Elektrodynamik, Serie 5.

FS 08 *Abgabe:* Woche 6

1. Ein Elektromagnet

Sei $\vec{\imath}(\vec{x})$ die Gleichstromdichte eines Elektromagneten im Gebiet $|\vec{x}| < R$. Zeige:

i) mit Hilfe von $\operatorname{div}\vec{\imath} = 0$, dass

$$\int d^3x\,\vec{\imath} = 0\,, \qquad \int d^3x\,(x_l i_k + x_k i_l) = 0\,. \tag{1}$$

ii) mit Hilfe von (1), dass für $|\vec{x}| = r \gg R$ das Magnetfeld folgende Form hat:

$$\vec{B} = -\vec{\nabla}\frac{\vec{m}\cdot\vec{x}}{4\pi r^3}\,, \tag{2}$$

wobei $\vec{m} = \frac{1}{2c}\int d^3x\,\vec{x}\wedge\vec{\imath}(\vec{x})$ das magnetische Moment bezeichnet.

iii) dass auf den Elektromagneten in einem äusseren, langsam variierenden Magnetfeld $\vec{B}$ die Kraft $\vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B})$ und das Drehmoment $\vec{m}\wedge\vec{B}$ wirken.

iv) dass falls $\vec{\imath}(\vec{x})$ von bewegten Teilchen der Ladung e und Masse m herrührt,

$$\vec{m} = \frac{e}{2mc}\vec{L} \tag{3}$$

gilt, wobei $\vec{L}$ den Drehimpuls der Teilchen bezeichnet. Bestimme in diesem Fall die Bewegung von $\vec{m}$ in einem homogenen äusseren $\vec{B}$-Feld.

2. Elektrostatische Energie im äusseren Feld

Zeige, dass die elektrostatische Energie einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ in einem langsam variierenden äusseren Potential $\varphi(\vec{x})$ wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$W = e\varphi(0) - \vec{p}\cdot\vec{E}(0) - \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij}\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \dots\,, \tag{4}$$

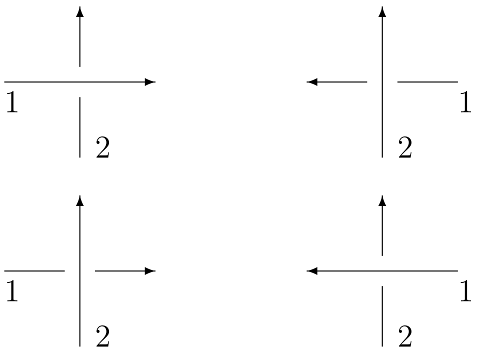
wobei $e = \int d^3x\,\rho(\vec{x})$ die Gesamtladung ist, $\vec{p} = \int d^3x\,\vec{x}\rho(\vec{x})$ das Dipolmoment und $Q_{ij} = \int d^3x\,(3x_ix_j - \vec{x}^2\delta_{ij})\rho(\vec{x})$ das Quadrupolmoment.

3. Gausssche Verkettungszahl

Die Gausssche Verkettungszahl zweier geschlossener Kurven γ_1, γ_2 ist definiert als

$$n(\gamma_1,\gamma_2) = \int_{\gamma_2}\int_{\gamma_1}\frac{(d\vec{s}_2\wedge d\vec{s}_1)\cdot\vec{r}}{4\pi r^3}$$

mit derselben Bedeutung von $\vec{r}$ wie in (2.1). Zeige: $n(\gamma_1,\gamma_2)$ ist eine ganze Zahl, die angibt, wie oft sich die eine Kurve um die andere windet $(n(\gamma_1,\gamma_2) = n(\gamma_2,\gamma_1))$. Genauer: Projiziere die beiden Kurven auf eine Ebene; seien



positive

Kreuzungen.

negative

Dann ist $n(\gamma_1, \gamma_2) = (n_+ - n_-)/2$, wobei $n_\pm$ die Anzahl positiver/negativer Kreuzungen ist.

Hinweis: Mit $I_1 = I_2 = c = 1$ ist $n(\gamma_1, \gamma_2) = \int_{\gamma_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_2$. Verwende den Satz von Stokes um zu zeigen, dass dies eine Invariante unter Deformationen ist.