Elektrodynamik, Serie 13.

FS 08 *Abgabe:* Woche 14

1. Faraday Effekt

Ein statisches Magnetfeld $\vec{B}$ beeinflusst den Dielektrizitätstensor

$$D_i = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ik}(\vec{B}) E_k \,,$$

wobei die Grössen frequenzabhängig sein dürfen. Falls keine Dissipation stattfindet, ist

$$\varepsilon_{ik}(\vec{B}) = \overline{\varepsilon_{ki}(\vec{B})} \,.$$

Aus allgemeinen Gründen (Onsager-Casimir Relationen $\to$ Statistical Physics) gilt ferner

$$\varepsilon_{ik}(-\vec{B}) = \varepsilon_{ki}(\vec{B}) \,.$$

i) Folgere, dass in linearer Näherung in $\vec{B}$ nur der Imaginärteil $\operatorname{Im} \varepsilon_{ik}$ davon abhängt. Zeige, dass im isotropen Fall

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \mathrm{i}\alpha \vec{E} \wedge \vec{B} \,.$$

ii) Sei $\mu = 1$. Betrachte eine linear polarisierte Welle der Frequenz ω, die in der Richtung von $\vec{B}$ fortschreitet. Zeige, dass sich seine Polarisationsebene um den Winkel

$$\varphi = RBl$$

dreht, wobei l die zurückgelegte Strecke ist und

$$R = \frac{\omega\alpha}{2cn_0} \,, \qquad n_0 = \sqrt{\varepsilon_0} \,.$$

Hinweis: Untersuche zuerst die Propagation zirkular polarisierter Wellen.

2. Das Lorentz-Drude-Modell

Das Lorentz-Modell ist ein klassisches, mikroskopisches Modell für die Dispersion. Die Polarisation $\vec{P}$ ist in den molekularen Dipolmomenten $\vec{p}$ begründet: $\vec{P} = N\vec{p}$, wobei N die Dichte der Moleküle ist.

i) Im einfachsten Fall ist $\vec{p} = e\vec{x}$, wobei e und $\vec{x}$ Ladung und Ort eines gebundenen Elektrons bedeuten. Die Bewegungsgleichung sei die eines gedämpften harmonischen Oszillators:

$$\ddot{\vec{x}} + \gamma\dot{\vec{x}} + \omega_0^2 \vec{x} = \frac{e}{m}\vec{E}(t)$$

($\gamma > 0$: Dämpfung; ω_0: ungedämpfte Frequenz). Zeige:

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\gamma\omega} \,,$$

$$\chi(t) = \begin{cases} \frac{Ne^2}{m} \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t} \frac{\sin\tilde{\omega}t}{\tilde{\omega}} & (t \geq 0) \,, \\ 0 & (t \leq 0) \,. \end{cases}$$

mit $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2}$. Zeichne die Graphen von $\operatorname{Re}\hat{\chi}(\omega)$, $\operatorname{Im}\hat{\chi}(\omega)$.

ii) Betrachte schwingendes System $\underline{x} = (\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_Z)$ aus Z Elektronen gleicher Ladung und Masse

$$\vec{p} = e \sum_{i=1}^{Z} \vec{x}_i \,,$$
$$\underline{\ddot{x}} + \Gamma \underline{\dot{x}} + \Omega_0^2 \underline{x} = \frac{e}{m} \underline{E}(t) \,,$$

wobei: $\underline{E} = (\vec{E}, \ldots \vec{E})$; Ω_0^2 eine positiv definite Matrix ist,

$$\Omega_0^2 \underline{e}_j = \omega_j^2 \underline{e}_j \,,$$

mit orthonormierten Eigenvektoren (Eigenschwingungen des ungedämpften Systems)

$$(\underline{e}_j, \underline{e}_k) = \delta_{jk} \,;$$

und Γ eine Matrix mit $(\underline{x}, \Gamma \underline{x}) > 0$ für $\underline{x} \neq 0$. Ferner sei das System invariant unter gemeinsamer Rotation aller Elektronen, sodass die Suszeptibilität isotrop ist. Sei $\omega\Gamma \ll \Omega_0^2$ im Sinne typischer Matrixelemente. Zeige in dieser Näherung

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{Ne^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\gamma_j \omega}$$

mit $\gamma_j = (\underline{e}_j, \Gamma \underline{e}_j)$ und "Oszillatorstärken" $f_j \geq 0$, die der Summenregel

$$\sum_j f_j = Z$$

genügen.

Hinweise: Isotropie bedeutet faktisch, dass $\vec{x}_i$, $\vec{E}$ als Vektoren in einer Dimension betrachtet werden können. Die Eigenwerte von $\Omega_0^2 - \mathrm{i}\omega\Gamma$ sind in hinreichender Näherung $\omega_j^2 - \mathrm{i}\omega\gamma_j$, die Eigenvektoren nach wie vor $\underline{e}_j$.

iii) Das Modell (i) beschreibt in der Variante von Drude ($\omega_0 = 0$) ein Leitungselektron. Zeige $\vec{\imath}_L(\omega) = \sigma(\omega)\vec{E}(\omega)$ mit Leitfähigkeit

$$\sigma(\omega) = \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\gamma - \mathrm{i}\omega} \,,$$

wobei N die Dichte der Elektronen ist.