

#### §4. Präzession der Polarisation eines Teilchens in einem elektromagnetischen Feld

Historisches. Im Jahre 1926 führten Uhlenbeck und Goudsmit die Idee des Elektronenspins ein [unabhängig auch Kronig, der aber unter dem Eindruck von Pauli's Kritik nicht publizierte und zeigte, dass der anomale Zeeman Effekt verstanden werden kann, wenn der  $g$ -Faktor des Elektrons gleich 2 ist. Ferner wurde auf Grund der Spinhypothese auch die Existenz der Feinstruktur klar. Es zeigte sich aber die folgende Schwierigkeit: Für  $g=2$  waren die theoretischen Feinstruktur-Intervalle doppelt so gross wie beobachtet. Für  $g=1$  hätte man andersherum die richtigen Intervalle bekommen, aber dann hätte der Zeeman Effekt normal sein müssen.

Der richtige  $g$ -Faktor und die richtige Feinstruktur folgen aus der Dirac Theorie des Elektrons (1928) [siehe die Vorlesung QM II]. Schon vorher zeigte aber Thomas, dass die oben erwähnte Diskrepanz auf einen relativistischen kinematischen Effekt zurückzuführen ist, bei dessen Berücksichtigung (für  $g=2$ ) die richtige Feinstruktur-Aufspaltung herauskommt. Dieser kinematische Effekt, die sog. Thomas Präzession gibt auch eine qualitative Erklärung für die Spin-Bahn Wechselwirkung bei Kernen und zeigt, warum die Dubletts in Kernen "inverted" sind.

\* \* \*

In diesem Paragraphen wird die QM-Vorlesung nicht vorausgesetzt. Aus der QM I sei aber folgendes vorausgeschickt: Der Spin eines Teilchens ist der Drehimpuls dieses Teilchens in seinem Ruhesystem (Eigendrehimpuls). [Man soll aber das Bild dieses Eigendrehimpulses, als Resultat der Drehung um seine eigene Achse, nicht zu ernst nehmen].

Die Polarisation  $\hat{S}$  eines Teilchens ist der Erwartungswert des Spins dieses Teilchens bezüglich seinem quantenmechanischen

Zustand. Nach einem allgemeinen Satz der QM (Ehrenfest Theorem) genügt deshalb die Polarisation einer klassischen Gleichung. Diese klassische Gleichung wollen wir in folgender aufstellen.

Das Drehmoment  $\underline{D}$ , welches ein Magnetfeld  $\underline{B}$  auf einen magnetischen Dipol, mit Dipolmoment  $\underline{\mu}$ , ausübt ist

$$\underline{D} = \underline{\mu} \wedge \underline{B} \quad (4.1)$$

Für das magnetische Moment setzen wir

$$\underline{\mu} = g \mu_0 \underline{\xi}, \quad \mu_0 := \frac{e}{2mc} \quad (4.2)$$

Für Elektronen und Protonen ist  $g \approx 2$ . [Wir erinnern daran, dass für eine kreisförmig bewegte kleine Ladung das magnetische Moment  $\underline{\mu} = \frac{e}{2mc} \underline{L}$  ( $\underline{L}$ : Drehimpuls) ist. Dies ist von der Form (4.2) mit  $g=1$ ]

Aus (4.1) und (4.2) folgt für ein ruhend Teilchen als Bewegungsgleichung für den Polarisationsvektor

$$\frac{d}{dt} \underline{\xi} = \underline{D} = \underline{\mu} \wedge \underline{B} = g \mu_0 \underline{\xi} \wedge \underline{B} \quad (4.3)$$

$$\left( \equiv \underline{\xi} \wedge \underline{\omega}, \quad \underline{\omega} = g \mu_0 \underline{B} \right)$$

Nun betrachten wir ein bewegtes Teilchen in einem elektromagnetischen Feld und interessieren uns für die zeitliche Änderung seiner Polarisation. Da letztere nur eine unmittelbare physikalische Bedeutung im Ruhesystem des Teilchens hat, fassen wir in jedem Zeitpunkt das momentane Ruhesystem ein. Bezeichnet  $\underline{B}'$  das Magnetfeld bezüglich diesem System am Orte des Teilchens, d.h. nach (II.9.11)

$$\underline{B}'_{\parallel} = \underline{B}_{\parallel}, \quad \underline{B}'_{\perp} = \gamma (\underline{B}_{\perp} - \underline{\beta} \wedge \underline{E}), \quad (4.4)$$

wobei  $\underline{E}$  und  $\underline{B}$  die Laborfelder sind, so würde man nach (4.3) — ohne weiteres Nachdenken — die folgende Gleichung

ansetzen

$$\frac{d}{dt} \underline{s} = g \mu_0 \underline{s} \wedge \underline{\beta}' \quad (\text{falsch!}) \quad (4.5)$$

Thomas bemerkte nun, dass das momentane Ruhesystem rotiert (Thomas Präzession). Deshalb wird in der Gleichung (4.5) ein Zusatzterm aufbeten, der diesen rein kinematischen Ursprung hat.

### Thomas Präzession

Wir leiten nun die Rotation des Ruhesystems her. Es bezeichne  $\Lambda(\underline{\beta})$  die spezielle Lorentztransformation, welche das Teilchen momentan auf Ruhe bringt ( $\underline{\beta} = \underline{v}/c$ ,  $\underline{v}$ : momentane Geschwindigkeit im Laborsystem). Nach (II.3.4) hat  $\Lambda(\underline{\beta})$  die folgende Form

$$\underline{x}' = \underline{x} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} (\underline{x} \cdot \underline{\beta}) \underline{\beta} - \gamma \underline{\beta} \times \underline{x}^0$$

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \underline{\beta} \cdot \underline{x}) \quad (4.6)$$

Der Polarisationsvektor  $\underline{s}(t)$  bezieht sich auf die Schar der Ruhesysteme, welche aus dem Laborsystem durch  $\Lambda(t) := \Lambda(\underline{\beta}(t))$  hervorgehen.

Offensichtlich ist  $\Lambda(t+\Delta t) \Lambda^{-1}(t)$  die Lorentztransformation, welche das momentane Ruhesystem zur Zeit  $t$  in dasjenige zur Zeit  $t+\Delta t$  überführt. Die Winkelgeschwindigkeit, mit der das momentane Ruhesystem rotiert, ergibt sich aus der Untersuchung der infinitesimalen Lorentztransformation  $\dot{\Lambda}(t) \Lambda^{-1}(t)$ . Aus  $\Lambda^T G \Lambda = G$  folgt

$$\dot{\Lambda}^T G \Lambda + \Lambda^T G \dot{\Lambda} = 0$$

oder

$$(\Lambda^{-1})^T \dot{\Lambda}^T G + G \dot{\Lambda} \Lambda^{-1} = 0$$

Sei also  $A = G \dot{\Lambda} \Lambda^{-1}$ , so ist die Matrix  $A$  schiefl.

Sie hat deshalb die Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ \cdot & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \cdot & \cdot & 0 & \omega_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

Folglich ist

$$\dot{\Lambda} \Lambda^{-1} = S + \Omega \quad (4.7)$$

mit

$$S = \left( \begin{array}{c|c} 0 & -\underline{\alpha} \\ \hline -\underline{\alpha} & 0 \end{array} \right), \quad \Omega = \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_2 & \omega_1 & 0 \end{matrix} \end{array} \right) \quad (4.8)$$

( $S^T = S, \Omega^T = -\Omega$ ). Aus (4.6) sieht man, dass  $S$  eine infinitesimale spezielle Lorentztransformation ist. Die schiefe Matrix  $\Omega$  stellt natürlich eine infinitesimale Drehung dar;  $\underline{\omega}$  ist die gesuchte Winkelgeschwindigkeit. Diese werden wir weiter unten explizit durch  $\underline{\beta}$  und  $\dot{\underline{\beta}}$  ausdrücken.

An Stelle von (4.5) gilt offensichtlich die folgende Gleichung

$$\frac{d}{dt} \underline{s} = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} \underline{s} = \frac{1}{\gamma} g \mu_0 \underline{s} \wedge \underline{B}' + \Omega^{(3)} \underline{s}$$

Wegen  $\Omega^{(3)} \underline{s} = \underline{s} \wedge \underline{\omega}$  gilt also

$$\frac{d}{dt} \underline{s} = \frac{1}{\gamma} g \mu_0 \underline{s} \wedge \underline{B}' + \underline{s} \wedge \underline{\omega} \quad (4.9)$$

Berechnung von  $\underline{\omega}$  (Resultat (4.12)):

Zunächst ist

$$\dot{\Lambda} \Lambda^{-1} = \dot{\underline{\beta}} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \underline{\beta}} \wedge(\underline{\beta}) \right) \Lambda^{-1}(\underline{\beta}) \quad (4.10)$$

Zerlegen wir  $\dot{\underline{\beta}} = \dot{\underline{\beta}}_{\parallel} + \dot{\underline{\beta}}_{\perp}$ , so trägt natürlich nur  $\dot{\underline{\beta}}_{\perp}$  zu  $\Omega$  in (4.7) bei. Wenden wir (4.10) auf  $x = (0, \underline{x})$  an,

so ist mit  $\underline{y} := \Lambda^{-1}(\beta) \underline{x}$

$$\underline{x} \wedge \underline{\omega} = \dot{\underline{\beta}}_{\perp} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{\beta}} \Lambda(\beta) \underline{y} \quad (4.11)$$

Nur (4.6) bedeutet dies

$$\underline{x} \wedge \underline{\omega} = \dot{\underline{\beta}}_{\perp} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{\beta}} \left[ \frac{\gamma^{-1}}{\beta^2} (\underline{y} \cdot \underline{\beta}) \underline{\beta} - \gamma \underline{\beta} \underline{y}^0 \right]$$

oder (wegen  $\frac{\partial}{\partial \underline{\beta}} \beta \propto \underline{\beta}$ )

$$\underline{x} \wedge \underline{\omega} = \frac{\gamma^{-1}}{\beta^2} [(\underline{y} \cdot \underline{\beta}) \dot{\underline{\beta}}_{\perp} + (\underline{y} \cdot \dot{\underline{\beta}}_{\perp}) \underline{\beta}] - \gamma \dot{\underline{\beta}}_{\perp} \underbrace{\underline{y}^0}_{\gamma(\underline{\beta} \cdot \underline{x})}$$

Da nach (4.6)  $\underline{y} = \underline{x} + \frac{\gamma^{-1}}{\beta^2} (\underline{x} \cdot \underline{\beta}) \underline{\beta}$  ist, so folgt

$$\begin{aligned} \underline{x} \wedge \underline{\omega} &= \frac{\gamma^{-1}}{\beta^2} [\gamma(\underline{x}, \underline{\beta}) \dot{\underline{\beta}}_{\perp} + (\underline{x}, \dot{\underline{\beta}}_{\perp}) \underline{\beta}] - \gamma^2 (\underline{\beta}, \underline{x}) \dot{\underline{\beta}}_{\perp} \\ &= \underbrace{\left( \frac{\gamma^2 - \gamma}{\beta^2} - \gamma^2 \right)}_{\frac{1-\gamma}{\beta^2}} (\underline{\beta} \cdot \underline{x}) \dot{\underline{\beta}}_{\perp} + \frac{\gamma^{-1}}{\beta^2} (\underline{x} \cdot \dot{\underline{\beta}}_{\perp}) \underline{\beta} \\ &= \frac{\gamma^{-1}}{\beta^2} [(\underline{x} \cdot \dot{\underline{\beta}}_{\perp}) \underline{\beta} - (\underline{x} \cdot \underline{\beta}) \dot{\underline{\beta}}_{\perp}] \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\underline{x} \wedge (\underline{\beta} \wedge \dot{\underline{\beta}}_{\perp})} \end{aligned}$$

Also

$$\underline{\omega} = \frac{\gamma^{-1}}{\beta^2} \underline{\beta} \wedge \dot{\underline{\beta}} \quad (4.12)$$

Wir schreiben die Bewegungsgleichung (4.9) auch in der Form

$$\dot{\underline{s}} = \underline{s} \wedge \underline{\omega}_s \quad (4.13)$$

mit

$$\underline{\omega}_s = \underline{\omega} + \frac{1}{\gamma} g / \mu_0 \underline{B}' \quad (4.14)$$

Wir besprechen nun verschiedene Anwendungen dieser Resultate

### A. Spin-Bahn Kopplung in Atomen und Kernen

Die Bewegungsgleichung (4.13) lässt sich kanonisch schreiben. Die zugehörige Hamiltonfunktion ist (siehe den Anhang zu diesem Paragraphen)

$$U = - \underline{s} \cdot \underline{\omega}_s \quad (4.15)$$

oder nach (4.14)

$$U = U' - \underline{s} \cdot \underline{\omega} \quad (4.16)$$

mit

$$U' = - \underline{\mu} \cdot \underline{B}' / \gamma \quad (4.17)$$

In der weiteren Rechnung vernachlässigen wir Terme der Ordnung  $v^2/c^2$ . Es ist dann nach (4.4)

$$U' \approx - \underline{\mu} \cdot (\underline{B} - \underline{\beta} \wedge \underline{E}) \quad (4.18)$$

In einem Atom ist die elektrische Kraft  $e \underline{E}$  ungefähr gleich dem negativen Gradienten eines mittleren sphärisch symmetrischen Potentials. [Für ein 1-Elektronenproblem ist dies natürlich exakt.]

$$e \underline{E} = - (\underline{x}/r) \frac{dV}{dr}$$

Damit ist für  $\underline{g} = \underline{z}$ :

$$U' = - \frac{e}{mc} \underline{s} \cdot \underline{B} + \frac{1}{m^2 c^2} \underline{s} \cdot \underline{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}, \quad (4.19)$$

wo  $\underline{L} = m \underline{x} \wedge \underline{v}$  der Bahndrehimpuls ist. Diese Wechselwirkung gibt die richtige anomale Zeeman Aufspaltung, aber die Spin-Bahn Kopplung ist zweimal zu gross. Dies wird aber durch den Thomas Beitrag  $-\underline{s} \cdot \underline{\omega}$  in (4.16) korrigiert: Bis auf  $O(v^2/c^2)$  ist

$$\underline{\omega} \approx \frac{1}{2c^2} \underline{v} \wedge \dot{\underline{v}}$$

In Atomen ist die Beschleunigung  $\underline{\dot{v}} \approx -\frac{1}{m} \left(\frac{x}{r}\right) \frac{dV}{dr}$ ,  
also

$$\underline{\omega} \approx \frac{1}{2c^2} \frac{1}{m} \underline{x} \wedge \underline{\dot{v}} = \frac{1}{2m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \underline{L}$$

Wir erhalten damit die richtige Spin-Bahn Kopplung

$$U = -\frac{e}{mc} \underline{s} \cdot \underline{B} + \frac{1}{2m^2 c^2} \underline{s} \cdot \underline{L} = \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \underline{s} \cdot \underline{L} \quad (4.20)$$

(Thomas 1926).

In Atomkernen herrschen zwischen Nucleonen starke Wechselwirkungen, welche zu grossen Beschleunigungen führen. Die elektromagnetischen Kräfte sind vergleichsweise schwach. In einer approximativen Weise kann man die Nucleonen so behandeln, als bewegten sie sich unabhängig in einem mittleren sphärisch-symmetrischen Potential  $V_N(r)$  (Schalenmodell). Jedes Nucleon wird zusätzlich eine Spin-Bahn Wechselwirkung (4.16) erfahren, wobei der elektromagnetische Anteil  $U'$  vernachlässigbar ist. Diese ist also

$$U_N \approx -\underline{s} \cdot \underline{\omega} \approx -\frac{1}{2M^2 c^2} \underline{s} \cdot \underline{L} = \frac{1}{r} \frac{dV_N}{dr} \underline{s} \cdot \underline{L} \quad (4.21)$$

( $M$ : Nucleonmasse). Vergleichen wir (4.21) mit (4.20), so sehen wir, dass die Spin-Bahn Kopplungen entgegengesetzte Vorzeichen haben, denn beide Potentiale  $V$  und  $V_N$  sind attraktiv. Dies bedeutet, dass in Kernen die Einteilchenenergien "invertierte" Doublets bilden. Mit einer vernünftigen Form von  $V_N$  ist (4.21) auch in qualitativer Übereinstimmung mit der beobachteten Spin-Bahn Kopplung in Kernen. [Konsultiere ein Buch über Kernphysik].

### B. Das g-2 Experiment und andere Anwendungen

Es war (siehe (4.14) und (4.4))

$$\underline{\dot{\omega}}_s = g\mu_0 \left[ \frac{1}{\gamma} \underline{B}_{||} + \underline{B}_{\perp} - (\underline{\beta} \wedge \underline{E}) \right] + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \underline{\beta} \wedge \dot{\underline{\beta}} \quad (4.22)$$

Das Teilchen bewege sich unter der Wirkung des elektromagnetischen Feldes  $(\underline{E}, \underline{B})$ . Dann lautet die Bewegungsgleichung

$$m(\gamma \underline{\dot{\beta}})' = e(\underline{E} + \underline{\beta} \wedge \underline{B}) \quad (4.23)$$

Also ist

$$\begin{aligned} \underline{\beta} \wedge \dot{\underline{\beta}} &= \frac{e}{m\gamma} \left[ \underline{\beta} \wedge \underline{E} + \underbrace{\underline{\beta} (\underline{\beta} \cdot \underline{B})}_{\beta^2 \underline{B}_{||}} - \beta^2 \underline{B}_{\perp} \right] \\ &= \frac{e}{m\gamma} \left[ \underline{\beta} \wedge \underline{E} - \beta^2 \underline{B}_{\perp} \right] \end{aligned}$$

und folglich

$$\underline{\dot{\omega}}_s = \underline{\beta} \wedge \underline{E} \left[ -g\mu_0 + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \frac{e}{m\gamma} \right] + \underline{B}_{\perp} \left[ g\mu_0 - \frac{e}{m} \frac{\gamma-1}{\gamma} \right] + \frac{g\mu_0}{\gamma} \underline{B}_{||} \quad (4.24)$$

Sei  $\underline{l}$  der Einheitsvektor tangential an die Bahn des Teilchens, d.h.  $\underline{l} = \underline{\beta} / \beta$ . Wir interessieren uns für  $\dot{\underline{l}}$ .

$$\dot{\underline{l}} = - \dot{\beta} / \beta \underline{l} + \frac{1}{\beta} \dot{\underline{\beta}} \quad (4.25)$$

Aus der Bewegungsgleichung (4.23) folgt

$$\underbrace{\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \underline{l}}_{\beta \dot{\beta} \gamma^2} + \frac{1}{\beta} \dot{\underline{\beta}} = \frac{e}{m\gamma\beta} (\underline{E} + \underline{\beta} \wedge \underline{B}) \quad (4.26)$$

Benutzen wir dies in (4.25) so erhalten wir

$$\dot{\underline{l}} = \frac{e}{m} \frac{1}{\gamma\beta} (\underline{E} + \underline{\beta} \wedge \underline{B}) - \frac{\dot{\beta}}{\beta} \frac{(1 + \beta^2 \gamma^2)}{\gamma^2} \underline{l} \quad (4.27)$$

Multiplizieren wir (4.26) skalar mit  $\underline{\beta}$  so kommt

$$\beta^2 \dot{\beta} \gamma^2 + \dot{\beta} = \frac{e}{m\gamma\beta} \underline{E} \cdot \underline{\beta}$$



oder

$$\frac{\dot{\beta}}{\beta} \gamma^2 = \frac{e}{m\gamma\beta} \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{l}} \quad (4.28)$$

Dies setzen wir in (4.27) ein

$$\underline{\underline{l}} = \frac{e}{m\gamma} \underline{\underline{l}} \wedge \underline{\underline{B}} + \frac{e}{m\gamma\beta} \underbrace{(\underline{\underline{E}} - (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{l}}) \underline{\underline{l}})}_{-\underline{\underline{l}} \wedge (\underline{\underline{l}} \wedge \underline{\underline{E}})}$$

Es ist demnach

$$\underline{\underline{l}} = \underline{\underline{l}} \wedge \underline{\underline{\omega}}_c \quad (4.29)$$

mit

$$\underline{\underline{\omega}}_c = \frac{e}{\gamma m} \underline{\underline{B}} - \frac{e}{m\gamma\beta^2} \underline{\underline{\beta}} \wedge \underline{\underline{E}} \quad (4.30)$$

oder

$$\underline{\underline{\omega}}_c = \frac{e}{\gamma m} \underline{\underline{B}} - \frac{e}{m} \frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \underline{\underline{\beta}} \wedge \underline{\underline{E}} \quad (4.31)$$

Die Richtung der Geschwindigkeit des Teilchens rotiert also mit  $\underline{\underline{\omega}}_c$  (Zyklotronfrequenz).

