Elektrodynamik

Aufgaben im Stil der Klausur

Wichtige Information:
Diese Aufgabensammlung hat den Zweck, den Studierenden einen Eindruck vom Stil der Aufgaben zu geben, wie sie in der Klausur vorkommen könnten. Die Sammlung ist jedoch bezüglich Umfang und Themenauswahl nicht repräsentativ für die Klausur. Es wird keine Musterlösung ausgehändigt.

Aufgabe 1 Zwei Punktladungen in der Nähe einer leitenden, geerdeten Ebene

Betrachte eine Punktladung $q > 0$ am Ort $\mathbf{a}_1 = (a, a, 0)$ und eine Punktladung $-q$ am Ort $\mathbf{a}_2 = (a, -a, 0)$ im Vakuum.

a.) Bestimme das Potential $\varphi(\mathbf{r})$ dieser Ladungsverteilung. Zeige, dass das Fernfeld ($\varphi(\mathbf{r})$ für $|\mathbf{r}| \gg a$) in führender Ordnung Dipolcharakter besitzt (durch Entwicklung des Potentials oder durch Berechnung der führenden (kartesischen) Multipolmomente).

Im System befinde sich nun zusätzlich eine leitende, geerdete Ebene, welche den Halbraum $x > 0$ begrenzt.

b.) Bestimme das Potential $\varphi(\mathbf{r})$ im positiven Halbraum ($x > 0$) für dieses System. Wie sieht nun das Fernfeld aus? Begründe dein Resultat!

c.) Bestimme die durch die beiden Punktladungen induzierte Flächenladung $\sigma(x = 0, y, z)$ auf der leitenden Ebene.

d.) Wie gross ist die induzierte Ladung? Begründe dein Resultat!

*e.) (*Dieser Teil ist als Zusatz gedacht und würde in einer Klausur nicht vorkommen*) Überlege dir den Einfluss derselben leitenden, geerdeten Ebene auf das Fernfeld

i.) einer Punktladung q am Ort $(a, 0, 0)$,

ii.) der Punktladungen $-q$ am Ort $(a, a, 0)$, $2q$ am Ort $(a, 0, 0)$ und $-q$ am Ort $(a, -a, 0)$,

iii.) der Punktladungen $-q$ am Ort $(2a, a, 0)$, $2q$ am Ort $(a, 0, 0)$ und $-q$ am Ort $(2a, -a, 0)$.

Versuche zuerst ohne zu rechnen den Fernfeldcharakter ohne und mit leitender Ebene zu bestimmen.

Aufgabe 2 Geladener Draht

Ein geladener Draht (Längenladungsdichte λ) verlaufe entlang $(x, 0, z_0)$ (entlang der x-Richtung, im konstanten Abstand z_0) parallel zu einer geerdeten metallischen Platte in der xy–Ebene:

a.) Bestimme das Potential $\varphi(x, y, z)$ dieser Ladungsanordnung im Halbraum $(z > 0)$.

b.) Wie gross ist die auf der Metallplatte induzierte Flächenladungsdichte $\sigma(x, y)$?

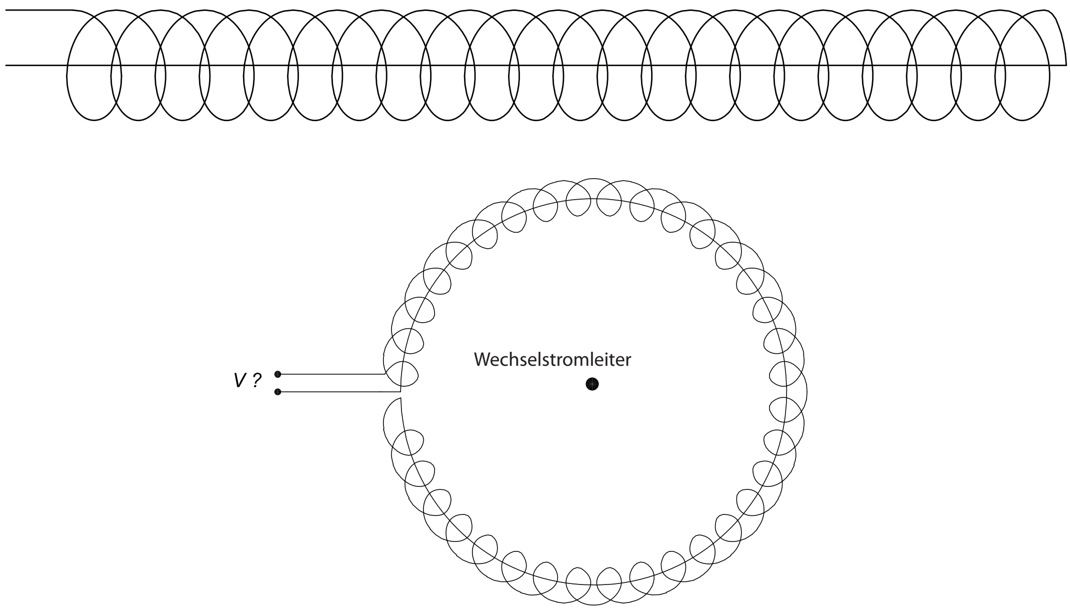
c.) Wird der Draht von der Metallplatte angezogen oder abgestossen?

