

Kontinuumsmechanik. Übung 11.

FS10

Abgabe: 20.5.10

1. Stokes-Drift

Untersuche die Bahnen $(x_1(t), x_2(t))$ der Teilchen in einer Schwerewelle. In 1. Ordnung der Amplitude der Welle sind die Bahnen periodisch (vgl. Skript S. 77). Zeige, dass in 2. Ordnung eine fortschreitende Bewegung der Teilchen in Richtung der Welle stattfindet und zwar mit der mittleren Geschwindigkeit

$$\frac{1}{T} \int_0^T v_1(x_1(t), x_2(t), t) dt = B^2 \omega(k) k \frac{\operatorname{ch} 2k(a+h)}{2 \operatorname{sh}^2 kh}, \quad (1)$$

wobei: T Periode, B Amplitude der Oberflächenwelle, a mittlere Höhe des Teilchens ($-h < a < 0$).

Hinweis: Diese Grösse ist nicht mit der mittleren Geschwindigkeit an einem festen Ort,

$$\frac{1}{T} \int_0^T v_1(0, a, t) dt = 0,$$

zu verwechseln, was mit der Rechnung in 1. Ordnung übereinstimmt.

2. Energietransport und Gruppengeschwindigkeit

Man zeige, dass die Geschwindigkeit des Energietransportes einer ebenen Schwerewelle der Wellenzahl k bei Wassertiefe h durch die Gruppengeschwindigkeit gegeben ist, d.h. dass

$$\frac{\bar{j}}{\bar{\varepsilon}} = \frac{d\omega}{dk}$$

gilt mit

$\bar{\varepsilon}$: mittlere Energiedichte ($\varepsilon = 0$ für die ruhende Flüssigkeit),

\bar{j} : mittlere Energiestromdichte,

beide über die Wassertiefe integriert.

Hinweis: Nach Aufgabe 8.2 sind $\varepsilon = \rho(\vec{v}^2/2 + gx_2)$ und $\vec{j} = (\varepsilon + p)\vec{v}$ die instantane Energie- bzw. Energiestromdichte für eine inkompressible Flüssigkeit im homogenen Schwerfeld. Die Mittelung ist über eine Periode oder eine Wellenlänge. Z.B. ist

$$\bar{\varepsilon}_{\text{kin}} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx_1 \int_{-h}^\eta dx_2 \rho \frac{\vec{v}^2}{2}.$$

3. Wind und Wellen

Zwei inkompressible Fluida der Dichten $\rho_1 < \rho_2$ (z.B. 1 = Luft, 2 = Wasser) erstrecken sich über je einen Halbraum, getrennt durch die horizontale Grenzfläche $x_2 = 0$. Die

horizontale Relativgeschwindigkeit von 1 zu 2 sei u . Bestimme die Frequenz ω kleiner Schwingungen der Grenzfläche als Funktion der Wellenzahl k und der Geschwindigkeit u (Dispersionsrelation). Insbesondere:

- i) Wie lautet die Dispersionsrelation für $u = 0$?
- ii) Welche Wellenlängen erzeugt der Wind? Bestimme dazu $u_0(k)$ so, dass für $u > u_0(k)$ die Frequenz $\omega(k, u)$ komplex wird. Dann wird die horizontale Grenzfläche instabil. Was passiert für $\rho_1 = \rho_2$?

Hinweis: Setze wirbelfreie Geschwindigkeitsfelder in 1 und 2 an durch

$$\vec{v}_1 = -\vec{\nabla}(-ux_1 + \varphi_1), \quad \vec{v}_2 = -\vec{\nabla}\varphi_2$$

mit φ_1, φ_2 klein. Ferner

$$\varphi_i(x_1, x_2, t) = a_i e^{i(kx_1 - \omega t)} e^{\mp \kappa x_2}, \quad (i = 1, 2)$$

und für die Grenzfläche

$$\eta(x, t) = a e^{i(kx_1 - \omega t)}.$$

Bestimme κ und finde das homogene Gleichungssystem für a, a_1, a_2 . Es hat eine nichttriviale Lösung für

$$\omega = \frac{\rho_1 u k \pm \sqrt{(\rho_2^2 - \rho_1^2) g k - \rho_1 \rho_2 u^2 k^2}}{\rho_1 + \rho_2}.$$