Für das folgende ist die Differenz  $\underline{\underline{\omega}}_s - \underline{\underline{\omega}}_c$  wichtig

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\omega}}_s - \underline{\underline{\omega}}_c &= \underline{\underline{\beta}} \wedge \underline{\underline{E}} \left[ -g\mu_0 + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \frac{e}{m\gamma} + \frac{e}{m\gamma\beta^2} \right] + \underline{\underline{B}}_{\perp} \left[ g\mu_0 - \frac{e}{m} \frac{\gamma-1}{\gamma} - \frac{e}{m\gamma} \right] \\ &\quad + \underline{\underline{B}}_{\parallel} \left[ \frac{g\mu_0}{\gamma} - \frac{e}{m\gamma} \right] \\ &= \underline{\underline{\beta}} \wedge \underline{\underline{E}} \left( -g\mu_0 + \frac{e}{m\beta^2} \right) + \underline{\underline{B}}_{\perp} a \frac{e}{m} + \underline{\underline{B}}_{\parallel} a \frac{e}{\gamma m} \end{aligned}$$

Hier ist  $a$  die sog. Anomalie

$$a = \frac{g-2}{2} \quad (4.32)$$

Da  $g\mu_0 - \frac{e}{m\beta^2} = a \frac{e}{m} + \frac{e}{m} \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) = \left(a - \frac{1}{\gamma^2 - 1}\right) \frac{e}{m}$

gilt also

$$\underline{\underline{\omega}}_s - \underline{\underline{\omega}}_c = \frac{e}{m} \left\{ a \underline{\underline{B}}_{\perp} + \frac{1}{\gamma} a \underline{\underline{B}}_{\parallel} + \left(-a + \frac{1}{\gamma^2 - 1}\right) \underline{\underline{\beta}} \wedge \underline{\underline{E}} \right\} \quad (4.33)$$

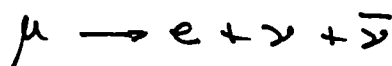
Der Beitrag zu  $\underline{\omega}_a := \underline{\omega}_s - \underline{\omega}_c$  vom  $\underline{E}$ -Feld verschwindet für

$$\gamma = \left(1 + \frac{1}{a}\right)^{1/2}$$

Für  $\mu$ -Mesonen ist dies  $\gamma = 29.3$ , was einer "relativistischen" Energie von 3.098 GeV entspricht. Diese Energie wurde in der letzten Variante des  $g-2$  Experimentes am CERN gewählt. In diesem Experiment kreist das  $\mu$ -Meson in einem sehr homogenen  $\underline{B}$ -Feld, welches senkrecht zur Bahn steht. Der Winkel  $\Delta\theta$  zwischen der Polarisationsrichtung und der Bahnrichtung des  $\mu$ -Mesons ist nach einem Umlauf gemäss

$$(4.33) \quad \underline{\Delta\theta} = \frac{2\pi}{\omega_c} (\omega_s - \omega_c) = \frac{2\pi}{eB/m\gamma} \frac{e}{m} a B = \underline{2\pi\gamma a}, \quad (4.34)$$

d.h. direkt proportional zu  $a$ . Das  $\mu$ -Meson analysiert diesen Winkel "selbst". Auf Grund der Paritätsverletzung der schwachen Wechselwirkungen ist nämlich der  $\mu$ -Zerfall



asymmetrisch um die Polarisationsrichtung. Mit (4.34) kann man deshalb die Anomalie  $a = (g-2)/2$  mit sehr grosser Genauigkeit bestimmen. Das Resultat des letzten CERN Experimentes ist

$$\underline{a = 0.001165922(9)}$$

Dieser Wert ist in voller Übereinstimmung mit dem theoretischen Wert, welcher aus der Quantenelektrodynamik folgt.

Für eine Beschreibung der  $g-2$  Experimente verweise ich auf den Übersichtsartikel

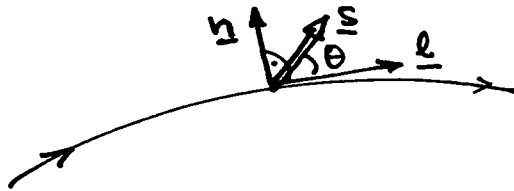
F. Combley & E. Picasso: The Muon ( $g-2$ ) Precession Experiments, Physics Reports 14, No.1 (1974).

Ergänzung. Wir leiten noch die Formel für die zeitliche Änderung des Winkels  $\theta$  zwischen  $\underline{\underline{s}}$  und  $\underline{\underline{l}}$  ab.

Es ist  $\cos \theta = \frac{1}{s} \underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{l}}$ , also

$$\begin{aligned} -\sin \theta \dot{\theta} &= \frac{1}{s} (\dot{\underline{\underline{s}}} \cdot \underline{\underline{l}}) + \frac{1}{s} (\underline{\underline{s}} \cdot \dot{\underline{\underline{l}}}) \\ &= \frac{1}{s} (\underline{\underline{s}} \wedge \underline{\underline{\omega}}_s) \cdot \underline{\underline{l}} + \frac{1}{s} \underline{\underline{s}} \cdot (\underline{\underline{l}} \wedge \underline{\underline{\omega}}_c) \\ &= \frac{1}{s} (\underline{\underline{l}} \wedge \underline{\underline{s}}, \underline{\underline{\omega}}_s - \underline{\underline{\omega}}_c) \end{aligned}$$

Nun sei  $\underline{\underline{n}}$  ein Einheitsvektor in der Ebene von  $\underline{\underline{s}}$  und  $\underline{\underline{l}}$  welcher senkrecht auf  $\underline{\underline{l}}$  steht (s. Fig.)



Der Ausdruck nach dem letzten Gleichheitszeichen ist gleich  $\sin \theta (\underline{\underline{l}} \wedge \underline{\underline{n}}, \underline{\underline{\omega}}_s - \underline{\underline{\omega}}_c)$ . Deshalb gilt

$$\dot{\theta} = -(\underline{\underline{l}} \wedge \underline{\underline{n}}, \underline{\underline{\omega}}_s - \underline{\underline{\omega}}_c) = -(\underline{\underline{n}} \wedge \underline{\underline{\omega}}_s, \underline{\underline{l}})$$

Setzen wir darin (4.33) ein, so geht  $\underline{\underline{B}}$  keinen Beitrag und wir erhalten

$$\dot{\theta} = \frac{e}{m} \left\{ a \underline{\underline{l}} \cdot (\underline{\underline{B}} \wedge \underline{\underline{n}}) + \beta \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{n}} \left( a - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right) \right\} \quad (4.35)$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir eine Kreisbewegung in einem  $\underline{\underline{E}}$ -Feld, welches radial nach innen zeigt. Dann ist

$$\underline{\underline{\omega}}_s - \underline{\underline{\omega}}_c = -\frac{e}{m} \left( a - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right) \beta \underline{\underline{l}} \wedge \underline{\underline{E}}$$

und

$$\dot{\theta} = -\frac{e}{m} \beta E \left( a - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right)$$

Andererseits ist nach (4.30)

$$\underline{\underline{\omega}}_c = -\frac{e}{m\gamma\beta} \underline{\underline{l}} \wedge \underline{\underline{E}}$$

Welchen Winkel muss das Teilchen durchlaufen, damit  $\Theta(T) = \pi/2$ , d.h.  $T(\omega_c - \omega_s) = \pi/2$  ist? Die Bedingung dafür lautet

$$\omega_c T = \frac{\pi}{2} \quad \frac{\omega_c}{\omega_c - \omega_s} = \frac{\pi}{2} \frac{eE / m\gamma\beta}{eE / m \cdot \beta(-a + \frac{1}{\gamma^2 - 1})}$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\gamma\beta^2(-a + \frac{1}{\gamma^2 - 1})} \stackrel{a \approx 0}{\sim} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\gamma\beta^2 / \gamma^2 - 1} = \frac{\pi}{2} \gamma$$

d.h. der gesuchte Winkel ( $= \omega_c T$ ) ist gleich  $\frac{\pi}{2} \gamma$ !

Dieses Ergebnis ist nützlich für die experimentelle Bestimmung der longitudinalen Polarisation von Elektronen und Positronen. Durch elektrostatische Ablenkung kann man eine longitudinale Polarisation zuerst in eine transversale Polarisation verwandeln und dann letztere durch Mott- bzw. Bhaba-Streuung bestimmen. [Es gibt auch andere Methoden!]. Für Elektronen und Positronen von  $\beta$ -Zerfällen ist  $\gamma$  merklich verschieden von 1. Deshalb ist der Ablenkwinkel, welcher nötig ist um eine transversale Polarisation zu erhalten, deutlich grösser als  $\pi/2$ .

Für eine andere Herleitung der Resultate dieses Paragraphen verweise ich auf die Originalarbeit

V. Bargmann, L. Michel und V.L. Telegdi, PRL 3, 435 (1959)

Diese ist ausführlicher dargestellt in

R. Hagedorn, Relativistische Kinematics, Benjamin, 1963, Kap. 9.

\* \* \*

Anhang zu §4. Kanonischer Formalismus für die  
Gleichung  $\dot{\underline{S}} = \underline{S} \wedge \underline{\Omega}$

Die Bewegungsgleichung

$$\dot{\underline{S}} = \underline{S} \wedge \underline{\Omega} \quad (\text{A.1})$$

( $\underline{\Omega} = \text{const.}$ ) hat das 1. Integral  $\underline{S}^2$ . Diese Größe sei  
vorgegeben. Wir setzen

$$p = S_z, \quad q = \arctg S_y / S_x \quad (\text{A.2})$$

und

$$H(q, p) = -(\underline{S} \cdot \underline{\Omega})(p, q) \quad (\text{A.3})$$

Bemerken wir

$$S_x = \sqrt{S^2 - p^2} \cos q, \quad S_y = \sqrt{S^2 - p^2} \sin q \quad (\text{A.4})$$

so folgt

$$H(p, q) = - \left\{ \sqrt{S^2 - p^2} (\Omega_x \cos q + \Omega_y \sin q) + p \Omega_z \right\} \quad (\text{A.5})$$

Wir zeigen, dass die kanonischen Gleichungen

$$\dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

gelten. Es ist

$$\frac{\partial H}{\partial q} = - \sqrt{S^2 - p^2} (-\Omega_x \sin q + \Omega_y \cos q) = -(S_x \Omega_y - S_y \Omega_x) = -\dot{S}_z = -\dot{p}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = -\Omega_z + \frac{p}{\sqrt{S^2 - p^2}} (\Omega_x \cos q + \Omega_y \sin q) = -\Omega_z + \frac{S_z}{\sqrt{S^2 - p^2}} (\Omega_x S_y + \Omega_y S_x)$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{1}{1 + (S_y/S_x)^2} \frac{\dot{S}_y S_x - S_y \dot{S}_x}{S_x^2} = \frac{1}{S_x^2 + S_y^2} [(S_z \Omega_x - S_x \Omega_z) S_x - S_y (S_y \Omega_z - \Omega_y S_z)] \\ &= -\Omega_z + \frac{S_z}{S_x^2 + S_y^2} (\Omega_x S_x + \Omega_y S_y). \end{aligned}$$

Durch Vergleich sieht man, dass auch die 2. kanonische Gleichung erfüllt ist.

Als Ergänzung betrachten wir noch die Poissonklammern für die  $S_i(p, q)$ :

$$\begin{aligned} \{S_x, S_y\} &= \frac{\partial S_x}{\partial q} \frac{\partial S_y}{\partial p} - \frac{\partial S_x}{\partial p} \frac{\partial S_y}{\partial q} \\ &= \sqrt{S^2 - p^2} \sin q \frac{p}{\sqrt{S^2 - p^2}} \sin q + \frac{p}{\sqrt{S^2 - p^2}} \cos q \sqrt{S^2 - p^2} \cos q \\ &= p = S_z. \end{aligned}$$

d.h.

$$\{S_x, S_y\} = S_z$$

Analog berechnet man die anderen Poissonklammern, mit dem Ergebnis

$$\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k \quad (\text{A.6})$$

Dieses Resultat hat einen gruppentheoretischen Hintergrund<sup>\*</sup>). Die Bewegungsgleichungen für die  $S_i$  können in der Liouville'schen Form geschrieben werden

$$\dot{S}_i = \{H, S_i\}, \quad i=1,2,3 \quad (\text{A.7})$$

Umgekehrt erhält man daraus und (A.6) mit Benutzung von (A.3) sofort wieder Gleichung (A.1).

<sup>\*</sup>) Wir betrachten die 1-parametrische Untergruppe der Drehungen um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit 1. Diese operiert auf dem Phasenraum  $S^2$  ( $\Sigma = \text{const.}$ !) in offensichtlicher Weise; in den gewählten Koordinaten (A.2) lautet die Aktion  $\varphi_t$

$$\varphi_t: \begin{cases} q \rightarrow q+t \\ p \rightarrow p \end{cases}$$

Das zugehörige Hamilton'sche Vektorfeld ist  $\frac{\partial}{\partial q}$ . Die dazugehörige "Hamiltonfunktion" ist  $-p = S_z$ . Die  $S_i$  sind also die Hamiltonfunktionen für die Drehungen um die  $i$ te Achse. Deshalb haben diese (aus allgemeinen Gründen) Poissonklammern, die durch die Struktur der Drehgruppe gegeben sind (siehe Mechanik Vorl., § 4.6).

## §5. Relativistische Hydrodynamik

Viele makroskopische Systeme können approximativ als ideale Flüssigkeiten angesehen werden. In diesem Abschnitt wollen wir die relativistische Theorie der idealen Flüssigkeiten aufstellen. Diese ist für die relativistische Astrophysik und Kosmologie von Bedeutung.

Ein Fluid wird als ideal definiert, wenn jeder mit dem Geschwindigkeitsfeld mitbewegte Beobachter eine isotrope Umgebung sieht. Dies ist dann der Fall, wenn die mittlere freie Weglänge der Teilchen klein ist im Vergleich zu den typischen Längen über die das Fluid makroskopisch variiert.

Wir stellen uns vor, dass wir uns zunächst in einem Bezugssystem (durch eine Schlange gekennzeichnet) befinden, bezüglich welchem die Flüssigkeit an einer bestimmten Stelle zu einer bestimmten Zeit ruht. In diesem Raumzeit Punkt hat dann der Energie - Impuls Tensor die folgende Form:

$$\tilde{T}^{00} = \rho, \quad \tilde{T}^{i0} = \tilde{T}^{0i} = 0, \quad \tilde{T}^{ij} = p \delta_{ij} \quad (5.1)$$

Wir nennen  $p$  den Druck und  $\rho$  die Energiedichte (im folgenden sei  $c=1$ ). Bezeichnet  $u^\mu$  die 4er-Geschwindigkeit des betrachteten Flüssigkeitselementes, so lässt sich (5.1) wegen  $\tilde{u}^\mu = (1, \underline{0})$  wie folgt schreiben

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = (p + \rho) \tilde{u}^\mu \tilde{u}^\nu - p g^{\mu\nu}$$

Da dies eine Tensorgleichung ist, gilt auch im Laborsystem

$$\begin{array}{|l} T^{\mu\nu} = (p + \rho) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \\ (u^\mu: \text{4er-Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit}) \end{array} \quad (5.2)$$

$u^\mu$  lässt sich durch das zer-Geschwindigkeitfeld  $\underline{v}$  ausdrücken:

$$u^\mu = \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \underline{v} \right) \quad (5.3)$$

Da  $u^\mu u_\mu = 1$  ist

$$0 = (u^\mu u_\mu)_{,\nu} = 2u_\mu u^\mu_{,\nu} \quad (5.4)$$

Neben Energie und Impuls besitzt das Fluid auch erhaltene Größen wie Ladung, Baryonzahl, oder — unter normalen Temperaturen — auch die Zahl der Atome. Wir betrachten eine solche Zahl, die wir die "Teilchenzahl" nennen. Es sei  $n$  die Teilchenzahldichte in einem System, das sich in einem gegebenen Raum-Zeit Punkt mit der Flüssigkeit bewegt. In diesem System definieren wir den Teilchenstromvektor durch

$$\tilde{N}^i = 0, \quad \tilde{N}^0 = n \quad (5.5)$$

In einem beliebigen System lautet dieser

$$N^\mu = n u^\mu \quad (5.6)$$

Der Erhaltungssatz für die Teilchenzahl lautet differentiell

$$N^\mu_{,\mu} = 0 \quad (5.7)$$

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0 \quad (5.8)$$

Die beiden letzten Gleichungen schreiben wir in eine dreidimensionale Form um.

$$0 = N^\mu_{,\mu} = (n u^\mu)_{,\mu} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{n}{\sqrt{1-v^2}} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{n \underline{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right) \quad (5.9)$$

In der Gleichung (5.8) für  $\mu = i$  setze man  $u^i = v^i u^0$  und



benutze (5.8) für  $\mu=0$ . Dies gibt

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{v} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = - \frac{1-v^2}{\rho+p} \left[ \nabla p + \underline{v} \frac{\partial p}{\partial t} \right] \quad (5.10)$$

Für  $c \rightarrow \infty$  geht dies in die Euler'sche Gleichung der Hydrodynamik

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{v} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

über.

An Stelle der 0-Komponente von (5.8) betrachten wir die Gleichung

$$0 = u_\mu T^{\mu\nu},_{,\nu} = [(p+\rho) u^\nu],_{,\nu} - u^\nu p_{,\nu} \quad (5.11)$$

Benutzen wir darin (5.6) und (5.7) so kommt

$$0 = \left[ \frac{p+\rho}{n} N^\nu \right],_{,\nu} - u^\nu p_{,\nu} = n u^\nu \left[ \left( \frac{p+\rho}{n} \right),_{,\nu} - \frac{1}{n} p_{,\nu} \right]$$

oder

$$n u^\nu \left[ p \left( \frac{1}{n} \right),_{,\nu} + \left( \frac{\rho}{n} \right),_{,\nu} \right] = 0 \quad (5.12)$$

Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik sagt uns, dass der Druck  $p$ , die Energiedichte  $\rho$  und das Volumen pro Teilchen,  $1/n$ , mit der Entropie  $k\sigma$  pro Teilchen wie folgt zusammenhängen

$$kT d\sigma = p d\left(\frac{1}{n}\right) + d\left(\frac{\rho}{n}\right) \quad (5.13)$$

( $\sigma$  ist dimensionslos). Die Gleichung (5.12) kann daher wie folgt geschrieben werden

$$u^\nu \sigma_{,\nu} = 0 \quad (5.14)$$

$$\left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \sigma \right) = 0$$

Langs der Stromlinien ist deshalb die Entropie konstant (ideale Flüssigkeit, keine Dissipation!).

