

§9. Kovarianz der Elektrodynamik

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass die Elektrodynamik mit der SRT verträglich ist und deshalb keiner Änderung bedarf. In formaler Hinsicht werden wir aber ein tieferes Verständnis der Maxwell'schen Gleichungen gewinnen.

Wir schreiben zuerst die (mikroskopischen) Maxwell'schen Gleichungen geeignet um. Dazu ordnen wir das elektromagnetische Feld $(\underline{E}, \underline{B})$ in einer schiefen Matrix wie folgt an

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \quad (9.1)$$

Dann sehen wir

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

sowie (siehe S. 74)

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (9.3)$$

Man erhält *)

$$*F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ -B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ -B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

*) Für ein positiv orientiertes Bezugssystem wählen wir

$$\eta_{\mu\nu\alpha\beta} = \text{sgn} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \mu & \nu & \alpha & \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \eta^{\mu\nu\alpha\beta} = -\text{sgn} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \mu & \nu & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

d.h. der Übergang $F \mapsto *F$ bedeutet

$$(\underline{E}, \underline{B}) \mapsto (-\underline{B}, \underline{E})$$

Aus (9.1) und (9.4) folgt

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu},{}_{,\nu} &= (-\underline{\nabla} \cdot \underline{E}, \frac{1}{c} \dot{\underline{E}} - \underline{\nabla} \wedge \underline{B}) \\ *F^{\mu\nu},{}_{,\nu} &= (\underline{\nabla} \cdot \underline{B}, -\frac{1}{c} \dot{\underline{B}} + \underline{\nabla} \wedge \underline{E}) \end{aligned} \quad (9.5)$$

Definieren wir weiter (ρ : Ladungsdichte, \underline{J} : Stromdichte)

$$\underline{j}^\mu = (c\rho, \underline{J}) \quad (9.6)$$

so können wir die Maxwell'schen Gleichungen wie folgt zusammenfassen

$$\begin{aligned} *F^{\mu\nu},{}_{,\nu} &= 0 \\ F^{\mu\nu},{}_{,\nu} &= -\frac{4\pi}{c} j^\mu \end{aligned}$$

(9.7)

Die Kontinuitätsgleichung folgt trivial aus der 2. Gleichung von (9.7):

$$F^{\mu\nu},{}_{,\nu\mu} = 0 = \frac{4\pi}{c} j^\mu,{}_{,\mu}$$

Diese elegante Schreibweise beweist zugleich die Kovarianz der Maxwellgleichungen bezüglich der inhomogenen Lorentzgruppe:

Transformieren wir nämlich $F^{\mu\nu}$ und j^μ bezüglich iL wie Tensorfelder (und dem durch die Stellung der Indizes angedeuteten Charakter), so bleiben diese Gleichungen invariant. Ausführlich gesagt: Ordnen wir einer Poincaré-Transformation (a, Λ) ($x' = \Lambda x + a$) die neuen Felder

$$\begin{aligned} F'^{\mu\nu}(x) &= \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}(\Lambda^{-1}(x-a)) \\ j'^\mu(x) &= \Lambda^\mu_\nu j^\nu(\Lambda^{-1}(x-a)) \end{aligned} \quad (9.8)$$

zu, so erfüllen diese wieder die Gleichungen (9.7).

Beachte, dass das Transformationsgesetz (9.8) die Gruppenstruktur der Poincarégruppe respektiert. Damit ist gemeint, dass folgendes gilt:

- (i) Dem Einselement $(0, 1)$ entspricht die identische Transformation.
- (ii) Übt man die Transformationen zu zwei Gruppenelementen (a_1, Λ_1) und (a_2, Λ_2) nacheinander aus, so erhält man dasselbe Resultat, wie wenn man die Transformation, die zum Produkt $(a_1, \Lambda_1) \cdot (a_2, \Lambda_2)$ gehört, direkt ausübt.

Digestion über Kovarianz und Invarianz

Die Worte Kovarianz und Invarianz werden in der Literatur in verschiedener Weise (oft synonym) gebraucht. Wir wollen an dieser Stelle diese Begriffe definieren und in der Folge dementsprechend gebrauchen.

Definition: Ein Gleichungssystem ist kovariant bezüglich iL , falls zu jedem Element $(a, \Lambda) \in iL$ den in den Gleichungen vorkommenden Grössen neue Grössen so zugeordnet werden können, dass

- (i) die Zuordnung die Gruppenstruktur von iL respektiert;
- (ii) auch die transformierten Grössen mit den ursprünglichen Grössen des gegebenen Gleichungssystem erfüllen.

In diesem Sinne sind die Maxwell'schen Gleichungen (9.7) kovariant. Im Sinne dieser Definition ist aber auch etwa das folgende Gleichungssystem kovariant:

$$\begin{aligned} (n^\mu n^\nu - g^{\mu\nu}) \phi_{,\mu\nu} - \alpha n^\mu \phi_{,\mu} &= 0 \\ g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu &= 1, \quad n^\mu_{, \nu} = 0 \end{aligned} \quad (*)$$

Wir wissen lediglich ϕ wie ein Skalarfeld und n^μ wie ein kovariantes Vektorfeld transformieren. Dieses Gleichungssystem ist aber bloss eine kovariante Schreibweise der Diffusionsgleichung

$$\Delta \phi - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (**)$$

Kein Mensch würde auf die Idee kommen, diese Gleichung "lorentzinvariant" zu nennen. Das Feld n^μ in (*) ist ein "absolutes" Element im Sinne folgender

Definition: Absolute Elemente in einem kovarianten Gleichungssystem sind solche Größen, welche die Eigenschaft haben, dass die Gruppe iL auf deren Lösungswannigfaltigkeit transitiv operiert (Je zwei Lösungen dieser Größen gehen durch eine Poincaré-Transformation auseinander hervor).

Die absoluten Größen sind also keine "dynamischen" Größen mit "edlen" Freiheitsgraden. Im System (*) ist n^μ ein konstanter zeitartiger Einheitsvektor. Jedes n^μ lässt sich durch eine Poincaré-Transformation aus $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ gewinnen. Für diese Standardform geht (*) in (***) über.

Definition: Ein Gleichungssystem ist invariant bezüglich iL , wenn es erstens kovariant bezüglich iL ist und zweitens keine absoluten Elemente enthält.

In diesem Sinne sind die Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum ($j^\mu = 0$) lorentzinvariant, während das System (***) nicht lorentzinvariant ist.

Von den inhomogenen Gleichungen in (9.7) kann man zunächst nur sagen, dass sie kovariant sind. Von Invarianz lässt sich erst sprechen, wenn auch der Strom j^μ durch dynamische Variablen ausgedrückt wird, welche ihrerseits Bewegungsgleichungen von solcher Art genügen, dass das gekoppelte System lorentzinvariant ist. [Für einen äusseren Strom j^μ steht die Welt nicht in allen Inertialsystemen gleich aus]. Das Gleichungssystem (9.7) lässt sich tabaddlich in dieser Weise ergänzen (siehe § 11) d.h. (9.7) ein Teil ist ein Teil von lorentzinvarianten Gleichungssystemen und also mit der SRT verträglich. Diese verlangt, dass ein isoliertes (abgeschlossenes) physikalisches System durch lorentzinvariante Gleichungen beschrieben wird.

Untergruppen von iL , bezüglich welchen die absoluten Elemente eines kovarianten Systems, wie z.B. (*), invariant sind, nennen wir Invarianzgruppen. Im Beispiel (*) ist die

grösste Invarianzgruppe $\subset iL$ die Euklidische Bewegungsgruppe.

Für ein abgeschlossenes System muss iL selber eine Invarianzgruppe sein, damit die Theorie der SRT genügt. Für ein offenes System können wir nur Kovarianz verlangen. Ist in (9.7) der Raum \mathcal{R} eine feste äussere Grösse vorgegeben, so ist die Invarianzgruppe die Untergruppe von iL , welche \mathcal{R} invariant lässt.

Invarianzgruppen und Erhaltungssätze stehen in sehr engem Zusammenhang (Noether Theorem, siehe §11).

In der Allgemeinen Relativitätstheorie wird die Gruppe aller Diffeomorphismen der Raum-Zeit Mannigfaltigkeit die Invarianzgruppe der Theorie sein, was eine sehr starke Aussage ist, während die Kovarianzforderung bezüglich dieser Gruppe im allgemeinen nicht sehr einschränkend ist (z.B. können die Gleichungen der SRT leicht entsprechend umgeschrieben werden, genauso, wie wir auch in dreidimensionalen Raum die Gesetze in beliebigen krummlinigen Koordinaten ausdrücken können). Die mangelnde Unterscheidung der Begriffe hat hier in der Vergangenheit immer wieder zu (oft gehässigen) Kontroversen geführt.

* * *

Transformation der elektromagnetischen Felder

Wir knüpfen an (9.8) an. Für eine spezielle LT

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \tag{9.9}$$

$$x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0), \quad \beta = v/c, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

wird aus (9.8)

$$E'_1 = E_1, \quad E'_2 = \gamma(E_2 - \beta B_3), \quad E'_3 = \gamma(E_3 + \beta B_2) \tag{9.10}$$

$$B'_1 = B_1, \quad B'_2 = \gamma(B_2 + \beta E_3), \quad B'_3 = \gamma(B_3 - \beta E_2)$$

(Es genügt, die erste Zeile herzuleiten, da sich $F^{\mu\nu}$ wie $*F^{\mu\nu}$ transformiert). (9.10) können wir auch so schreiben:

$$\underline{E}'_{\parallel} = \underline{E}_{\parallel}, \quad \underline{B}'_{\parallel} = \underline{B}_{\parallel}, \quad \underline{E}'_{\perp} = \gamma(\underline{E}_{\perp} + \beta \wedge \underline{B}), \quad \underline{B}'_{\perp} = \gamma(\underline{B}_{\perp} - \beta \wedge \underline{E}) \tag{9.11}$$

Hier bedeuten \parallel und \perp die parallelen und senkrechten Komponenten bezüglich \underline{v} und $\underline{\beta} := \underline{v}/c$. In dieser Form sind die Gleichungen (9.11) auch gültig, wenn die spezielle LT in einer beliebigen Richtung ausgeführt wird. Man kann diese Gleichungen auch folgendermassen zusammenfassen

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}' &= \gamma (\underline{E} + \underline{\beta} \wedge \underline{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \underline{\beta} (\underline{\beta} \cdot \underline{E}) \\ \underline{B}' &= \gamma (\underline{B} - \underline{\beta} \wedge \underline{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \underline{\beta} (\underline{\beta} \cdot \underline{B}) \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

Daraus sieht man, dass ein reines elektrisches oder magnetisches Feld in einem Inertialsystem K als eine Mischung von solchen Feldern in einem anderen System K' erscheint. In diesem Sinne sind die Felder \underline{E} und \underline{B} stark verknüpft und man spricht besser vom elektromagnetischen Feld $F_{\mu\nu}$ als von \underline{E} und \underline{B} separat. [\underline{E} und \underline{B} separat entsprechen keinen geometrischen Grössen im Minkowski Raum, genausowenig wie die x^i -Koordinate eines Punktes].

Beispiel: Feld einer geladenen Punktladung

Eine Punktladung ruhe im System K . In diesem erzeugt sie ein Coulombfeld (das Teilchen habe kein magnetisches Moment):

$$\underline{B} = 0, \quad \underline{E} = e \underline{x} / |\underline{x}|^3 \quad (9.13)$$

Relativ zum Inertialsystem K' liegt ein elektrisches und ein magnetisches Feld vor. Wir untersuchen zunächst das transformierte elektrische Feld. Aus (9.10) folgt

$$E'_1(x') = E_1(x) = e x / r^3$$

Setzen wir $b^2 = y^2 + z^2 = y'^2 + z'^2$ (b : Abstand von der x -Achse), so wird

$$E'_1 = \frac{e \gamma (x' + vt')}{[\gamma^2 (x' + vt')^2 + b^2]^{3/2}} \quad (9.14)$$

Ebenso folgt aus (9.10) :

$$E'_2 = \gamma \frac{e y}{r^3} = \frac{e \gamma y'}{[\gamma^2 (x' + vt')^2 + b^2]^{3/2}} \quad (9.15)$$

Die γ -Faktoren im Zähler und im Nenner von (9.14), sowie von (9.15) "verzerrten" das Feld. Um dieses zu veranschaulichen, betrachten wir die momentane Verteilung der Feldlinien zur Zeit $t=0$:

$$\underline{\underline{E}}'(x') = \frac{e(1-\beta^2)}{[r'^2 - \beta^2 b^2]^{3/2}} x' \quad , \quad r' := |x'| \quad (9.16)$$

Die Feldlinien sind Geraden, wie bei einer ruhenden Ladung. Der Betrag von $\underline{\underline{E}}'$ ist

$$|\underline{\underline{E}}'| = \frac{e(1-\beta^2)}{r'^2(1-\beta^2 \sin^2 \theta')^{3/2}} \quad , \quad \sin \theta' = b/r' \quad (9.17)$$

Dieser ist, für festes r' , am grössten in der Ebene senkrecht zur Bewegungsrichtung des Elektrons

$$|\underline{\underline{E}}'| = \frac{e}{r'^2 \sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{für } \theta' = \pi/2 \quad (9.18)$$

und am kleinsten in der Bahn des Teilchens (x -Achse):

$$|\underline{\underline{E}}'| = \frac{e(1-\beta^2)}{r'^2} \quad \text{für } \theta' = 0 \quad (9.19)$$

Das Coulombfeld ist senkrecht zur Bewegungsrichtung dilatiert, in Bahnrichtung kontrahiert (s. Fig.)

