Elektrodynamik, Serie 10.

FS 08 *Abgabe:* Woche 11

1. Feld einer gleichförmig bewegten Ladung

Eine Punktladung e bewegt sich auf der Trägheitsbahn $\vec{x} = \vec{v}t$, $\vec{v} = (v, 0, 0)$. Berechne die Felder $\vec{E}(\vec{x}, t)$, $\vec{B}(\vec{x}, t)$. In welchen Richtungen ist $\vec{E}(\vec{x}, t = 0)$ am stärksten, bzw. schwächsten bei gleichem $|\vec{x}|$?

2. Rechnen mit Tensoren

In der Basis e_1, e_2 für einen 2-dimensionaler Vektorraum sei eine Metrik gegeben durch

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

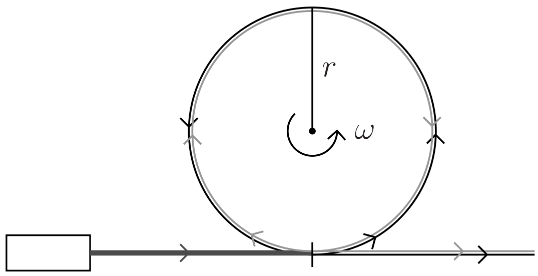
Der Tensor T vom Typ $\binom{0}{2}$ sei definiert durch $T(a, b) = 2a^1 b^2$, wobei (a^μ) und (b^μ) die komponenten der Vektoren a und b bezüglich der Basis (e_μ) sind.

(a) Bestimme die Matrizen $(T_{\mu\nu}), (T_\mu{}^\nu), (T^\mu{}_\nu), (T^{\mu\nu})$. Was ist die Spur von T?

(b) Betrachte die Basistransformation $\bar{e}_1 = e_1 + 2e_2$, $\bar{e}_2 = e_1$. Bestimme die Transformationsmatrizen $\Lambda^\mu{}_\nu$, $\Lambda_\mu{}^\nu$, sowie die transformierten Komponenten $\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{T}^{\mu\nu}$.

3. Sagnac-Interferometer

Ein Laserstrahl wird aufgespalten und die beiden Teile laufen gegenläufig auf einer kreisförmigen Bahn mit Radius r. Nach einem Umlauf werden sie zur Interferenz gebracht. Zusätzlich wird die Anordnung mit der Winkelgeschwindikeit ω um eine zum Blatt senkrechten Achse bzgl. eines Inertialsystems gedreht.



Man berechne die Phasendifferenz φ zwischen den Strahlen und ihre Veränderung $\Delta\varphi$ infolge der Drehung: Bei Vernachlässigung von $O(\beta^2)$, $\beta = \omega r/c$, ist

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{4A}{\lambda c}\omega ,$$

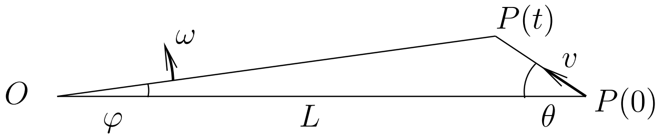
wobei λ die Wellenlänge des Lasers und $A = \pi r^2$ die umschlossene Fläche ist.

Bemerkung: In der Praxis läuft das Licht längs eines durch Spiegel festgelegten Polygons. Das Resultat gilt weiterhin.

Hinweis: Betrachte die Situation vom Intertialsystem aus. Die Bahn ist immer noch eine Kreisbahn (deshalb die vereinfachende Annahme) vom selben Radius. Was sind die Phasen $e^{i(ks-\omega t)}$, (s: Bogenlänge) der beiden Strahlen am Interferenzpunkt? Was ist k? (vgl. Aufgabe 9.3(b)).

4. Scheinbare Überlichtgeschwindigkeit

Eine Lichtquelle P bewegt sich mit Geschwindigkeit $v < c$ und unter dem Winkel θ auf den Beobachter O im Abstand L zu. Aus der Winkelgeschwindigkeit ω der Sichtlinie OP ordnet er der Quelle die scheinbare transversale Geschwindigkeit $v_S = \omega L$ zu. Dies ist die Geschwindigkeit der Projektion von P auf die Himmelskugel vom Radius L.