Die Grundgleichungen der relativistischen Hydrodynamik idealer Flüssigkeiten sind die "Kontinuitätsgleichung" (5.9), die relativistischen Euler Gleichungen (5.10), die "Energiegleichung" (5.12) oder (5.14), sowie Zustandsgleichungen, welche  $p$  und  $\rho$  durch  $n$  und  $\sigma$  ausdrücken.

Die Verallgemeinerung dieser Gleichungen auf nicht-ideale Flüssigkeiten findet man z.B. in

S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, Wiley & Sons 1972, Seite 53 - .

\* \* \*

### Schallwellen:

Als Anwendung berechnen wir die Schallgeschwindigkeit in einem statischen homogenen relativistischen Fluid.

Im ungestörten Zustand sind  $n, \rho, p$  und  $\sigma$  im Raume konstant und unabhängig von der Zeit; ferner ist  $\underline{v} = 0$ . Die Schallwelle produziert kleine Änderungen  $n_1, \rho_1, p_1$  und  $\underline{v}_1$  in  $n, \rho, p$  und  $\underline{v}$ , löst aber nach (5.14)  $\sigma$  ungeändert. Bis zur 1. Ordnung in den kleinen Größen lauten die Gleichungen (5.9) und (5.10)

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n \nabla \cdot \underline{v}_1 = 0 \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial \underline{v}_1}{\partial t} = - \frac{\nabla p_1}{p + \rho} \quad (5.16)$$

Nun gibt  $d\sigma = 0$  in (5.13)

$$0 = - \frac{p + \rho}{n} n_1 + \rho_1$$

Benutzt man dies in (5.16) so folgt

$$\frac{\partial \underline{v}_1}{\partial t} = - v_s^2 \frac{1}{n} \nabla n_1 \quad (5.17)$$

mit

$$v_s^2 := \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\sigma = \text{const}} = \frac{p_1}{\rho_1} \quad (5.18)$$

Aus (5.12) und (5.15) ergibt sich sofort die Wellengleichung

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_s^2 \Delta \right) u_1 = 0,$$

welche zeigt, dass sich die Schallwellen mit der Geschwindigkeit  $v_s$  (gl. (5.18)) ausbreiten.

Beispiel: Als einfaches Beispiel für eine Zustandsgleichung betrachten wir ein Fluid von Strukturlosen punktförmigen Teilchen, welche nur durch räumlich lokalisierte Stöße untereinander wechselwirken. Nach (II.11.24) lautet der Energie - Impuls Tensor

$$T^{\mu\nu} = \sum_a \frac{1}{E_a} p_a^\mu p_a^\nu \delta^3(\underline{x} - \underline{z}_a(t)) \quad (5.19)$$

In einem mitbewegten Lorentzsystem hat  $T^{\mu\nu}$  die isobare Form (5.1); folglich gilt

$$p = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 T^{ii} = \frac{1}{3} \sum_a \frac{p_a^2}{E_a} \delta^3(\underline{x} - \underline{z}_a(t)) \quad (5.20)$$

$$\rho = T^{00} = \sum_a E_a \delta^3(\underline{x} - \underline{z}_a(t)) \quad (5.21)$$

Die Teilchendichte ist

$$n = \sum_a \delta^3(\underline{x} - \underline{z}_a) \quad (5.22)$$

Daraus folgt allgemein

$$0 \leq p \leq \rho/3 \quad (5.23)$$

Für kaltes, nichtrelativistisches Gas gilt

$$E_a \approx m + p_a^2/2m$$

Aus (5.20) und (5.21) folgt dafür

$$p \approx nm + \frac{3}{2} p \quad (5.24)$$

Für ein heisses, extrem relativistisches Gas gilt andererseits

$$E_a \approx |p_a| \gg mc$$

und deshalb

$$p \approx 3p \gg nm \quad (5.25)$$

Beide Zustandsgleichungen (5.24) und (5.25) sind von der Form

$$\underline{p - nm \approx (\gamma - 1)^{-1} p} \quad (5.26)$$

mit

$$\gamma = \begin{cases} 5/3 & \text{nichtrelativistisch} \\ 4/3 & \text{extrem relativistisch} \end{cases} \quad (5.27)$$

Die Zustandsgleichung (5.26) gilt für eine wesentlich grössere Klasse von Fluida. Sie besagt, dass die innere Energie und der Druck zueinander proportional sind.

Für solche Zustandsgleichungen erhält man aus (5.15)

$$kT ds = p d\left(\frac{1}{n}\right) + (\gamma - 1)^{-1} d(p/n) = \frac{n^{\gamma-1}}{\gamma-1} d\left(\frac{p}{n^\gamma}\right) \quad (5.28)$$

Aus (5.14) erhält man deshalb

$$\frac{\partial}{\partial t} (p/n^\gamma) + (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) (p/n^\gamma) = 0 \quad (5.29)$$

Die Gleichung (5.26) soll man benutzen, um in (5.10)  $\rho$  durch  $n$  und  $p$  auszudrücken.

Für ein hochrelativistisches Gas ist nach (5.25) und (5.18) die Schallgeschwindigkeit

$$\underline{v_s = 1/\sqrt{3}} \quad (5.30)$$

Aus (5.25) und (5.30) ändert sich nichts, wenn elektromagnetische Wechselwirkungen mitgenommen werden, da

$$0 = T_{\text{elm.}}^{\mu} \mu = -3p_{\text{elm.}} + p_{\text{elm.}}$$

Da  $v_s$  eine Phasengeschwindigkeit ist, kann aber nicht allgemein auf  $v_s \leq 1$  geschlossen werden.

\* \* \*

## §6. Elektrodynamik bewegter Körper

In diesem Paragraphen formulieren wir nach dem Vorbild von Minkowski die makroskopische Elektrodynamik bewegter Körper. Wir erinnern zuerst an die makroskopische Elektrodynamik ruhender Körper. Diese erhält man durch Mittelwertbildungen aus der mikroskopischen Theorie. Dabei führt man eine Polarisationdichte  $\underline{P}$  und eine Magnetisierungsdichte  $\underline{M}$  ein. Diese geben Anlass zu einer Ladungsdichte

$$\rho_{Pol} = -\nabla \cdot \underline{P} \quad (6.1)$$

und einer Stromdichte

$$\underline{J}_{Pol} = c \nabla \wedge \underline{M} + \dot{\underline{P}} \quad (6.2)$$

Führt man die Hilfsfelder

$$\underline{D} := \underline{E} + 4\pi \underline{P}, \quad \underline{H} := \underline{B} - 4\pi \underline{M} \quad (6.3)$$

ein, so lauten die makroskopischen Maxwell'schen Gleichungen

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0, \quad \nabla \wedge \underline{E} + \frac{1}{c} \dot{\underline{B}} = 0 \quad (6.4)$$

$$\nabla \cdot \underline{D} = 4\pi \rho_e, \quad \nabla \wedge \underline{H} = \frac{4\pi}{c} \underline{J}_e + \frac{1}{c} \dot{\underline{D}} \quad (6.5)$$

( $\rho_e$ : Ladungsdichte,  $\underline{J}_e$ : Stromdichte).

Hinzu kommen die phänomenologischen Beziehungen, welche in ihrer einfachsten Form wie folgt lauten

$$\underline{D} = \epsilon \underline{E}, \quad \underline{H} = \frac{1}{\mu} \underline{B}, \quad \underline{J}_e = \sigma \underline{E} \quad (6.6)$$

Nun sei

$$j^{\mu} = (c \rho_e, \underline{J}_e) \quad (6.7)$$

$$j^{\mu}_{Pol} = (c \rho_{Pol}, \underline{J}_{Pol}) \quad (6.8)$$

Nach (6.1) und (6.2) lässt sich  $j^{\mu}_{Pol}$  wie folgt darstellen

$$j^{\mu}_{Pol} = c M^{\mu\nu}, \quad (6.9)$$

mit

$$M^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -P_1 & -P_2 & -P_3 \\ \cdot & 0 & M_3 & -M_2 \\ \cdot & \cdot & 0 & M_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \quad M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu} \quad (6.10)$$

$M^{\mu\nu}$  ist der antisymmetrische Polarisationsstensor. Beachte, dass

$$j_{\text{Pole}, \mu}^{\text{H}} = c M^{\mu\nu},_{\nu\mu} = 0 \quad (6.11)$$

ist.

Wir setzen  $G^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + 4\pi M^{\mu\nu}$  (6.12)

Aus (6.3) und (6.10) folgt (benutze auch (II.9.1))

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -D_1 & -D_2 & -D_3 \\ \cdot & 0 & -H_3 & H_2 \\ \cdot & \cdot & 0 & -H_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \quad G^{\mu\nu} = -G^{\nu\mu} \quad (6.13)$$

Die inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen (6.5) können dann wie folgt geschrieben werden

$$G^{\mu\nu},_{\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^{\mu}, \quad (6.14)$$

woraus auch unmittelbar die Erhaltung für den  $\text{ser-}$ Leistungsstrom  $j^{\mu}$  folgt.

Die homogenen Maxwell'schen Gleichungen lauten wie im Vakuum

$$*F^{\mu\nu},_{\nu} = 0 \quad (6.15)$$

Schlussendlich müssen wir noch die konstitutiven Gleichungen (6.6) kovariant schreiben. Die folgenden Gleichungen reduzieren sich im Ruhesystem auf die beiden ersten Gleichungen von (6.6)

$$G^{\mu\nu} u_{\nu} = \epsilon F^{\mu\nu} u_{\nu}, \quad *G^{\mu\nu} u_{\nu} = \frac{1}{\mu} *F^{\mu\nu} u_{\nu} \quad (6.16)$$

In einem bewegten System spaltet man  $j^{\mu}$  zweckmäßig in einen Leistungs- und einen Konvektionsstrom auf,

dem auch für einen Nichtleiter ist zwar im Ruhesystem  $\underline{J}_e = 0$ , aber in einem bewegten System ist die räumliche Komponente von  $j^\mu$  (gl. (6.7)) gleich  $g \underline{v}$ . Den Leitungsstrom definiert man zweckmäßig durch

$$j_e^\mu = j^\mu - (j_\nu u^\nu) u^\mu \quad (6.17)$$

Im Ruhesystem ist  $j_e^\mu = (0, \underline{J}_e)$ . Deshalb reduziert sich die folgende Gleichung

$$j_e^\mu = \sigma F^{\mu\nu} u_\nu \quad (6.18)$$

im Ruhesystem auf die letzte Gleichung von (6.6).

Die Gleichungen (6.14) – (6.18) bilden die Grundgleichungen der Elektrodynamik bewegter Körper. Diese sind offensichtlich kovariant.

Wir geben noch den Energie - Impuls - Tensor von Tinkowski an. Die Frage nach dem "richtigen" Tensor hat viele Leute beschäftigt. Da die Grundgleichungen nicht aus einer Lagrange-Funktion hergeleitet werden können, sind die Resultate von § II.11.3 nicht anwendbar. Die verschiedenen Vorschläge für  $T^{\mu\nu}$  führen zu verschiedenen Voraussagen. Da aber die Unterschiede sehr gering sind, kann man zwischen den verschiedenen Möglichkeiten experimentell nicht unterscheiden. [Für eine neuere Diskussion (mit vielen Referenzen) verweise ich auf V.L. Ginzburg, Sov. Phys. Usp. Vol. 16, 434 (1973)]

Der Tensor von Tinkowski ist

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[ F^{\mu\lambda} G_{\lambda}{}^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} G^{\beta\alpha} \right] \quad (6.19)$$

Für  $G^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}$  reduziert sich dieser Ausdruck auf (II.9.32)

Durch eine sehr ähnliche Rechnung wie auf S. 91 erhält man (Übungsaufgabe)

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu = 0 \quad (6.20)$$

Man beachte, dass (6.19) nicht symmetrisch ist. Dies ist aber gar nicht nötig, da  $T^{\mu\nu}$  nur einen Teil des gesamten Energie-Impuls-Tensors ist, welcher auch einen Anteil der im Körper enthaltenen Materie hat. Lediglich der gesamte Tensor muss symmetrisch sein, damit der Drehimpuls <sup>tot</sup> für das Gesamtsystem gültig ist.

Wir überlassen es dem Leser, die Gleichungen (6.16) - (6.20) in eine dreidimensionale Schreibweise zu übersetzen.

Wir wollen hier lediglich das aus  $T^{\mu\nu}$  folgende Transformationsgesetz für  $\underline{P}$  und  $\underline{M}$  aufschreiben (Übungsaufgabe)

$$\begin{aligned} \underline{P}' &= \gamma \left[ \underline{P} + \underline{v} \wedge \underline{M} + \frac{\underline{v}(\underline{v} \cdot \underline{P})}{v^2} \left( \frac{1}{\gamma} - 1 \right) \right] \\ \underline{M}' &= \gamma \left[ \underline{M} - \underline{v} \wedge \underline{P} + \frac{\underline{v}(\underline{v} \cdot \underline{M})}{v^2} \left( \frac{1}{\gamma} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (6.21)$$

Die 2. Gleichung besagt, dass ein polarisierter bewegter Körper auch magnetisiert ist. Dies ist nicht besonders überraschend, da bewegte Ladungsverteilungen Ströme erzeugen. Überraschender ist vielleicht, dass nach (6.21) ein magnetisierter bewegter Körper auch elektrisch polarisiert ist. Man muss aber beachten, dass für  $j^{\mu}$  bei einer Lorentztransformation  $\Lambda(\underline{v})$  folgendes gilt

$$j'^{\mu} = \gamma \left( j^{\mu} + \frac{\underline{v} \cdot \underline{j}}{c} \delta^{\mu 0} \right)$$

Daraus folgt, dass auch für  $j^{\mu} = 0$  trotzdem  $j'^{\mu} \neq 0$  ist. Auf Grund dieses Resultates müsste ein bewegter Stab von magnetisiertem Material eine elektrische Kraft senkrecht zu  $\underline{M}$  und  $\underline{v}$  ausüben. Dies hat man tatsächlich beobachtet.

Da es schwierig ist, makroskopische Körper auf sehr hohe Geschwindigkeiten zu bringen, gibt es wenige beobachtbare Konsequenzen der dargelegten Theorie. Wir verweisen dazu auf die Literatur.

\* \* \*



## Kap. IV. Die linearisierte relativistische Spitz 2 Theorie der Gravitation

Das Newton'sche Gravitationsgesetz ist — als Fernwirkungsgesetz — mit der SRT nicht vereinbar. Deshalb stellt sich die Aufgabe eine relativistische Gravitationstheorie zu entwickeln. Geordnet sind lorentzkovariante Verallgemeinerungen der Newton'schen Gesetze

$$\Delta\phi = 4\pi G \rho$$

$$\ddot{\underline{x}} = -\nabla\phi$$

(G: Newton'sche Konstante,  $\rho$ : Massendichte,  $\phi$ : Newton'sches Potential).

Man würde zunächst erwarten, dass dies keine schwierige Aufgabe sein sollte. Ähnlich wie die Gleichungen der Elektrostatik in den Maxwell'schen Gleichungen eine lorentzkovariante Verallgemeinerung finden, sollte es auch möglich sein, die obigen Gleichungen entsprechend zu verallgemeinern.

Tatsächlich hat dieses Problem eine logisch befriedigende Lösung im Rahmen einer skalaren Theorie, wie zuerst Nordström 1913 gezeigt hat. Diese Theorie ist aber im Widerspruch zur Erfahrung (siehe Abschnitt 1).

Eine Vektortheorie ist zum vorläufigen ausgeschlossen, da sie auf Abstoßung, statt auf Anziehung führen würde (siehe Abschnitt 1).

Am realistischsten ist eine Tensortheorie (symmetrisches Tensorfeld 2. Stufe), welche wir in diesem Kapitel beschreiben werden. Quelle dieses Tensorfeldes ist der Energie - Impuls - Tensor. Dieser wird aber nicht nur aus Materieanteilen bestehen, sondern auch einen Beitrag vom Gravitationsfeld selber enthalten. Deshalb müssen die Feldgleichungen notwendigerweise nichtlinear sein.

Es wird sich zeigen, dass die flache Minkowski Metrik, von der wir ausgehen, prinzipiell unbeobachtbar ist. Physikalische Uhren und Maßstäbe werden durch das Gravitationsfeld in solcher Weise beeinflusst, dass die gemessene Metrik pseudo-

Einstein'sche wird. Die unbeobachtbare flache Metrik lässt sich am Ende eliminieren und die Theorie kann viel einfacher durch eine "gekrümmte" Metrik beschrieben werden. Damit ist (auf etwas fussgängerische Weise) der Anschluss an die übliche Darstellung der allgemeinen Relativitätstheorie, welche wir im nächsten Semester geben werden, gewonnen. [Einstein kam erstaunlicherweise sehr früh zur Überzeugung, dass die Gravitation nicht (jedenfalls nicht in natürlicher Weise) im Rahmen der SRT beschrieben werden kann].

Wir werden in diesem Kapitel zunächst die linearisierten Feldgleichungen konstruieren. Diese stimmen mit der Linearisierung der Einstein'schen Feldgleichungen überein. Daraus lassen sich bereits wichtige beobachtbare Konsequenzen ableiten (z.B. die Lichtablenkung in Gravitationsfeldern). Ich werde auch skizzieren, wie man in konsequenter Weise zu den vollen, nichtlinearen Feldgleichungen gelangen kann.

\* \* \*

### §1. Der Tensorcharakter des Gravitationsfeldes

Wir diskutieren zunächst die hauptsächlichsten Gründe, welche skalare und vektorielle Theorien der Gravitation ausschließen.

#### A. Skalare Theorie

Die naheliegendste Verallgemeinerung der Poisson-Gleichung ist die folgende. Wir beschreiben die Gravitation durch ein Skalarfeld  $\phi$  und ersetzen  $\Delta\phi$  durch  $\square\phi$ . An Stelle von  $\rho$  muss dann eine lorentzinvariante Verallgemeinerung der Massendichte stehen. Dafür kommt nur die Spur,  $T$ , des Energie-Impuls Tensors in Frage. Wir postulieren deshalb die Feldgleichung

$$\square\phi = -\kappa T \tag{1.1}$$

Da aber die Spur des Energie-Impuls-Tensors für das elektromagnetische Feld verschwindet, ist dieses nicht an das Gravi-

feldausfeld gekoppelt. Deshalb gibt es in einer skalaren Theorie keine Lichtablenkung im Gravitationsfeld, im Widerspruch zur Erfahrung.

B. Eine Vektortheorie ist notwendigerweise abstossend

In der Maxwell'schen Theorie stoßen sich zwei gleiche Teilchen ab. Wir zeigen, dass sich daran nichts ändern lässt.

Es sei  $A_\mu$  das Vektorpotential der "Gravitation" und  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  die Feldstärke. Die Wirkung einer masselosen, d.h. langreichweitigen Vektortheorie hat dann folgende Form

$$W = W_{\text{Feld}} + W_{\text{Teilchen}} + W' \tag{1.2}$$

mit

$$W_{\text{Feld}} = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} dx^4 \tag{1.3}$$

$$W_{\text{Teilchen}} = -\sum_a \frac{m_a}{z} \int d\tau_a g_{\mu\nu} \dot{z}_a^\mu \dot{z}_a^\nu \tag{1.4}$$

( $\dot{z}_a^\mu(\tau_a)$ ): Weltlinie des Teilchens  $a$ ,  $\tau_a$ : Eigenzeit)

$W'$  bezeichnet die Wechselwirkung

$$W' = z \sum_a m_a \int d\tau_a \dot{z}_a^\mu A_\mu(z_a(\tau_a)) \tag{1.5}$$

[Ersetzt man in (1.5)  $z m_a$  durch die Ladung  $e_a$ , so erhält man aus dieser Wirkung formal das Gleichungssystem (II.11.18) - (II.11.20) (Übungsaufgabe)].