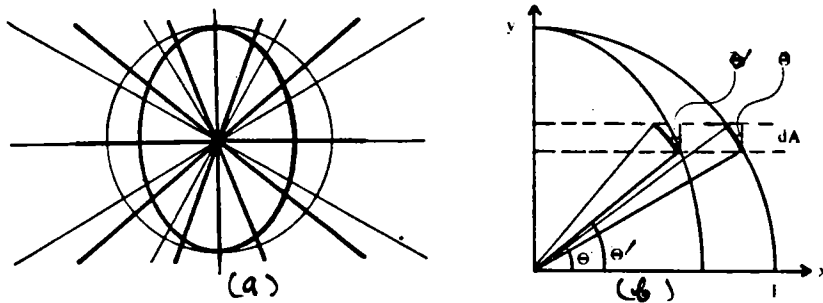


Fig. Feld einer gleichförmig bewegten Ladung
(a) Feldlinienbild (dünne, ruhende Ladung)

Das Feldlinienbild (die Zahl der Feldlinien pro Flächeneinheit gibt den Betrag $|\underline{\underline{E}}'|$ an) können wir aus dem Feldlinienbild einer ruhenden Ladung dadurch gewinnen, dass wir dieses Bild in der x -Richtung mit dem Faktor $\sqrt{1-\beta^2}$ stauchen. Zum Beweis betrachten wir eine Kugel und das daraus durch Stauchung

in der x -Richtung um $\sqrt{1-\beta^2}$ hervorgehende Ellipsoid. Eine Fläche dA senkrecht zur x -Achse (s. Fig.) erscheint vom Ursprung des Koordinatensystems beobachtet unter dem Raumwinkel $d\Omega = dA \cos\theta / r^2$. Alle durch diesen Raumwinkel hindurchtretenden Feldlinien (für die ruhende Ladung) gehen bei der Standung in den Raumwinkel $d\Omega' = dA \cos\theta' / r'^2$, da dA unverändert bleibt. Es ist folglich

$$d\Omega' / d\Omega = \frac{\cos\theta' r^2}{\cos\theta r'^2} = \frac{x' r^3}{r'^2 x} = \frac{1}{\gamma} \frac{r^3}{r'^3}$$

Da die Zahl der Feldlinien, die $r^2 d\Omega$ und $r'^2 d\Omega'$ durchsetzen, gleich ist, ergibt sich für die Feldstärken $|\underline{E}'| r'^2 d\Omega' = |\underline{E}| r^2 d\Omega = e d\Omega$

$$|\underline{E}'| = \frac{e}{r'^2} \frac{d\Omega}{d\Omega'} = \frac{e}{r'^2} \frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta^2 \sin^2\theta')^{3/2}}$$

was mit (9.17) in der Tat übereinstimmt. \square

Für das Magnetfeld der bewegten Ladung erhält man aus (9.11)

$$B'_1 = 0, \quad B'_2 = \beta E'_3, \quad B'_3 = -\beta E'_2 \quad (9.20)$$

d.h.

$$\underline{B}' = \underline{\beta} \wedge \underline{E}' \quad (9.20')$$

Invarianz der Phase einer ebenen Welle

Als weitere Anwendung der Transformationsformel (9.8) leiten wir nochmals die Invarianz der Phase einer ebenen Welle ab. Diese lautet

$$F_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} e^{-i(k, x)}, \quad k = \left(\frac{\omega}{c}, \underline{k}\right) \quad (9.21)$$

Das transformierte Feld lautet ($x' = \Lambda x$):

$$F'_{\mu\nu}(x') = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta F_{\alpha\beta}(x) = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta f_{\alpha\beta} e^{-i(k, x)}$$

Für $k' = \Lambda k$ gilt $(k', x') = (k, x)$, also

$$F'_{\mu\nu}(x') = f'_{\mu\nu} e^{-i(k', x')}, \quad f'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta f_{\alpha\beta}$$

d.h. $F'_{\mu\nu}(x')$ ist wieder eine ebene Welle; der Wellenvektor k ist wie ein kontravarianter 4 -Vektor zu transformieren. Daraus folgen, wie in Abschnitt 7 gezeigt, die relativistischen Formeln für den Dopplereffekt und die Aberration.

Potentiale:

Die homogenen Gleichungen in (9.7) können mit (9.3) wie folgt geschrieben werden

$$\eta^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta,\nu} = 0 \quad (9.22)$$

d.h.

$$F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0 \quad (9.23)$$

Nach dem Poincaré Lemma folgt (lokal) die Existenz eines Vektorfeldes A_μ mit

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (9.24)$$

Setzen wir

$$A^\mu = (\varphi, \underline{A}), \quad A_\mu = (\varphi, -\underline{A}) \quad (9.25)$$

so folgt aus (9.24)

$$\underline{B} = \nabla \wedge \underline{A}, \quad \underline{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \dot{\underline{A}}, \quad (9.26)$$

d.h. \underline{A} und φ sind die üblichen Potentiale. A_μ ist nicht eindeutig bestimmt. Wir haben die Freiheit, die folgenden Eichtransformationen auszuführen:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (9.27)$$

$$[\underline{A} \rightarrow \underline{A} - \nabla \Lambda, \quad \varphi \rightarrow \varphi + \frac{1}{c} \dot{\Lambda}]$$

Die Lorenzbedingung ist die Klasse der Eichungen mit

$$A^\mu{}_{,\mu} = 0 \quad (9.28)$$

In dieser Klasse sind die Eichfunktionen durch

$$\square \Lambda = 0 \quad (\square := g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu) \quad (9.29)$$

eingeschränkt.

Die inhomogenen Gleichungen lauten in den Potentialen

$$F^{\mu\nu},{}_{,\nu} = \partial_\nu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial^\mu \partial_\nu A^\nu - \square A^\mu = -\frac{4\pi}{c} j^\mu$$

oder

$$\square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (9.30)$$

In der Lorenzbedingung reduziert sich dies auf

$$\square A_\mu = \frac{4\pi}{c} j_\mu \quad (9.31)$$

Erhaltungssätze für Energie und Impuls

Der folgende Tensor

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} [F^{\mu\lambda} F_{\lambda}{}^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\beta\alpha}] \quad (9.32)$$

wird sich als physikalisch bedeutungsvoll erweisen. Er ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

- (i) T ist ein symmetrischer Tensor 2. Stufe;
- (ii) T hat Spur 0;
- (iii) T ist homogen vom 2. Grade in F

Die Komponenten von $T^{\mu\nu}$ lauten

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8\pi} (\underline{E}^2 + \underline{B}^2) & \frac{1}{4\pi} \underline{E} \wedge \underline{B} \\ \frac{1}{4\pi} \underline{E} \wedge \underline{B} & \frac{1}{4\pi} (\frac{1}{2} \underline{E}^2 \delta_{ik} - E_i E_k + \frac{1}{2} \underline{B}^2 \delta_{ik} - B_i B_k) \end{pmatrix} \quad (9.33)$$

Also ist

$$\left. \begin{aligned} T^{00} &= \text{Energiedichte } u \\ T^{i0} &= \frac{1}{c} \times \text{Poynting Vektor } \underline{S} \\ T^{ik} &= (-1) \times \text{Maxwellscher Spannungstensor} \end{aligned} \right\} \quad (9.34)$$

Deshalb nennt man $T^{\mu\nu}$ den Energie-Impuls-Tensor des elektromagn. Feldes.

Wir bilden die Divergenz von $T^{\mu\nu}$:

$$4\pi T^{\mu\nu}_{,\nu} = F^{\mu\lambda}_{,\nu} F_{\lambda}^{\nu} + F^{\mu\lambda} F_{\lambda}^{\nu}_{,\nu} + \underbrace{\frac{1}{4} (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}_{+\frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta},\mu}, \mu$$

$$4\pi T^{\mu\nu}_{,\nu} = F_{\lambda\nu} [F^{\mu\lambda}_{,\nu} + \frac{1}{2} F^{\lambda\nu}_{,\mu}] + F^{\mu\lambda} F_{\lambda}^{\nu}_{,\nu}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2} (F^{\mu\lambda}_{,\nu} - F^{\mu\nu}_{,\lambda}) \quad (F_{\lambda\nu} \text{ ist skalar!})$$

$$= F^{\mu\lambda} F_{\lambda}^{\nu}_{,\nu} + \frac{1}{2} F_{\lambda\nu} (F^{\lambda\nu}_{,\mu} + F^{\nu\mu}_{,\lambda} + F^{\mu\lambda}_{,\nu})$$

$$= 0 \quad (\text{homogene Maxwell Gl.})$$

$$= F^{\mu\lambda} F_{\lambda}^{\nu}_{,\nu} = F^{\mu\lambda} \left(-\frac{4\pi}{c} j_{\lambda} \right)$$

↑
inhomogene Maxwell Gl.

Wir erhalten

$$\boxed{\partial_{\nu} T^{\mu\nu} + f^{\mu} = 0} \quad (9.35)$$

mit

$$\boxed{f^{\mu} = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_{\nu}} \quad (9.36)$$

Zur Interpretation drücken wir f^{μ} durch \underline{E} , \underline{B} , ρ und \underline{J} aus.
Mit (9.1) findet man sofort

$$f^{\mu} = \left(\frac{1}{c} \underline{J} \cdot \underline{E}, \rho \underline{E} + \frac{1}{c} \underline{J} \wedge \underline{B} \right) \quad (9.37)$$

Der räumliche Anteil des Vektorfeldes f^{μ} ist also nichts anderes als die Lorentz'sche Kraftdichte. Deshalb nennt man f^{μ} die 4er-Kraftdichte. Die Nullkomponente f^0 ist $\frac{1}{c}$ mal die Leistungsdichte des Feldes.

Die Gleichung (9.35) fasst die bekannten Energie - Impulssätze der Elektrodynamik in einer eleganten vierdimensionalen Form zusammen. Um dies zu sehen, beobachten wir die zeitlichen und räumlichen Komponenten von (9.35):

$$\underline{\mu=0}: \quad f^0 + T^{0\nu}_{,\nu} = 0 \quad ; \quad f^0 + T^{00}_{,0} + T^{0k}_{,k} = 0 \quad ;$$

$$\boxed{\dot{u} + \nabla \cdot \underline{S} = - \underline{j} \cdot \underline{E}} \quad (\text{Energiesatz}) \quad (9.38)$$

$\mu=i$: $f^i + T^{i\nu}_{,\nu} = 0 : f^i + T^{i0}_{,0} + T^{ik}_{,k} = 0 :$

$$\boxed{f^i + \underline{\pi}^i + T^{ik}_{,k} = 0} \quad (\text{Impulssatz})$$

($\underline{\pi} := \frac{1}{c^2} \underline{S}$: Impulsdichte)

Das Integral von f^{μ} über ein räumliches Gebiet D hat die Interpretation:

$$\int_D f^{\mu} d^3x = \left(\frac{1}{c} \cdot \text{Leistung des Feldes am Strom in } D, \quad \begin{matrix} \text{Änderung des mechanischen} \\ \text{Impulses/ in } D \\ \text{Zeit} \end{matrix} \right)$$

Es ist klar, dass die Maxwell'sche Theorie erst in der vierdimensionalen Schreibweise ihre adäquate Form gefunden hat. Vom Standpunkt der SRT haben die Maxwell'schen Gleichungen einen ausserordentlichen Grad von Evidenz erhalten: Die Vakuumgleichungen sind die einzigen Lorentzinvarianten Differentialgleichungen 1. Ordnung für ein schiefes Tensorfeld.

