Quantenmechanik II. Übung 5.

FS 11 *Abgabe:* Di 29. März 2011

1. Goldene Regel und Bornsche Näherung

Anhand des Hamilton-Operators

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}) \equiv H_0 + H_1$$

auf $L^2(\mathbb{R}^3)$ soll die Streuung eines Teilchens vom Impuls $\hbar\vec{k}_0 = \hbar k\vec{e}_0$ am Potential $V(\vec{x})$ beschrieben werden.

i) Zeige, dass der differentielle Streuquerschnitt für Streuung in Richtung $\vec{e}$ in der Bornschen Näherung (5.13) umgeschrieben werden kann als

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4}|\hat{V}(\vec{q})|^2 \,, \tag{1}$$

wobei $\hbar\vec{q} = \hbar k(\vec{e} - \vec{e}_0)$ der Impulsübertrag ist, und $\hat{V}(\vec{q}) = \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{y}} V(\vec{y}) d^3y$.

Die Goldene Regel, symbolisch

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar}|M|^2\rho \,,$$

kann mittels Kontinuumszuständen ausgewertet werden oder, um deren Tücken zu umgehen, mittels eines Quasi-Kontinuums von orthonormierten Zuständen. Matrixelemente M, Zustandsdichte ρ und unter Umständen selbst Raten Γ hängen von dieser Wahl ab, nicht aber messbare Grössen wie

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Streustrom in das Winkelelement } \Delta\Omega}{\Delta\Omega \times \text{einfallende Stromdichte}} \,. \tag{2}$$

Dies soll im folgenden gezeigt werden. Dabei ist Γ der erwähnte Streustrom.

ii) Wie sind die Kontinuumszustände $|\vec{k}\rangle$,

$$\langle\vec{x}|\vec{k}\rangle \propto e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \,, \qquad (\vec{k} \in \mathbb{R}^3) \,,$$

zu normieren, damit $\langle\vec{k}'|\vec{k}\rangle = \delta(\vec{k}' - \vec{k})$? Berechne die Energie $E(k)$,

$$H_0|\vec{k}\rangle = E(k)|\vec{k}\rangle \,, \qquad (\vec{k} = k\vec{e}) \,,$$

die Zustandsdichte

$$\rho(E) = \int_{\vec{e}\in\Delta\Omega} d^3k\, \delta(E(k) - E) \,, \tag{3}$$

das Matrixelement $M = \langle\vec{k}|H_1|\vec{k}_0\rangle$, sowie die einfallende Stromdichte von $|\vec{k}_0\rangle$. Bestätige damit (1).

iii) Um mit orthonormierten Zuständen arbeiten zu können, ersetze $\mathbb{R}^3 \ni \vec{x}$ durch ein Quantisierungsvolumen, und zwar einen Würfel Λ vom Volumen $|\Lambda|$ mit periodischen Randbedingungen. Folglich wird $\vec{k}$ quantisiert. Berechne die Zustandsdichte

$$\rho(E)\Delta E = \#\{\vec{k} = k\vec{e} \mid |E(k) \in [E, E + \Delta E], \vec{e} \in \Delta\Omega\} , \tag{4}$$

sowie die weiteren in (ii) erwähnten Grössen, um damit (1) erneut zu bestätigen.

2. Das Jaynes-Cummings-Modell, Teil 1

In der Vorlesung wurde die Wechselwirkung eines Atoms mit dem quantisierten Strahlungsfeld beschrieben durch den Hamilton-Operator

$$\begin{gathered} H = H_0 + H_1 , \qquad H_0 = H_{\text{at}} + H_{\text{str}} , \\ H_{\text{str}} = \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha a_\alpha^* a_\alpha , \qquad H_1 = -\frac{1}{c}\vec{A}(0) \cdot \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H_{\text{at}}, \vec{D}] , \\ \vec{A}(\vec{x}) = \sum_\alpha \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\alpha}}(a_\alpha + a_\alpha^*)\vec{A}_\alpha(\vec{x}) . \end{gathered} \tag{5}$$

Die Berechnung der Übergangsraten verwendete ein Quantisierungsvolumen als Hilfsmittel, dessen Volumen sie entsprechend nach Unendlich streben liess. Der spontane Zerfall eines angeregten Atoms ist irreversibel im Einklang mit der Tatsache, dass das ausgesandte Photon ins räumlich Unendliche entweicht. Eine andere Physik eröffnet sich, falls das Volumen einer realen Kavität entspricht, deren Abmessungen mit der Wellenlänge jenes Photons vergleichbar sind (mehr dazu in Teil 2 der Aufgabe in Übung 6). Das Interesse gilt einem Übergang zwischen zwei atomaren Zuständen $|g\rangle$ und $|a\rangle$ mit Bohrscher Frequenz ω_0; die Kavität besitze eine einzige Mode, deren Frequenz ω nahe bei ω_0 liegt. Unter Beibehaltung dieser beiden Zuständen und dieser einen Mode alleine wird aus (5)

$$H_{\text{at}} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_3 , \qquad H_{\text{str}} = \hbar\omega a^* a , \qquad H_1 = \hbar(a + a^*)(g\sigma_+ + \overline{g}\sigma_-) , \tag{6}$$

auf $\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{H}$. Dabei beziehen sich

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \qquad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

auf die Basis $|a\rangle = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $|g\rangle = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ für $\mathbb{C}^2$; ferner sind a, a^* Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren auf $\mathcal{H}$, dem Hilbertraum eines harmonischen Oszillators aufgespannt durch die Zustände $|n\rangle$ bestimmter Photonenzahl $n = 0, 1, ...$

i) Führe die Kopplung $g \in \mathbb{C}$ auf Grössen in (5) zurück. Zeige, dass $g \geq 0$ erzielt werden kann durch Wahl der relativen Phase zwischen $|a\rangle$ und $|g\rangle$.

ii) Berechne $\tilde{H}_1(t)$ im Wechselwirkungsbild von H_0 und zeige, dass $a^*\sigma_+$ und $a\sigma_-$ zu Termen führen, die rasch oszillieren verglichen mit jenen, die von $a\sigma_+$ und $a^*\sigma_-$ stammen. Sie dürfen vernachlässigt werden (vgl. Approximation der rotierenden Welle in Aufgabe 3.1). *Hinweis:* $|\omega - \omega_0| \ll \omega, \omega_0$.

iii) Man gelangt so zu dem Hamilton-Operator des Jaynes-Cummings-Modells:

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_3 + \hbar\omega a^* a + \hbar g(a\sigma_+ + a^*\sigma_-) . \tag{7}$$

Berechne seine Eigenwerte. *Hinweis:* $\sigma_3/2 + a^*a$ ist eine Symmetrie. Wieso?