Zunächst zeigen wir, dass uns  $z^2$  signifikant ist. Dazu setzen wir  $z A_\mu = \bar{A}_\mu$ ,  $z F_{\mu\nu} = \bar{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \bar{A}_\nu - \partial_\nu \bar{A}_\mu$ . Die Wirkung lautet dann

$$W = -\frac{1}{4z^2} \int \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu} dx^4 + W_{\text{Teilchen}} + \sum_a m_a \int d\tau_a \dot{z}_a^\mu \bar{A}_\mu(z_a)$$

Ändert man aber in diesem Ausdruck das Vorzeichen von  $z^2$  so wird das Vorzeichen der Feldenergie (relativ zur Materieenergie) geändert. Die elektromagnetischen Wellen hätten dann negative

Energie. Das darf man natürlich nicht zulassen. Dies zeigt, dass eine Vektortheorie notwendigerweise abstoßend ist. Übrigens würde — bei (verbotener) Änderung des Vorzeichens von  $\kappa^2$  — für die Periheldrehung des Merkurs der falsche Wert herauskommen (nämlich  $1/6$  des Einsteinschen Wertes).

## §2. Die linearisierte Tensortheorie

Die Überlegungen von Abschnitt 1 zeigen, dass der einfachste Feldtyp für die Beschreibung des Gravitationsfeldes ein Tensorfeld 2. Stufe ist. Die Quelle dieses Feldes wird der Energie - Impuls - Tensor,  $T^{\mu\nu}$ , sein. Da dieser symmetrisch ist, wählen wir als Gravitationspotential ein symmetrisches Tensorfeld  $h^{\mu\nu}(x)$ . Nun suchen wir eine lineare Feldgleichung vom Typ

$$\mathcal{D}^{\mu\nu} h = -\kappa T^{\mu\nu} \quad (2.1)$$

( $\kappa$ : Kopplungskonstante), worin  $\mathcal{D}^{\mu\nu}$  ein in  $(\mu, \nu)$  symmetrischer Differentialoperator 2. Ordnung ist, der folgende Eigenschaften hat

(i)  $\partial_\nu \mathcal{D}^{\mu\nu} h \equiv 0$

(ii) Statische Gravitationsfelder sollen langreckweitig sein.

### Bemerkungen

1. Mit der Eigenschaft (i) wollen wir (in Analogie zur Elektrodynamik) erreichen, dass die Divergenzfreiheit von  $T^{\mu\nu}$  eine Folge der Feldgleichungen ist. Im Gegensatz zur ED ist dies aber nur in einer linearisierten Näherung sinnvoll. In dieser erzeugt die Materie gemäß (2.1) zwar ein Gravitationsfeld, aber dieses wirkt nicht auf die Materie zurück. Die Rückwirkung (welche wir später studieren werden) hat zur Folge, dass nur die Summe von  $T^{\mu\nu}$  und dem Energie - Impuls - Tensor des Gravitationsfeldes divergenzfrei ist.

2. Die Eigenschaft (ii) ist nur erfüllt, wenn wir in  $\mathcal{D}^{\mu\nu} h$ ,

neben Termen wie  $\square h^{\mu\nu}$ , keine Terme proportional zu  $h^{\mu\nu}$  und  $\eta^{\mu\nu} h^\lambda{}_\lambda$  zulassen ( $\eta_{\mu\nu}$ : Minkowski Metrik). Solche Terme hätten den gleichen Effekt, wie ein additiver Zusatz  $u^2 \phi$  auf der linken Seite von (1.1). Letzteres hätte zur Folge, dass das statische Feld einer Punktquelle die Gleichung

$$(\Delta - u^2) \phi = \text{const. } \delta^3$$

erfüllen müsste, was zu  $\phi \propto e^{-u r} / r$  führt. Aus Erfahrung wissen wir, dass die Gravitation sehr langreichweitig ist. Deshalb wollen wir einen exponentiellen Abfall für statische Felder ausschließen.

$\partial^{\mu\nu} h$  muss eine Linearkombination der folgenden Möglichkeiten sein:

$$\partial_\lambda \partial^\lambda h^{\mu\nu}, \quad \partial_\lambda (\partial^\nu h^{\mu\lambda} + \partial^\mu h^{\nu\lambda}), \quad \partial^\mu \partial^\nu h^\lambda{}_\lambda, \\ \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda h^\sigma{}_\sigma, \quad \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma h^{\lambda\sigma}$$

Mit den Bezeichnungen  $\partial^{(\nu} h^{\mu)\lambda} = \frac{1}{2} (\partial^\nu h^{\mu\lambda} + \partial^\mu h^{\nu\lambda})$ ,  $h = h^\lambda{}_\lambda$  lautet also die allgemeinste Form der Feldgleichung

$$\partial_\lambda \partial^\lambda h^{\mu\nu} - 2a' \partial_\lambda \partial^{(\nu} h^{\mu)\lambda} + a \partial^\mu \partial^\nu h + b \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda h \\ + b' \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma h^{\lambda\sigma} = -\Sigma T^{\mu\nu} \quad (2.2)$$

Die Bedingung (i) verlangt

$$\partial_\lambda \partial^\lambda \partial_\mu h^{\mu\nu} - a' \partial_\lambda \partial_\mu \partial^\nu h^{\mu\lambda} - a' \partial_\lambda \partial_\mu \partial^\mu h^{\nu\lambda} + a \partial_\mu \partial^\mu \partial^\nu h \\ + b \partial^\nu \partial_\lambda \partial^\lambda h + b' \partial^\nu \partial_\lambda \partial_\sigma h^{\lambda\sigma} \equiv 0 \quad (2.3)$$

Dies impliziert

$$-a' + b' = 0 \\ 1 - a' = 0 \\ a + b = 0 \quad (2.4)$$

Deshalb ist  $a' = 1$ ,  $b' = 1$  und  $b = -a$ . Die Feldgleichung (2.2) reduziert sich deshalb auf

$$\partial_\lambda \partial^\lambda h^{\mu\nu} - 2 \partial_\lambda \partial^{(\mu} h^{\nu)\lambda} + a \partial^\mu \partial^\nu h - a \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda h + \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma h^{\lambda\sigma} = -\kappa T^{\mu\nu} \quad (2.5)$$

Der Wert der Konstante  $a$  ist physikalisch bedeutungslos. Ersetzen wir nämlich  $h^{\mu\nu}$  durch  $\bar{h}^{\mu\nu}$ , definiert durch

$$h^{\mu\nu} = \bar{h}^{\mu\nu} - c \eta^{\mu\nu} \bar{h} \quad (2.6)$$

( $c = \text{const.}$ ), dann haben die Feldgl., auf  $\bar{h}^{\mu\nu}$  umgeschrieben, die selbe Form, aber mit den neuen Konstanten

$$\bar{a} = a(1-4c) + 2c$$

(Übungsaufgabe). Wählen wir insbesondere  $c = (1-a)/2-4a$ , dann ist  $\bar{a} = 1$ . Diese Wahl wollen wir treffen; die linearisierte Feldgleichung lautet damit endgültig

$$\square h^{\mu\nu} - 2 \partial_\lambda \partial^{(\mu} h^{\nu)\lambda} + \partial^\mu \partial^\nu h - \eta^{\mu\nu} \square h + \eta^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma h^{\lambda\sigma} = -\kappa T^{\mu\nu} \quad (2.7)$$

### Erdinvarianz

Die linke Seite der Feldgl. (2.7) ist invariant unter der Erdtransformationen

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}, \quad (2.8)$$

wobei  $\xi_\mu(x)$  ein beliebiges Vektorfeld ist. Die Feldgleichungen bestimmen deshalb, wie in der Elektrodynamik, die Gravitationspotentiale  $h^{\mu\nu}$  nicht eindeutig. Felder, die sich nur um einen Erdzusatz unterscheiden, beobachten wir als physikalisch äquivalent.

Die Erdinvarianz kann man bemerken, wenn an  $h^{\mu\nu}$  die sog. Hilbert'sche Erdbedingung

$$\partial_\nu (h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h) = 0 \quad (2.9)$$

zu stellen. (Zeige, dass dies immer möglich ist). In dieser

Erdnung vereinfachen sich die Feldgleichungen zu

$$\square (h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h) = -\kappa T^{\mu\nu} \quad (2.10)$$

Zweckmäßigerweise führt man das Feld

$$\Phi^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h \quad (2.11)$$

ein. Aus diesem läßt sich  $h^{\mu\nu}$  zurückgewinnen

$$h^{\mu\nu} = \Phi^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \Phi \quad (2.12)$$

( $\Phi = \Phi^\lambda{}_\lambda$ ). Dann schreibt sich (2.9) wie folgt

$$\left| \partial_\nu \Phi^{\mu\nu} = 0 \right. \quad (2.13)$$

und (2.10) lautet

$$\boxed{\square \Phi^{\mu\nu} = -\kappa T^{\mu\nu}} \quad (2.14)$$

### § 3. Diskussion des freien Gravitationsfeldes

In Abwesenheit von Quellen haben wir, in der Hilbertbedingung, die freien Feldgleichungen

$$\square \Phi^{\mu\nu} = 0. \quad (3.1)$$

Innerhalb der Hilbertbedingung läßt sich für das freie Feld eine Erdnung finden, für die ausserdem

$$\Phi = 0 \quad (3.2)$$

ist.

Beweis: Unter Umordnungen gilt

$$\Phi_{\mu\nu} \rightarrow \Phi_{\mu\nu} + \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} - \eta_{\mu\nu} \xi^\lambda{}_{,\lambda} \quad (3.3)$$

und folglich

$$\Phi \rightarrow \Phi - 2 \xi^\lambda{}_{,\lambda}$$

Sowie

$$\Phi^{\mu\nu}{}_{,\nu} \rightarrow \Phi^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \square \xi^\mu$$

Damit die Hilbertbedingung erfüllt bleibt, muss

$$\square \xi^\mu = 0 \quad (3.4)$$

sein. Ist  $\phi \neq 0$ , so ist ein  $\xi^\mu$  zu finden, welches (2.13) erfüllt und für welches  $\xi^\mu{}_{,\mu} = \phi$  ist. Aus (2.13) ergibt sich die Konsistenzbedingung  $\square \phi = 0$ , die im allgemeinen nur im Vakuum erfüllt ist. Sie ist aber auch hinreichend. Wir zeigen: Sei  $\phi$  ein Skalarfeld mit  $\square \phi = 0$ . Dann existiert ein Vektorfeld  $\xi^\mu$  mit den Eigenschaften:

$$(i) \square \xi^\mu = 0, \quad (ii) \xi^\mu{}_{,\mu} = \phi.$$

Konstruktion: Sei  $\eta^\mu$  eine Lösung von (ii). [Eine solche existiert: Man setze  $\eta_\mu = \Lambda_{,\mu}$ ,  $\square \Lambda = \phi$ ]. Nun sei  $\Sigma^\mu = \square \eta^\mu$ . Da  $\Sigma^\mu{}_{,\mu} = 0$ , existiert (nach dem Satz auf S. 94) ein schiefes Tensorfeld  $f^{\mu\nu} = -f^{\nu\mu}$ , für das  $\Sigma^\mu = f^{\mu\nu}{}_{,\nu}$  ist. Sei jetzt  $\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$  eine Lösung von  $\square \sigma^{\mu\nu} = f^{\mu\nu}$ , dann erfüllt

$$\xi^\mu := \eta^\mu - \sigma^{\mu\nu}{}_{,\nu}$$

die Gleichungen

$$\xi^\mu{}_{,\mu} = \eta^\mu{}_{,\mu} = \phi$$

$$\square \xi^\mu = \square \eta^\mu - \square \sigma^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \Sigma^\mu - f^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \quad \square$$

Innerhalb der Erdung (2.13), (2.16) bleiben noch Eddingtonsformulierungen mit  $\square \xi^\mu = 0$ ,  $\xi^\mu{}_{,\mu} = 0$ . Innerhalb dieser Erdung ist  $\phi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ !

### A. Ebene Wellen

Die allgemeinste Lösung von (3.1) lässt sich durch Superposition von ebenen Wellen

$$\phi_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} e^{-i k \cdot x} \quad (3.5)$$

darstellen. (3.5) erfüllt die Feldgl., wenn

$$k^2 = k_\mu k^\mu = 0 \quad (3.6)$$

ist. Die Hilbertbedingung (2.13) gibt



$$k_\nu \epsilon^{\mu\nu} = 0 \quad (3.7)$$

und (3.2) liefert

$$\epsilon^{\mu\mu} = 0. \quad (3.8)$$

Die Matrix  $\epsilon_{\mu\nu}$  nennen wir den Polarisationsstensor. Die Bedingungen (3.7) und (3.8) haben zur Folge, dass höchstens 5 Komponenten unabhängig sind. Infolge der verbleibenden Erdgruppe sind aber nur zwei Komponenten unabhängig, wie wir jetzt zeigen wollen. Bei einer Erdbtransformation, mit

$$\xi^\mu(x) = \text{Re} (i \epsilon^\mu e^{-ik \cdot x}), \quad (3.9)$$

ändert sich  $\epsilon_{\mu\nu}$  gemäss

$$\epsilon_{\mu\nu} \rightarrow \epsilon_{\mu\nu} + k_\mu \epsilon_\nu + k_\nu \epsilon_\mu. \quad (3.10)$$

Um bequemer zu sein betrachten wir speziell eine Welle, die sich in der positiven z-Richtung fortpflanzt:

$$k^\mu = (k, 0, 0, k). \quad (3.11)$$

(3.7) gilt

$$\epsilon_{0\nu} = \epsilon_{3\nu} \Rightarrow \underline{\epsilon_{00} = \epsilon_{30} = \epsilon_{03} = \epsilon_{33}},$$

und (3.8) impliziert

$$\epsilon_{01} = \epsilon_{31}, \epsilon_{02} = \epsilon_{32}, \epsilon_{03} = \epsilon_{33} = \epsilon_{00}$$

$$\epsilon_{00} - \epsilon_{11} - \epsilon_{22} - \epsilon_{33} = 0 \Rightarrow \underline{\epsilon_{11} + \epsilon_{22} = 0}.$$

Diese Beziehungen erlauben es, alle Komponenten durch

$$\epsilon_{00}, \epsilon_{11}, \epsilon_{01}, \epsilon_{02}, \epsilon_{12} \quad (3.12)$$

auszudrücken:

$$\epsilon_{03} = \epsilon_{00}, \epsilon_{13} = \epsilon_{01}, \epsilon_{22} = -\epsilon_{11}, \epsilon_{23} = \epsilon_{02}, \epsilon_{33} = \epsilon_{00} \quad (3.13)$$

Bei einer Umwidmung (3.10) gilt

$$\begin{aligned} \epsilon_{00} &\rightarrow \epsilon_{00} + 2k \epsilon_0, & \epsilon_{11} &\rightarrow \epsilon_{11}, & \epsilon_{01} &\rightarrow \epsilon_{01} + k \epsilon_1 \\ \epsilon_{02} &\rightarrow \epsilon_{02} + k \epsilon_2, & \epsilon_{12} &\rightarrow \epsilon_{12}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Damit (3.9) die Bedingungen  $\square \xi^\mu = 0$ ,  $\xi^\mu{}_{,\mu} = 0$  erfüllt, muss  $k^\mu \xi_\mu = 0$ , d.h.  $\xi_0 = \xi_3$  sein. Aus (3.14) folgt, dass man  $\xi_\mu$  so wählen kann, dass nur  $\xi_{12}$  und  $\xi_{11} = -\xi_{22}$  nicht verschwinden. Man hat also (wie beim Licht) nur zwei linear unabhängige Polarisationszustände. Wie transformieren sich diese unter Rotationen  $R(\varphi)$  um die z-Achse? Dafür ist

$$\xi'_{\mu\nu} = R_\mu{}^\alpha R_\nu{}^\beta \xi_{\alpha\beta},$$

mit

$$R(\varphi) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & & & 0 \\ \hline & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Man findet leicht

$$\xi'_{11} = \xi_{11} \cos 2\varphi + \xi_{12} \sin 2\varphi$$

$$\xi'_{12} = -\xi_{11} \sin 2\varphi + \xi_{12} \cos 2\varphi,$$

oder für

$$\xi_{\pm} = \xi_{11} \mp i \xi_{12} \tag{3.15}$$

$$\xi'_{\pm} = e^{\pm 2i\varphi} \xi_{\pm} \tag{3.16}$$

Die Polarisationszustände  $\xi_{\pm}$  haben Helizität  $\pm 2$  (links- bzw. rechts zirkular polarisiert).

### B. Lagrangefunktion für das Spin 2 Feld

Die Lagrangefunktion des Gravitationsfeldes ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{4} h_{\mu\nu,\sigma} h^{\mu\nu,\sigma} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu,\sigma} h^{\sigma\nu,\mu} - \frac{1}{4} h_{,\sigma} h^{,\sigma} \\ & + \frac{1}{2} h_{,\sigma} h^{\sigma,}{}_{,\nu} \end{aligned} \tag{3.17}$$

In der Tat ist die zugehörige Eulersche Ableitung

$$\Theta^{\mu\nu} := - \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_{\mu\nu}} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_{\mu\nu,\sigma}} \right] \tag{3.18}$$

gleich

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [h^{\alpha\beta, \sigma}{}_{\sigma} + h^{\nu\alpha\beta} - h^{\alpha\sigma, \beta}{}_{\sigma} - h^{\beta\sigma, \alpha}{}_{\sigma} + \gamma^{\alpha\beta} (h^{\mu\nu}{}_{, \mu\nu} - h^{\nu\mu}{}_{, \nu\mu})] \quad (3.19)$$

und die Feldgleichung (2.7) hat die Form

$$\underline{G^{\alpha\beta} = -\frac{\kappa}{2} T^{\alpha\beta}} \quad (3.20)$$

Die Eichinvarianz von  $G^{\alpha\beta}$  ist gleichbedeutend damit, dass sich  $L$  bei Umordnungen (2.8) nur um eine Divergenz ändert. Da allgemein

$$\delta \int L d^4x = - \int G^{\alpha\beta} \delta h_{\alpha\beta} d^4x \quad (3.21)$$

ist, gilt speziell für  $\delta h_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha, \beta} + \xi_{\beta, \alpha}$

$$\int G^{\alpha\beta} (\xi_{\alpha, \beta} + \xi_{\beta, \alpha}) d^4x = 0,$$

oder mit einer partiellen Integration

$$\int G^{\alpha\beta, \beta} \xi_{\alpha} d^4x = 0.$$

Da  $\xi_{\alpha}$  beliebig ist, zieht also die Eichinvarianz von  $L$ , modulo eine Divergenz, die "Bianchi-Identität"

$$\underline{G^{\alpha\beta, \beta} = 0} \quad (3.22)$$

nach sich.

Umgekehrt gilt der

Satz: Die allgemeinste <sup>lineare</sup> Lagrangefunktion  $L(h_{\mu\nu}, h_{\mu\nu, \sigma})$ , welche auf eichinvariante Bewegungsgleichungen führt, ist "eindeutig" durch (3.17) gegeben.

