Elektrodynamik, Serie 11.

FS 08 *Abgabe:* Woche 12

1. Transformation der Geschwindigkeiten

Gegeben sind zwei achsenparallele Inertialsysteme O und $\widetilde{O}$, wobei sich $\widetilde{O}$ mit Relativgeschwindigkeit v bezgl. O in 1-Richtung bewegt. Ein Teilchen hat Geschwindigkeit $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ bzgl. O. Berechne die Geschwindigkeitskomponenten bzgl. $\widetilde{O}$? *Hinweis:* Drücke die Geschwindigkeit durch die 4er-Geschwindigkeit aus.

2. Relativistischer Zerfall

Betrachte den Zerfall $\pi^+ \to \mu^+ + \nu$, wobei die Massen m_π, $m_\mu > 0$ und $m_\nu = 0$ bekannt sind.

i) Man zeige: Die totale Energie des Muons μ^+ im Ruhesystem des Pions π^+ ist

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} c^2 \ .$$

ii) Das Pion habe im Laborsystem die Energie $E'_\pi \gg m_\pi c^2$ und das Neutrinos ν bewegt sich in der Flugrichtung des zerfallenden Pions. Zeige: Seine Energie E'_ν ist

$$E'_\nu \approx \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2} E'_\pi \ .$$

3. Relativistische Rakete

Betrachte eine zur Zeit $t = 0$ aus $x = 0$ losfahrende Rakete (1-dim. Bewegung), die in ihrem Ruhesystem die konstante Beschleunigung g erfährt.

i) Zeige, dass die Weltlinie der Rakete in der (ct, x)–Ebene durch die Hyperbel gegeben ist:

$$(x + c^2/g)^2 - c^2t^2 = c^4/g^2 \ .$$

Hinweis: Berechne

$$\left(\frac{d^2x}{d\tau^2}, \frac{d^2x}{d\tau^2}\right) = \left(\frac{d^2x^0}{d\tau^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2x^1}{d\tau^2}\right)^2$$

im instantanen Ruhesystem und benütze, dass es sich um eine Lorentz-invariante Grösse handelt. Alternativ dazu stelle die Bewegungsgleichung im instantanen Ruhesystem auf und schreibe sie auf Lorentz-forminvariante Weise.

ii) Ein Beobachter, der sich fest in $x = 0$ befindet, sende laufend Lichtsignale aus. Zeige, dass die, die nach einer (zu bestimmenden) Zeit t_* ausgesandt werden, von der Rakete nicht mehr empfangen werden können. Dies, obschon die Rakete zu allen Eigenzeiten τ Signale empfängt. Wie steht es, falls die Signale umgekehrt von der Rakete gesandt und vom Beobachter empfangen werden? *Hinweis:* Zeichne ein Raum-Zeit-Diagramm.

iii) Sei ω die Frequenz der Signale des Beobachters. Mit welcher Frequenz $\tilde{\omega}(\tau)$ werden sie empfangen?

4. Dualer Feldtensor

Definiere den dualen Feldtensor

$$\mathcal{F}_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{1}$$

und den dualen Strom

$$\mathcal{J}_{\nu\rho\sigma} = j^{\mu} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \,,$$

wobei $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ der vollständig antisymmetrische Tensor mit $\epsilon_{0123} = +1$ ist (Parität der Permutation $(0123) \mapsto (\mu\nu\rho\sigma)$).

Bemerkung: Dualität ist hier nicht im Sinne des Dualraums, sondern der Hodge-Dualität, s. Anhang C, zu verstehen (unwesentlich für diese Aufgabe). Daraus folgt, dass $\mathcal{F}$ und $\mathcal{J}$ Tensoren sind; alternativ auch aus Übung 1.2, wonach $|g|^{1/2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, ($g = \det(g_{\mu\nu})$) ein Tensor unter beliebigen Koordinatentransformationen ist (bzw. $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ unter Lorentz-Transformationen).

i) Drücke die Tensorkomponenten $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus. Die Dualität erweist sich als eine elektrisch-magnetische.

ii) Zeige: Die Maxwell-Gleichungen lauten

$$\begin{gathered} \mathcal{F}^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0 \,, \\ \mathcal{F}_{\rho\sigma,\mu} + \mathcal{F}_{\mu\rho,\sigma} + \mathcal{F}_{\sigma\mu,\rho} = -\frac{1}{c} \mathcal{J}_{\rho\sigma\mu} \,. \end{gathered}$$

Hinweis: Zeige

$$\mathcal{F}_{\rho\sigma,\mu} + \mathcal{F}_{\mu\rho,\sigma} + \mathcal{F}_{\sigma\mu,\rho} = F^{\alpha\nu}{}_{,\alpha} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \,. \tag{2}$$

In der $(\vec{E},\, \vec{B})$-Notation gehen die linken Seiten der homogenen und inhomogenen Maxwell-Gleichungen auseinander hervor unter $(\vec{E},\, \vec{B}) \rightsquigarrow (-\vec{B},\, \vec{E})$. Obige Gleichungen bringen diese Symmetrie in relativistischer Notation zum Ausdruck.

5. Bargmann-Michel-Telegdi-Gleichung

Der Spin $\vec{S}$ eines Teilchens ist der Eigendrehimpuls bezogen auf seinen eigenen Ort und in seinem Ruhesystem ($\vec{v} = 0$). Man kann ihn auf ein beliebiges Inertialsystem beziehen, indem man $S^{\mu} = (0, \vec{S})$ als 4er-Vektor transformiert. Zeige: Er genügt $u_{\mu} S^{\mu} = 0$.

Die Bewegungsgleichung des Spins lautet im Ruhesystem

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = g \frac{e}{2mc} \vec{S} \wedge \vec{B}$$

(g: gyromagnetischer Faktor; s. Aufgabe 5.1(iv)). Zeige, dass

$$\frac{dS^{\mu}}{d\tau} = \frac{g}{2} \frac{e}{mc} F^{\mu\nu} S_{\nu} + \frac{e}{mc^3} \big(\frac{g}{2} - 1\big) u^{\mu} (S^{\alpha} F_{\alpha\beta} u^{\beta})$$

(BMT-Gleichung) ihre Lorentz-forminvariante Fassung ist.