" Die tiefe Überzeugung des Physikers, dass die grundsätzlichen Naturgesetze durch einen hohen Grad mathematischer Einfachheit und Schönheit ausgezeichnet sind, erhält durch die Einstein - Minkowskische relativistische Deutung der Maxwell Theorie eine bewegende Bestätigung. (P. Jordan)

Anhang. Formulierung der ED mit dem schiefen Kalkül

Es sei F die 2-Form

$$F = \sum_{\mu < \nu} F_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} F_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \quad (A.1)$$

Die homogenen Maxwell Gleichungen (9.23) lassen sich wie folgt schreiben (siehe S. 80)

$$\boxed{dF = 0} \quad (A.2)$$

Mit der $*$ -Operation (siehe S. 74) gehört zu F die 2-Form

$$*F = \frac{1}{2} *F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (A.3)$$

mit

$$*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (A.4)$$

Wir bilden

$$d *F = \frac{1}{2} *F_{\mu\nu,\lambda} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda$$

sowie

$$\begin{aligned} *d *F &= \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu\lambda\sigma} *F^{\mu\nu,\lambda} dx^\sigma \\ &= \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu\lambda\sigma} \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}{}^{,\lambda} dx^\sigma \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2 (-\delta^\alpha_\lambda \delta^\beta_\sigma + \delta^\alpha_\sigma \delta^\beta_\lambda) F_{\alpha\beta}{}^{,\lambda} dx^\sigma \\ &= F_{\alpha\beta}{}^{,\beta} dx^\alpha \end{aligned}$$

Wir halten dieses Ergebnis fest

$$*d *F = F_{\alpha\beta}{}^{,\beta} dx^\alpha \quad (A.5)$$

Die Stromform J ist definiert durch

$$J = j_\mu dx^\mu = \rho dt - \underline{J} \cdot d\underline{x} \quad (A.6)$$

Da (siehe S. 74) $*(* \omega) = -(-1)^{p(p-1)} \omega$ für eine p -Form ω lassen sich nach (A.5) die inhomogenen Maxwell Gleichungen wie folgt schreiben

$$\underline{d *F} = -\frac{4\pi}{c} *J \quad (A.7)$$

Die Koableitung ist definiert durch

$$\delta := (-1)^{u(p+1)} *d* \quad (u=4: \text{Dimension}) \quad (A.8)$$

Diese verallgemeinert die Divergenz (vergl. mit (A.5)). Mit ihr lassen

Sich die inhomogenen Maxwell Gleichungen (A.7) wie folgt schreiben

$$\boxed{\delta F = \frac{4\pi}{c} J} \quad (A.9)$$

Auf Grund von $d \circ d = 0$ hat das Kodifferential $\delta: \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p-1}(M)$ die Eigenschaft

$$\delta \circ \delta = 0 \quad (A.10)$$

Deshalb folgt aus (A.9)

$$\underline{\delta J = 0} \quad (A.11)$$

Dies ist die Kontinuitätsgleichung, denn $\delta J = J^{\mu}_{;\mu}$ (Übungsaufgabe).

Die Maxwell'schen Gleichungen (A.2), (A.9) könnten nicht einfacher sein. Da sich der der schiefe Kalkül auf beliebige (orientierbare) Mannigfaltigkeiten übertragen lässt, bleiben diese Gleichungen in der Allgemeinen Relativitätstheorie bestehen (siehe nächstes Semester)

Wir vermerken noch folgendes: Ist für $\omega \in \Lambda^p(M)$, $\delta \omega = 0$ in einem sternförmigen Gebiet, so bedeutet dies $d * \omega = 0$ und nach dem Poincaré Lemma (siehe S. 79) gibt es deshalb ein $\psi \in \Lambda^{p-1}(M)$ mit $* \omega = d \psi$, d.h. $\omega = \# * d * \psi = \delta \psi$, $\psi = \# * \omega$. Es gilt also der

Satz: Sei $U \subset M$ eine sternförmige Umgebung von $p \in M$. Verschwindet dort das Kodifferential einer p -Form ω , dann existiert eine $(p-1)$ -Form ψ auf U mit

$$\omega = \delta \psi.$$

* * *

S 10. Relativistische Mechanik

Die Bewegung eines Massenpunktes beschreibt eine Weltlinie $x^\mu(\lambda)$ im Minkowski Raum (λ : beliebiger Parameter). Das Bogenelement ds ist definiert durch (siehe S. 50)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda^2 \quad (10.1)$$

und ist invariant unter Poincaré Transformationen; $d\tau = \frac{ds}{c}$ ist das Differential der Eigenzeit.

Offensichtlich ist

$$\dot{x}^\mu := \frac{dx^\mu}{ds} \equiv u^\mu \quad (10.2)$$

ein 4es-Vektor. Man nennt ihm auch die 4es-Geschwindigkeit. Der Zusammenhang mit der gewöhnlichen Geschwindigkeit $\underline{v} = \frac{d}{dt} \underline{x}$ ergibt sich durch die Wahl $\lambda = t$; dann ist $x^\mu(t) = (c t, \underline{x}(t))$ und nach (10.1)

$$ds^2 = (c^2 - \underline{v}^2) dt^2 = c^2 d\tau^2$$

d.h.

$$d\tau = \sqrt{1 - \underline{v}^2/c^2} dt \quad (10.3)$$

(siehe (7.7)). Im momentanen Ruhesystem des Teilchens ($\underline{v} = 0$) ist $d\tau = dt$. Es ist demnach

$$\underline{u}^\mu = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \underline{\gamma(c, \underline{v})} \quad (10.4)$$

Ferner gilt

$$\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle = u^\mu u_\mu = c^2 \quad (10.5)$$

Als 4es-Impuls definiert man den Vektor

$$\underline{p}^\mu = m \underline{u}^\mu = (\gamma m c, \gamma m \underline{v}) \quad (10.6)$$

Dies zeigt

$$p^0/mc = \gamma, \quad |\underline{p}|/p^0 = \beta \quad (10.7)$$

Nach (10.5) ist

$$(p, p) = p^\mu p_\mu = m^2 c^2 \quad (10.8)$$

Durch Differentiation nach τ erhalten wir daraus*)

$$(\dot{p}, p) = \dot{p}^\mu p_\mu = p^\mu \dot{p}_\mu = 0 \quad (10.9)$$

Nach diesen kinematischen Vorbereitungen wenden wir uns der Bewegungsgleichung ^{für} einen geladenen Massenpunkt in einem elektromagnetischen Feld zu. Diese folgt aus der Annahme (welche experimentell bestätigt ist), dass im momentanen Ruhesystem gilt

$$\frac{d}{dt} m \underline{v} = e \underline{E} \quad (\underline{v} = 0) \quad (10.10)$$

In diesem System ist nach (10.9) $\dot{p}_0 = 0$ und nach (10.7) $p^0 = mc$. Somit ist im momentanen Ruhesystem (benutze (9.1))

$$\dot{p}^\mu = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu \quad (10.11)$$

Wir schreiben diese kovariante Gleichung, welche auf Grund dieser Eigenschaft in jedem Lorentzsystem gilt, nach mit \underline{E} und \underline{B} und Spalten in Raum- und Zeitkomponenten auf:

$$\frac{d}{dt} (\gamma m \underline{v}) = e \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \wedge \underline{B} \right) \quad (10.12)$$

$$\frac{d}{dt} (\gamma m c^2) = e \underline{E} \cdot \underline{v} \quad (10.13)$$

Rechts in (10.12) steht die Lorentzkraft und rechts in (10.13) die Leistung des Feldes am Massenpunkt.

Wir interpretieren daher

$$\underline{E} := \gamma m c^2 = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.14)$$

*) Mit einem Punkt bezeichnen wir immer die Ableitung nach der Eigenzeit.

als die Energie des Massenpunktes. Man nennt deshalb

$$\boxed{p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right)} \quad (10.15)$$

auch den Energie-Impuls-Vektor des Teilchens.

Wir notieren (vergl. (10.7))

$$\gamma = \frac{E}{mc^2}, \quad |\mathbf{p}|/E = v \quad (10.16)$$

Für kleine v/c können wir (10.14) entwickeln

$$E = \underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{nichtrel. Energie}} + \frac{3}{8} \frac{mv^4}{c^2} + \dots \quad (10.17)$$

Aus (10.15) und (10.8) folgt auch

$$\boxed{E = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}} \quad (10.18)$$

Die eigentliche Rechtfertigung unserer Interpretation folgt aus den Erhaltungssätzen für das gekoppelte System (Ladungen + Feld), welche wir in § 11 besprechen werden. Der Energie-Impuls-Erhaltungssatz gilt ganz allgemein für ein isoliertes System als Folge der Translationsinvarianz. Dies werden wir in Abschnitt 11 für eine Lagrange Feldtheorie beweisen.

In der Hochenergiephysik beobachtet man ständig Prozesse, bei welchen durch den Zusammenstoß von zwei Teilchen eine Anzahl von neuen Teilchen erzeugt werden:

$$A + B \longrightarrow C_1 + C_2 + \dots + C_N$$

Für die 4er-Impulse der Teilchen gilt stets

$$p_A + p_B = \sum_{i=1}^N p_{C_i} \quad (10.19)$$

Man kann die ganze Ruheenergie eines Teilchens z.B. in Strahlung verwandeln. Kommen etwa ein Elektron und sein Antiteilchen (das Positron) zusammen, so annihilieren sie sich meistens in zwei γ -Quanten:

$$e^+ + e^- \longrightarrow 2\gamma.$$

Bemerkungen:

1. Setzt man in (10.19) nur die Gleichheit für die räumlichen (zeitlichen) Komponenten in allen Inertialsystemen voraus, so folgt daraus auch schon die Gleichheit der zeitlichen (räumlichen) Komponenten. Beweise dies!
2. In einer Galilei-invarianten Theorie kann man eine analoge Bemerkung machen: Sei $z(\lambda)$ die Bahn eines Teilchens in der Galilei-Raum-Zeit. $\dot{z}(\lambda)$ ist dann ein Galilei'scher 4er-Vektor (d.h. ein Element im Differenzraum). Wählen wir ein Galileisystem und für λ die Zeit, so hat \dot{z} die Komponenten $\dot{z} = (\underline{v}, 1)$. Aus dem Transformationsgesetz für $m\dot{z}$ sieht man leicht: Ist $m\underline{v}$ in allen Inertialsystemen erhalten, dann muss auch die Masse erhalten sein. [Falls für einen Galilei'schen 4er-Vektor die räumlichen Komponenten in jedem Inertialsystem verschwinden, dann auch die zeitliche Komponente!].

Variationsprinzip

Wir betrachten das Hamilton'sche Variationsprinzip

$$\delta \int L d\lambda = 0$$

für die Lagrangefunktion

$$L(x^\mu(\lambda), \frac{dx^\mu}{d\lambda}) = -mc \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} - \frac{e}{c} A_\mu(x(\lambda)) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (10.20)$$

(Die Abhängigkeit von $x^\mu(\lambda)$ steckt im Argument von A_μ). Dieses Variationsprinzip ist unabhängig von der Parameterwahl. Beachte, dass L unter einer Eichtransformation nicht invariant bleibt:

$$L \rightarrow L - \frac{e}{c} \partial_\mu \Lambda(x(\lambda)) \frac{dx^\mu}{d\lambda} = L - \frac{e}{c} \frac{d\Lambda(x(\lambda))}{d\lambda} \quad (10.21)$$

Dies ändert aber die Bewegungsgleichungen nicht, da der Zusatz in (10.21) eine totale Ableitung ist.

Wir zeigen jetzt, dass die Euler'schen Gleichungen zu (10.20) zu

den richtigen Bewegungsgleichungen (10.11) führen:
Die Euler'schen Gleichungen lauten

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad (10.22)$$

Aber

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right)} &= -\frac{1}{2} \frac{mc}{\left(\frac{dx}{d\lambda}, \frac{dx}{d\lambda} \right)^{1/2}} 2 \frac{dx^\mu}{d\lambda} - \frac{e}{c} A_\mu \\ &= -m u_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \quad \text{für } \lambda = \tau: \text{ Eigenzeit} \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = -\frac{e}{c} u^\nu A_{\nu\mu}$$

Folglich erhalten wir die Euler'schen Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} m u_\mu &= \frac{e}{c} A_{\nu\mu} u^\nu - \frac{e}{c} \frac{d}{d\tau} A_\mu(x^\nu(\tau)) \\ &= \frac{e}{c} u^\nu (A_{\nu\mu} - A_{\mu\nu}) = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu \end{aligned}$$

oder

$$\dot{p}_\mu = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu = \frac{e}{mc} F_{\mu\nu} p^\nu,$$

was mit (10.11) übereinstimmt.

Hamilton'scher Formalismus

Jetzt wählen wir als Parameter die Zeit t . Die Lagrangefunktion lautet, nach Multiplikation mit c

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - e \left(\varphi - \frac{1}{c} \underline{v} \cdot \underline{A} \right) \quad (10.23)$$

Der kanonisch konjugierte Impuls zu x ist definiert durch

$$\underline{\Pi} = \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{x}}} = \frac{m \underline{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{e}{c} \underline{A}$$

d.h.

$$\underline{\Pi} = \underline{p} + \frac{e}{c} \underline{A}, \quad (10.24)$$

wo \underline{p} der mechanische (eichinvariante) Impuls ist.

Die Hamiltonfunktion ist

$$H = (\underline{\pi} \cdot \underline{\dot{x}} - L)(\underline{\pi}, \underline{x})$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \underline{\pi} \cdot \underline{\dot{x}} - L &= \gamma m v^2 + \frac{e}{c} \underline{A} \cdot \underline{v} + mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + e\varphi - \frac{e}{c} \underline{v} \cdot \underline{A} \\ &= \gamma mc^2 + e\varphi \end{aligned}$$

Aber $(\underline{\pi} - \frac{e}{c} \underline{A})^2 = \frac{m^2 v^2}{1 - v^2/c^2} = m^2 c^2 (-1 + \frac{1}{1 - v^2/c^2})$

d.h. $\gamma = \frac{1}{mc} \sqrt{m^2 c^2 + (\underline{\pi} - \frac{e}{c} \underline{A})^2}$

Folglich

$$H = c \sqrt{m^2 c^2 + (\underline{\pi} - \frac{e}{c} \underline{A})^2} + e\varphi$$

(10.25)

S11. Wechselwirkung eines Systems von geladenen Teilchen bis zur Ordnung $1/c^2$.

