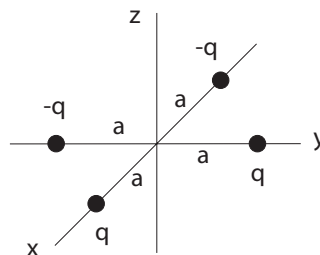


Aufgabe 5.1 Sphärische Multipolmomente

Berechne die sphärischen Multipolmomente q_{lm} , $m = -l, -l + 1, \dots, l$ und gib die ersten beiden nicht verschwindenden Sätze explizit an. Die Ladungsverteilung ist gegeben durch Ladungen q bei $(a, 0, 0)$ und $(0, a, 0)$ sowie Ladungen $-q$ bei $(-a, 0, 0)$ und $(0, -a, 0)$, wobei $a > 0$. (Siehe Skizze) Drücke die Ladungsdichten (Distributionen) in Kugelkoordinaten aus und verifiziere, dass das Integral der Ladungsdichte auch in Kugelkoordinaten die richtige Gesamtladung reproduziert.



Tip: Die Ladungsdichte in sphärischen Koordinaten ist gegeben durch

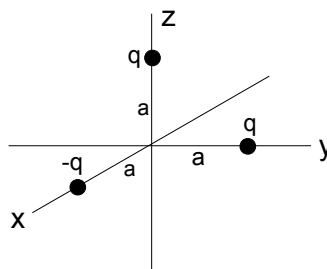
$$\rho(r, \theta, \phi) := \frac{\rho(x, y, z)}{r^2 \sin(\theta)}$$

Ausserdem gilt, dass $P_l^m(1) = \delta_{m,0}$, $P_l^m(-1) = (-1)^l \delta_{m,0}$, $P_1^1(0) = -1$, $P_3^1(0) = \frac{3}{2}$ und $P_3^3(0) = -15$. Zeige damit, dass $P_l^m(0) = 0$, falls $l + m$ ungerade ist.

Aufgabe 5.2 Multipolmomente in karthesischen Koordinaten

- a.) Zeige, dass der Quadrupoltensor $Q_{i,j}$ spurlos ist (d.h. $\sum_i Q_{i,i} = 0$).
- b.) Berechne q' , \mathbf{p}' und $Q'_{i,j}$ in einem um \mathbf{R} verschobenen (parallelen) Koordinatensystem. Was passiert im Vergleich mit q , \mathbf{p} und $Q_{i,j}$ im ursprünglichen Koordinatensystem?

Es sei nun eine Ladungsverteilung mit Ladungen q bei $(0, a, 0)$ und $(0, 0, a)$ sowie einer Ladung $-q$ bei $(a, 0, 0)$ gegeben. (Siehe Skizze)



- c.) Finde q , \mathbf{p} und $Q_{i,j}$. Überprüfe, dass der Quadrupoltensor spurlos ist.
- d.) Ist es möglich ein Koordinatensystem so zu wählen, dass $\mathbf{p}' = \mathbf{0}$? Falls ja, was ist \mathbf{R} ?

Aufgabe 5.3 Magnetfeld einer Spule

Gegeben sei ein dünner Leiter welcher schraubenförmig entlang der z -Achse verläuft. Der Radius der Schraube sei R und ihre Länge sei L . Die Zahl der Windungen pro Längeneinheit sei n und die durch den Leiter fließende Stromstärke sei I . Berechne die z -Komponente des Magnetfeldes für Punkte auf der Symmetrieachse. Wie lautet das Magnetfeld für $L \rightarrow \infty$ bei konstantem n ? Wir vernachlässigen Randeffekte.

Tipp:

$$\int dx \frac{1}{\sqrt{x^2 + w^2}^3} = \frac{x}{w^2 \cdot \sqrt{x^2 + w^2}}$$

Aufgabe 5.4 Stromdurchflossener Hohlzylinder

Aus einem zylindrischen Leiter mit Radius a ist ein Zylinder mit Radius b parallel herausgebohrt worden, wobei die Achse des Bohrkerns um den Abstand d relativ zur Achse des Vollzylinders verschoben ist ($d + b < a$). In dem resultierenden Leiter fließt eine gleichförmige Stromdichte entlang der Achse. Berechne die Richtung und Stärke der resultierenden magnetischen Feldlinien im Innern des Bohrkerns.