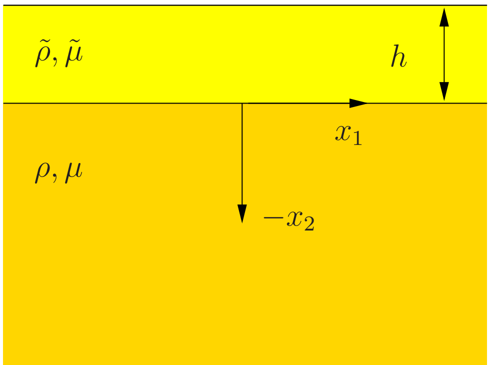
Kontinuumsmechanik. Übung 7.

FS10 *Abgabe: 22.4.10*

1. Love-Wellen

Rayleigh-Wellen schwingen in der Ebene, die durch die Fortpflanzungsrichtung und die Oberflächennormale gegeben ist. Love-Wellen sind ebenfalls elastische Wellen, die aber in der einen Richtung parallel zur Oberfläche und transversal zur Fortpflanzungsrichtung schwingen. Sie sind nur möglich, wenn das Medium, in dem sie sich ausbreiten (z. B. die Erde), aus mindestens zwei Schichten besteht. Betrachte dazu das folgende einfache Modell der Erdkruste:



Eine Oberflächenschicht der Dicke h mit Schermodul $\tilde\mu$ und Dichte $\tilde\rho$; darunter eine unendlich dicke Schicht mit μ und ρ. Die Trennfläche zwischen den Schichten sei die 13-Ebene. Setze als Love-Welle eine in 3-Richtung polarisierte und in 1-Richtung propagierende Welle der Form

$$u_3 = \tilde A(x_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde k(x_1 - ct)}$$

an (in der oberen Schicht; in der unteren ohne $\tilde{}$).

Zeige: Es gibt Love-Wellen nur, falls $\tilde c_t < c_t$, wobei $c_t = \sqrt{\mu/\rho}$ und ebenso $\tilde c_t$ die Geschwindigkeiten der Transversalwellen in den unendlich ausgedehnten Medien sind. Die Phasengeschwindigkeit $c \in (\tilde c_t, c_t)$ der Love-Wellen ist dann bestimmt als die einzige Lösung der Gleichung

$$\tan\bigl[\sqrt{(c/\tilde c_t)^2 - 1}kh\bigr] = \frac{\mu}{\tilde\mu}\frac{\sqrt{1-(c/c_t)^2}}{\sqrt{(c/\tilde c_t)^2 - 1}}\,.$$

Insbesondere hängt sie von k ab (Dispersion, im Unterschied zu den Rayleigh-Wellen). Was passiert in den Grenzfällen $kh \gg 1$ und $kh \ll 1$?

Hinweise: Wie lautet die elastische Wellengleichung (4.2) für $\vec u = u_3(x_1, x_2, t)\vec e_3$? Was sind die Randbedingungen bei $x_2 = h$, $x_2 = 0$ und $x_2 \to -\infty$? Was folgt für $\tilde A(x_2)$ und $A(x_2)$?

2. Ein Modell des Äthers

Der Äther wurde als Medium postuliert, das (a) im Gleichgewicht gegenüber dem absoluten Raum ruht, (b) dessen Schwingungen die elektromagnetische Strahlung ist und (c) inkompressibel ist. Die spezielle Relativitätstheorie entledigte sich des Äthers und des absoluten Raums. Die vorliegende Aufgabe über das Modell von McCullagh (1836) ist somit nur von historischem Interesse.

i) Erweitere die Drehimpulsbilanz (1.16) auf den Fall, dass im Volumenelement d^3x und bzgl. eines Punkts x darin eine äusseres Drehmoment $\vec D(x)d^3x$ wirkt. Zeige, dass der

Spannungstensor σ nicht mehr symmetrisch ist, sondern

$$\sigma_{i+1i+2} - \sigma_{i+2i+1} = D_i \ . \tag{1}$$

ii) Es sei an die Zerlegung $1 + Du = Df = RS = (1 + W)(1 + E)$ des Deformationsgradienten in Verdrehung $W = -W^T$ und Verzerrung $E = E^T$ erinnert (Du klein). Ein übliches elastisches Medium unterliegt Spannungen, die durch die *relative* Anordnung der Volumenelemente zueinander, d.h. durch E, bedingt sind; der Äther hingegen solchen, die durch deren Orientierung gegenüber dem *absoluten* Raum, d.h. durch W, bedingt sind. Anstelle des Hooke'schen Gesetzes tritt als einziger isotroper, linearer Zusammenhang

$$\sigma = \frac{k}{2} W \tag{2}$$

mit $k > 0$ einer Materialkonstanten. Zeige: Auf den Äther wirkt ein rücktreibendes Drehmoment der Dichte

$$\vec{D} = -k\vec{\varphi} \ ,$$

wobei $\vec{\varphi} = \operatorname{rot} \vec{u}/2$ Achse und Winkel angibt, um welche das Volumenelement gegenüber dem absolutem Raum gedreht ist.

iii) Schreibe die elastische Wellengleichung, die (4.2) ersetzt, als Gleichungspaar für $\vec{v} = \partial\vec{u}/\partial t$ und $\vec{\varphi}$. Zeige, dass diese und Eigenschaft (c) mit den Maxwell-Gleichungen im Vakuum übereinstimmen, und zwar bis auf Reskalierung der Felder: $\vec{v} = \alpha\vec{E}$, $\vec{\varphi} = -\beta\vec{B}$. Drücke die Lichtgeschwindigkeit c durch ρ, k aus.