In der klassischen ED kann man ein System wechselwirkender geladener Teilchen bis zu Gliedern der Ordnung $1/c^2$ durch eine Lagrangefunktion beschreiben, die nur von den Koordinaten und Geschwindigkeiten der Teilchen abhängt. Dies ist deshalb möglich, weil die Strahlung der Teilchen erst in der Ordnung $1/c^3$ auftritt.

Es genügt zwei Teilchen zu betrachten.

Ladungen: e_1, e_2

Massen: m_1, m_2

Positionen: $\underline{x}_1, \underline{x}_2$; $\underline{x} = \underline{x}_1 - \underline{x}_2$.

Der Wechselwirkungsanteil L_{int} der Lagrangefunktion ist im statischen Grenzfall gleich der negativen potentiellen Energie:

$$L_{int}^{NR} = - \frac{e_1 e_2}{r}, \quad r = |\underline{x}| \quad (11.25)$$

Dazu wollen wir die Korrekturen bis zur Ordnung $1/c^2$ aus-

rechnen. Es bezeichnen φ_{12} , \underline{A}_{12} die Potentiale, welche durch das Teilchen 2 an der Stelle des Teilchens 1 erzeugt werden. Nach (10.23) ist die Wechselwirkung

$$L_{int} = -e_1 \varphi_{12} + \frac{e_1}{c} \underline{v}_1 \cdot \underline{A}_{12} \quad (11.2)$$

Wir arbeiten zweckmäßigerweise in der Coulomb-Erdung: $\nabla \cdot \underline{A} = 0$. Dann ist φ_{12} das instantane Coulombpotential und der erste Term in (11.2) gibt in dieser Erdung exakt (11.1). In tiefster Ordnung ist \underline{A}_{12} schon von der Ordnung \underline{v}_2/c . Deshalb genügt es im 2. Term von (11.2) für \underline{A}_{12} die tiefste Ordnung zu nehmen. Dann ist L_{int} korrekt bis $O(1/c^2)$. Nun ist

$$\underline{A}_{12} = \frac{1}{c} \int \frac{\underline{J}_\perp(\underline{x}')}{|\underline{x}_1 - \underline{x}'|} d^3x' + O(1/c^2) \quad (11.3)$$

\underline{J}_\perp ist der transversale Teil des von Teilchen 2 erzeugten Stromes: $\underline{J}_\perp = \underline{J} - \underline{J}_\parallel$,

$$\underline{J}_\parallel = -\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \int \frac{\nabla' \cdot \underline{J}(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x', \quad \underline{J}(\underline{x}') = e_2 \underline{v}_2 \delta^3(\underline{x}' - \underline{x}_2)$$

→

$$\underline{J}_\perp(\underline{x}) = e_2 \underline{v}_2 \delta^3(\underline{x} - \underline{x}_2) - \frac{e_2}{4\pi} \nabla \left(\frac{\underline{v}_2 \cdot (\underline{x} - \underline{x}_2)}{|\underline{x} - \underline{x}_2|^3} \right) \quad (11.4)$$

In (11.3) eingesetzt gilt

$$\underline{A}_{12} = \frac{e_2}{c r} \underline{v}_2 - \frac{e_2}{4\pi c} \int \frac{1}{|\underline{x}_1 - \underline{x}'|} \nabla' \left(\frac{\underline{v}_2 \cdot (\underline{x}' - \underline{x}_2)}{|\underline{x}' - \underline{x}_2|^3} \right) d^3x' + O(1/c^2)$$

Setzen $\underline{y} = \underline{x}' - \underline{x}_2$ und machen eine partielle Integration:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{12} &= \frac{e_2}{c r} \underline{v}_2 - \frac{e_2}{4\pi c} \nabla_{\underline{x}} \int \frac{\underline{v}_2 \cdot \underline{y}}{|\underline{y}|^3} \frac{1}{|\underline{y} - \underline{x}|} d^3y + O(1/c^2) \\ &= \frac{e_2}{c} \left[\frac{\underline{v}_2}{r} - \frac{1}{2} \nabla_{\underline{x}} \left(\frac{\underline{v}_2 \cdot \underline{x}}{|\underline{x}|} \right) \right] + O(1/c^2) \end{aligned}$$

Es gilt

$$\underline{A}_{12} = \frac{e_2}{2c r} \left[\underline{v}_2 + \frac{\underline{x} (\underline{v}_2 \cdot \underline{x})}{r^2} \right] + O(1/c^2) \quad (11.5)$$

In (11.2) eingesetzt gibt bis und mit $O(1/c^2)$

$$L_{\text{int}} = \frac{e_1 e_2}{r} \left\{ -1 + \frac{1}{2c^2} \left[\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 + \frac{(\underline{v}_1 \cdot \underline{x})(\underline{v}_2 \cdot \underline{x})}{r^2} \right] \right\} \quad (11.6)$$

(Darwin 1920)

Für die gesamte Lagrangefunktion erhalten wir

$$L_{\text{Darwin}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \underline{v}_i^2 + \frac{1}{8c^2} \sum m_i \underline{v}_i^4 - \frac{1}{2} \sum'_{k,l} \frac{e_k e_l}{r_{kl}} + \frac{1}{4c^2} \sum'_{k,l} \frac{e_k e_l}{r_{kl}} \left[\underline{v}_k \cdot \underline{v}_l + \underline{v}_k \cdot \hat{\underline{x}}_{kl} \underline{v}_l \cdot \hat{\underline{x}}_{kl} \right] \quad (11.7)$$

Dabei ist $\underline{x}_{kl} = \underline{x}_k - \underline{x}_l$, $r_{kl} = |\underline{x}_{kl}|$, $\hat{\underline{x}}_{kl} = \underline{x}_{kl}/r_{kl}$ und der Strich in den Summen bedeutet, dass die Diagonalterme (Selbstenergie Terme) wegzulassen sind.

Eine analoge Diskussion lässt sich auch in der Quantentheorie (Quantenelektrodynamik) durchführen. Dabei zeigt sich, dass man ein System von Teilchen bis zur Ordnung $1/c^2$ durch eine Schrödinger-Gleichung beschreiben kann. Die relativistischen Korrekturen, welche zum Coulombpotential hinzukommen, geben z.B. Anlass zu Fein- und Hyperfein-Aufspaltungen der Energien eines gebundenen Systems.

Auch in der Allgemeinen Relativitätstheorie lassen sich in Post-Newton'schen Näherungen analoge Lagrangefunktionen ableiten. Die Abstrahlung (Gravitationsabstrahlung) setzt dort erst in der Ordnung $1/c^5$ ein.

* * *

§11. Lorentzinvarianz und Erhaltungssätze

11.1. Der Satz von Gauss in 4 Dimensionen

Aus der Kontinuitätsgleichung $j^{\mu}_{,\mu} = 0$ folgt, dass die Gesamtladung

$$Q = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} j^0(t, \underline{x}) d^3x \quad (11.1)$$

unabhängig von der Zeit t ist, falls j^{μ} für $|\underline{x}| \rightarrow \infty$ schnell genug abfällt; denn nach dem Gauss'schen Satz ist

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{\mathbb{R}^3} \partial_0 j^0(t, \underline{x}) d^3x = - \int_{\mathbb{R}^3} j^k_{,k} d^3x = 0. \quad (11.2)$$

Wir werden unten zeigen, dass Q Lorentzinvariant ist. In ähnlicher Weise werden wir sehen, dass Energie und Impuls eines isolierten Systems einen erhaltenen 4er-Vektor bilden. Dazu benötigen wir als mathematisches Hilfsmittel den Satz von Gauss in vier Dimensionen. Zunächst eine Vorbemerkung: Auf dem Minkowski-Raum M existiert ein durch die Metrik bestimmtes Mass. Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger und $f^*: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ der Repräsentant von f bezüglich einem Lorentzsystem, d.h.

$$f^*(x) = f(p), \quad x = \text{Lorentzkoord. von } p$$

Das Integral

$$\int f^*(x) d^4x, \quad (d^4x = \text{Lebesgue-Mass})$$

ist unabhängig von der Wahl des Lorentzsystems, da $|\det \Lambda| = 1$ für eine Lorentztransformation Λ .

Damit wird ein lineares Funktional auf den Funktionen f und deshalb ein Mass $d\nu$ auf M definiert.

Nun formulieren wir den

Satz (Divergenz Theorem)

Gegeben sei ein Gebiet D im Minkowski-Raum mit glattem Rand ∂D , sowie ein Vektorfeld A mit Divergenz $\nabla \cdot A (= \partial_{\mu} A^{\mu})$.

Dann existiert ein Mass $d\sigma_A$ auf ∂D derart, dass

$$\int_D \nabla \cdot A \, dV = \int_{\partial D} d\sigma_A. \quad (11.3)$$

Das Mass $d\sigma_A$ hängt linear von A ab. Ist ferner eine offene Menge U von ∂D durch (u^1, u^2, u^3) parametrisiert: $x^\mu = f^\mu(u^1, u^2, u^3)$ (x^μ : Lorentzkoordinaten), so ist $d\sigma_A$ auf U gegeben durch

$$d\sigma_A = A^\mu d\sigma_\mu,$$

wobei

$$d\sigma_\mu = \pm \frac{1}{3!} \eta_{\mu\alpha\beta\gamma} \frac{\partial(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma)}{\partial(u^1, u^2, u^3)} du^1 du^2 du^3 \quad (11.4)$$

Ist. Das Vorzeichen ist so zu wählen, dass $A^\mu d\sigma_\mu > 0$ ist, wenn A^μ nach aussen zeigt. [Nach (11.4) ist für Tangentialvektoren a^μ $a^\mu d\sigma_\mu = 0$, und folglich ist $u^\mu d\sigma_\mu > 0$ für alle Vektoren u^μ , die nach aussen zeigen].

Bemerkungen

1. Ist speziell $x^0 = 0$ ein Teil von ∂D , parametrisiert durch $u^i = x^i$, und das Äussere durch $x^0 > 0$ charakterisiert, dann ist

$$d\sigma_\mu = (dx^3, 0, 0, 0) \quad (11.5)$$

2. Da $d\sigma_A$ linear in A ist, schreiben wir auch

$$d\sigma_A = A \cdot d\sigma = A^\mu d\sigma_\mu \quad (11.6)$$

und für (11.3)

$$\int_D \partial_\mu A^\mu d^4x = \int_{\partial D} A^\mu d\sigma_\mu. \quad (11.7)$$

$d\sigma_\mu$ ist ein kovektorwertiges Mass auf ∂D .

3. Für den Beweis des Satzes verweisen wir auf die mathematische Literatur. Empfehlenswert ist z.B.

L. H. Loomis und S. Steinberg, Advanced Calculus, Addison-Wesley 1968.

[Es werden dort zwei verschiedene Beweise gegeben: Auf S. 419 - findet man einen direkten Beweis und auf S. 447 wird gezeigt, dass das Divergenztheorem sehr einfach aus dem Stokes'schen Satz für Differentialformen folgt (für orientierbare Mannigfaltigkeiten!).]

4. Man kann das Divergenz-Theorem auch auf beliebige differenzierbare Mannigfaltigkeiten verallgemeinern, auf denen eine sogenannte Dichte (Volumen) definiert ist; siehe dazu die zitierte Literatur.

Übungsaufgaben:

1. Zeige, dass auf dem Lichtkegel

$$d\sigma_\mu = \pm x_\mu \frac{d^3x}{x^0} \quad (11.8)$$

gilt, wobei x^μ Lorentzkoordinaten sind.

2. Verifiziere, dass für ein Vektorfeld A^μ mit kompaktem Träger in U das Integral

$$\int_U A^\mu d\sigma_\mu$$

unabhängig von der Wahl der Parameter (u^1, u^2, u^3) ist.

Anwendungen:

1. Wir geben zuerst einen anderen Beweis für die Gültigkeit von (11.2). Dazu wenden wir den Gauss'schen Satz auf das 4-dimensionale Gebiet D zwischen den beiden Hyperebenen $\{x^0=0\}$ und $\{x^0=\text{const.}\}$ an:

$$0 = \int_D \partial_\mu j^\mu d^4x = \int_{\partial D} j^\mu d\sigma_\mu = \int_{x^0=\text{const.}} j^0 d^3x - \int_{x^0=0} j^0 d^3x$$

Dies zeigt $Q(t) = Q(0)$. Dabei wurde wieder angenommen, dass

j^μ für $|x| \rightarrow \infty$ genügend stark abfällt.
 Mit dem gleichen Argument sieht man auch, dass

$$Q = \frac{1}{c} \int_{\Sigma} j^\mu d\sigma_\mu \quad (11.9)$$

ist, wo Σ eine beliebige räumartige Fläche ist.

