: Die Contour umschliesst nur  $z_1$ , und der Ausdruck ist gleich

$$\frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tu + t^2}} .$$

Mit der Variablensubstitution  $z = -wt/2$  wird

$$g(t, u) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\frac{1}{t}} \frac{dw}{w - u + (t/2)(1 - w^2)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\frac{1}{t}} \frac{dw}{w - u} \frac{1}{1 - \frac{t}{2} \frac{(w^2-1)}{(w-u)}} .$$

Für kleine  $t$  und  $|u| \leq 1$  ist der Betrag des letzten Terms nahe  $|tw/2| = 1/2$ , also

$$g(t, u) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\frac{1}{t}} \frac{dw}{w - u} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(t/2)^l (w^2 - 1)^l}{(w - u)^l} .$$

Der  $l$ -te Term entspricht einem Pol bei  $w = u$  der Ordnung  $l + 1$ , also

$$g(t, u) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left( \frac{t}{2} \right)^l \frac{d^l}{dw^l} (w^2 - 1)^l \Big|_{w=u} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{du^l} (u^2 - 1)^l .$$

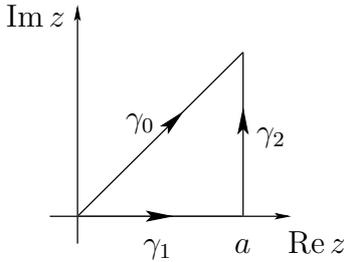
## C Anhang: Die Methode der stationären Phase

---

Als Vorbereitung liefern wir die Berechnung des Fresnel-Integrals (3.38)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi} e^{\pm i\pi/4} . \quad (\text{C.1})$$

**Beweis.**



$$\begin{aligned} \gamma_0 : \tau \in (0, \sqrt{2}a) &\mapsto z = e^{i\pi/4} \tau , \\ \gamma_1 : x \in (0, a) &\mapsto z = x , \\ \gamma_2 : t \in (0, 1) &\mapsto z = a(1 + it) . \end{aligned}$$

Einerseits ist

$$\int_{\gamma_0} e^{-z^2} dz = e^{i\pi/4} \int_0^{\sqrt{2}a} e^{-i\tau^2} d\tau ,$$

andererseits, da  $e^{-z^2}$  innerhalb von  $\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_0$  analytisch ist,

$$\int_{\gamma_0} e^{-z^2} dz = \int_{\gamma_1 + \gamma_2} e^{-z^2} dz = \underbrace{\int_0^a e^{-x^2} dx}_{\xrightarrow{a \rightarrow \infty} \sqrt{\pi}/2} + i \int_0^1 dt \underbrace{ae^{-a^2(1-t^2)+2ita^2}}_{f(a;t)} ,$$

wobei

$$|f(a;t)| = \begin{cases} \leq C(1-t^2)^{-1/2} , \\ \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0 \text{ punktweise} . \end{cases}$$

Das letzte Integral verschwindet für  $a \rightarrow \infty$  (dominierte Konvergenz). Also

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau = 2 \int_0^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi} e^{-i\pi/4} .$$

□

Wir untersuchen nun die Asymptotik von Integralen des Typs

$$f(t) = \int_{x_1}^{x_2} dx g(x) e^{ith(x)}$$

für  $t \rightarrow \infty$ . Zuerst sei  $h'(x) \neq 0$  im ganzen Intervall  $x_1 \leq x \leq x_2$ . Dann erhält man durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{it} \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{g(x)}{h'(x)} \frac{d}{dx} e^{ith(x)} \\ &= \frac{1}{it} \frac{g(x)}{h'(x)} \Big|_{x_1}^{x_2} - \frac{1}{it} \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{d}{dx} \frac{g(x)}{h'(x)} \right) e^{ith(x)} = O(t^{-1}) . \end{aligned}$$

Nehmen wir an,  $h'(x)$  besitze eine einzige, einfache Nullstelle im Integrationsgebiet:

$$h'(x_0) = 0 ; \quad h''(x_0) \neq 0$$

mit  $x_0 \in (x_1, x_2)$ . Nach dem oben Gesagten ist nun

$$f(t) = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} dx g(x) e^{ith(x)} + O(t^{-1})$$

für beliebiges  $\varepsilon > 0$ . Im so verkleinerten Integrationsgebiet setzen wir  $s = x - x_0$  und entwickeln

$$g(x) = g(x_0) + sg'(x_0) + \dots , \quad h(x) = h(x_0) + \frac{s^2}{2} h''(x_0) + \dots$$

und finden:

$$f(t) = e^{ith(x_0)} g(x_0) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} ds e^{it \frac{s^2}{2} h''(x_0)} + e^{ith(x_0)} g'(x_0) \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} ds s e^{it \frac{s^2}{2} h''(x_0)}}_{=0} + O(t^{-1}) . \quad (C.2)$$