Beweis: Die Lagrangefunktion setzt sich aus den folgenden Invarianten zusammen:

$$I_1 = h^2, \quad I_2 = h^{\mu\nu} h_{\mu\nu}, \quad I_3 = h_{\mu\nu, \sigma} h^{\mu\nu, \sigma},$$

$$I_4 = h_{\mu\nu,\sigma} h^{\mu\sigma,\nu}, \quad I_5 = h_{,\sigma} h^{,\sigma}, \quad I_6 = h_{,\sigma} h^{,\sigma},_{\nu}$$

$$I_7 = h^{\mu\sigma},_{\mu} h^{,\nu},_{\nu\sigma}$$
(3.23)

Die Invarianten  $I_4$  und  $I_7$  unterscheiden sich bloss um eine Divergenz:

$$h_{\mu\nu,\sigma} h^{\mu\sigma,\nu} = h^{\mu\sigma},_{\mu} h^{,\nu},_{\nu\sigma} + \partial_{\sigma} [h_{\mu\nu} h^{\mu\sigma,\nu} + h_{,\mu}^{\sigma} h^{\mu\nu},_{\nu}]$$
(3.24)

Wir müssen deshalb nur die sechs ersten Invarianten mitnehmen:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^6 A_i I_i.$$

Für  $G^{\alpha\beta}$  findet man

$$-G^{\alpha\beta} = 2A_1 \gamma^{\alpha\beta} h + 2A_2 h^{\alpha\beta} - 2A_3 h^{\alpha\beta,\sigma}_{,\sigma} - A_4 h^{\alpha\sigma,\beta}_{,\sigma}$$

$$- A_4 h^{\beta\sigma,\alpha}_{,\sigma} - 2A_5 \gamma^{\alpha\beta} h^{,\nu},_{\nu\sigma} - A_6 \gamma^{\alpha\beta} h^{,\nu\sigma},_{\nu\sigma} -$$

$$- A_6 h^{,\alpha\beta},_{\nu\sigma}$$
(3.25)

Die Eichinvarianz von  $G^{\alpha\beta}$  verlangt

$$-4A_1 \gamma^{\alpha\beta} \xi^{\mu},_{\mu} - 2A_2 (\xi^{\alpha,\beta} + \xi^{\beta,\alpha}) + 2A_3 (\xi^{\alpha,\beta\sigma}_{,\sigma} + \xi^{\beta,\alpha\sigma}_{,\sigma})$$

$$+ A_4 (\xi^{\alpha,\sigma\beta}_{,\sigma} + \xi^{\beta,\sigma\alpha}_{,\sigma}) + A_4 (\xi^{\beta,\sigma\alpha}_{,\sigma} + \xi^{\alpha,\sigma\beta}_{,\sigma})$$

$$+ 4A_5 \gamma^{\alpha\beta} \xi^{\nu},_{\nu\sigma} + A_6 \gamma^{\alpha\beta} (\xi^{\nu,\sigma}_{,\nu\sigma} + \xi^{\sigma,\nu}_{,\nu\sigma})$$

$$+ 2A_6 \xi^{\mu},_{\mu} \alpha^{\beta} = 0$$
(3.26)

Dies impliziert

$$A_1 = A_2 = 0$$

$$2A_3 + A_4 = 0$$

$$A_4 + A_6 = 0$$

$$2A_5 + A_6 = 0.$$
(3.27)

Da in der Lagrangefunktion ein gemeinsamer Faktor un-

wesentlich ist, so kann man etwa

$$A_3 = \frac{1}{4}$$

verlangen. Damit folgt

$$A_4 = -\frac{1}{2}, A_5 = -\frac{1}{4}, A_6 = \frac{1}{2}$$

und wir erhalten in der Tat die Lagrangefunktion (3.17).  $\square$

### C. Kanonischer Energie - Impuls Tensor

An Stelle von (3.17) können wir, wegen Gl. (3.24), auch den folgenden Ausdruck für die Lagrangefunktion benutzen

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{1}{4} h_{\mu\nu,\sigma} h^{\mu\nu,\sigma} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu}{}^{,\mu} h^{\nu\lambda}{}_{,\lambda} + \frac{1}{2} h_{,\sigma} h^{\nu\sigma}{}_{,\nu} \\ - \frac{1}{4} h_{,\sigma} h^{,\sigma}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Der kanonische Energie - Impuls - Tensor,  ${}^{(2)}t_{\mu}{}^{\nu}$ , ist nach (II.11.37)

$${}^{(2)}t_{\mu}{}^{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^{\alpha\beta}{}_{,\nu}} h^{\alpha\beta}{}_{,\mu} - \delta_{\mu}{}^{\nu} \mathcal{L}. \quad (3.29)$$

Bemerkung: Da sich  $\mathcal{L}$  bei Erdtransformationen um eine Divergenz ändert, ist der kanonische Energie - Impuls - Tensor nicht erdinvariant. Dies reflektiert die Tatsache, dass sich die Gravitationsenergie nicht lokalisieren lässt.

Übungsaufgabe: Zeige, dass  ${}^{(2)}t_{\mu}{}^{\nu}$  in der Hilbert-Erdung durch den folgenden symmetrischen Tensor

$$\begin{aligned} {}^{(2)}t_{\mu}{}^{\nu} = \frac{1}{4} [ 2 h^{\alpha\beta}{}_{,\mu} h_{\alpha\beta}{}^{,\nu} - h_{,\mu} h^{,\nu} - \delta_{\mu}{}^{\nu} ( h^{\alpha\beta}{}_{,\lambda} h_{\alpha\beta}{}^{,\lambda} \\ - \frac{1}{2} h_{,\lambda} h^{,\lambda} ) ] \end{aligned} \quad (3.30)$$

gegeben ist. Schreibe dies auf das  $\phi$ -Feld um, mit dem Resultat

$${}^{(2)}t^{\mu\nu} = \frac{1}{4} [ 2 \phi^{\alpha\beta}{}_{,\mu} \phi_{\alpha\beta}{}^{,\nu} - \phi^{,\mu} \phi^{,\nu} - \eta^{\mu\nu} ( \phi^{\alpha\beta\sigma} \phi_{\alpha\beta\sigma} - \frac{1}{2} \phi_{,\sigma} \phi^{,\sigma} ) ]. \quad (3.31)$$

## §4. Rückwirkung des Gravitationsfeldes auf die Materie

Berücksichtigt man die Rückwirkung des Gravitationsfeldes auf die Materie, so ist der Energie-Impuls Tensor  $T_{\mu\nu}$  der Materie allein nicht mehr erhalten. Die Feldgleichungen (2.7) müssen durch nichtlineare Terme ergänzt werden. Es liegt nahe, auf der rechten Seite von (2.7) einen Energie-Impuls Anteil,  $t_{\mu\nu}$ , des Gravitationsfeldes zu addieren:

$$\square h^{\mu\nu} = 2\partial_\lambda \gamma^{(\nu} h^{\mu)\lambda} + \gamma^{\mu\nu} \square h - \gamma^{\mu\nu} \square h + \gamma^{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\sigma h^{\lambda\sigma} = -\kappa (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) \quad (4.1)$$

Aus dieser Gleichung folgt auf Grund der "Bianchi-Identität" (3.22)

$$\partial_\nu (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = 0 \quad (4.2)$$

$t^{\mu\nu}$  wird als quadratischer Anteil in  $h_{\mu\nu}$ ,  ${}^{(2)}t_{\mu\nu}$ , dem Energie-Impuls Tensor (3.30) zur freien Lagrangefunktion (3.28) haben. Eine Lagrangefunktion, welche zu diesen quadratischen Termen in der Feldgleichung führt, muss aber kubisch in  $h_{\mu\nu}$  sein und gibt deshalb kubische Terme  ${}^{(3)}t_{\mu\nu}$  zu  $t_{\mu\nu}$ , welche ihrerseits quadratische Anteile der Lagrangefunktion erfordern, etc.. Durch einen geschützten Formalismus lassen sich die resultierenden, hochgradig nichtlinearen Feldgleichungen relativ einfach konstruieren. Am einfachsten wurde dies in der folgenden Arbeit durchgeführt:

S. Deser, "Self-interactions and gauge invariance",  
Gen. Rel. & Grav. 1, 9-18 (1970).

Auf diese (etwas fußgängerhafte) Weise erhält man ebenfalls die Einstein'schen Feldgleichungen. Diese erhalten die übliche Form, wenn man die ursprüngliche flache Metrik zugunsten einer pseudo-Riemann'schen Metrik (bestimmt durch  $h_{\mu\nu}$ ) eliminiert. Nur letztere spielt, wie wir in §9 sehen werden eine physikalische Rolle. Die Gravitations-

Theorie lässt deshalb eine geometrische Deutung im Rahmen der Riemann'schen Geometrie zu, womit der Anschluss an die übliche Darstellung der allg. Relativitätstheorie (siehe nächstes Semester) gewonnen ist.

Wir begnügen uns im folgenden mit der Approximation  ${}^{(2)}t_{\mu\nu}$  von  $t_{\mu\nu}$ . Diese lautet in der Hilbert-Erdung (vgl. (3.31))

$${}^{(2)}t_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \left[ 2\phi^{\alpha\beta,\mu} \phi_{\alpha\beta,\nu} - \phi^{,\mu} \phi^{,\nu} - \gamma^{\mu\nu} \left( \phi^{\alpha\beta,\sigma} \phi_{\alpha\beta,\sigma} - \frac{1}{2} \phi_{,\sigma} \phi^{,\sigma} \right) \right]. \quad (4.3)$$

Die approximative Feldgleichung (für schwache Felder) lautet in der Hilbert-Erdung

$$\square \phi^{\mu\nu} = -\kappa (T^{\mu\nu} + {}^{(2)}t^{\mu\nu}). \quad (4.4)$$

Diese impliziert den Erhaltungssatz

$$\partial_\nu (T^{\mu\nu} + {}^{(2)}t^{\mu\nu}) = 0. \quad (4.5)$$

Auf Grund von (4.3) und (4.4) ist

$$\begin{aligned} \partial_\nu {}^{(2)}t^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \left[ \phi^{\alpha\beta,\mu} \phi_{\alpha\beta,\nu} - \phi^{,\mu} \phi^{,\nu} \right] \\ &= -\frac{\kappa}{4} \left[ 2\phi^{\alpha\beta,\mu} T_{\alpha\beta} - \phi^{,\mu} T \right] + \dots, \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nach dem letzten Gleichheitszeichen haben wir konsequenter Weise quadratische Terme weggelassen. Damit wird aus (4.5), bis auf höhere Ordnungen,

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} - \frac{\kappa}{2} T_{\alpha\beta} (\phi^{\alpha\beta,\mu} - \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\beta} \phi^{,\mu}) = 0, \quad (4.7)$$

oder

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} - \frac{\kappa}{2} h_{\alpha\beta,\mu} T^{\alpha\beta} = 0. \quad (4.8)$$

Diese Gleichung ist das Analogon zu

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} - F_{\mu\nu} j^\nu = 0 \quad (4.9)$$

in der Elektrodynamik, welche aus  $\partial_\nu (T^{\mu\nu} + T_{elm.}^{\mu\nu}) = 0$ , sowie (II.9.36) folgt.

Mit Hilfe von (4.8) wird es uns gelingen, die (approximativen) Bewegungsgleichungen für die Materie zu finden.

\* \* \*

Als Vorübung leiten wir zunächst aus (4.9) die Bewegungsgleichungen für ein geladenes Teilchen ab.

Integration von (4.9) über den 3-dimensionalen Raum ergibt (mit dem Gauß'schen Satz)

$$\frac{d}{dt} \int T^{\mu 0} d^3x - \int F^{\mu\nu} j^\nu d^3x = 0.$$

Die Ausdehnung des Teilchens sei sehr klein (Punktteilchen). Dann erhalten wir aus der letzten Gleichung für die Zeitableitung des 4er-Impulses

$$\frac{d}{dt} p^\mu = F^{\mu\nu} \int j^\nu d^3x,$$

oder mit  $j^\nu = \rho_0 u^\nu$  ( $u^\nu$ : 4er-Geschwindigkeit)

$$\frac{d}{dt} p^\mu = F^{\mu\nu} \frac{e}{\gamma} u^\nu.$$

Dies stimmt mit der relativistischen Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = e F^{\mu\nu} u^\nu$$

überein, wenn wir  $p^\mu = m u^\mu$  setzen (entsprechend  $T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu$ ).

\* \* \*

Nun wiederholen wir eine analoge Überlegung für den gravitativen Fall. Integration von (4.8) gibt zunächst

$$\frac{d}{dt} P_\mu - \frac{\kappa}{2} h_{\alpha\beta,\mu} \int T^{\alpha\beta} d^3x = 0, \tag{4.10}$$

wobei  $P_\mu = \int d^3x T_\mu^0$  ist.



Im 2. Term von (4.10) verwenden wir

$$T^{\alpha\beta} = \rho_0 u^\alpha u^\beta + \dots,$$

wo die Punkte mögliche Terme andeuten, welche auf Wechselwirkungsenergien zwischen Materie und Gravitation beruhen (z.B. Terme der Art  $h_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta$ ). Da der betrachtete Term von (4.10) schon proportional zu  $h_{\alpha\beta}$  ist, dürfen wir diese weglassen. [Dies ist aber im ersten Term von (4.10) nicht gestattet].

Nun ist

$$\int \rho_0 u^\alpha u^\beta d^3x = \frac{1}{8} m u^\alpha u^\beta.$$

Deshalb erhalten wir aus (4.10)

$$\frac{dP_\mu}{dt} - \frac{\kappa}{2} m h_{\alpha\beta,\mu} u^\alpha u^\beta = 0. \quad (4.11)$$

Darin dürfen wir aber, wie aus dem Gesagten hervorgeht, nicht einfach  $P_\mu$  durch  $m u_\mu$  ersetzen. Um den richtigen Ausdruck von  $P_\mu = m u_\mu + \dots$  zu finden, verlangen wir, dass (4.11) mit den Euler'schen Gleichungen einer Lagrange-funktion  $L(x, u)$  übereinstimmt. Dies ist der Fall, wenn

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \frac{\kappa}{2} m h_{\alpha\beta,\mu} u^\alpha u^\beta \quad (4.12)$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial u^\mu} = P_\mu \quad (4.13)$$

ist. Aus (4.12) folgt

$$L(x, u) = \frac{\kappa}{2} m h_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta + f(u).$$

Die unbestimmte Funktion  $f(u)$  wird durch die Forderung festgelegt, dass  $L$  für  $h_{\alpha\beta} = 0$  mit der freien Lagrange-funktion  $L_0 = \frac{1}{2} m \underbrace{u^\alpha u^\beta}_{\eta_{\alpha\beta}}$  übereinstimmt. Deshalb ist

$$L(x, u) = \frac{1}{2} m (\eta_{\alpha\beta} + \kappa h_{\alpha\beta}) u^\alpha u^\beta, \quad (4.14)$$

und nach (4.13)

$$P_\mu = m u_\mu + \kappa m h_{\mu\nu} u^\nu. \quad (4.15)$$

Die Bewegungsgleichungen lauten damit für ein schwaches Feld

$$\boxed{\frac{d}{d\tau} (u_\mu + \kappa h_{\mu\nu} u^\nu) - \frac{\kappa}{2} h_{\alpha\beta,\mu} u^\alpha u^\beta = 0.} \quad (4.16)$$

In dieser Gleichung kommt die Masse des Teilchens nicht mehr vor und deshalb ist die Bewegung — bei gegebenen Anfangsbedingungen — unabhängig von der Masse des Teilchens (Universalität).

Wir geben der Bewegungsgleichung noch eine andere Form. Dazu benutzen wir in (4.16)

$$\frac{d}{d\tau} (h_{\mu\nu} u^\nu) = h_{\mu\nu} \frac{du^\nu}{d\tau} + h_{\mu\alpha,\beta} u^\alpha u^\beta,$$

wobei wir darin den ersten Term rechts vernachlässigen können, da dieser von 2. Ordnung in  $h$  ist (die Beschleunigung ist nach (4.16) von erster Ordnung in  $h$ ).

In der betrachteten Näherung ist damit (4.16) äquivalent zu

$$\boxed{\frac{du_\mu}{d\tau} + \kappa (h_{\mu\alpha,\beta} - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta,\mu}) u^\alpha u^\beta = 0.} \quad (4.17)$$

Nach (4.15) ist die Energie  $P_0$  des Teilchens im Gravitationsfeld

$$P_0 = m u_0 + m \kappa h_{0\alpha} u^\alpha. \quad (4.18)$$

Diese ist nach (4.16) für ein zeitunabhängiges Gravitationsfeld ( $h_{\alpha\beta,0} = 0$ ) zeitlich konstant.

Nach einem allgemeinen Satz der Lagrange'schen Mechanik ist

$$u^\mu \frac{\partial L}{\partial u^\mu} - L \quad (4.19)$$

ein 1. Integral der Bewegung. In unserem Fall ist dieses nach (4.17)

$$\frac{1}{2} m (u^\mu u_\mu + \kappa h_{\mu\nu} u^\mu u^\nu) = \text{const.} \quad (4.20)$$

Der richtige Wert der Konstante ist  $\frac{1}{2} m$ , da sich die linke Seite im gravitationsfreien Raum ( $h_{\alpha\beta} = 0$ ) darauf reduziert.

Deshalb ist

$$u^\mu u_\mu + \kappa h_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1,$$

oder, mit  $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ ,

$$\boxed{d\tau^2 = (\gamma_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu.} \quad (4.21)$$

Die Eigenzeit ist also nicht mehr durch die flache Metrik gegeben, sondern durch die pseudo-Riemann'sche Metrik

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}. \quad (4.22)$$

Die Bewegungsgleichung (4.16) lässt sich durch  $g_{\mu\nu}$  ausdrücken:

$$\frac{d}{d\tau} \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) - g_{\alpha\beta,\mu} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (4.23)$$

Diese Gleichung ist aber nichts anderes als die Gleichung einer Geodäte im pseudo-Riemann'schen Raum zur Metrik  $g_{\alpha\beta}$ . In der Tat sind die Euler'schen Gleichungen zur Lagrangefunktion

$$L = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} \quad (4.24)$$

( $\lambda$ : Kurvenparameter):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial (dx^\mu/d\lambda)} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \\ &= \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{L} g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) - \frac{1}{2L} g_{\alpha\beta,\mu} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}. \end{aligned}$$

In diesen können wir  $\lambda = \tau$  (d.h.  $L=1$ ) wählen und dann stimmen diese Gleichungen mit (4.23) überein\*). Das

\*) Wählen wir die Eigenzeit  $\tau$  als Kurvenparameter ( $g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 1$ ) so führt auch

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

zu denselben Euler-Gleichungen. Diese Lagrangefunktion soll man mit (4.14) vergleichen.

Teilchen wählt also die "geradeste" Linie im gekrümmten Raum zur Metrik  $g_{\mu\nu}$ .

Wir haben bis jetzt allerdings nur formale Gründe,  $dt$  als Eigenzeit zu bezeichnen. Tatsächlich bestimmt aber  $dt$  die Zeitmessung einer physikalischen Uhr in einem Gravitationsfeld. Dies werden wir später zeigen (siehe Abschnitt 9). Ebenso bestimmt  $g_{\mu\nu}$  die Längenmessung mit physikalischen Messstäben. Die flache Metrik erweist sich als unbeobachtbar und kann vollständig aus der Theorie eliminiert werden.

