Elektrodynamik, Serie 3.

FS 08 *Abgabe:* Woche 4

1. Das Cavendish Experiment

Das Cavendish Experiment (1773) ist ein Test des Coulomb-Gesetzes. Zwei konzentrische, leitende, hohle Kugeln der Radien $R_1 < R_2$ sind über einen Draht verbunden und gegen aussen isoliert. Die Ladungen der beiden Kugeln seien Q_1, bzw. Q_2.

i) Ohne viel zu rechnen zeige, dass $Q_1 = 0$.

Ersetze nun das Coulomb-Gesetz durch

$$\vec{F}_{12} = e_1 e_2 F(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

mit einem beliebigen Kraftgesetz $F(r)$.

ii) Zeige: Das Potential einer homogen geladenen Kugel vom Radius a und Ladung 1 ist

$$V(r) = \frac{f(r+a) - f(|r-a|)}{2ar}\,, \qquad (r = |\vec{x}|)$$

wobei

$$f(r) = \int_0^r ds\, U(s) s\,, \qquad \frac{dU}{dr} = -F(r)\,.$$

Das Potential U ist bestimmt bis auf $U(r) \to U(r) + C$, ($C = \text{const}$). Wie wirkt sich das auf f aus? Was ist f im Fall des Coulomb-Gesetzes?

iii) Berechne das Verhältnis des Ladungen,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} \frac{f(2R_2)R_1 - (f(R_2+R_1) - f(R_2-R_1))R_2}{f(2R_1)R_2 - (f(R_2+R_1) - f(R_2-R_1))R_1}\,, \tag{1}$$

und zeige, dass nur im Fall des Coulomb-Gesetzes $Q_1 = 0$ für alle Radien gilt.

2. Kapazität zweier Leiter

Die Kapazitätskoeffizienten zweier Leiter seien $(C_{ij})_{i,j=1}^2$. Der erste trage die Ladung Q, der zweite $-Q$. Berechne die Kapazität C in der Beziehung $Q = C(V_1 - V_2)$.

3. Monotonizität der Kapazitätsmatrix

Sei $C = (C_{ij})_{i,j=1}^N$ die Kapazitätsmatrix der Leiter $\mathcal{L}_1, ..., \mathcal{L}_N$. Ersetze sie durch Leiter $\widetilde{\mathcal{L}}_1, ..., \widetilde{\mathcal{L}}_N$ mit $\widetilde{\mathcal{L}}_i \subset \mathcal{L}_i$. Zeige: $\widetilde{C} \le C$ im Sinne der (symmetrischen) Matrizen.

4. Numerische Lösung eines Randwertproblems mit Matlab

Die Software Matlab implementiert die Methode der Finiten Elemente zur Lösung 2-dimensionaler Randwertprobleme.

Vorgehen: (i) Starten Sie *Matlab*; (ii) geben Sie den Befehl *pdetool* ein: ein Fenster *PDE Toolbox* öffnet sich; (iii) wählen Sie *Electrostatics* in der Menuleiste (statt *Generic Scalar*) ; (iv) unter *PDE/PDE Specification* können Sie die Werte der Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$ eingeben; (v) mit *Draw* zeichnen Sie das Gebiet, evtl. unter Benützung eines Koordinatennetzes (s. *Options*); (vi) mit *Boundary/Boundary Mode* und *Boundary/Specify Boundary Conditions* legen Sie die Randbedingungen fest (Randwerte heissen $r(\vec{x})$ statt $\psi(\vec{x})$); (vii) mit *Mesh* triangulieren Sie das Gebiet, bzw. verfeinern Sie die Triangulation; (viii) unter *Plot/Parameters* können Sie den Darstellungsmodus der Lösung wählen; (ix) ein Klick auf = löst nun das Randwertproblem.

Eine Anleitung (319 Seiten) zu *PDE Toolbox* findet man unter
`http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf_doc/pde/pde.pdf`

Finden Sie damit das elektrische Feld und das Potential einer Anordnung Ihrer Wahl.