Im ersten Term benützen wir  $\tau = s(t|h''(x_0)|/2)^{1/2}$  als neue Integrationsvariable. Für  $t \rightarrow \infty$  gehen dann die Grenzen  $\rightarrow \pm\infty$  und es entsteht das Fresnel-Integral (C.1) mit  $\pm = \text{sgn } h''(x_0)$ . Resultat: für  $t \rightarrow \infty$  ist

$$f(t) = \left( \frac{2\pi}{t|h''(x_0)|} \right)^{1/2} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sgn } h''(x_0)} \cdot g(x_0) e^{ith(x_0)} + O(t^{-3/2}) .$$

(Eine Abschätzung des Fehlerterms zeigt, dass er relativ zum führenden klein ist, sofern  $t \gg (|g''||h''| + |g'||h'''|)|h''|^{-2}|g|^{-1}$  mit Auswertung bei  $x = x_0$ ). Analoge,  $n$ -dimensionale Integrale

$$f(t) = \int_G d^n x g(x) e^{ith(x)}$$

behandelt man ebenfalls, indem man die Phase um jeden stationären Punkt  $x_0$ ,  $\partial h / \partial x_i(x_0) = 0$ , quadratisch approximiert:

$$h(x) = h(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n s_i s_j \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) + \dots .$$

Die symmetrische Matrix  $\partial^2 h(x_0) = (\partial^2 h / \partial x_i \partial x_j)(x_0)$  kann auf Hauptachsenform gebracht werden und das (C.2) entsprechende Integral faktorisiert. Resultat:

$$f(t) = \left( \frac{2\pi}{t} \right)^{n/2} |\det \partial^2 h(x_0)|^{-1/2} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sgn } \partial^2 h(x_0)} \cdot g(x_0) e^{ith(x_0)} + O(t^{-(n/2+1)}) , \quad (C.3)$$

wobei  $\text{sgn } A = (\# \text{ positive} - \# \text{ negative})$  Eigenwerte von  $A$ .

## D Anhang: Symmetrien in der Quantenmechanik

---

Es soll hier der Satz von Wigner auf S. 64 wiederholt und bewiesen werden.

**Satz.** Sei  $\Pi(\mathcal{H})$  die Menge der 1-dimensionalen orthogonale Projektoren. Jede Abbildung  $S : \Pi(\mathcal{H}) \rightarrow \Pi(\mathcal{H}')$  mit

$$\text{tr}(\Pi_1 \Pi_2) = \text{tr}(\Pi'_1 \Pi'_2) . \quad (\text{D.1})$$

ist dargestellt als

$$S(\Pi) = U \Pi U^* \quad (\text{D.2})$$

mit  $U$  einer linearen oder antilinearen Isometrie  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ . Die Alternative ist eindeutig und  $U$  selbst ist es bis auf Multiplikation mit einer Phase  $c \in \mathbb{C}$ ,  $|c| = 1$ .

Als Vorbemerkung zum Beweis sei bemerkt, dass eine Isometrie von selbst linear oder antilinear ist. Besser: falls  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ ,  $a \mapsto a' = U(a)$

$$(a', b') = \begin{cases} (a, b) \\ (b, a) \end{cases} , \quad (\text{D.3})$$

erfüllt, so gilt

$$(a + b)' = a' + b' , \quad (\lambda a)' = \begin{cases} \lambda a' \\ \bar{\lambda} a' \end{cases} . \quad (\text{D.4})$$

Dann ist nämlich für alle  $\phi' = U(\phi)$ ,  $a_1, a_2$

$$\begin{aligned} (\phi', (a_1 + a_2)') &= \begin{cases} (\phi_1, a_1 + a_2) = (\phi_1, a_1) + (\phi_1, a_2) \\ (a_1 + a_2, \phi) = (a_1, \phi) + (a_2, \phi) \end{cases} \\ &= (\phi', a'_1) + (\phi', a'_2) = (\phi', a'_1 + a'_2) \end{aligned}$$

und somit auch für  $\phi'$  in der abgeschlossenen linearen Hülle von  $\{U(\phi) | \phi \in \mathcal{H}\}$ . Es folgt die erste Gleichung (D.4). Die zweite folgt analog.

