Elektrodynamik
Serie 2

Aufgabe 2.1 Elektrische Feldstärke in einer Hohlkugel

Eine geladene Kugel mit homogener Ladungsdichte ρ und Radius R_A enthalte einen um den Vektor $\mathbf{a}$ gegen den Mittelpunkt verschobenen, kugelförmigen Hohlraum mit Radius R_I. Berechne die elektrische Feldstärke im Hohlraum ($R_I + |\mathbf{a}| < R_A$).
Tipp: Verwende das Gauss'sche Gesetz sowie das Superpositionsprinzip zur Berechnung der elektrischen Feldstärke.

Aufgabe 2.2 Elektrisches Potential einer Dipolschicht

Betrachte zwei Fächen S und S' mit lokalem Abstand $d(\mathbf{x})$ mit zugehöriger Flächenladungsdichte $\sigma(\mathbf{x})$ bzw. $\sigma'(\mathbf{x}') = -\sigma(\mathbf{x})$, wobei $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + d(\mathbf{x})\,\mathbf{n}(\mathbf{x})$, mit $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ dem von S nach S' gerichteten Flächennormalenvektor. Wir nehmen nun den Limes $d(\mathbf{x}) \to 0$, wobei das Produkt $\sigma(\mathbf{x})\,d(\mathbf{x})$ konstant gehalten werden soll, d.h.

$$\lim_{d(\mathbf{x})\to 0} \sigma'(\mathbf{x})\,d(\mathbf{x}) = D(\mathbf{x}) \; . \tag{1}$$

Diese Ladungsverteilung heisst "Dipolschicht" mit lokalen Dipolmoment der Stärke $D(\mathbf{x})$. Bestimme das elektrische Potential $\Phi_D(\mathbf{x})$ der Dipolschicht durch

a.) Berechnung der Potentiale Φ, Φ' der beiden Flächen S und S' und anschliessender Grenzwertbildung

b.) Interpretation der Dipolschicht als Summe einer Vielzahl von Dipolen

und zeige, dass diese beiden Methoden zum gleichen Ergebnis führen.

c.) Zeige, dass das resultierende Potential $\Phi_D(\mathbf{x})$ beim Durchqueren der Dipolschicht eine Unstetigkeit hat.

Tipp: a.) Beschreibe die Fläche S' durch die um $d(\mathbf{x})$ verschobenen Koordinaten der Fläche S.
b.) Mache Gebrauch von der Beschreibung eines einzelnen Dipols (zwei entgegengesetze Ladungen q im orientierten Abstand $\mathbf{d}$) als quasi-lokales Objekt nach der Grenzwertbildung $d \to 0$ analog zu Gl. (1), so dass das Dipolmoment $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ konstant bleibt. Motiviere die Zusammensetzung der Dipolschicht aus infinitesimalen Dipolen mit zugehörigen Dipolmomenten $\mathrm{d}\mathbf{p}(\mathbf{x}) \propto \mathbf{n}(\mathbf{x})D(\mathbf{x})\mathrm{d}a$, wobei $\mathrm{d}a$ ein infinitesimales Flächenelement der Dipolschicht am Punkt $\mathbf{x}$ ist. Das Potential eines Dipols ist gegeben durch

$$\Phi_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \; . \tag{2}$$

c.) Zeige zunächst, dass sich das Potential der Dipolschicht am Ort $\mathbf{x}$ in der Form

$$\alpha \int_S D(\mathbf{x}')\,\mathrm{d}\Omega(\mathbf{x}) \tag{3}$$

schreiben lässt, wobei das Raumwinkelelement $d\Omega(\mathbf{x})$ definiert ist als der Raumwinkel unter dem ein Flächenelement da' auf S von $\mathbf{x}$ aus betrachtet wird. Betrachte dann das Potential unmittelbar unterhalb bzw. oberhalb der Dipolschicht. Nutze das Superpositionsprinzip um das Potential der Dipolschicht geschickt in einen stetigen und einen unstetigen Anteil zu zerlegen.

Aufgabe 2.3 Leitende Kugel im elektrischen Feld

Eine leitende Kugel (Radius R), auf der die Gesamtladung Q sitzt, wird in ein homogenes elektrisches Feld $\mathbf{E}^0 = E_0\mathbf{e}_3$ gebracht. Wie verändert sich das elektrische Feld durch die Anwesenheit der Kugel? Wie ist die Ladung auf der Oberfläche der Kugel verteilt?
Tipp: Motiviere den folgenden Ansatz für das Gesamtpotential in Kugelkoordinaten

$$\Phi(r, \phi, \theta) = f_0(r) + f_1(r)\cos\theta\,,$$

und löse die Poisson-Gleichung im Aussenraum $\Delta\Phi = 0$ mit dem Laplace Operator

$$\Delta\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}\,.$$

Benutze anschliessend die folgenden Randbedingungen, um die gesuchte Lösung zu finden:

a.) Weit weg von der Kugel soll nur das homogene Feld übrig bleiben.

b.) Die Oberfläche der leitenden Kugel muss Äquipotentialfläche sein.

c.) Das elektrische Feld muss das Gauss'sche Gesetz erfüllen.

Anmerkung:
Für alle Rechnungen verwenden das Gauss'sche System (vgl. Vorlesungsskript).