Aufgabe 8.1 Das Faraday'sche Induktionsgesetz

Die Maxwell'schen Gleichungen in ihrer allgemeinen Form sind gegeben als

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \ , \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \ , \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \ , \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \ . \tag{4}$$

a) Leite aus den Maxwell'schen Gleichungen das Faraday'sche Induktionsgesetz her:

$$U_{ind} = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

b) In der Elektrostatik ist das elektrische Feld konservativ. Gilt dies im Allgemeinen auch für zeitabhängige Probleme? Begründe Deine Aussage (i) mit Hilfe des Induktionsgesetz, Gleichung (5), und (ii) direkt mit den Maxwell'schen Gleichungen.

c) Der Magnetismus eines Diamagneten wird durch kleine Ringströme erzeugt. Ein solcher Ringstrom kann durch eine Leiterschlaufe beschrieben werden. Berechne den Strom, der in einer solchen Leiterschlaufe induziert wird, wenn wir ein homogenes externes Magnetfeld $\mathbf{B}$ gleichmässig während der Zeit Δt einschalten. In welche Richtung zeigt das Magnetfeld, das von dem induzierten Ringstrom erzeugt wird? Was folgt daraus für den Diamagneten?

Tipp:
Interpretation der Induktionsspannung für geschlossene Leiter: Oftmals haben wir die Situation, dass wir den induzierten Strom in einem geschlossenen Leiter berechnen wollen. Um das Faraday'sche Gesetz anwenden zu können, müssen wir die Induktionsspannung korrekt interpretieren. Dazu stellen wir uns eine infinitesimale Öffnung unseres Leiters vor, die wie eine Stromquelle wirkt. Nun können wir das Linienintegral über das elektrische Feld entlang des Leiters nehmen und erhalten eine Spannung zwischen den beiden Enden des Leiters. Wird nun die Öffnung geschlossen und die beiden Enden miteinander verbunden, fliesst ein Kreisstrom durch den Leiter.

c) Nimm an, dass die Leiterschlaufe kreisförmig (Radius R) in der $z = 0$ Ebene liegt und das externe Magnetfeld in positive z-Richtung zeigt. Zudem habe die Leiterschleife einen spezifischen Ohm'schen Widerstand ρ. Berechne zunächst die induzierte Stromdichte $\mathbf{j}_{ind}(\mathbf{r}, t)$. Um das davon erzeugte Magnetfeld qualitativ zu beschreiben (Orientierung), genügt es das Dipolmoment der Stromdichte zu berechnen.

Aufgabe 8.2 Lösungen der Wellengleichung

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ in Coulomb-Eichung die Wellengleichung

$$\left[\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}_{tr}(\mathbf{r}, t) \tag{6}$$

erfüllt, wobei $\mathbf{j}_{tr}$ der transversale Anteil der Stromdichte ist,

$$\mathbf{j}_{tr}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{4\pi}\nabla\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\ . \tag{7}$$

Wir haben bereits gesehen, dass solche Differentialgleichungen mit Quellterm sehr elegant mit Hilfe von Green'schen Funktionen gelöst werden können. Wir wollen nun die Green'sche Funktion $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ zum Differentialoperator

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \tag{8}$$

berechnen. $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ ist definiert über die Gleichung

$$\Box\, G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = 4\pi\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t') \tag{9}$$

a) Schreibe die allgemeine Lösung der Wellengleichung (6) in Termen der Green'schen Funktion zum Operator $\Box$.

b) Zeige, dass die Fourier-Transformierte der Green'sche Funktion $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ unter Berücksichtigung von Isotropie in Zeit und Raum die folgende Form hat,

$$G(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{4\pi c^2}{\omega^2 - c^2k^2}\ . \tag{10}$$

$G(\mathbf{k}, \omega)$ hat als Funktion von $\mathbf{k}$ Pole bei $k = \pm\omega$. Berechne nun beiden möglichen Green'schen Funktionen $G^{r,a}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ durch Fourier - Rücktransformation zunächst von Impuls in Ortsraum mit Hilfe des Residuensatz unter Mitnahme (geschickte Wahl des Integrationsweges) je eines der beiden Pole und anschliessender Fourier-Transformation von ω nach t. Diese zwei Green'schen Funktionen heissen retardierte (G^r) bzw. avancierte (G^a) Green'sche Funktion und beschreiben ein- bzw. auslaufende Wellen.

c) Wir betrachten für Zeiten $t < 0$ das feldfreie Vakuum. Zum Zeitpunkt $t = 0$ tritt eine Störung in Form einer nichtverschwindenden Stromdichte[1]

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = j_0\,\frac{\delta(r-a)}{r^2}\delta(\theta - \pi/2)\delta(t)\,\mathbf{e}_\phi \tag{11}$$

auf und für $t > 0$ haben wir wieder ein Vakuum. Analysiere das Vektorpotential, das von dieser Stromkonfiguration erzeugt wird. Wie breitet sich das Feld mit der Zeit aus?