Der folgende Beweis (Hunziker) des Satzes beruht auf vier elementaren Lemmas:

**Lemma 1.** i) Die Abbildung  $S : \Pi(\mathcal{H}) \rightarrow \Pi(\mathcal{H}')$  besitzt sowohl eine lineare wie auch eine antilineare Erweiterung  $S : [\Pi(\mathcal{H})] \rightarrow [\Pi(\mathcal{H}')]$  auf die  $\mathbb{C}$ -lineare Hülle  $[\Pi(\mathcal{H})]$ . Sie erfüllen

$$\text{tr} S(A)^* S(B) = \begin{cases} \text{tr} A^* B & \text{(linear)} \\ \overline{\text{tr} A^* B} & \text{(antilinear)}. \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

Für  $A = A^*$ ,  $B = B^*$ ,  $[A, B] = 0$  gilt ferner

$$S(A)S(B) = S(AB) \quad (\text{D.6})$$

ii)  $[\Pi(\mathcal{H})] = \{\text{Operatoren } \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}' \text{ von endlichem Rang}\}$ .

**Beweis.** i) Die Identität

$$\left( \sum_j \tilde{\lambda}_j \tilde{\Pi}_j \right)^* \left( \sum_i \lambda_i \Pi_i \right) = \sum_{j,i} \overline{\tilde{\lambda}_j} \lambda_i \tilde{\Pi}_j \Pi_i$$

und (D.1) zeigen:

- Die Definition

$$S\left(\sum_i \lambda_i \Pi_i\right) = \sum_i \overset{(-)}{\lambda_i} \Pi'_i$$

ist wohldefiniert, denn mit  $(A = 0 \Leftrightarrow \text{tr } A^* A = 0)$ ,  $\tilde{\Pi}_i = \Pi_i$ ,  $\tilde{\Pi}'_i = \Pi'_i$ ,  $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i$  (bzw.  $\tilde{\lambda}_i = \overline{\lambda_i}$ ) folgt

$$\sum_i \lambda_i \Pi_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_i \overset{(-)}{\lambda_i} \Pi'_i = 0 .$$

- Gl. (D.5) gilt.
- Unter der zusätzlichen Voraussetzung können  $A, B$  gemeinsam diagonalisiert werden, also  $\tilde{\Pi}_i = \Pi_i$ . Dann ist  $\Pi_i \Pi_j = \delta_{ij} \Pi_i$  und ebenso  $\Pi'_i \Pi'_j = \delta_{ij} \Pi'_j$ , da  $\Pi \tilde{\Pi} = 0 \Leftrightarrow \text{tr}(\Pi \tilde{\Pi}) = 0$ .

ii) Es ist  $|a\rangle\langle a| \in [\Pi(\mathcal{H})]$ . Operatoren vom Rang 1 sind von der Form  $|a\rangle\langle b|$  und damit

$$|a\rangle\langle b| = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k |a + i^k b\rangle\langle a + i^k b| \in [\Pi(\mathcal{H})] .$$

□

**Korollar.** Für jene der beiden Abbildungen, deren (Anti-)Linearität mit derjenigen von  $U$  aus dem Satz übereinstimmt, gilt

$$S(A) = U A U^* .$$

**Lemma 2.** Sei  $M \subset \mathcal{H}$ ,  $\dim M < \infty$ . Dann gibt es  $M' \subset \mathcal{H}$ ,  $\dim M' = \dim M$  mit

$$R(\Pi) \subset M \quad \Rightarrow \quad R(\Pi') \subset M' .$$

(Notationen:  $R(\Pi)$  Wertebereich (Bild) von  $\Pi$ ;  $M' = S(M)$ ).

