Elektrodynamik
Serie 10

FS 10
Prof. R. Renner

Aufgabe 10.1 Elliptisch polarisierte Wellen

Eine Welle $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ mit Wellenvektor $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x(\mathbf{x},t) &= A\cos(kz-\omega t) \\ \mathbf{E}_y(\mathbf{x},t) &= B\cos(kz-\omega t+\phi)\ . \end{aligned}$$

a.) Zeige, dass die Bahn des Vektors $\mathbf{E}(\mathbf{0},t)$, der die Polarisation der Welle beschreibt, eine Ellipse ist. Für welche Werte von A, B und ϕ ist diese Bahn ein Kreis?

Tipp: Verwende das Additionstheorem, $\cos(\omega t-\phi) = \cos(\omega t)\cos(\phi)+\sin(\omega t)\sin(\phi)$, um die Gleichungen in die Form eines Kegelschnittes zu bringen:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0\ .$$

Welche Bedingungen musst du an a, b, c stellen?

b.) Zeige, dass für allgemeine A und B die Welle als Superposition zweier entgegengesetzt zirkular polarisierter Wellen geschrieben werden kann

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \Re(\mathbf{E}_+(z,t) + \mathbf{E}_-(z,t))\ ,$$

wobei $\mathbf{E}_\pm(z,t) = A_\pm \epsilon_\pm e^{i(kz-\omega t)}$. Hier sind $A_\pm$ Konstanten und $\epsilon_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)$. Bestimme $A_\pm$ als Funktion von A, B und ϕ.

Tipp: Schreibe die Welle als Realteil eines komplexen Vektors und löse $\epsilon_\pm$ nach $\mathbf{e}_x$ und $\mathbf{e}_y$ auf.

Aufgabe 10.2 Idealer Hohlleiter

Wir betrachten elektromagnetische Wellen, die durch einen idealen zylinderförmigen Hohlleiter begrenzt sind und sich in z-Richtung fortbewegen. Aufgrund der Geometrie können wir die Ausbreitung der Feldern in z-Richtung aussondern:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x,y,z,t) &= \mathbf{E}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)} \\ \mathbf{B}(x,y,z,t) &= \mathbf{B}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)}\ . \end{aligned}$$

Die Grenzbedingungen am inneren Rand sind $\mathbf{E}^{||} = 0$ und $\mathbf{B}^{\perp} = 0$.

a.) Leite die Gleichungen für die x und y Komponenten von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ aus den Maxwell-Gleichungen her (in Abhängigkeit von E_z und B_z) und zeige, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2\right] E_z &= 0 \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2\right] B_z &= 0 \end{aligned}$$

gelten.

b.) Zeige, dass es in einem idealen Hohlleiter keine transversalen elektromagnetischen (TEM) Wellen gibt.

Tipp: Wenn die z-Komponente des $\mathbf{E}$-Feldes geich Null ist ($E_z = 0$), spricht man von transversalen elektrischen Wellen ("TE-Wellen"). Für $B_z = 0$ werden sie transversale magnetische Wellen ("TM-Wellen") genannt. Trifft beides zu ($E_z = 0$ und $B_z = 0$), heissen sie transversale elektromagnetische Wellen ("TEM-Wellen").

Benutze das Gauss' und Faraday's Gesetz, sowie die Randbedingung für $\mathbf{E}^{||}$ um zu zeigen, dass es keine TEM-Wellen im Hohlleiter gibt.

Aufgabe 10.3 Koaxialkabel

Ein Koaxialkabel ist ein dünner Draht (Radius a), der von einer leitenden zylindrischen Hülle (Radius $b > a$) umgeben ist. Gib die Lösungen für TEM-Wellen im Koaxialkabel an, wenn der Strom I durch den dünnen Draht fliesst.
Tipp: Das Problem kann zu den Gleichungen der Magnetostatik und Elektrostatik in 2 Dimensionen vereinfacht werden.