[1] Der Faktor r^{-2} gehört zur Normierung der δ-Funktion in sphärischen Koordinaten

Tipp:

b) Verwende sphärische Koordinaten und schreibe das Integral über k von 0 bis ∞ in ein Integral von $-\infty$ bis ∞ um. Überlege, wo der Integrationsweg geschlossen werden kann und deformiere diesen auf zwei verschiedene Arten, dass jeweils ein Pol vom Integrationsweg eingeschlossen ist. Verwende den Residuensatz.

c) Berechne zunächst den transversalen Anteil der Stromdichte. Nähere dann $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx r$ für grosse r im Nenner der Green'schen Funktion (NICHT jedoch im Argument der δ-Funktion, *warum*?) und berechne das Vektorpotential für Beobachtungspunkte auf der x-Achse. Welcher Ordnung in der Multipolentwicklung entspricht das? Was würde man naiv mit den aus der Magnetostatik bekannten Tatsachen für diese Entwicklung erwarten?

Aufgabe 8.3 Hall-Effekt

An einem flachen (zweidimensionalen) Leiter in x-Richtung (endliche Ausdehnung in y-Richtung) werde ein äusseres elektrisches Feld $\mathbf{E}_0 = E_0\mathbf{e}_x$ angelegt und im Leiter fliesse die Stromdichte $\mathbf{j}_x$. Lassen wir zusätzlich zum elektrischen Feld noch ein senkrecht dazu stehendes magnetisches Feld $\mathbf{H} = H_z\mathbf{e}_z$ zu, so werden die beweglichen Ladungsträger (Elektronen: Ladung $-e$) durch die Lorentzkraft in y-Richtung abgelenkt und sammeln sich an den Seiten des Materials an. Dadurch wird auch in y-Richtung ein elektrisches Feld $\mathbf{E}_{Hall} = E_{Hall}\mathbf{e}_y$ aufgebaut. Dieses Phänomen bezeichnet man als Hall-Effekt.

a) Berechne im stationären Fall ($j_y = 0$) das Hall-Feld E_{Hall} sowie die Spannung U_{Hall} zwischen den beiden Seiten.

b) Die Bewegungsgleichung für die Leitungselektronen lautet im Rahmen des Drudemodells (Gausseinheiten)

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = -e\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{mc} \wedge \mathbf{H}\right) - \frac{\mathbf{p}}{\tau}\,, \tag{12}$$

wobei τ die sog. Streuzeit oder Relaxationszeit ist. Motiviere diese Gleichung.

c) Bestimme den Leitfähigkeitstensor ($\sigma_{kl};\ k,l = x,y$) definiert durch

$$j_x = \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y\ , \qquad j_y = \sigma_{yx}E_y + \sigma_{yy}E_y\ , \tag{13}$$

und den Widerstandstensor $\rho \equiv \sigma^{-1}$.

d) Bestimme den Hallkoeffizienten $R_H = E_y/(j_xH_z)$ (im Drudemodell). Welches Vorzeichen hat R_H ?

e) Bietet der Halleffekt die Möglichkeit, die Ladung der Teilchen, die den elektrischen Strom ausmachen, zu bestimmen?

Tipp:

a) Für den stationären Fall verschwindet die Gesamtkraft.

b) Betrachte die Wirkung der Relaxationszeit in Abwesenheit von äusseren Kräften.

c) Man betrachte den stationären Fall ($\dot{\mathbf{p}} = 0$) und verwende $\mathbf{j} = -ne\mathbf{p}/m$. Des weiteren benutze man die Abkürzungen $\sigma_0 = ne^2\tau/m$ (DC-Drudeleitfähigkeit) und $\omega_c eH_z/mc$ (Zyklotronfrequenz).