2. Jetzt zeigen wir, dass Q ein Lorentzskalar ist. Sei $x' = \Lambda x + a$, dann ist nach (11.9)

$$Q' = \frac{1}{c} \int_{\Sigma'} j'^\mu d\sigma'_\mu = \frac{1}{c} \int_{\Sigma} j^\mu d\sigma_\mu = Q.$$

3. Ist $T^{\mu\nu}$ ein divergenzfreies Tensorfeld $T^{\mu\nu}_{, \nu} = 0$, dann

$$\int_{x^0 = \text{const}} T^{\mu 0} d^3x = \int_{\Sigma} T^{\mu\nu} d\sigma_\nu \quad (11.10)$$

ein Vektor, der nicht von t abhängt.

Beweis: Wir betrachten das Vektorfeld $j^\nu = T^{\mu\nu} a_\mu$,
 a_μ : konstantes Vektorfeld. Dann folgen die Behauptungen aus
 1. und 2. \square

Inbesondere ist

$$P^\mu = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} T^{\mu 0}(\underline{x}, t) d^3x. \quad (11.11)$$

($T^{\mu\nu}$ el. magn.: Energie-Impulstensor des freien elektromagnetischen
 Feldes) ein zeitlich konstanter Vektor. Dabei ist

$$P^0 = \frac{1}{c} \cdot \text{Energie}, \quad \underline{P} = \text{Impuls},$$

d.h. P^μ ist der gesamte 4er-Impuls des Feldes.

* * *

11.2 Totaler Energie-Impuls-Tensor für Feld + Teilchen

Wir wollen im folgenden zeigen, dass sich für die Materie ein Energie-Impuls-Tensor $T_{\text{Mat}}^{\mu\nu}$ so konstruieren lässt, dass die Summe

$$T^{\mu\nu} = T_{\text{Feld}}^{\mu\nu} + T_{\text{Mat}}^{\mu\nu} \quad (11.12)$$

erhalten ist:

$$T^{\mu\nu}_{, \nu} = 0. \quad (11.13)$$

Es ist dann, nach dem letzten Abschnitt,

$$P^\mu = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} T^{\mu 0}(t, \underline{x}) d^3x \quad (11.14)$$

ein zeitlich konstanter 4er-Vektor, den wir ^{als} gesamten 4er-Impuls des gekoppelten Systems {Feld + Materie} interpretieren. Wir betrachten zuerst ein spezielles Materiemodell. Anschließend werden wir zeigen, dass diese Aussagen in einer Lagrangeischen Feldtheorie auf der Translationsinvarianz des gekoppelten Systems beruhen.

Als Materiemodell betrachten wir eine Anzahl geladener Punktteilchen der Masse m_a und Ladung e_a , $a = 1, \dots, A$. Ihre Weltlinien seien $\underline{z}_a^\mu(\tau_a)$, τ_a : Eigenzeit des a -ten Teilchens. Ferner sei $\dot{\underline{z}}_a^\mu = \frac{d}{d\tau} \underline{z}_a^\mu(\tau)$, etc.

Die Strom- und Ladungsdichte der Teilchen ist

$$\begin{aligned} \underline{J}(\underline{x}, t) &= \sum_a e_a \frac{d\underline{z}_a}{dt} \delta^3(\underline{x} - \underline{z}_a(t)) \\ \rho(\underline{x}, t) &= \sum_a e_a \delta^3(\underline{x} - \underline{z}_a(t)) \end{aligned} \quad (11.15)$$

Die 4er-Stromdichte ist deshalb

$$j^\mu(\underline{x}) = \sum_a e_a \frac{dz_a^\mu}{dt} \delta^3(\underline{x} - \underline{z}_a(t)) \quad (11.16)$$

Wir wollen diese Stromdichte manifest kovariant schreiben. Dazu betrachten wir das Integral

$$\int \frac{dz^\mu}{d\lambda} \delta^4(x - z(\lambda)) d\lambda,$$

wo λ irgendein Kurvenparameter der Weltlinie $z(\lambda)$ ist. Dieses Integral ist unabhängig von der Wahl von λ . Für $\lambda = z^0/c$ (= Zeit des Teilchens) lässt sich die λ -Integration trivial ausführen und wir erhalten $\frac{dz^\mu}{dt} \delta^3(x - z(t))$. Diese Bemerkung zeigt, dass wir (11.16) auch wie folgt schreiben können:

$$j^\mu(x) = \sum_a e_a \int \dot{z}_a^\mu \delta^4(x - z_a(\tau_a)) d\tau_a \quad (11.17)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist manifest ein 4er-Vektor. Verifiziere die Kontinuitätsgleichung $j^\mu{}_{,\mu} = 0$.

Die Gleichungen für das gekoppelte System lauten

$$\ddot{z}_a^\mu = \frac{e_a}{m_a c} F^\mu{}_\nu(z_a) \dot{z}_a^\nu \quad (11.18)$$

$$F^\mu{}_\nu{}_{,\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (11.19)$$

$$F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\mu,\lambda} + F_{\mu\lambda,\nu} = 0 \quad (11.20)$$

Dieses System von Gleichungen (mit dem Strom (11.17)) ist lorentzinvariant (im Sinne der früher gegebenen Definitionen).

Leider ist aber dieses Gleichungssystem nicht wohldefiniert. Physikalisch geht das daraus hervor, dass auf das a te Teilchen auch sein Eigenfeld wirkt, was (neben der bekannten Strahlungsdämpfung) auch zu einer divergenten Selbstenergie führt.

Mathematisch gesprochen, ist die rechte Seite von (11.19) eine Distributionsfunktion und folglich auch die Feldstärke $F^{\mu\nu}$; diese geht aber in (11.18) am Ort des Teilchens ein, was mathematisch sinnlos ist.

Die analogen Schwierigkeiten findet man zunächst auch in der Quantenelektrodynamik. Dort zeigt sich aber, dass in der Störungstheorie die Divergenzen (Unbestimmtheiten) durch Massen- und Ladungrenormierungen beseitigt werden können.

Energie - Impuls - Tensor der Teilchen

Die Impulsdichte der Teilchen ist, bis auf einen Faktor c , gleich

$$T^{\mu 0}(\underline{x}, t) = \sum_a c p_a^\mu(t) \delta^3(\underline{x} - \underline{z}_a(t)) \quad (11.21)$$

und die zugehörige Strahldichte lautet (bis auf c)

$$T^{\mu i}(\underline{x}, t) = \sum_a p_a^\mu(t) \frac{dz_a^i}{dt} \delta^3(\underline{x} - \underline{z}_a(t)) \quad (11.22)$$

Wieder können wir die beiden Ausdrücke zusammenfassen

$$T^{\mu \nu}(\underline{x}) = \sum_a p_a^\mu \frac{dz_a^\nu}{dt} \delta^3(\underline{x} - \underline{z}_a(t)) \quad (11.23)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} p_a^\mu &= \left(\frac{\underline{E}}{c}, \underline{p} \right) = \left(\gamma m c, \gamma m \frac{d\underline{z}}{dt} \right) = \gamma m \frac{dz^\mu}{dt} \\ &= \frac{E}{c^2} \frac{dz^\mu}{dt} \end{aligned}$$

Damit kann (11.23) auch so geschrieben werden

$$T^{\mu \nu} = \sum_a \frac{c^2}{E_a} p_a^\mu p_a^\nu \delta^3(\underline{x} - \underline{z}_a(t)) \quad (11.24)$$

Folglich ist $T^{\mu \nu}$ symmetrisch.

Wir können (11.23) auch manifest kovariant schreiben

$$\begin{aligned} T^{\mu \nu} &= \sum_a \int p_a^\mu \dot{z}_a^\nu \delta^4(\underline{x} - \underline{z}_a(\tau_a)) d\tau_a \\ &= \sum_a m_a \int \dot{z}_a^\mu \dot{z}_a^\nu \delta^4(\underline{x} - \underline{z}_a(\tau_a)) d\tau_a \end{aligned} \quad (11.25)$$

Wir untersuchen jetzt die Divergenz dieses Tensors. Aus (11.25) folgt (wir lassen den Index a weg)

$$\begin{aligned} T^{\mu \nu}_{, \nu} &= -m \int \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu \frac{\partial}{\partial z^\nu} \delta^4(\underline{x} - \underline{z}(\tau)) d\tau = \\ &= -m \int \dot{z}^\mu \frac{d}{d\tau} \delta^4(\underline{x} - \underline{z}(\tau)) d\tau = m \int \ddot{z}^\mu \delta^4(\underline{x} - \underline{z}(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

(Verifiziere diese Gleichung streng nach den Regeln der Distributionstheorie). Auf der rechten Seite benutzen wir formal die Be-

Bewegungsgleichung (11.18) und erhalten so

$$T^{\mu\nu}_{, \nu} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} \int \dot{z}^\nu \delta^4(x-z(\tau)) d\tau$$

Bemerkung man merkt den Ausdruck (11.17) für den Strom, so folgt schliesslich

$$\partial_\nu T^{\mu\nu}_{\text{Mat.}} = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu \quad (11.26)$$

Daraus, sowie aus (9.35) und (9.36) folgt für (11.12) die Gleichung (11.13). Wir betonen aber nochmals, dass die obige Herleitung kein Formal ist.

Der Materieanteil des gesamten Energie - Impuls Vektors (11.14) ist nach (11.23)

$$P^{\mu}_{\text{Mat.}} = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} T^{\mu 0}_{\text{Mat.}} d^3x = \sum_a p_a^\mu \quad (11.27)$$

Dies, zusammen mit dem Erhaltungssatz für $P^{\mu}_{\text{Mat.}} + P^{\mu}_{\text{Feld}}$ rechtfertigt die Interpretation von $p_a^\mu = m_a u_a^\mu$ als Energie - Impuls Vektor des Teilchens a.

11.3. Lagrange'sche Feldtheorie und Erhaltungssätze, Noether-Theorem.

Wir betrachten eine Anzahl klassischer Felder ϕ_a , $a=1, \dots, A$, deren (gekoppelte) Feldgleichungen sich aus einer Lagrange-dichte gewinnen lassen. Dies bedeutet, dass eine Funktion $\mathcal{L}(\phi_a, \phi_{a,\mu})$ der Felder und ihren ersten Ableitungen existiert, d.h., dass die Feldgleichungen von folgender Gestalt sind

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\mu}} = 0 \quad (11.28)$$

\mathcal{L} ist die Lagrange-dichte und die linke Seite von (11.28) nennt man die Euler-Lagrange Ableitung von \mathcal{L} . Beachte die Analogie mit dem Lagrange-Formalismus der klassischen Punktmechanik.

Hamiltonsches Variationsprinzip

Wie in der Punktmechanik sind die Lagrange'schen Gleichungen (11.28) äquivalent zum Hamilton'schen Wirkungsprinzip:

$$\delta \int_D \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a) d^4x = 0 \quad (11.29)$$

Beweis: Es bezeichne $S[\phi]$ das Wirkungsfunktional

$$S[\phi] = \int_D \mathcal{L}(\phi_a, \phi_{a,\mu}) d^4x$$

und es sei $I(\epsilon) = S[\phi + \epsilon \chi]$. Wir bilden

$$\frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} I(\epsilon) = \int_D \sum_a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \chi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\mu}} \chi_{a,\mu} \right] d^4x$$

Für den 2. Term in der eckigen Klammer benutzen wir die Identität

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\mu}} \chi_{a,\mu} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\mu}} \chi_a \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \right) \chi_a$$

Benutzen wir ferner den Gauss'schen Satz, so kommt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} I(\epsilon) &= \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} S[\phi + \epsilon \chi] = \int_D \sum_a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\mu}} \right] \chi_a d^4x + \\ &+ \int_{\partial D} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\mu}} \chi_a d\sigma_\mu \end{aligned} \quad (11.30)$$

Daraus folgt: Die Wirkung ist für das Feld ϕ genau dann stationär bezüglich Variationen, welche am Rand verschwinden, wenn die Euler'schen Gleichungen (11.28) in D gelten.

Beispiel. Sind $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ die elektromagnetischen Feldstärken, so führt die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c} J^\alpha A_\alpha \quad (11.31)$$

zu den Maxwell'schen Gleichungen. Um dies zu sehen, drücken wir \mathcal{L} explizit durch A_α und seine Ableitungen aus:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) - \frac{1}{c} J_\alpha A^\alpha$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\alpha} = -\frac{1}{c} J_\alpha,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu A^\alpha)} = -\frac{1}{16\pi} \cdot 2 \cdot (-2) F_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} F_{\alpha\beta}.$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen stimmen deshalb mit den inkom. Maxwell'schen Gleichungen

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{c} J^\alpha$$

überein.

