Übungsserie 9

Abgabe: 21. Mai 2010

Aufgabe 1 [*Wigners Theorem*]:

Beweise Wigners Theorem: Sei $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ eine surjektive Abbildung auf dem komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$, so dass

$$|\langle T\psi, T\chi\rangle| = |\langle \psi, \chi\rangle| \tag{1}$$

für alle $\psi, \chi \in \mathcal{H}$. Dann hat T die Form

$$T\psi = \phi(\psi) U\psi\,, \tag{2}$$

wobei $\phi(\psi)$ eine komplexe Zahl mit Betrag $|\phi(\psi)| = 1$ und U ein unitärer oder antiunitärer linearer Operator auf $\mathcal{H}$ ist.

Aufgabe 2 [*Darstellungen der* $\mathfrak{su}(2)$]:

Seien $a_\pm^\dagger$ und $a_\pm$ zwei Paare von Auf- und Absteigeoperatoren. Definiere

$$J_3 = \frac{1}{2}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-)\ , \qquad J_+ = a_+^\dagger a_-\ , \qquad J_- = a_-^\dagger a_+\ .$$

(i) Zeige, dass diese Operatoren die Kommutatorrelationen der $\mathfrak{su}(2)$ erfüllen, d.h.

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm\ , \qquad [J_+, J_-] = 2J_3\ .$$

(ii) Berechne $\vec{J}^2 = J_3^2 + \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+)$ and zeige, dass $\vec{J}^2 = \frac{N}{2}(\frac{N}{2} + 1)\,\mathbb{1}$, wobei $N = N_+ + N_-$.

(iii) In der Standardbasis $|n_+, n_-\rangle$ zeige, dass

$$\begin{aligned} J_+|n_+, n_-\rangle &= \sqrt{n_-(n_+ + 1)}|n_+ + 1, n_- - 1\rangle \\ J_-|n_+, n_-\rangle &= \sqrt{n_+(n_- + 1)}|n_+ - 1, n_- + 1\rangle \\ J_3|n_+, n_-\rangle &= \frac{1}{2}(n_+ - n_-)|n_+, n_-\rangle\ . \end{aligned}$$

(iv) Zeige weiter, dass diese Operatoren der Standardform mit $j = (n_+ + n_-)/2$ und $m = (n_+ - n_-)/2$ entsprechen. Begründe daraus die folgende Identifikation von Zuständen:

$$|j, m\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{j+m}\,(a_-^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}|0, 0\rangle\ . \tag{3}$$

Aufgabe 3 [*Entartungen*]:

(i) Beweise, dass die Clebsch-Gordon Koeffizienten für die Zerlegung des Tensorproduktes einer Spin l und einer Spin 1/2 Darstellung zu einer Spin $(l+1/2)$ Darstellung explizit durch

$$\langle l, \tfrac{1}{2}, m \mp \tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2} | l, \tfrac{1}{2}, l+\tfrac{1}{2}, m\rangle = \sqrt{\frac{l \pm m + \frac{1}{2}}{2l+1}} \,. \tag{4}$$

gegeben sind.

Hinweis: Betrachte Ausdrücke der Form $\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | M_\pm | j_1 j_2 j m\rangle$ und lasse $M_\pm$ sowohl von links als auch von rechts wirken. Bestimme weiter passende Rekursionsrelationen und nutze Induktion nach m. Beginne diese Induktion mit einem Zustand mit $m = j-1$. Um die Zustände den beiden irreduziblen Darstellungen zuzuordnen, betrachte jeweils Zustände mit höchstem Spin.

(ii) Ein Elektron befindet sich in einem Bahndrehimpulseigenzustand mit $l = 1$. Bestimme die Eigenzustände des gesamten Drehimpulses (Bahndrehimpuls und Spin) $|j, j_z\rangle$ in $D_{3/2}$, ausgedrückt durch jene Zustände $|m, s\rangle$, bei denen m der z-Komponente des Bahndrehimpulses und s der z-Komponente des Spins entspricht.