

Kontinuumsmechanik. Übung 13.

FS10

Abgabe: 3.6.10

1. Drehmoment auf einen umströmten Körper

In der Vorlesung wurde die Kraft $\vec{F} = - \oint_{\partial K} p \vec{n} ds$ auf einen Körper K durch das Geschwindigkeitsfeld statt des Drucks p ausgedrückt, vgl. (9.8, 9.9); hier dasselbe für das Drehmoment

$$M = - \oint_{\partial K} \vec{x} \wedge p \vec{n} ds$$

bzgl. $\vec{x} = 0$, wobei $\vec{a} \wedge \vec{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1$ (das Drehmoment hat nur eine Komponente in 2 Dimensionen). Zeige:

i)

$$M = - \frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_{\Gamma} w^2(z) z dz,$$

wobei Γ eine beliebige Schleife ist, die K umfährt, und w das komplexe Geschwindigkeitsfeld ist.

ii) Sei $\vec{v}(\vec{x}) \rightarrow \vec{v}_\infty$, ($|\vec{x}| \rightarrow \infty$). Dann ist

$$M = 2\pi\rho(v_{\infty 1} \operatorname{Im} w_2 - v_{\infty 2} \operatorname{Re} w_2),$$

wobei w_2 der Koeffizient von z^{-2} in der Laurent-Entwicklung von $w(z)$ ist.

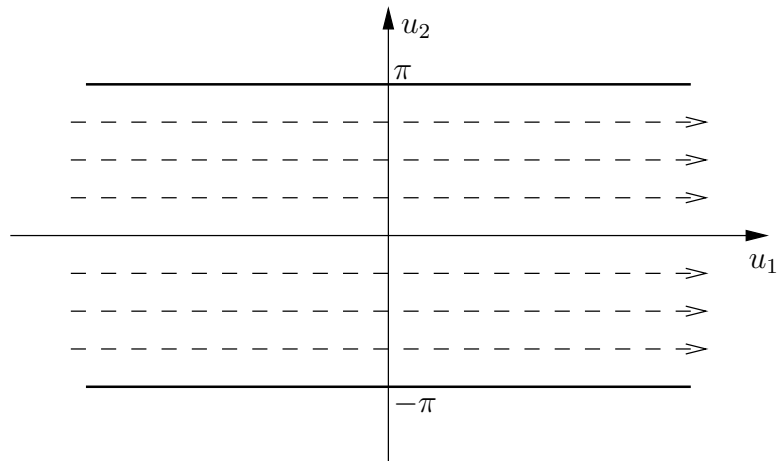
iii) Betrachte eine konforme Abbildung $\mathbb{C} \setminus K \rightarrow \mathbb{C} \setminus \tilde{K}$, $z \mapsto \tilde{z}$, die sich im Unendlichen der Identität nähert,

$$\tilde{z} = z + \frac{k_1}{z} + O(z^{-2}), \quad (z \rightarrow \infty);$$

ferner zwei Strömungen wie in (ii), die sich unter der Abbildung entsprechen. Insbesondere sind \vec{v}_∞ und $\vec{F} = -\rho Z \vec{v}_\infty^\perp$ für beide gleich; nicht so die Drehmomente. Finde die Beziehung zwischen dem Drehmoment M auf K und jenem, \tilde{M} , auf \tilde{K} . Wende das Ergebnis an auf die "gedrehte Plattenströmung" in Beispiel 3 auf S. 92 des Skripts und berechne das Drehmoment für die Strömungen am Zylinder, bzw. an der Platte.

2. Ausströmung zwischen zwei Platten

Betrachte die 2-dimensionale Strömung einer idealen, inkompressiblen Flüssigkeit zwischen zwei unbegrenzten Platten in der u -Ebene ($u = u_1 + iu_2$):



Die Stromlinien seien durch $u_2 = \text{const}$ gegeben. Bestimme das Bild von $|u_2| < \pi$ unter der Abbildung

$$z = u + e^u$$

und zeichne die Stromlinien in der z -Ebene.