Zeige, dass

$$v_S = \frac{v \sin\theta}{1 - (v/c)\cos\theta}\ ;$$

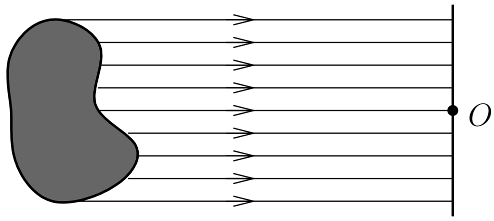
insbesondere kann $v_S > c$ eintreten. *Hinweis:* $v = |d\vec{x}/dt|$ bezieht sich auf die Zeit t der Emission des Lichts; $\omega = d\varphi/dt'$ hingegen auf die Zeit t' bei Empfang.

5. Sehen ist nicht Messen

Populärwissenschaftliche Darstellungen (z.B. Gamow 1940) der Speziellen Relativitätstheorie behaupten, bewegte Objekte erschienen verzerrt infolge der Lorentz-Kontraktion in Bewegungsrichtung und deren Ausbleiben transversal dazu. Dies trifft so nicht zu (Penrose, Terrell 1959; s. auch Kraus und Borchers[1] 2005).

Eine gemessene Länge ist nicht dasselbe wie eine gesehene Länge. So besteht die Längenmessung in der (bzgl. eines Bezugssytems) gleichzeitigen Koordinatendifferenz zweier Punkte eines Objekts (s. Aufgabe 9.2(b)). Das Sehen hingegen beruht auf Lichtsignalen, die gleichzeitig empfangen werden. Das Bild vereint somit frühere, entferntere Ereignisse mit späteren, aber näheren. Zwar erscheint ein bewegtes Objekt kürzer als ein identisches, ruhendes an derselben Stelle im Bild; aber nicht verzerrt, sondern gedreht, d.h. so, wie ein mitbewegter Beobachter es aus einem geeigneten Blickwinkel (vgl. Aberration, Aufgabe 9.3(c)) auch sehen könnte; dieser würde die Verkürzung rein perspektivisch deuten. Die untenstehende Behauptung ermöglicht, dies zu verstehen. Einschränkend ist zu sagen, dass (i) Obiges nur im Kleinen gilt: bewegte Objekte, die einen grossen Teil des Sichtfelds einnehmen, erscheinen verzerrt; (ii) ihre Farbe und Helligkeit sind verändert.

Man betrachte einen Beobachter O, der paralleles Licht vom Objekt auf eine dazu senkrechte Fotoplatte zur Zeit $t = 0$ einfallen lässt. (Ein Fotoapparat, der auf ein entferntes Objekt gerichtet wird, liefert dasselbe Bild bis auf die Skalierung.)

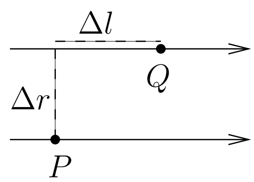


Ein zweiter Beobachter O', mit gemeinsamem Ursprung $(t, \vec{x}) = (0, 0) = (t', \vec{x}\,')$ zu O, aber zueinander bewegt, tut dasselbe zur Zeit $t' = 0$. (Bemerkung: wegen der Aberration liegen die Platten von O und O' nicht parallel.) Behauptung: Beide erhalten dasselbe Bild. Insbesondere gibt es darin keine Längenkontraktion.

Zur Herleitung: Das Bild entsteht durch gleichzeitiges Auffangen nebeneinander fliegender "Lichtteilchen" (oder zumindest kann man sich das so vorstellen). Die Behauptung folgt somit aus folgenden, zu begründenden Feststellungen:

Parallele Trägheitsbahnen werden unter Lorentz-Transformationen in ebensolche abgebildet. Die Eigenschaft von Lichtteilchen, nebeneinander zu fliegen ($\Delta l = 0$ in der Figur), ist Lorentz-invariant. Falls sie zutrifft, ist ihr räumlicher Abstand Δr Lorentz-invariant.

Hinweis: Zwei Lichtteilchen P, Q mögen verschoben fliegen. Betrachte zwei Ereignisse $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, die den Teilchen P, bzw. Q widerfahren (z.B. auf die Platte zu stossen). Wie hängt $(\mathcal{P} - \mathcal{Q}, \mathcal{P} - \mathcal{Q})$ von ihrer Zeitdifferenz Δt ab?



[1] www3.interscience.wiley.com/cgi-bin/fulltext/109926451/PDFSTART