\* \* \*

## § 5. Newton'scher Limes

Für schwache Felder können wir das Gravitationsfeld mit der linearisierten Gleichung (2.10) (oder (2.14)) berechnen. Höhere Ordnungen sind vernachlässigbar wenn  $GM/R_0 c^2 \ll 1$  ist (siehe unten). Im Sonnensystem ist z.B.  $GM_\odot/R_0 c^2 \sim 10^{-6}$ . Um den Anschluss an Newton zu gewinnen, nehmen wir auch an, dass alle Geschwindigkeiten klein gegen  $c$  sind und dass die Gravitationsfelder statisch sind. Wir vernachlässigen also Terme der Ordnung  $v^2$  und  $v^k$ . Im ersten Term der Gl. (4.17) können wir  $dx^k/dt \approx dv^k/dt$  ( $v^k = dx^k/dt$ ) setzen und im zweiten Term die Näherung  $u^0 \approx 1$ ,  $u^k \approx 0$  verwenden. Dies gibt

$$\frac{dv^k}{dt} = -\kappa (h_{0,k} - \frac{1}{2} h_{00,k})$$

und für ein statisches Feld

$$\frac{dv^k}{dt} = \frac{1}{2} \kappa \partial^k h_{00}.$$

Dies stimmt mit der Newton'schen Bewegungsgleichung  $dv^k/dt = \partial^k \phi$  für

$$\boxed{\phi = \frac{1}{2} \kappa h_{00}} \quad (5.1)$$

überein. Nun betrachten wir auch den Newton'schen Limes der Feldgleichung. In diesem dürfen wir  $T^{00} \approx \rho$ ,  $T^{k\mu} \approx 0$  setzen. Für ein zeitunabhängiges Feld gibt (2.14)

$$\Delta \phi^{00} \approx \kappa \rho$$

$$\Delta \phi^{k\mu} \approx 0,$$

woraus für  $\phi = \phi^{\mu\mu}$

$$\Delta \phi \approx \kappa \rho$$

folgt. Folglich ist

$$\Delta h_{00} = \Delta (\phi_{00} - \frac{1}{2} \phi) \approx \frac{1}{2} \kappa \rho.$$

Mit (5.1) stimmt dies mit der Poisson Gleichung überein, wenn

$$\boxed{\kappa = \sqrt{16\pi G} = \sqrt{16\pi G/c^4} = 2.04 \times 10^{-24} \text{ sec} / (\text{g cm})^{1/2}} \quad (5.2)$$

Wir betonen, dass notwendigerweise eine anziehende Kraft herauskommt. [Dies ist auch für eine skalare Theorie der Fall, siehe die Übungen]. Dies ist genauso unvermeidlich wie die Repulsion in einer Vektortheorie.

§6. Das Feld einer sphärisch symmetrischen Massenverteilung

Ausschnitt einer sphärisch symmetrischen Massenverteilung, mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung, erfüllt  $\Phi^{\mu\nu}$  die Feldgleichung

$$\square \Phi^{\mu\nu} = 0, \quad (6.1)$$

mit der Nebenbedingung

$$\partial_\nu \Phi^{\mu\nu} = 0. \quad (6.2)$$

Das Feld ist statisch und sphärisch symmetrisch. Deshalb hat  $\Phi^{\mu\nu}$  die Form

$$\Phi^{\mu\nu} = C^{\mu\nu} / r, \quad (6.3)$$

wo  $C^{\mu\nu}$  eine konstante Matrix ist. [Wir verlangen  $\Phi^{\mu\nu} \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ ]. Setzen wir (6.3) in (6.2) ein, so ergibt sich die Nebenbedingung

$$C^{k\nu} \partial_\nu \left( \frac{1}{r} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad C^{k\nu} \frac{x^k}{r^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{C^{k\nu} = 0}$$

Also ist nur  $C^{00} \neq 0$ . Dies gibt

$$h_{00} = \Phi_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} \Phi = C_{00} / 2r.$$

Nach (5.1) muss  $C_{00} = -4GM/\kappa$  sein. Wir erhalten daraus

$$\boxed{(h_{\mu\nu}) = -\frac{2GM}{\kappa r} \mathbf{1}. \quad (6.4)}$$

In den Übungen werden Sie die Bewegungsgleichungen für einen Planeten in diesem Feld lösen und die Perihelabweichung berechnen. Die linearisierte Theorie ist aber für dieses Problem nicht ausreichend; sie gibt  $4/3$  mal den Einsteinschen Wert der nichtlinearen (Einsteinschen) Theorie.

## §7. Ablenkung der Lichtstrahlen im Gravitationsfeld

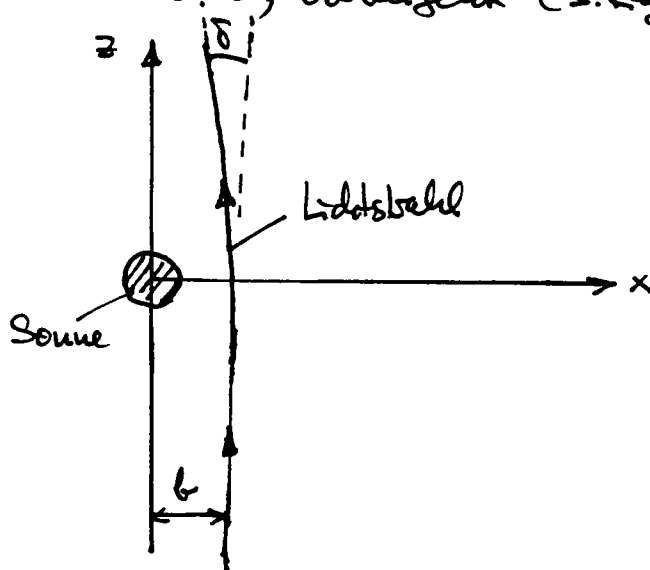
Für dieses Problem ist die linearisierte Theorie ausreichend. Wir geben im folgenden zwei verschiedene Herleitungen der Lichtablenkung. In diesem Abschnitt gehen wir vom Teilchenbild aus. Die relativistische Bewegungsgleichung (4.11) lautet in etwas anderer Form

$$dP_\mu - \sum_{\alpha} h^{\alpha}_{\beta, \mu} P_\alpha dx^\beta = 0. \quad (7.1)$$

Dabei haben wir im 2. Term  $P_\alpha \approx m u_\alpha$  benutzt, was in der betrachteten Ordnung konsistent ist. Für Lichtstrahlen ersetzen wir in (7.1)  $P_\mu$  durch den Wellenvektor  $k_\mu$ . [In der Quantentheorie ist der Impuls eines Teilchens gleich  $\hbar k^\mu$ ]. Die Änderung des Wellenvektors längs eines Lichtstrahls ergibt sich also aus

$$\boxed{dk_\mu - \sum_{\alpha} h^{\alpha}_{\beta, \mu} k_\alpha dx^\beta = 0} \quad (7.2)$$

Nun betrachten wir einen Lichtstrahl, der an der Sonne, mit einem Stoßparameter  $b$ , vorbeigeht (s. Fig.).



Es ist

$$dx^\beta = (dt, 0, 0, dz) = (dz, 0, 0, dz) + \dots$$

$$k_\alpha = (\omega, 0, 0, -\omega) + \dots \quad (7.3)$$

Die Punkte bezeichnen Beiträge der Ordnung  $\alpha$ . Setzen wir dies in (7.2) ein, so ergibt sich, bis auf höhere Ordnungen in  $\alpha$ ,

$$dk_{\mu} = \frac{\kappa}{2} \omega (h^0_{0,\mu} - h^3_{0,\mu} + h^0_{3,\mu} - h^3_{3,\mu}) dz. \quad (7.4)$$

Darin setzen wir das Feld (6.4) der Sonne ein und erhalten

$$\begin{aligned} dk_x = -dk_y &= -\frac{\kappa}{2} \omega (h^0_{0,1} - h^3_{3,1}) dz \\ &= -\frac{\kappa}{2} \omega \frac{\partial}{\partial x} (h^0_0 - h^3_3) dz = -\frac{\kappa}{2} \omega \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{4GM_{\odot}}{r} \right) dz. \end{aligned}$$

Die gesamte Änderung von  $k_x$  ist demnach

$$\begin{aligned} \Delta k_x &= 2GM_{\odot} \omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \Big|_{x=b} dz = -2GM_{\odot} \omega \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b}{(z^2 + b^2)^{3/2}} dz \\ &= -\frac{4GM_{\odot}}{b} \omega. \end{aligned}$$

Der Ablenkwinkel,  $\delta$ , ist also

$$\delta \approx \frac{|\Delta k_x|}{k_z} = \frac{4GM_{\odot}}{b},$$

oder in cgs-Einheiten

$$\delta = \frac{4GM_{\odot}}{c^2} \frac{1}{b}. \quad (7.5)$$

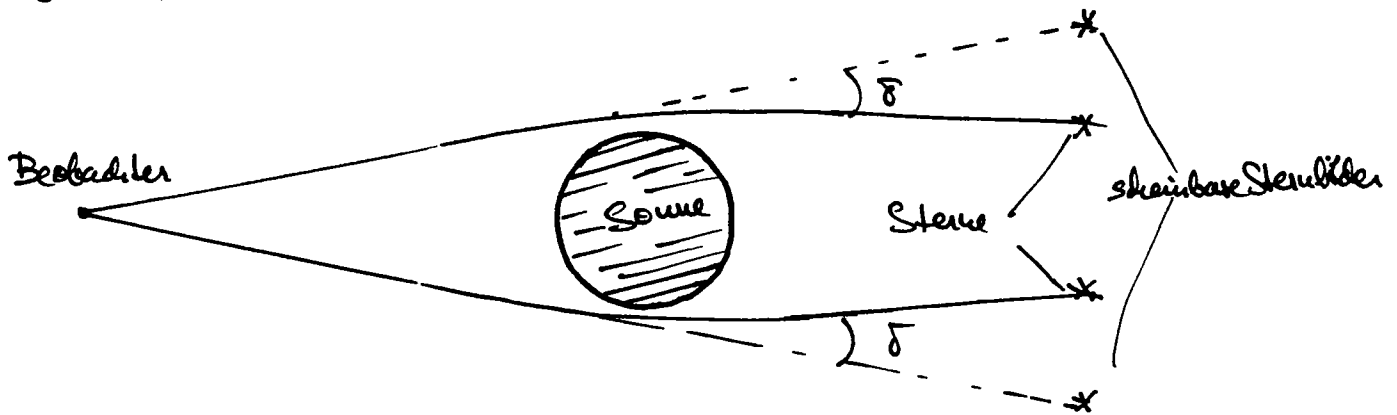
Am Sonnenrand ( $b \approx R_{\odot}$ ) erhält man daraus

$$\delta = 1.75''. \quad (7.6)$$

Historisch wurde diese Voraussage von Einstein erstmals amlässlich einer Sonnenfinsternis am 29. März 1919 überprüft. Eddington und Dyson organisierten zwei Expeditionen nach der brasilianischen Stadt Sobral und nach der Insel Principe in Portugiesisch-Afrika. Der Effekt der Lichtablenkung besteht darin, dass die Sterne während der Sonnenfinsternis nach aussen verschoben erscheinen (siehe die nächste Fig.). Diese Verschiebung wird bestimmt, indem man einmal die Sterne der Sonnenumgebung während der Sonnenfinsternis und später dasselbe Sternfeld bei Nacht photographiert und die beiden Photographien übereinander-



legt.



Die Ergebnisse der beiden ersten Expeditionen waren

$$\delta = \begin{cases} 1.98 \pm 0.16'' & (\text{Sobral}), \\ 1.61 \pm 0.40'' & (\text{Principe}). \end{cases}$$

Dieses Ergebnis sorgte für Schlagzeilen in der Presse. Die Mitglieder des physikalischen Kolloquiums in Zürich (Debye, Weyl, ...) sandten am 11. Okt. 1919 eine Postkarte an Einstein mit dem Vers:

»Alle Zweifel sind verschwunden,  
 Endlich ist es nun gefunden:  
 Das Licht, das läuft natürlich krumm  
 Zu Einsteins allergrößtem Ruhm!«

Einsteins Antwort darauf war:

»Frau Sonne uns Licht und Leben schenkt,  
 Doch liebt sie nicht den, der da grübelt und denkt.  
 Drum müht sie sich ab gar manches Jahr,  
 Wie sie wohl schlau ihr Geheimnis bewahr'.

Doch jüngst kam der liebe Mond zu Gast,  
 Vor Freude begann sie zu leuchten fast,  
 Ist auch um ihr tiefes Geheimnis gekommen -  
 Der Eddington hat es ja aufgenommen.

Ihr Freunde drum von des Kolloquiums Runde,  
 Wenn auch Euch einst schlägt eine schwache Stunde,  
 Gedenkt unsrer Sonne! Was sie nicht kann,  
 Wie soll es vermögen der sterbliche Mann?«

Inzwischen wurden Beobachtungen bei Sonnenfinsternissen oft wiederholt. Die Resultate liegen aber in einem relativ grossen Bereich. Seit 1969 wurden auf radioastronomischem Weg wesentliche Verbesserungen erzielt. Alljährlich am 8. Okt. wird der Quasar 3C 279 von der Sonne verdeckt und dabei kann die Ablenkung der vom Quasar ausgehenden Radiowellen (relativ zum Quasar 3C 273, welcher etwa  $10^\circ$  entfernt ist) gemessen werden. [Störungen der Sonnenkorona sind für Radiowellen leichter unter Kontrolle zu bringen]. Das gemittelte Resultat der letzten Jahre ist

$$\delta = 1.73 \pm 0.05''$$

Innerhalb eines Messfehlers von  $\approx 3\%$  ist damit die Einsteins'sche Theorie bestätigt, während z.B. die viel diskutierte "Skalar-Tensor Theorie" von Brans und Dicke durch die Beobachtungen eliminiert worden ist.

### §8. Kopplung an das elektromagnetische Feld

Nach den Feldgleichungen (3.20) und dem Variationsausdruck (3.18) für deren linke Seite, ist die Kopplung des Gravitationsfeldes an das elektromagnetische Feld

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\kappa}{2} h_{\mu\nu} T_{\text{elm}}^{\mu\nu} \quad (8.1)$$

Die gesamte Lagrangefunktion des elektromagnetischen Feldes ist die Summe von (II.11.31) und (8.1), d.h. (in Heaviside Einheiten)

$$\mathcal{L}_{\text{elm.}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu - \frac{\kappa}{2} h_{\mu\nu} T_{\text{elm.}}^{\mu\nu} \quad (8.2)$$

wobei nach (II.9.32)

$$T_{\text{elm.}}^{\mu\nu} = -F^{\mu\lambda} F^\nu{}_\lambda + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (8.3)$$

ist. Bis zur 1. Ordnung in  $\kappa$  ist (8.2) gleich

$$\mathcal{L}_{\text{elm.}} = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{\kappa}{2} h\right) (\eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu}) (\eta^{\rho\sigma} - \kappa h^{\rho\sigma}) F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} - j^\mu A_\mu \quad (8.4)$$

Im Hinblick auf die allgemeine Relativitätstheorie schreiben wir (8.4) noch wie folgt um. Sei  $g^{\mu\nu}$  die zu  $(g_{\mu\nu})$  inverse Matrix von Gl. (4.22) und  $g$  die Determinante von  $(g_{\mu\nu})$ . Dann ist, in der betrachteten Näherung in  $z$

$$L_{\text{elm.}} = -\frac{1}{4} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} - j^\mu x_\mu. \quad (8.5)$$

Die zu (8.4) gehörigen Feldgleichungen lauten

$$\partial_\sigma \left\{ (1 + \frac{z}{z_0}) (\eta^{\mu\nu} - z h^{\mu\nu}) (\eta^{\rho\sigma} - z h^{\rho\sigma}) F_{\mu\rho} \right\} = -j^\nu. \quad (8.6)$$

Für diagonales  $h_{\mu\nu}$  sind diese Feldgleichungen identisch mit den makroskopischen Maxwell'schen Gleichungen mit einer Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon$  und einer magnetischen Permeabilität  $\mu$  (Übungsaufgabe). Speziell für die Lösung (6.4) ist

$$\epsilon = \mu = \frac{1}{1 - 2GM/r}. \quad (8.7)$$

Die zugehörige lokale Lichtgeschwindigkeit ist

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = 1 - 2GM/r < 1. \quad (8.8)$$

Mit Hilfe des Fermat'schen Prinzips kann man daraus wieder die Lichtablenkung berechnen. Nach diesem Prinzip sind die Bahnen eines Lichtstrahles die Euler'schen Gleichungen zur Lagrangefunktion

$$L(\underline{x}, \dot{\underline{x}}) = n(\underline{x}) \sqrt{|\dot{\underline{x}}(s)|^2}, \quad \dot{\underline{x}} = d\underline{x}/ds, \quad (8.9)$$

wobei  $n(\underline{x})$  der Brechungsindex ist. Für unser Problem ist dieser nach (8.8)

$$\boxed{n(\underline{x}) = 1 + 2GM/r.} \quad (8.10)$$

Im sphärisch symmetrischen Fall verläuft die Bahn in einer Ebene und die Lagrangefunktion (8.9) lautet in ebenen Polarkoordinaten

$$L = n(r) \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}. \quad (8.11)$$

Darin ist  $\varphi$  eine zyklische Variable und folglich

$$p_\varphi := \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{h(r)}{\sqrt{\dots}} r^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$$

Wählen wir als Parameter  $s$  die Bogenlänge, so gilt demnach

$$h r^2 \dot{\varphi} = p_\varphi,$$

oder

$$\frac{h^2}{p_\varphi^2} = \frac{1}{r^4} \left( \frac{ds}{d\varphi} \right)^2 = \frac{1}{r^4} \left[ \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + r^2 \right] = \frac{1}{r^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2}.$$

Benutzen wir statt  $r$  die reziproke Entfernung  $\rho = 1/r$ , so folgt daraus

$$\left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 + \rho^2 = \frac{h^2}{p_\varphi^2} \approx \frac{1}{p_\varphi^2} (1 + 4GM\rho) \quad (8.12)$$

Für  $\rho \rightarrow 0$  geht  $h \rightarrow 1$ , also  $\left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)_{\rho=0} = \frac{1}{p_\varphi}$ , d.h.  $p_\varphi$  ist der Impactparameter,  $b$ , des Lichtstrahles.

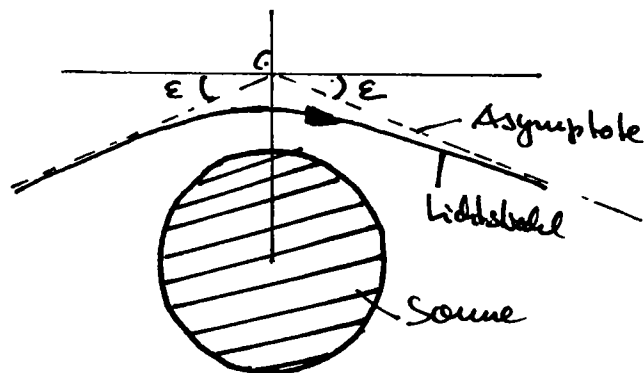
Differenzieren von (8.12) ergibt

$$\frac{d^2 \rho}{d\varphi^2} + \rho = \frac{2GM}{b^2}. \quad (8.13)$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$\rho = \frac{1}{b} \cos \varphi + \frac{2GM}{b^2}. \quad (8.14)$$

Ohne den 2. Term rechts würde dies eine Gerade beschreiben, deren Impactparameter  $b$  ist. Die Asymptoten der Bahnkurve (8.14) ergeben sich aus  $\rho \rightarrow 0$ . Mit den Bezeichnungen der folgenden Fig. ist der Ablenkungswinkel,  $\delta$ , gleich  $2\varepsilon$ .



Aus (8.14) folgt für  $\rho = 0$ :  $0 = \frac{1}{b} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) + \frac{2GM}{b^2} \approx -\varepsilon/b + 2GM/b^2 \Rightarrow \varepsilon \approx 2GM/b$ . Damit erhalten wir wieder  $\delta = 4GM/b$  (vergl. mit (7.5)).

### 9. Verhalten von Uhren und Massstäben im Gravitationsfeld.

Als Modell einer Uhr und eines Massstabes wählen wir ein H-Atom (Frequenz, Bohr-Radius).

