Elektrodynamik, Serie 8.

FS 08 *Abgabe:* Woche 9

1. Greensche Funktion in $\mathbb{R}^{2+1}$

i) Finde die Greensche Funktion $D_2(\underline{x}, t)$ für das Anfangswertproblem

$$\Box u(\underline{x}, t) = 0, \qquad (\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^{2+1}\,,$$
$$u(\underline{x}, 0),\ \frac{\partial u}{\partial t}(\underline{x}, 0) \qquad \text{gegeben}$$

in Dimension 2. *Hinweis:* Erweitere die Aufgabenstellung auf ein 3-dimensionales Problem mit $(\underline{x}, x_3, t) \in \mathbb{R}^{3+1}$ und berechne die 2-dimensionale Greensche Funktion aus der 3-dimensionalen, s. (3.10).

ii) In 3 Dimensionen wird $u(\vec{x}_1, t_1)$ durch die Werte von $u(\vec{x}_2, t_2)$ mit $(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 = c^2(t_1 - t_2)^2$ (Lichtkegel) eindeutig bestimmt. Was ändert sich im 2-dimensionalen Fall?

2. Hertzscher Dipol

Als Hertzschen Dipol bezeichnet man einen zeitabhängigen Punktdipol $\vec{p}(t)$ mit

$$\rho(\vec{x}, t) = -\vec{p}(t) \cdot \vec{\nabla}\delta(\vec{x})\,, \qquad \vec{i}(\vec{x}, t) = \dot{\vec{p}}(t)\delta(\vec{x})\,.$$

i) Man verifiziere die Kontinuitätsgleichung.

ii) Berechne die retardierten elektromagnetischen Potentiale φ und $\vec{A}$ in der Lorenz–Eichung und daraus die elektromagnetischen Felder

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(\vec{x}, t)\,, \qquad \vec{B}(\vec{x}, t) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{x}, t)\,.$$

Ordne die Beiträge nach Potenzen von r^{-1}.

iii) Die Richtung von $\vec{p}$ sei konstant. Wie liegen $\vec{E}$ und $\vec{B}$?

iv) Im zeitlich harmonischen Fall (Wellenlänge λ) diskutiere man, welche Terme für $r \gg \lambda$ und $r \ll \lambda$ überwiegen. Wie ist die relative Phase zwischen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in beiden Grenzfällen?

v) Man berechne den Poyntingvektor für $r \gg \lambda$, sowie die Winkelabhängigkeit der Leistung. Wie gross ist die insgesamt abgestrahlte Leistung?

3. Thomson Streuformel

Ein Punktteilchen (Ladung e, Masse m) bewegt sich unter dem Einfluss einer monochromatischen ebenen elektromagnetischen Welle. Dabei strahlt es selbst. Berechne das Verhältnis der abgestrahlten Leistung P zur einfallenden Intensität I_0,

$$\sigma = \frac{P}{I_0},$$

im Fall, dass I_0 klein ist. Der Streuquerschnitt σ hat die physikalische Dimension einer Fläche.
Hinweis: Diskutiere die Schwingung des Teilchens um $\vec{x} = 0$. Solange I_0 klein ist (gegen was?) reicht der Beitrag der elektrischen Dipolstrahlung zu P.