* * *

Wir fassen die Felder ϕ_a in ein mehrkomponentiges Feld Φ zusammen. Unter Poincaré Transformationen transformiere sich dieses gemäss

$$\Phi'(x') = S(\Lambda) \Phi(x), \quad x' = \Lambda x + a, \quad (11.32)$$

wobei $\Lambda \mapsto S(\Lambda)$ eine Darstellung der homogenen Lorentzgruppe ist:

$$S(\Lambda_1) S(\Lambda_2) = S(\Lambda_1 \Lambda_2)$$

Die Lorentzinvarianz der Feldgleichungen (11.28) ist gesichert, wenn $\mathcal{L}[\Phi]$ ein Lorentzinvariantes Funktional ist, d.h. falls für jede Transformation (11.32) die Gleichung

$$(\mathcal{L}[\Phi'])(x') = (\mathcal{L}[\Phi])(x) \quad (11.33)$$

gültig ist. Diese Invarianzeigenschaft wollen wir nun in \mathcal{G} -haltungssprache übersetzen. Dazu betrachten wir eine 1-parametrische Untergruppe g_s von Poincaré Transformationen mit $g_{s=0} = \text{Id}$. Es sei

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} g_s(x) = X(x) \quad : \text{Vektorfeld}$$

und

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \Phi^{g_s}(x) = L_X \Phi(x) \quad : \text{Lie'sche Ableitung bez. } X.$$

In der letzten Gleichung bezeichnet Φ das gemäß (11.32) transformierte Feld. Leiten wir die Gleichung

$$(\mathcal{L}[\Phi^g]) (g_s(x)) = (\mathcal{L}[\Phi]) (x)$$

nach s bei $s=0$ ab, so erhalten wir die Identität

$$X^\mu \partial_\mu \mathcal{L}[\Phi] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} L_X \Phi_a + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{a,\mu}} L_X \Phi_{a,\mu}}_{(L_X \Phi_a), \mu} = 0 \quad (11.34)$$

Unter Benutzung der Feldgleichungen (11.28) folgt daraus

$$X^\mu \partial_\mu \mathcal{L}[\Phi] + \partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{a,\mu}} L_X \Phi_a \right\} = 0 \quad (11.35)$$

Für Poincaré Transformationen ist $\partial_\mu X^\mu = 0$, da diese volumenerhaltend sind. Damit ergibt sich aus (11.35) die Identität

wobei

$$\left. \begin{aligned} \partial_\mu J_X^\mu &= 0, \\ J_X^\mu &= \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{a,\mu}} L_X \Phi_a + X^\mu \mathcal{L}[\Phi] \end{aligned} \right\} \quad (11.36)$$

A. Translationsinvarianz

Zunächst betrachten wir die 1-parametrische Translationsgruppe

$$g_s(x) = x + s \cdot a$$

In diesem Falle ist $X(x) = a$, $L_X \Phi = -a^\mu \partial_\mu \Phi$ (siehe (11.32)). Folglich gelten, da a^μ beliebig ist, die Erhaltungssätze

$$\left. \begin{aligned} \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} &= 0 \\ \Theta^{\mu\nu} &= \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{a,\mu}} \Phi_{a,\nu} - \delta^{\mu\nu} \mathcal{L} \end{aligned} \right\} \quad (11.37)$$

$\Theta^{\mu\nu}$ ist der sog. kanonische Energie-Impuls Tensor. Dieser

ist im allgemeinen nicht symmetrisch. Wir werden weiter unten zeigen, dass es sich immer so symmetrisieren lässt, dass die erhaltenen Integrale

$$P_\nu = \int_{x^0 = \text{const}} T^0_\nu d^3x \quad (11.38)$$

nicht abgeändert werden. Die P_ν bilden den totalen Energie-Impuls des Vektors.

Beispiel Als Anwendung betrachten wir "Materiefelder" ϕ_a , $a=1, \dots, A$, und das elektromagn. Feld A_μ mit der totalen Lagrangefunktion ($c=1$)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \mathcal{L}_M(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (11.39)$$

Dabei ist der zweite Term wie folgt erklärt. Die Lagrangefunktion $\mathcal{L}_M(\phi, \partial_\mu \phi)$ für die Materie, ohne äußeres Feld, sei invariant unter der globalen Transformation

$$\phi_a \rightarrow e^{-ie_a \alpha} \phi_a, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (11.40)$$

Ersetzen wir darin

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ie_a A_\mu \quad (11.41)$$

so sind beide Terme in (11.39) invariant unter lokalen Eichtransformationen

$$\begin{cases} \phi_a(x) \rightarrow e^{-ie_a \Lambda(x)} \phi_a(x) \\ A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda(x) \end{cases} \quad (11.42)$$

Dies folgt sofort aus der globalen Invarianz (11.40) von $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ und der leicht zu verifizierenden Tatsache, dass nach (11.42) sich $\mathcal{D}_\mu \phi$ wie ϕ transformiert

$$\mathcal{D}_\mu \phi \rightarrow e^{-ie_a \Lambda} \mathcal{D}_\mu \phi \quad (11.43)$$

Variation der A_μ in (11.39) gibt die inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\begin{cases} F^{\lambda\nu},{}_{,\nu} = -4\pi j^\lambda \\ j^\lambda = -\sum_a ie_a \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (D_\mu \phi_a)} \phi_a \end{cases} \quad (11.44)$$

Der kanonische Energie - Impuls Tensor ist

$$\Theta^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial A_{\lambda,\nu}} A_{\lambda,\nu} - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}_F + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (D_\mu \phi)} \phi_{,\nu} - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}_M \quad (11.45)$$

wobei $\mathcal{L}_F = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ bezeichnet. Der zweitletzte Term in (11.45) ist nach (11.44)

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (D_\mu \phi)} \phi_{,\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (D_\mu \phi)} D_\nu \phi + j^\mu A_\nu$$

Aus den Maxwell'schen Gleichungen folgt

$$\frac{1}{4\pi} (F^{\lambda\mu} A_{\nu,\lambda})_{,\lambda} = \frac{1}{4\pi} F^{\lambda\mu} A_{\nu,\lambda} + j^\mu A_\nu \quad (11.46)$$

Die Ableitung der linken Seite nach x^λ verschwindet identisch; ferner ist

$$\int d^3x (F^{\lambda 0} A_{\nu,\lambda})_{,\lambda} = 0$$

(Gauß'scher Satz). Addieren wir die rechte Seite von (11.46) zu $\Theta^\mu{}_\nu$, so erhalten wir den Tensor

$$\boxed{T^\mu{}_\nu = T^{\text{elm.}\mu}{}_\nu + \left(\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial (D_\mu \phi)} D_\nu \phi - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}_M \right)} \quad (11.47)$$

wobei $T^{\text{elm.}\mu}{}_\nu$ der in (9.32) angegebene Energie - Impuls Tensor des elektromagnetischen Feldes ist. Nach Konstruktion gibt $T^\mu{}_\nu$ dieselben Integrale P_ν wie $\Theta^\mu{}_\nu$. $T^{\mu\nu}$ wird im allgemeinen aber nicht symmetrisch sein.

B. L_+^\uparrow - Invarianz

Jetzt sei Λ_s eine 1-parametrische Schar von L_+^\uparrow . Für

$\Omega := \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \Lambda_s$ gilt die Gleichung

$$-\Omega^T G + G \Omega = 0 \tag{11.48}$$

Wir setzen $\Omega = (\omega^{\mu\nu})$, $\omega^{\mu\nu} = g^{\mu\lambda} \omega_{\lambda\nu}$. Dann ist $\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0$.

Das Vektorfeld $X(x)$ ist jetzt $X(x) = \Omega x$. Ferner ist

$$L_X \phi = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} S(\Lambda_s) \phi(\Lambda_s^{-1} x) = S_*(\Omega) \phi(x) - J\phi(x) \cdot \Omega x \tag{11.49}$$

Damit ist $(S_*(\Omega))$ die zu S gehörende Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{so}(1,3)$ von L_+^\uparrow .

Wir setzen

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu}$$

und erhalten aus (11.49)

$$L_X \phi = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \sum^{\mu\nu} \phi - \phi_{,\mu} \omega^{\mu\nu} x^\nu \tag{11.50}$$

Damit folgt aus (11.36)

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \left(\frac{1}{2} \omega_{\lambda\sigma} \sum^{\lambda\sigma} \phi - \phi_{,\lambda} \omega^{\lambda\sigma} x^\sigma \right) + \mathcal{L} \omega^{\mu\nu} x^\nu \\ &= \frac{1}{2} \omega_{\lambda\sigma} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \sum^{\lambda\sigma} \phi + \ominus^{\mu\lambda} x^\sigma - \ominus^{\mu\sigma} x^\lambda \right] \end{aligned}$$

Da die $\omega_{\lambda\sigma}$ eine beliebige schiefe Matrix bilden folgt

$$\left. \begin{aligned} M^{\mu\lambda\sigma}_{,\mu} &= 0 \\ M^{\mu\lambda\sigma} &= \ominus^{\mu\lambda} x^\sigma - \ominus^{\mu\sigma} x^\lambda + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \sum^{\lambda\sigma} \phi \end{aligned} \right\} \tag{11.51}$$

$M^{\mu\lambda\sigma}$ ist die Drehimpulsdichte. Der letzte Term in (11.51) ist der Spinbeitrag.

Die Größen $J^{\lambda\sigma} = \int_\Sigma M^{\mu\lambda\sigma} dS_\mu$ (11.52)

bilden die Komponenten eines erhaltenen Tensors [Vorausge-

sehen wir stets, dass die Terme in räumlichen Unendlichen hin-
reichend rasch verschwinden].

Speziell interpretiert man

$$J_k = \epsilon_{k+5} J^{+5}, \quad k=1,2,3 \quad (11.53)$$

als die Komponenten des gesamten Drehimpulses.

Wir schreiben (11.51) noch etwas um: Sei

$$S^{\mu\lambda\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \sum^{\lambda\sigma} \phi \quad (11.54)$$

Da $\sum^{\lambda\sigma} = -\sum^{\sigma\lambda}$, gilt $S^{\mu\lambda\sigma} = -S^{\mu\sigma\lambda}$. Nun setzen wir

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} - f^{\lambda\mu\nu},_{\lambda} \quad (11.55)$$

wobei

$$f^{\mu\nu\lambda} := \frac{1}{2} (S^{\mu\nu\lambda} + S^{\nu\lambda\mu} - S^{\lambda\mu\nu}) \quad (11.56)$$

ist. Der Tensor $T^{\mu\nu}$ ist divergenzfrei, da $f^{\mu\nu\lambda} = -f^{\nu\mu\lambda}$ ist.

Terner gilt

$$f^{\mu\nu\lambda} - f^{\lambda\mu\nu} = S^{\mu\nu\lambda} \quad (11.57)$$

Aus (11.51) folgt mit (11.54) und $\Theta^{\mu\nu},_{\mu} = 0$:

$$\Theta^{\sigma\lambda} - \Theta^{\lambda\sigma} + S^{\mu\lambda\sigma},_{\mu} = 0$$

oder mit (11.57)

$$\Theta^{\sigma\lambda} - \Theta^{\lambda\sigma} + \partial_{\mu} (f^{\mu\lambda\sigma} - f^{\mu\sigma\lambda}) = 0$$

Dies bedeutet nach (11.55) dass $T^{\mu\nu}$ symmetrisch ist. Dieser Tensor hat nach Konstruktion dieselben integralen Größen wie $\Theta^{\mu\nu}$ (verwende den Gauss'schen Satz).

Nun führen wir die neue Drehimpulsdichte

$$\tilde{H}^{\mu\lambda\sigma} := T^{\mu\lambda} x^{\sigma} - T^{\mu\sigma} x^{\lambda} \quad (11.58)$$

mit. Aus $T^{\mu\nu},_{\mu} = 0$ und der Symmetrie von $T^{\mu\nu}$ folgt

$$\tilde{H}^{\mu\lambda\sigma},_{\mu} = 0 \quad (11.59)$$

Da

$$H^{\mu\nu\sigma} = \textcircled{+} H^{\mu\lambda} x^\sigma - \textcircled{+} H^{\mu\sigma} x^\lambda + S^{\mu\lambda\sigma}$$

folgt leicht

$$\tilde{H}^{\mu\nu\sigma} = H^{\mu\nu\sigma} + \partial_\rho (f^{\rho\mu\nu} x^\sigma - f^{\rho\mu\sigma} x^\nu) \quad (11.60)$$

Nach dem Gauss'schen Satz sind die zugehörigen Drehimpulstensoren (11.52) für $H^{\mu\nu\sigma}$ und $\tilde{H}^{\mu\nu\sigma}$ gleich.

Die Größen J^{0l} sind nach (11.58)

$$J^{0l} = \int_{x^0 = \text{const}} \tilde{H}^{00l} d^3x = \int_{x^0 = \text{const}} (T^{00} x^l - T^{0l} x^0) d^3x \quad (11.61)$$

Der Energieschwerpunkt der Felder ist

$$\Xi^l = \int x^l T^{00} d^3x / \int T^{00} d^3x \quad (11.62)$$

Nach (11.61) ist

$$J^{0l} = P^0 \Xi^l - x^0 P^l$$

oder

$$\Xi^l = x^0 P^l / P^0 + J^{0l} / P^0 \quad (11.63)$$

Auf Grund der Erhaltungssätze sind die Koeffizienten P^l / P^0 und J^{0l} / P^0 zeitlich konstante Größen. Deshalb drückt (11.63) den Schwerpunktsatz aus.

