Übungsserie IX

`Abgabe: 18.Mai 2009`

Aufgabe 1 [*Der δ-Operator*]: Mit den Konventionen aus der Vorlesung zeige, dass der Operator

$$\delta T = (-1)^{n\,p} * d * T$$

in Komponenten durch

$$(\delta T)_{j_1,\ldots,j_{p-1}} = -|g|^{-1/2}\, g_{j_1 r_1} \cdots g_{j_{p-1} r_{p-1}} \frac{\partial}{\partial x^r} \left(|g|^{1/2} T^{r,r_1,\ldots,r_{p-1}}\right)$$

gegeben ist.

Aufgabe 2 [*Lorentztransformationen der elektromagnetischen Felder*]: In einem bestimmten Bezugssystem ist ein statisches, homogenes elektrisches Feld E_0 parallel zur x-Achse, und ein statisches, homogenes Magnetfeld $B_0 = 2E_0$ liegt in der x-y Ebene und schliesst mit der x-Achse einen Winkel θ ein. Bestimme die Relativgeschwindigkeit eines Bezugssystems, in welchem das elektrische und magnetische Feld parallel zueinander sind. Wie gross sind die Feldstärken in diesem Bezugssystem für die Spezialfälle $\theta \to 0$ und $\theta \to (\pi/2)$?

Hinweise: Die Aufgabe kann ohne viel Mehraufwand auch für ein beliebiges Verhältnis λ zwischen dem E_0 und dem $B_0 = \lambda E_0$ Feld gelöst werden. Das Zwischenresultat für die Relativgeschwindigkeit lautet dann

$$\beta = \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda \sin\theta} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2\lambda \sin\theta}{\lambda^2 + 1} \right)^2} \right].$$

Aufgabe 3 [*Invarianten des elektromagnetischen Feldes*]:

(i) Mit den Konventionen aus der Vorlesung zeige, dass die beiden Grössen

$$I_1 = *(F \wedge *F); \quad I_2 = *(F \wedge F)$$

invariant unter eigentlichen orthochronen Lorentztransformationen sind und drücke sie durch die elektrischen und magnetischen Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ aus.
Hinweis: Schreibe I_1 und I_2 in Komponenten und zeige dass

$$I_1 \sim F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}; \quad I_2 \sim \epsilon_{\mu\nu\tau\sigma} F^{\mu\nu} F^{\tau\sigma}$$

(ii) In einem Inertialsystem seien $\mathbf{E}(x)$ und $\mathbf{B}(x)$ orthogonal zueinander. Zeige, dass dieses dann in allen Inertialsystemen gilt.

(iii) In einem Inertialsystem sei $\mathbf{E}(x) = 0$ und $\mathbf{B}(x) \neq 0$. Gibt es dann ein Inertialsystem in dem $\mathbf{B}(x) = 0$ gilt?