Übungsblatt I

`Rückgabe: 4.3.2008`

Aufgabe 1 [*Bohratom*]: Im Atommodell von Bohr bewegt sich ein Elektron der Masse m (mit Ladung $-e$) im Feld eines viel schwereren Kerns (mit Ladung Ze), den wir im Folgenden als fest annehmen. Das Elektron bewegt sich auf einer Kreisbahn mit Radius r und Winkelgeschwindigkeit ω. [Die Winkelgeschwindigkeit ω berechnet sich aus der Umlaufzeit T durch $\omega = \frac{2\pi}{T}$.]

(i) Bestimme den Radius der Kreisbahn durch die Bedingung, dass sich die Zentrifugalkraft F_{ZF} und die elektromagnetische Anziehungskraft zwischen Kern und Elektron F_{em}

$$F_{\mathrm{ZF}} = mr\omega^2 \ , \qquad F_{\mathrm{em}} = \frac{Ze^2}{r^2}$$

die Balance halten.

(ii) Drücke den Radius, die Winkelgeschwindigkeit und die Energie des Elektrons

$$E_e = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{r}$$

durch den Drehimpuls $L = mrv$ aus.

(iii) Bohr postulierte die Quantisierungsbedingung, dass nämlich

$$L = L_n = \hbar n \ , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \ .$$

Berechne daraus die quantisierten Radien r_n, Energien E_n und Winkelgeschwindigkeiten ω_n. Bestimme den Bohr Radius a_0 durch die Relation $r_n = a_0 n^2$.

(iv) Zeige, unter Benützung der De Broglie Relation $\lambda = \frac{h}{p}$, wobei $p = mv$ der Impuls des Elektrons ist, dass

$$\frac{\lambda}{r_n} = \frac{2\pi}{n} \ .$$

Die Wellen des Elektrons 'passen' daher genau auf den Umfang der zugehörigen Kreisbahn.

(v) Die Kreisfrequenz des abgestrahlten Lichtes ω_{mn} hängt mit der Energiedifferenz der zugehörigen Zustände gemäss

$$\omega_{m,n} = \frac{1}{\hbar}(E_n - E_m)$$

zusammen. Zeige, dass für grosse n die Kreisfrequenz $\omega_{n,n-1}$ gerade mit der klassischen Umlauffrequenz ω_n übereinstimmt. Dies ist die Basis des sogenannten *Korrespondenzprinzips*, das besagt, dass die Quantentheorie die klassische Physik im Grenzfall grosser Quantenzahlen reproduziert.

Aufgabe 2 [*Der Comptoneffekt*]: Betrachte die elastische Streuung eines Photons mit Energie cp_1 und Impuls $\mathbf{p_1}$ ($p_1 = \|\mathbf{p}_1\|$) an einem ruhenden Elektron, dessen Energie und Impuls durch $(mc^2, 0)$ gegeben sind. Wir bezeichnen durch $(cp_2, \mathbf{p_2})$ die Energie und den

Impuls des gestreuten Photons, und durch $(c\sqrt{m^2c^2+\mathbf{p}^2}, \mathbf{p})$ die Energie und den Impuls des Elektrons nach der Kollision. Da die Streuung elastisch ist, kann man annehmen, dass die Gesamtenergie und der Gesamtimpuls erhalten sind. Zeige unter dieser Annahme, dass

$$\frac{1}{\nu_2} - \frac{1}{\nu_1} = \frac{h}{mc^2}(1-\cos\theta) \ ,$$

wobei ν_i die Frequenzen der Photonen vor und nach der Streuung sind, $cp_i = h\nu_i$, und θ den Streuwinkel, *d.h.* den Winkel zwischen $\mathbf{p_1}$ und $\mathbf{p_2}$, beschreibt. Die Grösse h/mc wird oft die 'Compton Wellenlänge' des Elektrons genannt.

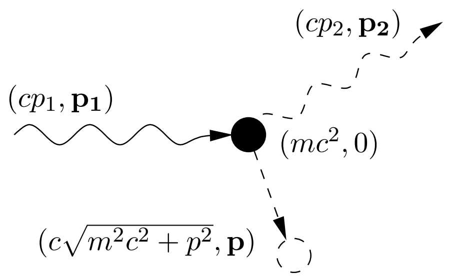

Figure 1: Der Comptoneffekt.

Aufgabe 3 [*Galilei-Invarianz der Schrödingergleichung*]: Sei $\Psi(x,t)$ eine Lösung der zeit-abhängigen Schrödingergleichung eines freien Teilchens, *d.h.*

$$i\hbar\partial_t\Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi(x,t) \ . \tag{1}$$

Zeige, dass für jedes konstante u

$$\Psi_u(x,t) = \Psi(x-ut,t)\exp\left[\frac{im}{\hbar}ux - \frac{im}{2\hbar}u^2 t\right]$$

auch eine Lösung der zeit-abhängigen Schrödingergleichung ist. [Die Schrödingergleichung ist daher Galilei-invariant.]