Das Proton (in Ruhe) erzeugt ein Coulombfeld,  $\varphi$ , gemäß (8.6). Für ein konstantes  $h_{\mu\nu}$  lautet die 0-Komponente dieser Gleichung

$$\left(1 + \frac{\kappa}{2} h\right) (1 - \kappa h^{00}) (\eta^{\rho\sigma} - \kappa h^{\rho\sigma}) \varphi_{,\rho\sigma} = e \delta^3(\underline{x}),$$

oder

$$\left(1 + \frac{\kappa}{2} h\right) (1 - \kappa h^{00}) (\delta_{jk} + \kappa h_{jk}) \varphi_{,jk} = -e \delta^3(\underline{x}). \quad (9.1)$$

Für das Feld (6.4) mit  $t = R = \text{const.}$  ist

$$\kappa h^{00} = -\frac{2GM}{R}, \quad \kappa h_{jk} = -\delta_{jk} \frac{2GM}{R}, \quad \frac{\kappa}{2} h = \frac{2GM}{R}$$

und (9.1) gibt

$$\left(1 + \frac{2GM}{R}\right) \left(1 + \frac{2GM}{R}\right) \left(1 - \frac{2GM}{R}\right) \Delta\varphi = -e \delta^3(\underline{x}),$$

d.h.

$$\left(1 + \frac{2GM}{R}\right) \Delta\varphi = -e \delta^3(\underline{x}),$$

mit der Lösung

$$\varphi = \frac{e}{4\pi r} \left(1 - \frac{2M}{R}\right), \quad (9.3)$$

oder mit (8.8)

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r}. \quad (9.4)$$

Die Bewegungsgleichung des Elektrons (Ladung  $-e$ !) ergibt sich aus der Lagrangefunktion (vergl. (4.14) und (II.10.20)):

$$L = -\frac{m}{2} [\eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}] u^\mu u^\nu + e A_\mu u^\mu \quad (9.5)$$

zu

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ -m [\eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}] u^\nu + e A_\mu \right\} = -\frac{\kappa}{2} h_{\alpha\beta,\mu} u^\alpha u^\beta + e A_{\nu\mu} u^\nu,$$

oder

$$m \frac{d}{dt} [(\eta_{\mu\nu} + \chi h_{\mu\nu}) u^\nu] = \frac{m\chi}{2} h_{\alpha\beta,\mu} u^\alpha u^\beta - e A_{\nu,\mu} \dot{x}^\nu + e A_{\mu,\nu} \dot{x}^\nu,$$

d.h.

$$\boxed{m \frac{d}{dt} [(\eta_{\mu\nu} + \chi h_{\mu\nu}) u^\nu] = m \frac{\chi}{2} h_{\alpha\beta,\mu} u^\alpha u^\beta + e (A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}) \dot{x}^\nu} \quad (9.6)$$

Für das Coulombfeld (9.4) und das Gravitationsfeld (9.2) erhalten wir in nichtrelativistischer Näherung

$$-m(1 + \frac{2GM}{R}) \ddot{x} = -e \nabla \varphi \dot{x}^0 = -\frac{e^2}{4\pi} (1 - 2M/R) \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^3} \dot{x}^0. \quad (9.7)$$

Aber  $(\eta_{\mu\nu} + \chi h_{\mu\nu}) u^\mu u^\nu = 1$ , also

$$\frac{\sqrt{1 + 2\chi u_{00}}}{\sqrt{1 - 2GM/R}} \dot{x}^0 \approx 1 \Rightarrow \underline{\dot{x}^0 \approx 1 + GM/R}. \quad (9.8)$$

Deshalb gilt (9.7)

$$m(1 + 4GM/R) \frac{d^2}{dt^2} \underline{x} = \frac{e^2}{4\pi} (1 - GM/R) \underline{x}/|\underline{x}|^3,$$

oder

$$\boxed{m(1 + 3GM/R) \frac{d^2}{dt^2} \underline{x} = \frac{e^2}{4\pi} (1 - 2GM/R) \underline{x}/|\underline{x}|^3} \quad (9.9)$$

Nun führen wir "effektive Größen" ein

$$m_{\text{eff}} = m(1 + 3GM/R), \quad e_{\text{eff}}^2 = \frac{e^2}{2} = e^2(1 - 2M/R). \quad (9.10)$$

In diesen erhalten wir die übliche Gleichung

$$m_{\text{eff}} \frac{d^2}{dt^2} \underline{x} = (e_{\text{eff}}^2/4\pi) \underline{x}/|\underline{x}|^3. \quad (9.11)$$

(Beachte  $m_{\text{eff}} > m$ !). Der Bohr-Radius ist

$$\boxed{a_0 = \frac{\hbar^2}{m_{\text{eff}} (e_{\text{eff}}^2/4\pi)} = \frac{\hbar^2}{me^2/4\pi} (1 - GM/R)} \quad (9.12)$$

und die Rydberg-Frequenz lautet

$$\omega = \frac{1}{2\hbar} m_{\text{eff}} \left( \frac{e_{\text{eff}}^2}{4\pi\hbar} \right)^2 = \frac{1}{2\hbar} m \left( \frac{e^2}{4\pi\hbar} \right)^2 (1 - GM/R) \quad (9.13)$$

Resultat: Durch die Kopplung an das Gravitationsfeld werden die Atome kleiner und die Frequenzen (Zeiten) nehmen ab (zu).

Falls wir aber Längen und Zeiten mit H-Atomen definieren, so sind die dazugehörigen "renormierten" Längen und Zeiten gemäss (9.12) und (9.13)

$$\tilde{r} = r(1 + GM/R), \quad \tilde{t} = t(1 - GM/R) \quad (9.14)$$

In diesen Koordinaten lautet die Bewegungsgleichung (9.9)

$$m \frac{d^2 \tilde{x}}{d\tilde{t}^2} = \frac{e^2 \tilde{x}}{4\pi} \frac{1}{|\tilde{x}|^3} \quad (9.15)$$

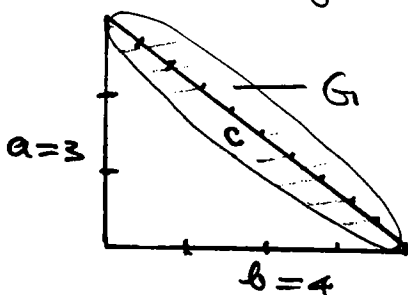
Der Bohrsche Radius  $\tilde{a}_0$  und die Rydbergfrequenz  $\tilde{\omega}$  haben die üblichen Werte. Die beobachtbare Melodie ist nach (9.14)

$$\underline{d\tilde{s}^2} = \eta_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu = \underline{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \quad (9.16)$$

In renormierten Längen und Zeiten ist nach (8.8) die Lichtgeschwindigkeit immer gleich 1.

In den obigen Betrachtungen wurde das Gravitationsfeld als konstant angenommen. Das ist gerechtfertigt, solange dieses über die Dimensionen des H-Atoms nicht wesentlich variiert.

Die Skalenänderung (9.14) hängt vom Ort ab und dies führt zu einer "globalen Krümmung" der Geometrie. Zur Veranschaulichung betrachten wir ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten 3 bzw. 4 Längeneinheiten sind (s. Fig.). Im Bereich der Hypotenuse herrsche ein starkes Gravitationsfeld, welches zur Folge habe, dass



die Kreisbahn um einen Faktor  $\frac{1}{2}$  schrumpfen. Die Messung der Hypotenuse wird dann die Länge  $c = 10$  ergeben und der Satz von Pythagoras gilt nicht mehr.

Diese Beobachtungen zeigen in eindeutiger Weise, dass die flache Minkowski Metrik, in Anwesenheit von Gravitationsfeldern, unbeschreibbar ist und dass die Gravitation durch eine "Krumme" (pseudo-Riemann'sche) Metrik zu beschreiben ist. Es ist klar, dass dafür die Universalität der Gravitation wesentlich ist.

Rotverschiebung

Für zeitunabhängige  $h_{\mu\nu}$  gibt es Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen (8.6) (für  $j^\nu = 0$ ) proportional zu  $e^{-i\omega t}$ , in den untersummierten Koordinaten ändert sich die Frequenz nicht. Die rechnerische (beobachtete) Frequenz ist aber nach (9.13)

$$\tilde{\omega} = \omega (1 + GM/R) \tag{9.17}$$

Also

$$\tilde{\omega}_1 / \tilde{\omega}_2 = \frac{1 + GM/R_1}{1 + GM/R_2} \tag{9.18}$$

$$= \sqrt{\frac{g_{00|2}}{g_{00|1}}} \tag{9.19}$$

Diese Spektralverschiebung von Licht beim Durchgang durch ein Gravitationsfeld wurde mit Hilfe des Mössbauer Effektes auf 1% genau bestätigt.

\* \* \*

Literatur Hinweis (speziell für §9):

W. Thirring, "An Alternative Approach to the Theory of Gravitation", Annals of Physics: 16, 96-117 (1961).



- 207 -

## § 10. Emission von Gravitationsabstrahlung

Die linearisierte Feldgleichung (siehe (2.14))

$$\square \phi^{\mu\nu} = -\kappa T^{\mu\nu} \quad (10.1)$$

hat die retardierte Lösung

$$\phi^{\mu\nu}(t, \underline{x}) = -\frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{T^{\mu\nu}(t - |\underline{x} - \underline{x}'|, \underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x'. \quad (10.2)$$

Diese Lösung betrachten wir in der Wellenzone. Wir entwickeln sowohl nach der Retardierung innerhalb der Quelle, als auch nach  $|\underline{x}'|/|\underline{x}| \ll 1$ . In tiefer Näherung ist

$$\phi^{\mu\nu}(t, \underline{x}) = -\frac{\kappa}{4\pi r} \int T^{\mu\nu}(t - r, \underline{x}') d^3x' \quad (10.3)$$

( $r = |\underline{x}|$ ). Zunächst formen wir das Integral rechts für räumliche Indizes um. Dazu bemerken wir  $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ , welche die folgende Identität impliziert:

$$\int T^{kl} d^3x = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int T^{00} x^k x^l d^3x. \quad (10.4)$$

Beweis: Aus

$$0 = \int x^k \partial_\nu T_\mu{}^\nu d^3x = \frac{\partial}{\partial t} \int x^k T_\mu{}^0 d^3x + \int x^k \partial_\ell T_\mu{}^\ell d^3x$$

folgt durch partielle Integration des letzten Terms

$$\int d^3x T_\mu{}^k = \frac{\partial}{\partial t} \int T_\mu{}^0 x^k d^3x. \quad (10.5)$$

Weiter gilt mit dem Gauss'schen Satz

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int T^{00} x^k x^l d^3x &= \int \partial_\nu (T^{\nu 0} x^k x^l) d^3x = \int T^{\nu 0} \partial_\nu (x^k x^l) d^3x \\ &= \int d^3x (T^{k0} x^l + T^{l0} x^k). \end{aligned}$$

Daraus und (10.5) folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int T^{00} x^k x^l d^3x &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x (T^{k0} x^l + T^{l0} x^k) = \\ &= \int T^{kl} d^3x. \quad \square \end{aligned}$$

Aus (10.3) und (10.4) erhalten wir mit  $T^{00} \approx \rho$

$$\phi^{kl}(t, \underline{x}) = - \frac{x}{8\pi r} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho(\underline{x}') x'^k x'^l d^3x' \right]_{t-r} \quad (10.6)$$

Dies drücken wir durch den Quadrupoltensor

$$Q^{kl} = \int (3x'^k x'^l - r'^2 \delta_k^l) \rho(\underline{x}') d^3x' \quad (10.7)$$

aus:

$$\phi^{kl}(t, \underline{x}) = - \frac{x}{8\pi r} \frac{1}{3} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q^{kl} + \delta_k^l \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int r'^2 \rho(\underline{x}') d^3x' \right]_{t-r} \quad (10.8)$$

Dieser Ausdruck genügt, um den Energiefluss zu berechnen. Es wird sich zeigen, dass dazu nur der erste Term in (10.8) beiträgt.

In grossen Entfernungen von der Quelle kann man eine Welle als lokal eben betrachten. Deshalb betrachten wir wieder als eine (nicht notwendigerweise harmonische) Welle in der  $x^1$ -Richtung:

$$\Phi_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(x^0 - x^1). \quad (10.9)$$

Aus der Hilbert-Bedingung  $\Phi_{\mu,\nu}^{\nu} = 0$  folgt für die Form (10.9)

$$\dot{\Phi}_\mu^0 = \dot{\Phi}_\mu^1. \quad [\text{Ein Punkt bedeutet die Ableitung nach } x^0 = t].$$

Bis auf irrelevante Integrationskonstanten (wir interessieren uns nur für das Wechselfeld) gilt diese Gleichung auch für die Felder. Deshalb gilt

$$\Phi_0^0 = \Phi_0^1, \Phi_1^0 = \Phi_1^1, \Phi_2^0 = \Phi_2^1, \Phi_3^0 = \Phi_3^1 \Rightarrow \Phi_0^0 = \Phi_1^1 \quad (10.10)$$

Unabhängig sind noch:  $\Phi_0^0, \Phi_0^2, \Phi_0^3, \Phi_2^2, \Phi_2^3, \Phi_3^3$ .

Bei Umrechnungen (3.3) mit  $\xi_\mu(x^0 - x^1)$  ( $\Rightarrow \square \xi^\mu = 0$ ) ist

$\xi_{x^1}^{\lambda} = \dot{\xi}_0^\lambda + \dot{\xi}_1^\lambda$  und folglich gelten die Transformationsgesetze

$$\begin{aligned} \Phi_{00} &\rightarrow \Phi_{00} + 2\dot{\xi}_0, & \Phi_{02} &\rightarrow \Phi_{02} + \dot{\xi}_2, & \Phi_{03} &\rightarrow \Phi_{03} + \dot{\xi}_3 \\ \Phi_{22} &\rightarrow \Phi_{22} - \dot{\xi}_0 - \dot{\xi}_1, & \Phi_{23} &\rightarrow \Phi_{23}, & \Phi_{33} &\rightarrow \Phi_{33} - \dot{\xi}_0 - \dot{\xi}_1 \end{aligned} \quad (10.11)$$

Durch geeignete Wahl von  $\mathcal{S}_\mu$  könnten wir  $\phi_{00}, \phi_{02}, \phi_{03}, \phi_{22} + \phi_{33}$  zum Verschwinden bringen. Dann wären nur noch  $\phi_{23}$  und  $\phi_{22} = -\phi_{33}$  von Null verschieden. Für die Anwendung auf (10.8) ist es zweckmäßiger, sich auf solche Eichtransformationen zu beschränken, für die  $\phi_{22}$  und  $\phi_{33}$  ungeändert bleiben. Nach (3.31) ist der Energiestrom in der 1-Richtung,  ${}^{(2)}t_0^1$ , gleich

$$\begin{aligned} {}^{(2)}t_0^1 &= \frac{1}{4} \left[ 2\phi_{22,0} \phi^{22,1} + 2\phi_{33,0} \phi^{33,1} + 4\phi_{23,0} \phi^{23,1} \right. \\ &\quad \left. - (\phi_{22,0} + \phi_{33,0}) (\phi^{22,1} + \phi^{33,1}) \right] \\ &= -\frac{1}{4} (\phi_{22,0} \phi_{22,1} + \phi_{33,0} \phi_{33,1} - \phi_{22,0} \phi_{33,1} - \phi_{33,0} \phi_{22,1}) \\ &\quad - \phi_{23,0} \phi_{23,1} \end{aligned}$$

oder

$$\boxed{{}^{(2)}t_0^1 = \frac{1}{4} (\dot{\phi}_{22} - \dot{\phi}_{33})^2 + (\dot{\phi}_{23})^2.} \quad (10.12)$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von der noch verbleibenden Eichung\*). Mit dem Einheitsvektor  $\underline{n} = (1, 0, 0)$  in der  $x^1$ -Richtung gilt auch

$${}^{(2)}t_0^s \underline{n}^s = \frac{1}{4} \left[ 2\dot{\phi}^{kl} \dot{\phi}^{kl} - 4\dot{\phi}^{kl} \dot{\phi}^{km} n^l n^m + (\dot{\phi}^{kl} n^k n^l)^2 \right] \quad (10.13)$$

Diese Formel für den Energiestrom in Richtung  $\underline{n}$  der ebenen Welle gilt natürlich für eine ebene Welle in beliebiger Richtung  $\underline{n}$ .

Für das Feld (10.8) ergibt sich (der 2. Term in (10.8) trägt nach (10.12) nicht bei):

$${}^{(2)}t_0^s \underline{n}^s = \frac{1}{9} \left( \frac{\kappa}{8\pi r} \right)^2 \left[ \frac{1}{2} \ddot{\phi}^{kl} \ddot{\phi}^{kl} - \ddot{\phi}^{kl} \ddot{\phi}^{km} n^l n^m + \frac{1}{4} (\ddot{\phi}^{kl} n^k n^l)^2 \right]. \quad (10.14)$$

\*) In der speziellen Eichung  $\phi_{22} + \phi_{33} = 0$  ist

$$\boxed{{}^{(2)}t_0^1 = (\dot{\phi}_{22})^2 + (\dot{\phi}_{23})^2} \quad (10.12')$$

Die abgestrahlte Energie pro Raumwinkel und Zeiteinheit in Richtung  $\underline{n}$  ist

$$\frac{d^2 E}{dt d\Omega} = r^2 \dot{t}^{\alpha\beta} = \frac{1}{9} \left( \frac{\chi}{8\pi} \right)^2 [ \dots ]$$

↑  
(10.14)

Wir interessieren uns für die totale Energieabstrahlung. Mit den folgenden Mittelwerten

$$\frac{1}{4\pi} \int n^l n^k d\Omega = \frac{1}{3} \delta_l^k, \quad (10.15)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int n^k n^l n^m n^r d\Omega = \frac{1}{15} (\delta_k^l \delta_m^r + \delta_k^m \delta_l^r + \delta_k^r \delta_l^m), \quad (10.16)$$

folgt sofort

$$\frac{dE}{dt} = \frac{4\pi}{45} \left( \frac{\chi}{8\pi} \right)^2 \ddot{Q}^{kl} \ddot{Q}^{kl}$$

Benutzen wir den Wert  $\chi^2 = 16\pi G$  und kehren wir zu cgs-Einheiten zurück, so ist die abgestrahlte Leistung

$$\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5} \ddot{Q}^{kl} \ddot{Q}^{kl} \quad (10.17)$$

(A. Einstein)

Im Gegensatz zur Elektrodynamik tritt hier als höchster Multipol die Quadrupolstrahlung auf. Dies beruht natürlich auf dem Spin 2 Charakter des Gravitationsfeldes.

### Abstrahlung eines binären Sternsystems

Als Beispiel berechnen wir den Strahlungsverlust eines Doppelsternsystems. Wir führen die Rechnung in den Einheiten  $G = c = 1$  durch.

Die beiden Massen seien  $m_1, m_2$ . Die grosse Halbachse  $a$  und die Exzentrizität  $e$  lassen sich durch die totale Energie  $E$  ( $E < 0$ ) und den Drehimpuls  $L$  wie folgt ausdrücken (siehe die Mechanik Vorlesung):

$$a = -u_1 u_2 / 2E, \tag{10.18}$$

$$e^2 = 1 + \frac{2EL^2(u_1 + u_2)}{u_1^3 u_2^3}. \tag{10.19}$$

Deshalb ist

$$\frac{da}{dt} = \frac{u_1 u_2}{2E^2} \frac{dE}{dt}, \tag{10.20}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{u_1 + u_2}{u_1^3 u_2^3 e} \left( L^2 \frac{dE}{dt} + 2EL \frac{dL}{dt} \right). \tag{10.21}$$

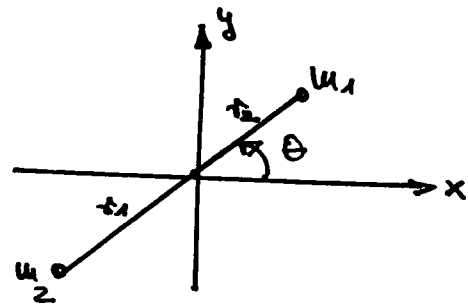
Bezeichnet  $r$  den Abstand der beiden Teilchen, so ist (siehe die Fig.)