Damit haben wir aus der Poincaré-Invarianz (11.33) der Lagrangefunktion die 10 klassischen Erhaltungsätze für eine Feldtheorie abgeleitet. Analoge Überlegungen lassen sich für jede Lie'sche Invarianzgruppe durchführen. Man erhält dann genau so viele unabhängige Integrale, wie die Dimension der Lieschen Gruppe beträgt (Noether Theorem). Die zugehörigen "Ströme" (Vergl. (11.36)) nennt man auch Noether Ströme.

* * *

§12. Äquivalenz von Masse und Energie

Aus einem Brief von Einstein an seinen Freund Habicht:

"... Eine Konsequenz der elektrodynamischen Arbeit ist mir noch in den Sinn gekommen. Das Relativitätsprinzip im Zusammenhang mit den Maxwell'schen Grundgleichungen verlangt nämlich, dass die Masse direkt ein Mass für die im Körper enthaltene Energie ist; das Licht überträgt Masse. Eine merkliche Abnahme müsste beim Radium erfolgen. Die Überlegung ist lustig und bedeutend; aber ob der Herrgott nicht darüber lacht und mich an der Nase herumgeführt hat, das kann ich nicht wissen".

Die Äquivalenz von Masse und Energie ist eine der wichtigsten Folgerungen der SRT (für Einstein war es die wichtigste Konsequenz).

A. Trägheit der Strahlungsenergie

Mit der folgenden Überlegung hat Einstein die Trägheit der Energie entdeckt.

Wir beobachten einen bezüglich K' ruhenden Körper. Dieser emittiere Strahlung in solcher Weise, dass es relativ zu K' in Ruhe bleibt. Die abgestrahlte Energie sei E_{rad}^0 . Wir wissen (siehe S. 106), dass $(E_{\text{rad}}/c, \underline{P}_{\text{rad}})$ sich wie ein Vierervektor transformiert. K' bewege sich relativ zu einem Inertialsystem K mit der Geschwindigkeit \underline{v} . Bezüglich K hat die emittierte Strahlung den Impuls

$$\underline{P}_{\text{rad}} = \gamma \underline{v}/c \frac{E_{\text{rad}}^0}{c} \quad (12.1)$$

und die Energie

$$E_{\text{rad}} = \gamma E_{\text{rad}}^0 \quad (12.2)$$

Es gilt also

$$\underline{P}_{\text{rad}} = \underline{v} E_{\text{rad}}/c^2 \quad (12.3)$$

Andererseits ändert sich die Geschwindigkeit des Körpers bezüglich K nicht. Aus der Impulserhaltung folgt deshalb, dass die Ruhemasse m_0 des Körpers abnehmen muss. Die Abnahme

Δm_0 ist mit einer Impulsabnahme $\gamma \Delta m_0 \underline{v}$ des Körpers verbunden und ein Vergleich mit (12.1) zeigt

$$\boxed{\Delta m_0 = E_{\text{rad}}^0 / c^2} \quad (12.4)$$

Wir beobachten in diesem \mathbb{S} , und nur in diesem, neben der Ruhemasse noch die träge Masse m , definiert durch $m = \gamma m_0$ [Der Impuls \underline{p} ist damit $\underline{p} = m \underline{v}$, wie in der Newtonschen Mechanik]. Nach (12.2) und (12.4) ist auch

$$\underline{\Delta m = E_{\text{rad}} / m c^2} \quad (12.5)$$

Die Strahlung trägt also gemäß (12.5) träge Masse weg. Einstein folgert: "Die Masse eines Körpers ist ein Mass für dessen Energieinhalt; ändert sich die Energie um L , so ändert sich die Masse in demselben Sinne um $L / 9 \cdot 10^{20}$, wenn die Energie in \mathbb{E}_g und die Masse in Gramm gemessen wird."

B. Allgemeine Betrachtung

In §11 haben wir gesehen, dass ein isoliertes System, auf Grund der Translationsinvarianz, einen erhaltenen Viervektor \underline{P} hat, welchen wir als Energie-Impuls Vektor interpretieren: $\underline{P} = (E/c, \underline{P})$.

Für ein beliebiges isoliertes System mit Vierimpuls \underline{P} definieren wir die Lorentzinvariante Ruhemasse M_0 in Anlehnung an (10.8) durch

$$(\underline{P}, \underline{P}) = M_0^2 c^2 \quad (12.6)$$

Im Ruhesystem $\underline{P} = 0$ ist

$$E_0 = M_0 c^2, \quad E_0: \text{Ruheenergie} \quad (12.7)$$

Zur weiteren Redifizierung der Definition von M_0 machen wir folgende Überlegung: Bewegt sich das Ruhesystem gegenüber dem Inertialsystem K mit der Geschwindigkeit \underline{v} , so

folgt aus dem Vektorcharakter von \underline{P}^A und (12.7)

$$\underline{P} = \gamma \underline{v}/c \frac{E_0}{c} = \gamma \underline{v} M_0$$

$$E/c = \gamma E_0/c = \gamma M_0 c$$

d.h.

$$\underline{P} = (\gamma c M_0, \gamma \underline{v} M_0) \quad (12.8)$$

Dies zeigt, dass \underline{P} dieselbe Form hat wie der 4er Impuls für ein einzelnes Teilchen der Ruhemasse M_0 (vgl. (10.6)).

Für die totale Masse $M := \gamma M_0$ und die Energie E folgt aus (12.8) wieder die berühmte Beziehung

$$\boxed{E = M c^2} \quad (12.9)$$

Beispiel: Ein System von freien Teilchen mit Massen m_a und 4er-Impulsen p_a hat den Gesamtimpuls

$$\underline{P} = \sum_{a=1}^A p_a$$

Die totale Energie im Schwerpunktsystem ($\underline{P}=0$) ist

$$E_0 = c \sum_{a=1}^A p_a^0 = \sum_a (m_a^0 c^2 + T_a^0),$$

wo T_a^0 die kinetische Energie des Teilchens a im Schwerpunktsystem ist. Nach (12.7) ist die Ruhemasse M_0 des Systems

$$M_0 = \sum_a m_a^0 + T^0/c^2, \quad (12.10)$$

wo T^0 die gesamte kinetische Energie im Schwerpunktsystem ist. Diese Energie vergrößert also die Ruhemasse um T^0/c^2 .

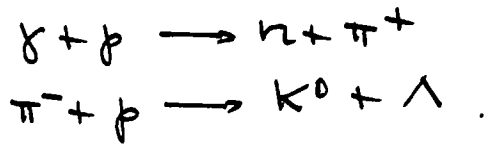
Bemerkungen:

Es wäre durchaus mit der SRT verträglich, wenn die Elementarteilchen unzerstörbar wären. Es folgt also nicht, dass auch

die Ruhmassen dieser Teilchen in Energie verwandelt werden können. Dass dies aber möglich ist, ist eine plausible Extrapolation von (12.9), welche seit 1905 ein alltäglicher Vorgang geworden ist. Besonders dramatisch ist die Vernichtung von Materie und Antimaterie in Strahlung, z.B.

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$$

Sowie die Erzeugung von Teilchen mit Strahlung oder mit kinetischer Energie:



* * *

Kap. III. Anwendungen der speziellen Relativitätstheorie

"... Auch war die Einsicht neu, dass die 'Lorentz-Invariant' eine allgemeine Bedingung sei für jede physikalische Theorie" (A. Einstein)

Die SRT wirkte auf die weitere Entwicklung der Physik wie ein Sauersteig.

Zunächst stellte sich als wichtigste Aufgabe, auch die Gravitations-theorie in eine Lorentzinvariante Form zu bringen, denn das Newton'sche Gravitationsgesetz ist — als ein Fernwirkungsgesetz — mit der SRT unvereinbar. Einstein erkannte jedoch sehr schnell, dass die Gravitation den Rahmen der speziellen Relativitätstheorie sprengt und er entwickelte in fast zehnjähriger, überaus harter Arbeit die allgemeine Relativitätstheorie. Wir werden darauf im nächsten Kapitel näher eingehen und der allgemeinen Relativitätstheorie im nächsten Semester eine Vorlesung widmen.

Die in den Jahren 1925-27 entwickelte Quantentheorie ist eine nichtrelativistische Theorie. Ihren Schöpfern war zum vorausklar, dass damit nur ein vorläufiger (wenn auch überaus wichtiger) Schritt getan wurde. Deshalb setzten sofort Bemühungen um eine relativistische Verallgemeinerung ein. Seitdem wurde auf diesem Gebiete Vieles erreicht (Diractheorie, Quantenelektrodynamik, Allgemeine Quantenfeldtheorie, etc.), aber ein endgültiger Erfolg scheint immer noch in weiter Ferne zu liegen. Dessen wichtiger Zwerg der Physik sind andere Vorlesungen gewidmet.

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den folgenden Anwendungen

- § 1. Relativistische Kinematik für Zerfälle und Reaktionen von Elementarteilchen;
- § 2. Strahlungsverluste in Beschleunigern und Synchrotron-

Strahlung im Krebsnebel ;

§ 3. Präzession der Polarisation eines Teilchens in einem elektromagnetischen Feld;

§ 4. Relativistische Hydrodynamik

§ 5. Elektrodynamik bewegter Körper

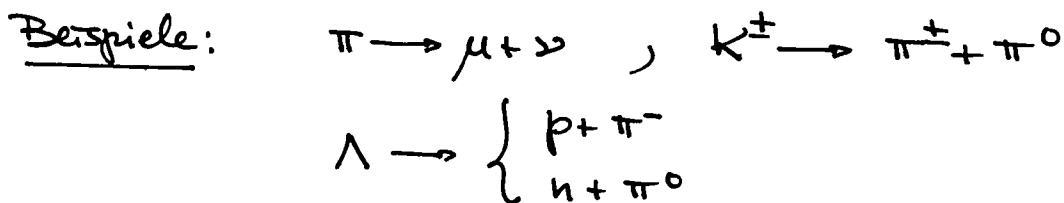
* * *

§ 1. Relativistische Kinematik für Zerfälle und Reaktionen von Elementarteilchen

In diesem Abschnitt ist $c=1$.

1.1 Zweikörper Zerfall

Wir betrachten zunächst den 2-Körper Zerfall eines instabilen Teilchens.

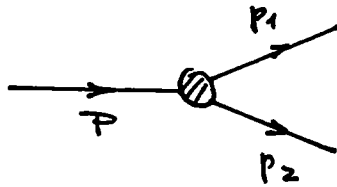


Das instabile Teilchen zerfällt in Ruhe und habe die Masse M . Die Massen der Endprodukte seien m_1 und m_2 und ihre Impulse seien $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}$.

Aus dem Energiesatz folgt dann

$$\sqrt{p^2 + m_1^2} + \sqrt{p^2 + m_2^2} = M \tag{1.1}$$

Diese Gleichung kann man nach $|\mathbf{p}|$ auflösen und daraus die Energien $E_{1,2} = \sqrt{p^2 + m_{1,2}^2}$ berechnen. In der relativistischen Kinematik ist es aber oft bequemer mit Invarianten zu arbeiten. Dies möchte ich an diesem Beispiel illustrieren. Die 4er-Impulse seien P , bzw. p_1, p_2 (siehe Fig.)



Der Energie - Impulssatz besagt

$$P = p_1 + p_2 \quad (1.2)$$

ferner gilt

$$(P, P) = M^2, \quad (p_1, p_1) = m_1^2, \quad (p_2, p_2) = m_2^2 \quad (1.3)$$

Nun berechnen wir (p_2, p_2) mit Hilfe von (1.2) und (1.3):

$$\begin{aligned} m_2^2 = (p_2, p_2) &= (P - p_1, P - p_1) = (P, P) + (p_1, p_1) - 2(p_1, P) \\ &= M^2 + m_1^2 - 2(p_1, P) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Im Ruhesystem des zerfallenden Teilchens ist $P = (M, \underline{0})$, also $(P, p_1) = M E_1$. Aus (1.4) wird damit

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \quad (1.5)$$

Ebenso erhält man

$$E_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M} \quad (1.6)$$

Die kinetische Energie $T_{1,2}$ ist nach Definition $T_{1,2} = E_{1,2} - m_{1,2}$

Sei

$$\Delta M := M - m_1 - m_2 \quad (1.7)$$

so findet man sofort

$$T_i = \Delta M \left(1 - \frac{m_i}{M} - \frac{\Delta M}{2M} \right) \quad (i=1,2) \quad (1.8)$$

Numerisches Beispiel: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$

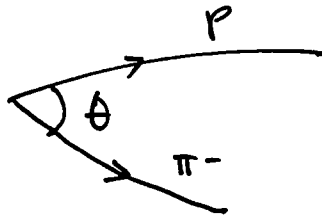
$m_\pi = 139.6 \text{ MeV}$, $m_\mu = 105.7 \text{ MeV}$, $m_\nu = 0$, $\Delta M = 33.9 \text{ MeV}$.

