Übungsserie VIII

Abgabe: 4.Mai 2009

Aufgabe 1 [*Addition von Geschwindigkeiten*]: Die Lorentztransformation, die zwei Inertialsysteme mit Relativgeschwindigkeit v in der x-Richtung miteinander verbindet, ist

$$\hat{t} = \gamma(t - \beta x/c) \quad \hat{x} = \gamma(x - \beta ct) \quad \hat{y} = y \quad \hat{z} = z$$

wobei $\beta = v/c$ und $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

(i) Zeige explizit, dass die sukzessive Anwendung zweier solcher Lorentztransformationen $(x, t) \stackrel{v_1}{\to} (\hat{x}, \hat{t})$ und $(\hat{x}, \hat{t}) \stackrel{v_2}{\to} (\tilde{x}, \tilde{t})$, wobei v_1 und v_2 nur eine x-Komponente haben, wiederum eine Lorentztransformation der obigen Form beschreibt. Bestimme die zugehörige Geschwindigkeit als Funktion von v_1 und v_2.

(ii) Betrachte nun den Fall, dass v_1 nur eine x-Komponente und v_2 nur eine y-Komponente besitzt. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung dieser beiden Lorentzboosts als Hintereinanderschaltung eines Boosts (bzgl. eines gedrehten Koordinatensystems) und einer Drehung geschrieben werden kann. Was sind nun Richtung und Betrag der Relativgeschwindigkeit?

Aufgabe 2 [*Lorentz Transformationsgesetz für Beschleunigungen*]: Ein Koordinatensystem K' bewege sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ relativ zu einem anderen System K. In K' habe ein Teilchen die Geschwindigkeit $\mathbf{u}'$ und erfahre die Beschleunigung $\mathbf{a}'$. Man bestimme das Lorentz-Transformationsgesetz für die Beschleunigung und zeige, dass im System K die Komponenten der Beschleunigung parallel bzw. senkrecht zu $\mathbf{v}$ durch

$$\mathbf{a}_\parallel = \frac{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}{(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'/c^2)^3} \mathbf{a}'_\parallel \,, \qquad \mathbf{a}_\perp = \frac{(1 - v^2/c^2)}{(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'/c^2)^3} \left(\mathbf{a}'_\perp + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times (\mathbf{a}' \times \mathbf{u}') \right)$$

gegeben sind.

Hinweis: Mit der Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung des Teilchens ist hier die erste bzw. zweite Ableitung seiner Trajektorie nach der *Koordinatenzeit* - nicht nach der Eigenzeit - gemeint.

Aufgabe 3 [*Der ϵ-Tensor*]: Für jede Kombination von n Vektoren definieren wir

$$\begin{aligned} E(a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}) &= |g|^{1/2} \det(a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}) \\ &= |g|^{1/2} \sum_{\pi \in S_n} (\text{sign } \pi) \prod_{l=1}^{n} a^{(l)}_{\pi(l)} \,, \end{aligned}$$

wobei g die Determinante der Metrik g_{ij} ist. [Diese Definition von E hängt zunächst von der Wahl einer Basis ab, da in die Definition die Komponenten g_{ij} und $a^{(l)}_i$ eingehen.]

(i) Berechne die Komponenten von E bezüglich dieser Basis. Zeige, dass E total antisymmetrisch ist.

(ii) Zeige, dass E ein Pseudo-Tensor ist, d.h. dass

$$E\left(a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}\right) = \tilde{E}\left(\tilde{a}^{(1)}, \ldots, \tilde{a}^{(n)}\right) , \tag{1}$$

falls die Abbildung, die die beiden Basen $\{e_1, \ldots, e_n\}$ und $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n\}$ miteinander verknüpft,

$$\tilde{e}_i = R^j{}_i \, e_j \tag{2}$$

orientierungstreu ist ($\det(R) > 0$).

Hinweis: Berechne zunächst $\tilde{g}_{ij}$, d.h. die Metrik $\tilde{g}_{ij}$ in den getildeten Koordinaten, und bestimme ihre Determinante.