

Elektrodynamik, Serie 1.

FS 08

Abgabe: Woche 2

1. Identitäten der Vektoranalysis

Rechnungen, die in der Elektrodynamik auftreten, verwenden oft folgende Identitäten.

i) Vektoridentitäten ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ Vektoren)

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) &= \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}), \\ \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}.\end{aligned}$$

ii) Vektorfeldidentitäten ($f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ Skalarfeld, $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Vektorfeld)

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{\nabla} f &= 0, \\ \text{div rot } \vec{v} &= 0, \\ \text{rot rot } \vec{v} &= \vec{\nabla}(\text{div } \vec{v}) - \Delta \vec{v}.\end{aligned}$$

iii) Produktregeln

$$\begin{aligned}\text{div}(f\vec{v}) &= \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f + f \text{div } \vec{v}, \\ \text{rot}(f\vec{v}) &= \vec{\nabla} f \wedge \vec{v} + f \text{rot } \vec{v}, \\ \text{div}(\vec{v} \wedge \vec{w}) &= \vec{w} \cdot \text{rot } \vec{v} - \vec{v} \cdot \text{rot } \vec{w}.\end{aligned}$$

iv) Kettenregeln ($\vec{P} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ Vektorfeld auf \mathbb{R})

$$\begin{aligned}\text{div } \vec{P}(f(\vec{x})) &= \dot{\vec{P}}(f(\vec{x})) \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}), \\ \text{rot } \vec{P}(f(\vec{x})) &= \vec{\nabla} f(\vec{x}) \wedge \dot{\vec{P}}(f(\vec{x})),\end{aligned}$$

mit $\dot{\vec{P}} = \partial \vec{P} / \partial f$.

v) Anwendungen der Integralsätze von Gauss und Stokes ($V \subset \mathbb{R}^3$ Gebiet, ∂V Rand mit Oberflächenelement $d\vec{\sigma}$, $S \subset \mathbb{R}^3$ Fläche mit Oberflächenelement $d\vec{\sigma}$, ∂S Rand mit Linienelement $d\vec{s}$)

$$\begin{aligned}\int_V (f \Delta g + \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g) d^3x &= \int_{\partial V} f \vec{\nabla} g \cdot d\vec{\sigma}, \\ \int_V (f \Delta g - g \Delta f) d^3x &= \int_{\partial V} (f \vec{\nabla} g - g \vec{\nabla} f) \cdot d\vec{\sigma}, \\ \int_V \vec{\nabla} f d^3x &= \int_{\partial V} f d\vec{\sigma}, \\ \int_S d\vec{\sigma} \wedge \vec{\nabla} f &= \int_{\partial S} f d\vec{s}.\end{aligned}$$

2. Laplace-Operator in beliebigen Koordinaten

Ein Riemannscher Raum ist zumindest für praktische Zwecke durch die Koordinaten $(x^1, \dots, x^n) = x \in \mathbb{R}^n$ seiner Punkte und einer **Metrik** $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$ gegeben, die die Länge ds eines Bogenelements bestimmt:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx^i dx^j,$$

wobei $g(x) := \det(g_{ij}(x))_{i,j=1}^n > 0$.

Unter Koordinatentransformationen $\bar{x}_i = \bar{x}_i(x)$ soll ds invariant sein. Hingegen transformieren die Differentiale,

$$d\bar{x}^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} dx^j,$$

die Metrik demzufolge gemäss

$$\bar{g}_{ij}(\bar{x}) = \sum_{k,l=1}^n g_{kl}(x) \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}. \quad (1)$$

i) Verifiziere dies.

Der **Laplace-Operator** zur Metrik $g_{ij}(x)$ ist

$$\Delta_g = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (2)$$

wobei $(g^{ij}(x))$ die inverse Matrix zu $(g_{ij}(x))$ ist.

Beispiel: Die Euklidische Metrik im \mathbb{R}^3 , $ds^2 = d\vec{x}^2$, entspricht $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ und

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial (x^i)^2}. \quad (3)$$

ii) Zeige, dass Δ invariant ist unter Koordinatentransformationen:

$$(\Delta_{\bar{g}} \bar{f})(\bar{x}) = (\Delta_g f)(x) \quad (4)$$

für jede Funktion $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$.

Hinweis: Zeige und verwende, dass

$$\begin{aligned} \sqrt{\bar{g}(\bar{x})} d^n \bar{x} &= \sqrt{g(x)} d^n x, \\ \int (\Delta_{\bar{g}} \bar{f})(\bar{x}) \bar{h}(\bar{x}) \sqrt{\bar{g}(\bar{x})} d^n \bar{x} &= \int (\Delta_g f)(x) h(x) \sqrt{g(x)} d^n x, \end{aligned}$$

mit $\bar{h}(\bar{x}) = h(x)$.

iii) Anwendung: Drücke (3) in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) aus:

$$x^1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad x^3 = r \cos \theta.$$