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta} \tag{10.22}$$

und

$$r_1 = \frac{u_2}{u_1 + u_2} r,$$

$$r_2 = \frac{u_1}{u_1 + u_2} r.$$



Deshalb gilt für die Komponenten des Trägheitstensors

$$I_{kl} = \int \rho(x) x^k x^l d^3x$$

$$I_{xx} = u_1 x_1^2 + u_2 x_2^2 = \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2} r^2 \cos^2 \theta,$$

$$I_{yy} = \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2} r^2 \sin^2 \theta,$$

$$I_{xy} = \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2} r^2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$I \equiv I_{xx} + I_{yy} = \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2} r^2. \tag{10.23}$$

Der Drehimpuls ist  $L = \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2} r^2 \dot{\theta}$  und folglich ist mit (10.18), (10.19)

$$\dot{\theta} = \frac{[(u_1 + u_2) a (1 - e^2)]^{1/2}}{r^2} \tag{10.24}$$

Mit (10.22) folgt daraus

$$\dot{r} = e \sin \theta \left[ \frac{u_1 + u_2}{a(1-e^2)} \right]^{1/2} \quad (10.25)$$

Nun berechnen wir die wiederholten Zeitableitungen von  $I_{ke}$ , wobei wir die Ausdrücke mit (10.22), (10.24) und (10.25) vereinfachen. Die Ergebnisse sind

$$\dot{I}_{xx} = \frac{-2u_1 u_2 + \cos \theta \sin \theta}{[(u_1 + u_2)a(1-e^2)]^{1/2}} \quad (10.26)$$

$$\ddot{I}_{xx} = \frac{-2u_1 u_2}{a(1-e^2)} (\cos 2\theta + e \cos^3 \theta), \quad (10.27)$$

$$\dddot{I}_{xx} = \frac{2u_1 u_2}{a(1-e^2)} (2 \sin 2\theta + 3e \cos^2 \theta \sin \theta) \dot{\theta}, \quad (10.28)$$

$$\dot{I}_{yy} = \frac{2u_1 u_2}{[(u_1 + u_2)a(1-e^2)]^{1/2}} r (\sin \theta \cos \theta + e \sin \theta), \quad (10.29)$$

$$\ddot{I}_{yy} = \frac{2u_1 u_2}{a(1-e^2)} (\cos 2\theta + e \cos \theta + e \cos^3 \theta + e^2), \quad (10.30)$$

$$\dddot{I}_{yy} = \frac{-2u_1 u_2}{a(1-e^2)} (2 \sin 2\theta + e \sin \theta + 3e \cos^2 \theta \sin \theta) \dot{\theta}, \quad (10.31)$$

$$\dot{I}_{xy} = \frac{u_1 u_2 + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + e \cos \theta)}{[(u_1 + u_2)a(1-e^2)]^{1/2}}, \quad (10.32)$$

$$\ddot{I}_{xy} = \frac{-2u_1 u_2}{a(1-e^2)} (\sin 2\theta + e \sin \theta + e \sin \theta \cos^2 \theta), \quad (10.33)$$

$$\ddot{I}_{xy} = \frac{-2u_1 u_2}{a(1-e^2)} (2 \cos 2\theta - e \cos \theta + 3e \cos^3 \theta) \dot{\theta}, \quad (10.34)$$

$$\ddot{I} = \ddot{I}_{xx} + \ddot{I}_{yy} = \frac{-2u_1 u_2 e \sin \theta \dot{\theta}}{a(1-e^2)}. \quad (10.35)$$

Die Formel (10.17) kann auch so geschrieben werden

$$\begin{aligned} -\frac{dE}{dt} &= \frac{1}{5} \left( \ddot{I}_{ke} \ddot{I}_{ke} - \frac{1}{3} \ddot{I}^2 \right) \\ &= \frac{1}{5} \left( \ddot{I}_{xx}^2 + 2 \ddot{I}_{xy}^2 + \ddot{I}_{yy}^2 - \frac{1}{3} \ddot{I}^2 \right). \end{aligned}$$

Mit den obigen Ausdrücken erhalten wir

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{8\mu_1^2 \mu_2^2}{15a^2(1-e^2)^2} [12(1+e \cos \theta)^2 + e^2 \sin^2 \theta] \dot{\theta}^2$$

Diesen Ausdruck mitteln wir über eine Periode. Nach dem 3. Kepler'schen Gesetz ist die Umlaufzeit

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{(\mu_1 + \mu_2)^{1/2}} \quad (10.36)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} -\langle \frac{dE}{dt} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dE}{dt} dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{dE}{dt} \frac{1}{\dot{\theta}} d\theta \\ &= \frac{32}{5} \frac{\mu_1^2 \mu_2^2 (\mu_1 + \mu_2)}{a^5 (1-e^2)^{7/2}} \left( 1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right). \end{aligned} \quad (10.37)$$

Daraus und aus (10.20) folgt

$$\begin{aligned} \langle \frac{da}{dt} \rangle &= \frac{2a^2}{\mu_1 \mu_2} \langle \frac{dE}{dt} \rangle \\ &= -\frac{64}{5} \frac{\mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2)}{a^3 (1-e^2)^{7/2}} \left( 1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \end{aligned} \quad (10.38)$$

Für die Änderung der Umlaufzeit ergibt sich mit (10.36)

$$\dot{T}/T = \frac{3}{2} \dot{a}/a = -\frac{96}{5} \frac{1}{a^4} \mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2) f(e), \quad (10.39)$$

wobei

$$f(e) = \left( 1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) (1-e^2)^{-7/2}. \quad (10.40)$$

Ersetzen wir  $a$  in (10.39) durch  $T$  so ist auch

$$\dot{T}/T = -\frac{96}{5} \frac{\mu_1 \mu_2}{(T/2\pi)^{3/3} (\mu_1 + \mu_2)^{1/3}} f(e). \quad (10.41)$$

Kürzlich ist es gelungen, diese Formel an einem bemerkenswerten binären System zu verifizieren. Dieses besteht aus einem Pulsar (PSR 1913+16) und einem kompakten Partner, welcher entweder ein weißer Zwerg, ein Neutronenstern oder ein schwarzes Loch<sup>ist</sup>. Nach fünfjähriger Beobachtung ist es gelungen, neben Kepler'schen Parametern auch post-Kepler'sche

- 214

Parameter (z.B. die Periheldrehung) zu bestimmen. Aus diesen kann man schliessen, dass  $m_1 \approx m_2 \approx 1.4 M_\odot$  sind. Benutzt man dies in (10.41), sowie

$$T = 27906.980 \pm 0.002 \text{ Sek.}$$

$$e = 0.617,$$

so erhält man

$$\underline{\dot{T}_{\text{theor.}} = -2.4 \times 10^{-12}.$$

Die Beobachtungen haben den Wert

$$\underline{\dot{T}_{\text{obs.}} = -(3.2 \pm 0.6) \times 10^{-12}}$$

ergeben.

Berechne die Energieabstrahlung (10.3) des Systems in  $\text{erg/s}$ .

\* \* \*

- ENDE -

Literatur zu § 10:

J.A. Tyson, R.P. Giffard, "Gravitational-Wave Astronomy",  
Ann. Rev. Astron. Astrophys.,  
16, 521-54 (1978).



Wie weist man Gravitationswellen grundsatzlich nach?

Wir betrachten zunachst die Bewegung eines Teilchens im Feld einer Gravitationswelle. Ausgangspunkt ist die Bewegungsgl. (4.17) (linearisierte Geodate):

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = -\kappa (h_{\mu\alpha,\beta} - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta,\mu}) u^\alpha u^\beta, \quad (10.42)$$

Das Teilchen sei anfanglich in Ruhe, oder habe eine kleine Geschwindigkeit ( $u^0 \approx 1, u^k \approx 0$ ) und folglich gilt

$$\frac{du^\mu}{dt} = -\kappa (h_{\mu 0,0} - \frac{1}{2} h_{00,\mu}). \quad (10.43)$$

Nun betrachten wir eine ebene Welle in der z-Richtung

$$h_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} \cos(k \cdot x), \quad k = (\omega, 0, 0, \omega) \quad (10.44)$$

Wir wissen, dass die Erdung so gewahlt werden kann (siehe S. 104), dass nur  $\epsilon_{12}$  und  $\epsilon_{11} = -\epsilon_{22}$  nicht verschwinden. Die Matrix  $\epsilon_{\mu\nu}$  ist deshalb eine Linearkombination der beiden folgenden Matrizen

$$(\epsilon_{+}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.45)$$

$$(\epsilon_{\times}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.46)$$

Wir schreiben deshalb (10.44) in der Form

$$h(x) = A_{+} \epsilon_{+}^{\mu\nu} \cos k \cdot x + A_{\times} \epsilon_{\times}^{\mu\nu} \cos k \cdot x \quad (10.47)$$

Für diese Welle ist  $h_{\mu 0} = 0$ , deshalb verschwindet die rechte Seite von (10.43). Bezüglich unserem Koordinatensystem bewegt sich also das Teilchen nicht. Aber Koordinatenlängen entsprechen nicht physikalischen Längen. Letztere werden mit der Metrik  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \chi h_{\mu\nu}$  gemessen. Beobachten wir deshalb zwei Teilchen auf der x-Achse in den Positionen  $x = \pm x_0$ . Das Koordinatenintervall zwischen den beiden Teilchen bleibt nach dem Gesagten fixiert und hat den Wert  $\Delta x = 2x_0$ , aber der physikalische Abstand ist

$$\begin{aligned} \Delta l^2 &= -g_{11} \Delta x^2 = (1 - \chi h_{11}) (2x_0)^2 \\ &= (1 - \chi A_+ \cos \omega t) (2x_0)^2. \end{aligned}$$

In der Praxis ist  $A_+$  sehr klein und folglich

$$\boxed{\Delta l \approx \left(1 - \frac{\chi}{2} A_+ \cos \omega t\right) (2x_0)}. \quad (10.48)$$

Der Abstand zwischen den beiden Teilchen oszilliert also. Auf der y-Achse gilt entsprechend

$$\Delta l \approx \left(1 + \frac{\chi}{2} A_+ \cos \omega t\right) (2y_0). \quad (10.49)$$

Ist  $A_x = 0$ , so erhalten wir für einen Schwarm von freien Teilchen, welche ursprünglich auf einem Kreis angeordnet sind die in der folgenden Figur skizzierten Deformationen.

Ist hingegen  $A_+ = 0$  so ergibt sich eine Figur, welche aus der ersten durch eine  $45^\circ$ -Drehung hervorgeht. (Übung.)  
Skizziere die entsprechenden Figuren für zirkular polarisierte Wellen

Wir wollen nun die Gezeitenkraft berechnen, welche diese Deformationen verursacht. Die Beschleunigung jedes Teildens auf den Ursprung ist gemäss (10.48) in der x-Richtung gleich

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (\Delta l) &= - \frac{\kappa}{z} x_0 A_+ \cos \omega t = \frac{d^2}{dt^2} \cos \omega t \\ &= \frac{\kappa}{z} A_+ \omega^2 x_0 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (10.50)$$

Die Gezeitenkraft,  $f_x$ , in der x-Richtung ist deshalb

$$f_x = \left( \mu \frac{\kappa}{z} A_+ \omega^2 \cos \omega t \right) x_0$$

( $\mu$  = Masse des Teildens). Ebenso erhalten wir in der y-Richtung

$$f_y = - \left( \mu \frac{\kappa}{z} A_+ \omega^2 \cos \omega t \right) y_0. \quad (10.51)$$

Offensichtlich ist

$$f_z = 0. \quad (10.52)$$

Also ist  $\underline{f}$  eine Kraft transversal zur Welle und hat die Form

$$f_x = g(t) x_0, \quad f_y = -g(t) y_0.$$

Folglich ist

$$\left| \frac{\partial f_x}{\partial x_0} + \frac{\partial f_y}{\partial y_0} = 0. \right.$$

Da die Divergenz verschwindet hat das Kraftfeld das folgende Feldlinienbild.

Als Beispiel betrachten wir den Abstand Erde-Mond. Eine

Gravitationswelle mit zirkulärem grossem Fluss  $\sim 10^{10} \text{ erg/cm}^2 \text{ sec}$  bei  $\omega \sim 10^4 / \text{sec}$  falle auf das System ein. Die Frequenz  $\omega$  ist viel grösser als die Umlauffrequenz des Mondes und deshalb können wir Erde und Mond als zwei freie Teilchen betrachten. Für unser Bsp. ist  $z_{h_{11}} = z_{A_+} \sim 10^{-17}$ . Der Abstand Erde-Mond variiert also in der Welle auf einen Teil in  $10^{17}$ ; dies entspricht ungefähr  $10^{-7} \text{ cm}$ . Die gegenwärtige Lasertechnik ermöglicht aber nur eine Genauigkeit von  $\sim 10 \text{ cm}$ .

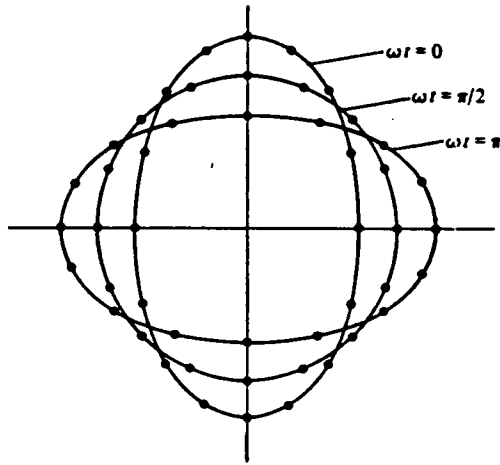


Fig. 4.2 Deformation by a gravitational wave with polarization of type II.

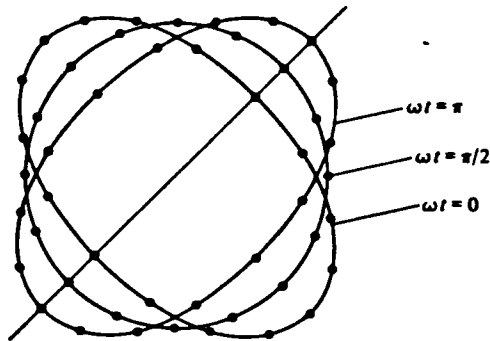


Fig. 4.1 Deformation of a circular "necklace" of particles by a gravitational wave with polarization of type I.

$$A_{\text{I}} \equiv A_x$$

$$A_{\text{II}} \equiv A_+$$

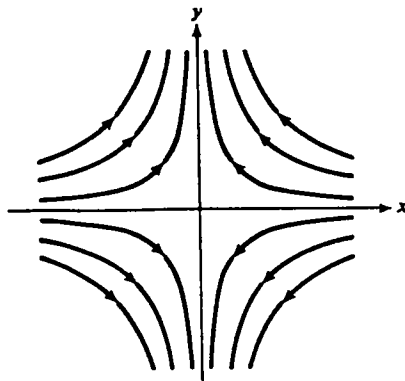


Fig. 4.5 The tidal field lines for a gravitational wave of type II. The field lines reverse direction every half period.

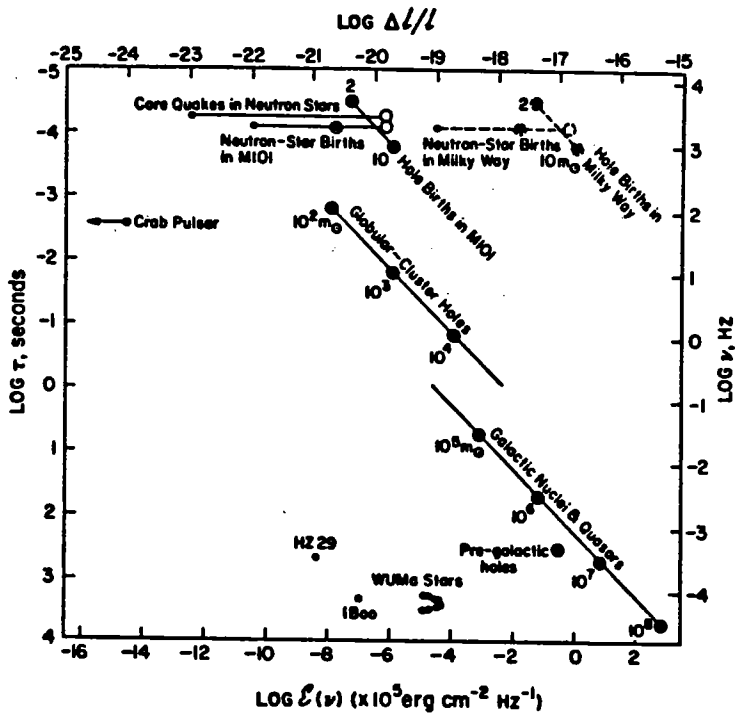


Figure 2 Numerical estimates of the strongest gravitational radiation signals that might be reaching the earth (from Thorne 1977). The strength of each signal is plotted as a function of its dominant spectral characteristics. Continuous monochromatic signals are denoted by dots corresponding to their dimensionless strain amplitudes. Dots surrounded by circles indicate the strain and spectral energy density of broad-band bursts with frequency ranging from  $0.5 \nu$  to  $1.5 \nu$  and duration  $\tau \sim \frac{1}{\nu}$ . A damped ringing wave is denoted by a dot at the appropriate frequency giving the amplitude and an open-circle giving the total energy spectral density. With the exception of those connected by dotted lines, the distances chosen would result in a few events per year of the strength shown.

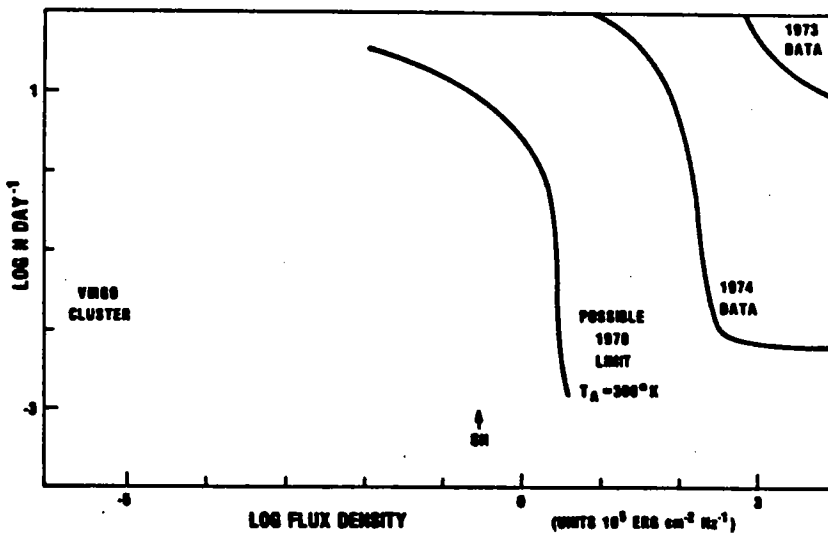


Figure 8 Logarithmic plot of limits determined on the rate and intensity of gravitational wave pulse for room-temperature detectors which may reach their ultimate sensitivity in 1978. The points marked SN and Virgo cluster indicate the improvements necessary to detect optimistically energetic supernova events in the galaxy and the Virgo cluster respectively. Cooled antennas now under construction may improve flux sensitivity by two to three orders of magnitude over the 300 K limit shown—still insufficient to detect any but nearby energetic events within our galaxy.