Bemerkungen

Das Problem kann mithilfe der Methode der Bildladungen gelöst werden.

Aufgabe 3 Kontaktlose Messung von Wechselströmen

Ein Gerät zur Messung von Wechselströmen (vergl. Bild) sei gegeben durch eine lange Spule (für die Länge L gilt $L^2 \gg A$, wobei A den Querschnitt der Spule bezeichnet), die aus einem aufgewickelten Draht mit einem Rückleiter durch die Mitte der Windungen besteht. Diese Spule wird nun kreisförmig um den Wechselstromleiter gebogen. Wir nehmen in dieser Aufgabe an, dass die Frequenz des Wechselstroms niedrig ist, so dass das von dem Wechselstromleiter erzeugte Feld mit den Methoden der Elektro- und Magnetostatik berechnet werden kann.



a.) Berechne die Spannung $V(t)$, die an der Spule gemessen wird, wenn durch den Wechselstromleiter der Strom $I(t) = I_0 \cos \omega t$ fliesst.

b.) Muss man die Frequenz des Wechselstroms a priori kennen, um Aussagen über die Amplitude des Wechselstroms I_0 zu machen?

*c.) (*Dieser Teil ist als Zusatz gedacht und würde in einer Klausur nicht vorkommen*) Was geschieht nun, wenn der Wechselstromleiter nicht mehr im Zentrum der ringförmigen Spule liegt oder die Spule nicht mehr kreisförmig um den Wechselstromleiter gebogen ist oder auch leicht gekippt wird. (Der Wechselstromleiter soll aber dennoch einen ausreichend grossen Abstand zur Spule haben). Argumentiere erst ohne explizite Rechnung und versuche Dein Resultat anschliessend durch eine Rechnung zu belegen.

Aufgabe 4 Elektrodynamik - Eichtransformationen, exotische Medien

a.) Schreibe die inhomogenen Maxwellgleichungen im Vakuum als Funktion der Potentiale ϕ und $\mathbf{A}$.

b.) Die Tatsache, dass das Magnetfeld über die Rotation des Vektorpotentials definiert ist, lässt uns eine gewisse Freiheit bei der Wahl der Potentiale, die sogenannte Eichfreiheit,

$$\begin{aligned} \Phi \mapsto \Phi' &= \Phi - \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \\ A \mapsto A' &= A + \nabla \Gamma. \end{aligned}$$

Welcher Bedingung muss Γ genügen, damit die Wellengleichungen aus Aufgabenteil (a) für $\mathbf{A}$ und Φ entkoppeln.

*c.) (*Dieser Teil ist als Zusatz gedacht und würde in einer Klausur nicht vorkommen*) Wir betrachten nun eine allgemeinere Transformation,

$$\begin{aligned} \Phi \mapsto \Phi' &= \Phi + \alpha \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \\ A \mapsto A' &= A - \alpha \nabla \Gamma, \end{aligned}$$

wobei $\Gamma(t, \mathbf{x})$ die Eichfunktion und $\alpha(t, \mathbf{x})$ eine differenzierbare Funktion ist. Welche Einschränkungen müssen für α gelten, so dass obige Gleichungen Eichtransformationen darstellen. Es genügt die Antwort in Form von Differentialgleichungen für α und Γ zu geben. *Beachte, dass in der Elektrodynamik Pontentiale nur Hilfsgrössen sind; die physikalisch relevanten Grössen sind die Felder* $\mathbf{E}$ *und* $\mathbf{B}$.

Ein bestimmtes exotisches Medium sei durch die Felder $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{R}$ charakterisiert, welche den folgenden drei Gleichungen genügen.

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{Q} &= a(\partial^2/\partial t^2)\mathbf{R} \\ \nabla \times \mathbf{R} &= -b\mathbf{Q} \\ \nabla \mathbf{Q} &= 0 \end{aligned}$$

d.) Leite die Wellengleichung für das Feld $\mathbf{Q}$ in diesem Medium ab. (2 Zeilen)

e.) Wie ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit c für das Feld $\mathbf{Q}$?

Aufgabe 5 Ladungserhaltung

a.) Zeige, dass die totale Ladung $Q = \int d^3\mathbf{x}\rho(\mathbf{x})$ als $\frac{1}{c}\int d^4x j^\mu(x)\partial_\mu\theta(x^0)$ geschrieben werden kann, wobei $j(x)$ der 4-er Strom ist und $\theta(s)$ die Stufenfunktion (Heaviside - Funktion) ist.

b.) Zeige, dass diese Definition der Gesamtladung nicht vom gewählten Inertialsystem abhängt, d.h. unter der Pointcarétransformation $x \mapsto \hat{x} = \Lambda^\mu_\sigma x^\sigma + a^\mu$ invariant ist, wobei Λ eine eigentliche orthonochrone Lorentztransformation beschreibt.