Quantenmechanik II. Übung 4.

FS 11 *Abgabe:* Di 22. März 2011

1. Anregung eines Atoms durch ein geladenes Teilchen

Ein Atom bestehe aus n Elektronen (Ladung e) und einem Kern, der fest bei $\vec{x}=0$ ist. Seien $|\psi_0\rangle$, $|\psi_1\rangle$ zwei Eigenzustände der Energie und ω_{10} die Bohrsche Frequenz des Übergangs $0 \to 1$. Sei schliesslich a ($\simeq$ Bohr-Radius) die Grösse des Atoms.

Ein weiteres Teilchen der Ladung q fliege am Atom vorbei. Es sei so schwer oder so schnell, dass seine Bewegung als eine klassische Trägheitsbahn $\vec{x}(t)$ gelten darf: Geschwindigkeit v in Richtung $\vec{e}_0$ und Stossparameter $\vec{b} \perp \vec{e}_0$. Die Störung des Atoms ist dann

$$H_1(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{qe}{|\vec{x}(t) - \vec{x}_k|} \ ,$$

wobei der Operator $\vec{x}_k$ der Ort des k-ten Elektrons ist. Sie kann einen Übergang $0 \to 1$ hervorrufen.

i) Entwickle $H_1(t)$ für $|\vec{x}(t)| \gg a$ (was $b \gg a$ voraussetzt) nach Potenzen von $\vec{x}_k$ bis zur Ersten und schreibe einen Ausdruck für die Übergangswahrscheinlichkeit $W_{1\leftarrow 0}$ in erster Ordnung Störungsrechnung.

Hinweis: Verwende den entsprechenden Ausdruck aus der Vorlesung für eine Störung $H_1(t) \to 0$, ($t \to \pm\infty$).

ii) Zeige, dass für $a \ll b \ll v/\omega_{10}$

$$W_{1\leftarrow 0} = \frac{4q^2}{\hbar^2 b^2 v^2} |\langle \psi_1 | \vec{D} \cdot \vec{e} | \psi_0 \rangle|^2 \ , \tag{1}$$

wobei $\vec{b} = b\vec{e}$ und $\vec{D}$ das Dipolmoment des Atoms ist.

Hinweise: Für welche Zeiten t ist die Störung $H_1(t)$ von Bedeutung? $\int_{-\infty}^{\infty} (1+s^2)^{-3/2} ds = 2$.

Man überlege heuristisch, dass $W_{1\leftarrow 0}$ für $b \gtrsim v/\omega_{10}$ viel rascher abfällt, als (1) angibt; und für $b \lesssim a$, wo das Ergebnis von (i) nicht gilt, $W_{1\leftarrow 0}$ nicht divergiert.

iii) Pro Zeit- und Flächeneinheit mögen N Teilchen in Richtung $\vec{e}_0$ anfliegen. Leite die Übergangsrate

$$\Gamma_{1\leftarrow 0} \approx \frac{8\pi N q^2}{\hbar^2 v^2} \log\left(\frac{v}{a\omega_{10}}\right) \left\langle |\langle \psi_1 | \vec{D} \cdot \vec{e} | \psi_0 \rangle|^2 \right\rangle \tag{2}$$

her, für $v/\omega_{10} \gg a$. Dabei bezeichnet $\langle \cdot \rangle$ den Mittelwert über $\vec{e} \perp \vec{e}_0$.

Nebenbei: Die Anregung oder Ionisierung eines Atoms durch ein vorbei fliegendes Teilchen ist die Grundlage der meisten Teilchendetektoren.

2. Dipol-Summenregel

Die Rate für einen Übergang von einem Zustand $|\psi_0\rangle$ (nicht notwendigerweise der Grundzustand) zu einem anderen $|\psi_n\rangle$ infolge Absorption von elektromagnetischer Strahlung ist in 1. Ordnung Störungsrechnung

$$\Gamma^{\mathrm{abs}}_{n\leftarrow 0} = u(\omega_{n0})\frac{4\pi^2}{\hbar^2}|\langle\psi_n|\vec{D}\cdot\vec{e}|\psi_0\rangle|^2 \ , \tag{3}$$

wobei $\hbar\omega_{n0} = E_n - E_0$ und $u(\omega)$ die spektrale Energiedichte der Strahlung bei der Frequenz ω (> 0) ist. Falls die Polarisation linear ist, d.h. $\vec{e}$ reell, wie fortan angenommen, so gilt die selbe Formel für die (stimulierte) Emissionsrate $\Gamma^{\mathrm{em}}_{n\leftarrow 0}$, bis auf $\omega_{0n} > 0$ anstelle von ω_{n0}. (Die umgesetzten Energien $\hbar\omega_{n0}$, $\hbar\omega_{0n}$ sind die des beteiligten Photons, was aber bei der klassischen Beschreibung des Felds übersehen wird.) Definiere den Streuquerschnitt für Absorption als

$$\sigma_{\mathrm{abs}}(\omega) = \frac{\text{absorbierte e.m. Leistung}}{\text{einfallende Energiestromdichte}} \ ,$$

wobei sich Zähler und Nenner auf Strahlung im Frequenzintervall $[\omega, \omega + \Delta\omega]$ ($\Delta\omega \to 0$) beziehen. Analog für $\sigma_{\mathrm{em}}(\omega)$.

i) Zeige

$$\sigma_{\mathrm{abs}}(\omega) = \frac{4\pi^2}{\hbar c}\sum_n \omega_{n0}|\langle\psi_n|\vec{D}\cdot\vec{e}|\psi_0\rangle|^2 \cdot \delta(\omega - \omega_{n0}) \tag{4}$$

und finde den analogen Ausdruck für $\sigma_{\mathrm{em}}(\omega)$.

ii) Setze $\sigma(\omega) := \sigma_{\mathrm{abs}}(\omega) - \sigma_{\mathrm{em}}(\omega)$ (Vorzeichen: Absorption schwächt die Strahlung, Emission verstärkt sie) und leite die Dipol-Summenregel her:

$$\int_0^\infty \sigma(\omega)d\omega = \frac{2\pi^2 e^2}{mc}N \ , \tag{5}$$

wobei N die Anzahl Elektronen des Atoms ist.

Hinweis: Berechne

$$\langle\psi_0|\big[[H, \vec{D}\cdot\vec{e}], \vec{D}\cdot\vec{e}\big]|\psi_0\rangle$$

einerseits durch Verwendung der Basis $|\psi_n\rangle$, andererseits durch Berechnung der Kommutatoren (vgl. Aufgabe 4.1(i) der QMI). Von welcher allgemeinen Form ist H?

Nebenbei: Eine verwandte Summenregel in der alten Quantentheorie (Thomas-Reiche-Kuhn Summenregel) war bei der Entdeckung der Matrizenmechanik durch Heisenberg von Bedeutung.