**Beweis.**  $P'_M := S(P_M)$  ist nach (D.6) ein Projektor derselben Dimension wie  $P_M$  ( $\text{tr } P = \dim R(P)$ ). Setze  $M' = R(P'_M)$ . Die Behauptung folgt aus (D.6) und

$$R(\Pi) \subset M \quad \Leftrightarrow \quad P_M \Pi = \Pi P_M = \Pi .$$

□

**Lemma 3.** Die Behauptung (D.2), und somit auch das Korollar, gelten für  $\dim \mathcal{H} = 2$ .

**Beweis.** Durch Einführung von orthonormierten Basen in  $\mathcal{H}$  und  $S(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}'$  können wir annehmen  $\mathcal{H} = S(\mathcal{H}) = \mathbb{C}^2$ . Dann ist

$$\Pi(\mathcal{H}) = \left\{ \Pi = \frac{1}{2}(1 + \vec{e} \cdot \vec{\sigma}) \mid \vec{e} \in S^2 \right\}$$

und  $S$  stiftet eine Abbildung  $S : S^2 \rightarrow S^2, \vec{e} \mapsto \vec{e}'$  mit (wegen (D.1))

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}'_1 \cdot \vec{e}'_2 ,$$

d.h. eine Abbildung  $S \in O(3)$ . Wir unterscheiden:

i)  $\det S = +1$ : Nach (4.12) ist

$$S \vec{e} \cdot \vec{\sigma} = U(\vec{e} \cdot \vec{\sigma})U^* ,$$

d.h.  $S(\Pi) = U\Pi U^*$  mit  $U \in SU(2)$  (**unitärer** Fall).

ii)  $\det S = -1$ : Angesichts von i) genügt es, eine einzige Drehung mit  $\det S = -1$  zu betrachten:

$$S \vec{e} = (e_1, -e_2, e_3).$$

Dann ist

$$U\sigma_i U^* = \begin{cases} \sigma_i , & (i = 1, 3) \\ -\sigma_i , & (i = 2) \end{cases}$$

für die **antiunitäre** Abbildung  $U \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$ . Also  $S(\Pi) = U\Pi U^*$ .  $\square$

**Bemerkung.**  $S$ , nicht aber  $\det S$ , hängt von obiger Basiswahl ab.

Im allgemeinen Fall sei  $M \subset \mathcal{H}$  ein beliebiger Teilraum mit  $\dim M = 2$  und sei  $S \upharpoonright M$  die Einschränkung von  $S$  auf  $\Pi(M)$ .

**Lemma 4.**  $\det(S \upharpoonright M)$  ist unabhängig von  $M$  (Bezeichnung:  $\text{sgn } S$ ).

**Beweis.** Wegen (D.1) ist

$$\text{tr}(\Pi'_1 - \Pi'_2)^2 = \text{tr}(\Pi_1 - \Pi_2)^2$$

und somit ist  $S : \Pi(\mathcal{H}) \rightarrow \Pi(\mathcal{H})$  stetig. Für eine stetige Familie  $M(t)$  von Teilräumen können die Basen in  $M(t)$  und  $S(M(t))$  stetig gewählt werden. Damit ist  $\det S(M(t))$  stetig und folglich konstant.  $\square$

**Beweis** des Satzes. Sei  $M \subset \mathcal{H}$ ,  $\dim M = 2$  beliebig und  $U(M) : M \rightarrow \mathcal{H}'$  der (anti-)lineare Operator aus Lemma 3. Wähle ein festes  $\Pi_0 \in \Pi(\mathcal{H})$  und feste  $e \in R(\Pi_0)$ ,  $e' \in R(\Pi'_0)$  mit  $\|e\| = \|e'\| = 1$ . Dann ist für jedes  $M \ni e$

$$\Pi'_0 U(M)e = U(M)\Pi_0 e = U(M)e$$

und wir legen die Phase von  $U(M)$  fest durch

$$U(M)e = e' . \tag{D.7}$$

**Konstruktion** von  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ :

$$a' \equiv U(a) := U(M)a , \quad (a \in \mathcal{H}) ,$$

wobei  $M \ni e, a$ . ( $M$ , und damit  $a'$ , ist eindeutig, falls  $a, e$  linear unabhängig sind; andernfalls ist es  $a'$  wegen (D.7) trotzdem). Zu zeigen bleibt die Alternative (D.3), und zwar je nach  $\text{sgn } S$ . Betrachte dazu die Erweiterung aus dem Korollar für  $M \ni e, a$ :

$$S(|e\rangle\langle a|) = U(M)|e\rangle\langle a|U(M)^* = |e'\rangle\langle a'| ,$$

und ebenso für  $a \rightsquigarrow b$ . Dann ist einerseits

$$\text{tr } S(|e\rangle\langle b|)^* S(|e\rangle\langle a|) = \text{tr}(|e'\rangle\langle b'|)^* |e'\rangle\langle a'| = \text{tr}(|b'\rangle\langle e'|e'\rangle\langle a'|) = (a', b') ,$$

