Übungsserie I

Abgabe: 2.März 2009

Aufgabe 1 [*Identitäten der Vektoranalysis*]: In der Elektrodynamik treten häufig Standardidentitäten der Vektoranalysis auf. Diese sollen mit dieser Aufgabe wieder ins Gedächtnis zurückgerufen werden. Dazu beweise:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}) &= \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}) \\
\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}) &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c} \\
(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}) &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \\
\operatorname{rot}\operatorname{grad}\psi &= 0 \\
\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{A}) &= 0 \\
\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{A}) &= \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} \\
\operatorname{div}(\psi\mathbf{A}) &= \mathbf{A}\cdot\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{div}\mathbf{A} \\
\operatorname{rot}(\psi\mathbf{A}) &= (\operatorname{grad}\psi)\wedge\mathbf{A} + \psi\operatorname{rot}\mathbf{A} \\
\operatorname{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\wedge\operatorname{rot}\mathbf{B} + \mathbf{B}\wedge\operatorname{rot}\mathbf{A} \\
\operatorname{div}(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}) &= \mathbf{B}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{B}\,.
\end{aligned}$$

[**Tipp**: die i-te Komponente des Vektorproduktes $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ ist

$$(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})_i = \sum_{jk}\epsilon_{ijk}\,a_j\,b_k\ ,$$

wobei ϵ_{ijk} der total-anti-symmetrische Tensor in drei Dimensionen ist mit $\epsilon_{123}=1$. Zeige zunächst, dass

$$\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \qquad \text{und} \qquad \sum_{ij}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijm} = 2\delta_{km}\ .$$

Mit Hilfe dieser Identitäten kannst Du dann leicht die obigen Gleichungen beweisen.]

Aufgabe 2 [*Stokesscher Integralsatz*]: Das Feld $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ besitzt an jedem Punkt im Raum dieselbe Richtung.

(i) Unter welcher Bedingung ist das Feld wirbelfrei, d.h. $\operatorname{rot}\mathbf{D}(\mathbf{x})=0$?

(ii) Wähle ein einfaches Beispiel eines nicht-wirbelfreien Feldes $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ der oben beschriebenen Art. Betrachte eine geschlossene Kurve, entlang derer das Linienintegral über das als Beispiel gewählte Feld nicht verschwindet, und überprüfe daran die Aussage des Stokesschen Integralsatzes.