Übungsserie 8

Abgabe: 14. Mai 2010

Aufgabe 1 [*Unschärferelation*]:

Betrachte ein eindimensionales Teilchen in einem harmonischen Potential $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ mit $k > 0$. Drücke den Erwartungswert der Energie $\langle E\rangle$ durch $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$, Δx und Δp aus. Zeige weiter mit Hilfe der Unschärferelation $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, dass

$$\langle E\rangle \geq \frac{\hbar}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} . \tag{1}$$

Damit existiert also eine untere Schranke für die Energie.

Aufgabe 2 [*Harmonischer Oszillator im externen Feld*]:

Ein eindimensionales Teilchen bewege sich in einem Potential

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + ex\,. \tag{2}$$

Zeige, dass die Energieeigenwerte E_n gegeben sind durch

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{e^2}{2m\omega^2}\,. \tag{3}$$

Aufgabe 3 [*Entartungen*]:

(i) Sei D^k_n die Anzahl der Möglichkeiten n als die Summe von k nichtnegativen ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ zu schreiben. Zeige, dass die erzeugende Funktion $F^k(s)$ wie folgt geschrieben werden kann:

$$F^k(s) := \sum_{n=0}^{\infty} D^k_n s^n = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=0}^{\infty} s^{n_1+\cdots+n_k} . \tag{4}$$

Folgere, dass $F^k(s) = (1-s)^{-k}$ und zeige

$$D^k_n = \binom{n+k-1}{n} .$$

Bestimme hieraus die Formel für die Entartung der Energieeigenzustände des isotropischen harmonischen Oszillators in zwei und drei Dimensionen.

(ii) Bestimme die Dichte der Energieeigenzustände für grosse Energien und vergleiche das Resultat mit der Dichte der Energieeigenzustände für ein Teilchen in einer dreidimensionalen Box.

Aufgabe 4 [*Drehimpuls*]:

Der Drehimpulsoperator ist definiert durch

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \tag{5}$$

und als solcher ein Vektoroperator mit den Komponenten

$$L_i = \varepsilon_{ijk} r_j p_k \,. \tag{6}$$

Mit Hilfe von $[r_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$, leite die Kommutatorrelationen

$$[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k \tag{7}$$

her. Zeige ausserdem, dass

$$[L_3, \vec{L}^2] = 0 \,. \tag{8}$$

Berechne $[L_3, L_1L_2 + L_2L_1]$ und zeige, dass für einen Eigenzustand $|l, m\rangle$ mit

$$\vec{L}^2|l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l, m\rangle \,, \tag{9}$$

$$L_3|l, m\rangle = \hbar m|l, m\rangle \tag{10}$$

die Erwartungswerte von L_1^2 und L_2^2 durch

$$\langle l, m|L_1^2|l, m\rangle = \langle l, m|L_2^2|l, m\rangle = \frac{1}{2}\hbar^2[l(l+1) - m^2] \tag{11}$$

gegeben sind.

Hinweis: Sei ψ ein Eigenzustand des selbstadjungierten Operators $\mathbf{A}$. Zeige, dass für einen beliebigen Operator $\mathbf{B}$ gilt

$$\langle\psi|[\mathbf{A}, \mathbf{B}]|\psi\rangle = 0.$$