was andererseits nach (D.5) im linearen Fall auch gleich

$$\text{tr}(|e\rangle\langle b|)^* |e\rangle\langle a| = (a, b)$$

ist, und  $= (b, a)$  im antilinearen.  $\square$

## Literaturhinweise

- [1] G. Auletta, M. Fortunato, G. Parisi, “Quantum mechanics”, Cambridge University Press 2009
- [2] G. Baym, “Lectures on quantum mechanics”, Addison-Wesley Publishing 1996
- [3] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, “Quantenmechanik”, de Gruyter 1999
- [4] R. P. Feynman, “Vorlesungen über Physik (Band 3: Quantenmechanik)”, Oldenbourg 1999
- [5] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, “Quantenmechanik”, Akademie Verlag 1990
- [6] A. Messiah, “Quantum mechanics”, Dover 1999
- [7] W. Pauli, “Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik”, Springer 1990
- [8] A. Peres, “Quantum theory: concepts and methods”, Kluwer 1995
- [9] F. Scheck, “Nichtrelativistische Quantentheorie”, Springer 1999
- [10] F. Schwabl, “Quantenmechanik”, Springer 2002
- [11] N. Straumann, “Quantenmechanik”, Springer 2002
- [12] B. Thaller, “Visual quantum mechanics”, Springer 2000
- [13] W. Thirring, “Quantum mathematical physics: atoms, molecules and large systems”, Springer 2003

# Index

- Absorption, 11
- Auf- und Absteigeoperatoren, 69
- Balmer-Formel, 6
- Bloch-Kugel, 84
- Breit-Wigner Resonanz, 53
- Clebsch-Gordan Reihe, 72
- Darstellung, 39
- Dichtematrizen, 83
- Doppelspaltexperiment, 14
- Drehimpuls, 7, 40, 42, 68
- Dynamik, 28
- Eichtransformationen, 28
- Element physikalischer Wirklichkeit, 141
- Entartung, 10, 44
- EPR-Paar, 141
- EPR-Paradoxon, 141
- Erhaltungsgrösse, 39
- Erwartungswert, 23, 26
- Erzeugungsoperator, 32
- freies Teilchen, 15
- gemischte Zustände, 83
- gemischter Zustand, 83
- Hamilton-Jacobi Gleichung, 9, 10
- Hamiltonoperator, 28
- harmonischer Oszillator, 2, 31
- Heisenberg-Bild, 29
- Heisenberg-Gleichung, 20
- Helium-Atom, 60
- Hundschen Regeln, 120
- Impulsoperator, 24
- induzierte Emission, 11
- infinitesimale Drehung, 67
- irreduzible Darstellung, 69
- kanonische Quantisierung, 28
- kanonischen Vertauschungsrelationen, 126
- kohärente Zustände, 34
- Konfiguration, 116
- Kontinuitätsgleichung, 17
- Korrespondenzprinzip, 8, 19
- Messwerte, 26
- Min-Max Prinzip, 58
- Normalbasis, 70
- Operator, 22
- orthogonaler Projektor, 22, 25
- Ortsoperator, 23
- Pauli-Matrizen, 74
- photoelektrischer Effekt, 6
- Präparation der Zustände, 28
- Produktbasis, 71
- projektive Darstellung, 66
- Projektor, 25
- Quantenbedingung, 4, 7, 8
- Raumspiegelung, 65
- Schale, 116
- Schalenmodell, 116
- Schrödinger-Bild, 29
- Schrödinger-Gleichung, 15
- Schwankungsquadrat, 23
- Spektralsatz, 25
- Spektrum, 23
- Spin, 14, 77
- spontane Emission, 11
- Störung, 55
- Stark-Effekt, 57
- Stern-Gerlach Analysator, 83
- Strahlungsgesetz, 4
- Streuquerschnitt, 48
- Symmetrie, 64
- Symmetriegruppe, 39
- Teilchenzahloperator, 124
- Teleportation, 147
- Tensorprodukt, 71
- Tensorproduktdarstellung, 72
- unitäre Darstellung, 67
- Unschärferelation, 27
- Vakuum, 124
- Vektoroperator, 79
- verborgene Variablen, 142

Vernichtungsoperator, 32  
Verschiebungsoperator, 33  
vollständig separable Systeme, 9  
  
Wahrscheinlichkeit, 11, 18, 22, 25, 142  
Wasserstoff-Atom, 6, 11, 43  
Wellenfunktion, 17  
Wirkung, 8  
  
Zeeman-Effekt, 77  
Zeitumkehr, 65