Elektrodynamik
Serie 4

Aufgabe 4.1 Green'sche Funktion

In der Ebene $z = 0$ befinde sich eine Kreisscheibe mit Radius a auf dem Potential V_0 und der Rest der Ebene sei geerdet. Das Potential verschwinde im Unendlichen.

a.) Welche Art von Randproblem liegt vor? Welche Green'sche Funktion (in der Vorlesung hergeleitet) benötigen wir, um dieses Problem zu lösen?

b.) Wie erhalten wir daraus das Potential? Leite den dazugehörigen Potentialausdruck für einen beliebigen Punkt $P(r, \varphi, z > 0)$ aus dem in der Vorlesung besprochenen generellen Resultat her.

c.) Berechne das Potential entlang der senkrecht zum Kreis stehenden Achse durch dessen Mittelpunkt (für $z > 0$). Ergebnis:

$$\Phi_1(z) = V_0\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right). \tag{1}$$

d.) Zusätzlich befinde sich noch ein Ring mit gleichem Radius und Ladung Q parallel im Abstand b genau über der Kreisscheibe. Zeige, dass das Potential auf der Achse jetzt durch

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_1(z) + Q\left(\frac{1}{\sqrt{(b-z)^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{(b+z)^2 + a^2}}\right) \tag{2}$$

gegeben ist.

Aufgabe 4.2 Geladener Keil

Ein unendlich langer und hoher Keil mit Öffnungswinkel φ_0 befinde sich auf dem Potential V_0 (siehe Abbildung). Die konkrete Form des Potentials weit entfernt von der Kante sei für die Aufgabe irrelevant.

a.) Finde das Potential in der Nähe der Kante, indem Du das Laplace-Problem mit Hilfe eines Separationsansatzes in geeigneten Koordinaten löst. Löse hierzu die Laplace-Gleichung für beliebige Randbedingungen im Unendlichen und vereinfache dann für kleine Radien.

b.) Wie verhält sich das elektrische Feld in der Nähe der Kante? Was passiert für $\varphi_0 > \pi$?

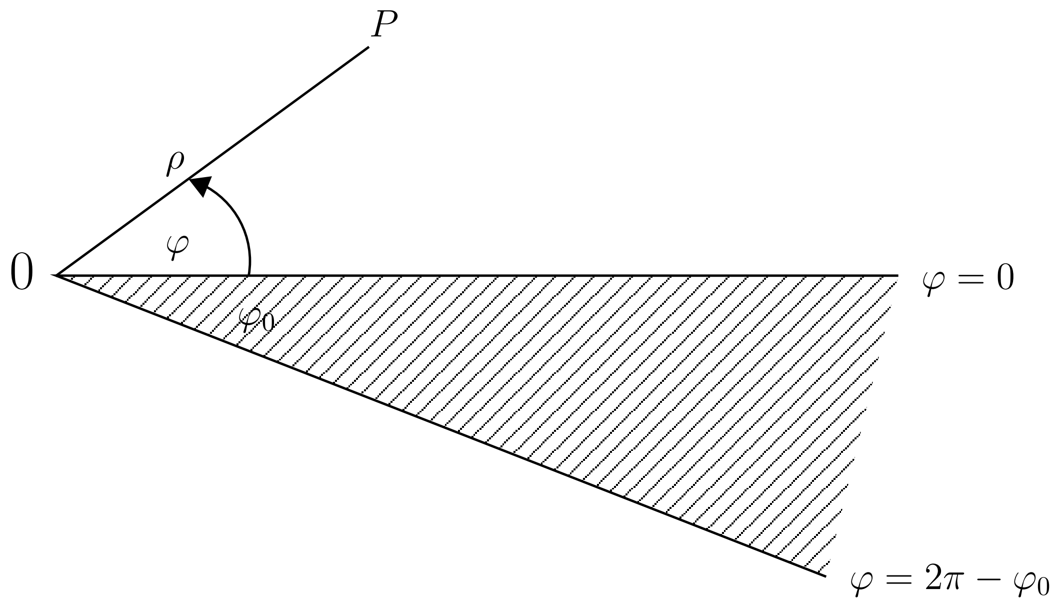

Abbildung 1: (zu Aufgabe 4.2) Der Keil (schraffiert) erstreckt sich unendlich weit senkrecht aus dem Blatt heraus (und ins Blatt hinein). Der Punkt P hat die Koordinaten $P(\rho, \varphi)$.

Aufgabe 4.3 Legendre-Polynome und Ladungsdichte

Eine Kugelschale mit Radius R trage eine bestimmte Ladungsdichte $\sigma(\theta)$, so dass das Potential auf ihr

$$V(r = R, \theta) = V_0 + V_1 \cos\theta + V_2 \cos 2\theta \tag{3}$$

beträgt (V_0,V_1 und V_2 sind Konstanten, θ der Polarwinkel).

a.) Finde das Potential $V(r, \theta)$ innerhalb und ausserhalb der Kugelschale ($V(\infty) = 0$). Verwende dazu den Ansatz

$$\Phi(r, x) = \sum_{l=0}^{\infty} (a_l r^l + b_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos\theta), \tag{4}$$

wobei die $P_l(x)$ die Legendre-Polynome sind.

b.) Berechne daraus das elektrische Feld $\mathbf{E}(r, \theta)$.

c.) Beobachte, wie erwartungsgemäss die senkrecht zur Kugelschale stehende Komponente von $\mathbf{E}$ bei $r = R$ einen Sprung um $\mathbf{E}_\perp^{\text{aussen}} - \mathbf{E}_\perp^{\text{innen}} = 4\pi\sigma$ macht, während die tangentiale Komponente stetig ist. Berechne daraus die Ladungsverteilung $\sigma(\theta)$. Ergebnis:

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4\pi R} \left(V_0 - V_2 + 3(V_1 + 2V_2) \cos\theta \right) \tag{5}$$

d.) Konversion in verschiedene Einheitensysteme: Gleichung (5) ist, wie die gesamte Vorlesung, im Gauss-Einheitensystem geschrieben. Wie muss sie im mks- (oder SI-) System modifiziert werden? Es sei $V_0 = V_1 = V_2 = 1$ V. Berechne die Flächenladungsdichte am Nordpol ($\theta = 0$) in Elementarladungen/cm^2 wenn der Radius der Kugelschale 1 cm beträgt.

Tipp:
Die ersten Legendre-Polynome sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1). \end{aligned} \tag{6}$$

Ferner erfüllen sie die folgende Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^{1} dx P_l(x) P_m(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{lm}. \tag{7}$$

Konstanten:

$$\begin{aligned} e &\approx 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} \\ \epsilon_0 &\approx 8,864 \times 10^{-12} \text{ As m}^{-1} \text{ V}^{-1} \end{aligned} \tag{8}$$