Übungsserie 6

Abgabe: 30. April 2010

Aufgabe 1 [*Galilei Invarianz der Schrödinger Gleichung*]:

Sei $\Psi(x,t)$ eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen, d.h.

$$i\hbar\partial_t\Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi(x,t). \tag{1}$$

Zeige, dass für eine beliebige Konstante u

$$\Psi_u(x,t) = \Psi(x-ut,t)\exp\left[\frac{im}{\hbar}ux - \frac{im}{2\hbar}u^2t\right] \tag{2}$$

ebenfalls eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung ist.

Aufgabe 2 [*Wahrscheinlichkeitsstrom*]:

Zeige, dass

$$\Psi_k(x,t) = \left(Ae^{\frac{\imath kx}{\hbar}} + Be^{-\frac{\imath kx}{\hbar}}\right)e^{-\frac{\imath E_k}{\hbar}t},$$

mit Konstanten A, B, k und $E_k = \frac{k^2}{2m}$, eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung mit $V(x) = 0$ ist. Zeige weiter, dass der zu $\Psi_k(x,t)$ gehörige Wahrscheinlichkeitsstrom durch

$$j(x,t) = \left(|A|^2 - |B|^2\right)\frac{k}{m}$$

gegeben ist.

Aufgabe 3 [*1d δ-Funktion Potential*]:

Betrachte ein Teilchen der Masse m in einer räumlichen Dimension, dass von links ($x < 0$) gegen ein idealisiertes Potential $V(x) = V\delta(x)$ geschossen wird. Setze für die Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V\delta(x)\psi(x) = E\psi(x) \tag{3}$$

die folgende Lösung an:

$$\psi(x) = \left\{\begin{array}{ll} e^{ikx/\hbar} + Re^{-ikx/\hbar}, & x < 0 \\ Te^{ikx/\hbar}, & x > 0 \end{array}\right\},$$

wobei $E = k^2/2m$.

Bestimme die Stetigkeitsbedingungen für ψ und der ersten Ableitung bei $x = 0$, um den Reflexions- und Transmissionskoeffizient R und T zu berechnen. Verifiziere die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit

$$|R|^2 + |T|^2 = 1\,.$$

Hinweis: Durch einmalige Integration der Gl. (3) erkennt man, dass die erste Ableitung von ψ bei $x = 0$ einen Sprung aufweist.