

# Elektrodynamik, Serie 6.

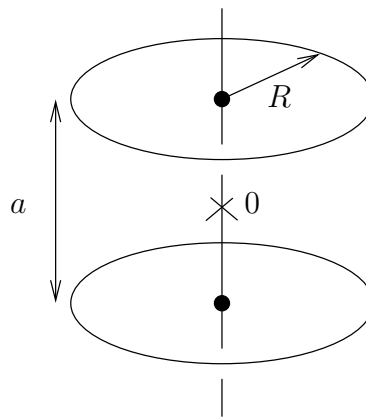
FS 08

Abgabe: Woche 7

## 1. Helmholtz-Spule

- i) Ein kreisförmiger Leiter mit dem Radius  $R$  werde vom Strom  $I$  durchflossen. Welches sind die Symmetrien des Magnetfelds? Bestimme dann das Feld auf der Symmetrieachse des Leiters (oEdA die 3-Achse).

Eine Helmholtz-Spule besteht aus zwei kreisförmigen Leitern, die eine gemeinsame Symmetrieachse haben. Die beiden Ströme seien gleich und gleich orientiert. Die Anordnung



bezweckt ein Magnetfeld, das über ein gewisses Gebiet fast konstant ist. Konkret: Wie muss der Abstand  $a$  gewählt werden, damit  $\vec{B}(\vec{x}) - \vec{B}(0) = O(|\vec{x}|^4)$ , ( $\vec{x} \rightarrow 0$ )?

- ii) Zeige: Dies tritt ein, sofern

$$\frac{\partial^2 B_3}{\partial x_3^2} = 0 \quad (1)$$

am Mittelpunkt. *Hinweis:* Verwende die Symmetrien des Felds und seine Feldgleichungen, ohne Festlegung von  $a$ .

- iii) Bestimme  $a$ , sodass (1) gilt.

## 2. Magnetische Feldenergie

Die Stromdichte  $\vec{i}(\vec{x})$ , bzw. die Ströme  $I_1, I_2$  seien zeitlich konstant. Zeige:

- i) Die magnetische Feldenergie kann durch die Stromdichte ausgedrückt werden:

$$\frac{1}{2} \int \vec{B}^2(\vec{x}) d^3x = \frac{1}{8\pi c^2} \iint \frac{\vec{i}(\vec{x}) \cdot \vec{i}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3x d^3y.$$

ii) Für zwei Leiter  $\gamma_1, \gamma_2$  beträgt sie nach Subtraktion der Selbstenergien

$$E = \int \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 d^3x = \frac{I_1 I_2}{4\pi c^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (2)$$

iii) Definiere stattdessen  $E$  (in Analogie zur Elektrostatik, aber falsch, s. unten) infinitesimal als die Arbeit  $dE = -\vec{F} \cdot d\vec{a}$ , die bei der Verschiebung  $d\vec{a}$  von  $\gamma_2$  relativ zu  $\gamma_1$  gegen die Kraft  $\vec{F}$  von  $\gamma_1$  auf  $\gamma_2$  aufzuwenden ist. Dann resultiert das umgekehrte Vorzeichen in (2). (Der Unterschied zur Elektrostatik hängt damit zusammen, dass sich gleichnamige Ladungen abstossen, aber gleichgerichtete Ströme anziehen).

iv) Wo liegt der Fehler? *Hinweis:* Die Arbeit  $-\vec{F} \cdot d\vec{a}$  dient nicht nur dem Aufbau der Feldenergie  $E$ , sondern auch zur Verrichtung der Arbeit  $dW_i$  der elektromotorischen Kraft, die bei  $d\vec{a}$  in  $\gamma_i$  entsteht ( $i = 1, 2$ ), d.h.  $-\vec{F} \cdot d\vec{a} = dE + dW_1 + dW_2$ .