Die kinetischen Energien sind

$$T_\mu = 33.9 \left[1 - \frac{105.7}{139.6} - \frac{33.9}{2 \times 139.6} \right] = 4.1 \text{ MeV}$$

$$T_{\nu} = 33.9 - T_{\mu} = 29.8 \text{ keV.}$$

Das Λ -Teilchen wurde zuerst in Flug durch seinen Zerfall in $p + \pi^-$ in einer Wilson Kammer beobachtet. In einer Wilson Kammer kann man natürlich das neutrale Teilchen Λ nicht sehen. Man sieht lediglich die Spuren der beiden geladenen Zerfallsprodukte (s. Fig.),



welche gekrümmt sind, wenn ein Magnetfeld angelegt ist. Die anfänglichen Impulse dieser Teilchen, sowie deren Identität kann man aus der Krümmung und der Reichweite der Spuren entnehmen. Mit dem Öffnungswinkel θ kennt man dann auch die Masse des zerfallenden Teilchens. Dies sieht man so: Einerseits gilt

$$M^2 = (P, P) = (p_1 + p_2, p_1 + p_2) = m_1^2 + m_2^2 + 2(p_1, p_2)$$

Im Laborsystem ist aber

$$(p_1, p_2) = E_1 E_2 - |p_1| |p_2| \cos \theta$$

Also

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 E_1 E_2 - 2 |p_1| |p_2| \cos \theta. \quad (1.9)$$

Als weiteres Beispiel beobachten wir den

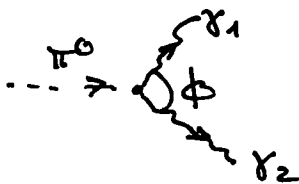
π^0 -Zerfall in Flug: $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$.

a) Minimaler Öffnungswinkel

Im Ruhesystem ist der Öffnungswinkel zwischen den beiden γ -Quanten natürlich gleich π . Für ein bewegtes π^0 ändert sich aber dieser Winkel. Es ist (beachte $|p_i| = E_i$ für die γ -Quanten)

$$m_{\pi}^2 = (p_1 + p_2, p_1 + p_2) = (E_1 + E_2)^2 - (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - E_1^2 - E_2^2 - 2E_1 E_2 \cos \phi$$

ϕ : Öffnungswinkel



d.h.
$$\cos \phi = 1 - \frac{m_{\pi}^2}{2E_1 E_2} = 1 - \frac{m_{\pi}^2}{2E_1 (E_{\pi} - E_1)} \quad (1.10)$$

Der Öffnungswinkel wird, bei gegebener π -Energie, minimal für

$$\frac{d}{dE} [E_1 (E_{\pi} - E_1)] = 0, \text{ d.h. für } E_1 = E_{\pi} / 2$$

Aus (1.10) folgt

$$\cos \phi_{\min} = 1 - 2m_{\pi}^2 / E_{\pi}^2 \quad (1.11)$$

Der γ -Faktor des π^0 -Mesons ist $\gamma = E_{\pi} / m_{\pi}$. Also gilt auch

$$\cos \phi_{\min} = 1 - 2/\gamma^2 \quad (1.12)$$

Für $\gamma \gg 1$ wird ϕ_{\min} sehr klein und $\cos \phi_{\min} \approx 1 - \phi_{\min}^2 / 2$, also

$$\phi_{\min} \approx 2/\gamma$$

Bsp. Für $E_{\pi^0} = 4.05 \text{ GeV}$ ist $\gamma = 30$, also $\phi_{\min} \approx \frac{1}{15}$, oder $\phi_{\min} \approx 4^\circ$. Statt 180° ist also der minimale Öffnungswinkel nur noch 4° !

b) Impuls Verteilung

Im allgemeinen Bezugssystem sei $N(p)dp$ die Wahrscheinlichkeit ein γ im Impulsintervall $(p, p+dp)$ zu finden. Im Ruhesystem des π^0 sind alle Richtungen gleichberechtigt (das π^0 hat Spin 0). Die Winkelverteilung ist in diesem

System also

$$N(\theta') = \frac{1}{2} \sin \theta' \quad (\text{Ruhesystem})$$

Nun ist

$$N(p_1) = \frac{1}{2} \sin \theta' \left| \frac{\partial \theta'}{\partial p_1} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \cos \theta'}{\partial p_1} \right|$$

$E_1 = p_1$ erhalten wir durch eine spezielle Lorentztransformation in Richtung von $-p_\pi$ mit der Geschwindigkeit

$$\beta = p_\pi / E_\pi : \quad E_1 = \gamma (E'_1 + (\beta \cdot p'_1)), \text{ d.h.}$$

$$E_1 = \gamma \left(\frac{u_\pi}{z} + \frac{p_\pi}{E_\pi} \frac{u_\pi \cos \theta'}{z} \right)$$

Mit $\gamma = E_\pi / u_\pi$ ist also

$$E_1 = p_1 = \frac{1}{2} (E_\pi + p_\pi \cos \theta') \quad (1.13)$$

Folglich gilt

$$\frac{\partial p_1}{\partial \cos \theta'} = \frac{1}{2} p_\pi$$

Also

$$N(p_1) = \frac{1}{p_\pi} = \text{const.} \quad (1.14)$$

Die Energie E_1 variiert gemäss (1.13) im Intervall

$$\frac{1}{2} (E_\pi - p_\pi) \leq E_1 \leq \frac{1}{2} (E_\pi + p_\pi) \quad (1.15)$$

Es liegt also eine Rechtecksverteilung vor.

c) Winkelverteilung im allgemeinen System

Es sei $\mu := \cos \phi$, ϕ : Öffnungswinkel. Nach (1.10) ist

$$\mu = 1 - \frac{u_\pi^2}{2(E_\pi p_1 - p_1^2)} \quad (1.16)$$

Für die Winkelverteilung $N(\phi)$ gilt

$$N(\phi) = N(p_1) \left| \frac{\partial p_1}{\partial \phi} \right| = \frac{1}{p_r} \left| \frac{\partial p_1}{\partial \phi} \right| = \frac{1}{p_r} \left| \frac{\partial p_1}{\partial \mu} \sin \phi \right|$$

$$= \frac{1}{p_r} \left| \frac{\partial p_1}{\partial \mu} \right| \sqrt{1-\mu^2}. \quad (1.17)$$

Nun ist mit (1.16)

$$\frac{\partial \mu}{\partial p_1} = \frac{u_\pi^2}{z} \frac{E_\pi - 2p_1}{(E_\pi p_1 - p_1^2)^2} = \frac{u_\pi^2}{z} (E_\pi - 2p_1)(1-\mu)^2 \frac{4}{u_\pi^4}$$

und

$$\frac{1}{u_\pi^2} (E_\pi - 2p_1)^2 = \frac{E_\pi^2}{u_\pi^2} - \frac{4}{u_\pi^2} (E_\pi p_1 - p_1^2) = \gamma^2 - \frac{2}{1-\mu}$$

Folglich

$$\frac{\partial \mu}{\partial p_1} = \frac{z}{u_\pi} \left(\gamma^2 - \frac{2}{1-\mu} \right)^{1/2} (1-\mu)^2$$

Damit wird aus (1.17)

$$N(\phi) = \frac{u_\pi}{2p_r} \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\left(\gamma^2 - \frac{2}{1-\mu} \right)^{1/2} (1-\mu)^2}$$

Durch Übergang zum halben Winkel erhält man daraus nach einigen Umformungen

$$N(\phi) = \frac{1}{4} \frac{1-\beta^2}{\beta} \frac{\cos \phi/2}{\sin^2 \phi/2} \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - \cos^2 \phi/2}} \quad (1.18)$$

Für $\beta \approx 1$ ist $N(\phi)$ praktisch eine δ -Funktion bei $\phi \approx 0$.

Qualitativ sieht (1.18), für festes β , wie folgt aus. Dabei

ist $\mu_{\text{ini}} = \cos \phi_{\text{ini}}$ nach (1.12) gleich $1 - 2/\gamma^2$; deshalb gilt

$$\underline{\cos^2 \phi_{\text{ini}}/2} = 1 - 1/\gamma^2 = \underline{\beta^2}.$$

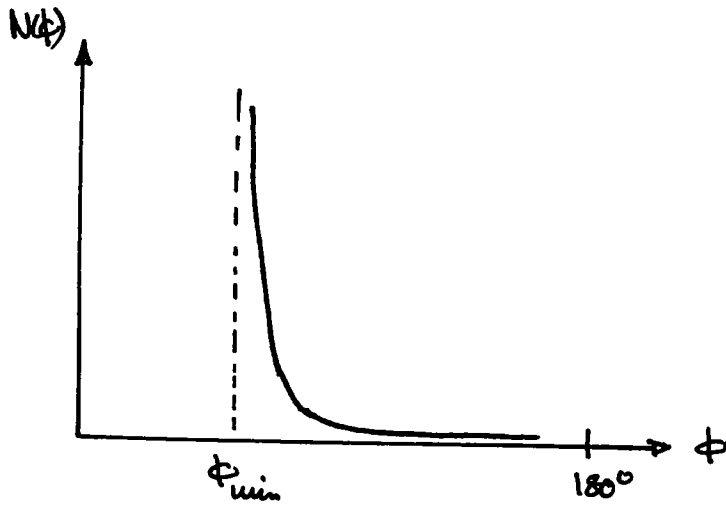


Fig. Winkelverteilung für $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$.

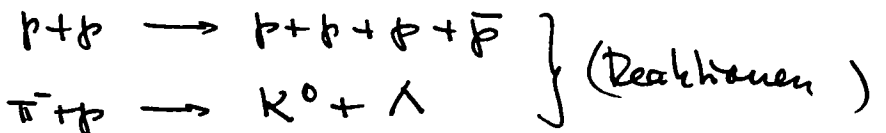
1.2. Schwerpunkttransformation und Reaktionsdichten

Wir betrachten eine 2-Teilchen Kollision

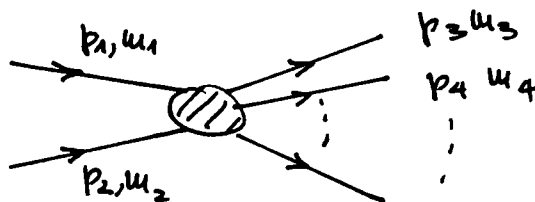


bei welcher im Endzustand entweder wieder die einlaufenden Teilchen mit neuen Energie-Impuls Vektoren erscheinen (elastische Streuung) oder auch neue Teilchen erzeugt werden (Reaktion).

Beispiele:



Notation:



Schwerpunktsystem : $p_1 + p_2 = 0$

Laborsystem : $p_2 = 0$

Die Beziehung zwischen Größen im Schwerpunktsystem (versehen mit einem Strich) und im Laborsystem erhält man wieder am einfachsten mit Hilfe von Invarianten. Wir berechnen zunächst die "Mandelstam Variable"

$$s := (p_1 + p_2, p_1 + p_2) \quad (1.19)$$

in beiden Systemen

$$s = (E_1 + u_2)^2 - p_1^2 = (E_1' + E_2')^2$$

Aber $E_1^2 = p_1^2 + u_1^2$. Folglich gilt für die totale Schwerpunktsenergie \sqrt{s}

$$\boxed{\sqrt{s} = E_1' + E_2' = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2E_1 u_2}} \quad (1.19')$$

Zur Berechnung der Einzelenergien E_1', E_2' werten wir die folgende Invariante im Schwerpunktsystem aus

$$(p_1, p_1 + p_2) = u_1^2 + (p_1, p_2) = E_1' (E_1' + E_2') = E_1' \sqrt{s}$$

Bemerken wir noch (siehe (1.19))

$$s = u_1^2 + u_2^2 + 2(p_1, p_2)$$

so kommt

$$\left. \begin{aligned} E_1' &= \frac{s + u_1^2 - u_2^2}{2\sqrt{s}} \\ E_2' &= \frac{s + u_2^2 - u_1^2}{2\sqrt{s}} \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

Die Gleichung (1.19') lösen wir noch nach E_1 auf

$$E_1 = \frac{s - u_1^2 - u_2^2}{2u_2} \quad (1.21)$$

Zeige, dass der Schwerpunktsimpulsbetrag p' wie folgt geschrieben werden kann

$$p' = \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{\lambda(s, u_1^2, u_2^2)} \quad (1.22)$$

wobei

$$\lambda(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \quad (1.23)$$

Analog ist der Labarimpuls

$$|k_1| = \frac{1}{2u_2} \sqrt{\lambda(s, u_1^2, u_2^2)} \quad (1.24)$$

Im extrem relativistischen Fall $E_1 \gg u_1$ wird aus (1.19')

$$\underline{\underline{\sqrt{s} \simeq \sqrt{2E_1 u_2}}} \quad (1.25)$$

d.h. die totale Schwerpunktsenergie wächst nur mit der Wurzel der Labarenergie. Deshalb lohnt sich der Bau von Storage-Ringen.

Damit eine Reaktion

$$(p_1, u_1) + (p_2, u_2) \longrightarrow (p_3, u_3) + (p_4, u_4) + \dots$$

stattfinden kann, muss

$$\sqrt{s} \geq u_3 + u_4 + \dots \quad (1.26)$$

sein. Dies wollen wir durch eine Ungleichung für die Laborenergie ausdrücken. Sei

$$\Delta M := (u_3 + u_4 + \dots) - (u_1 + u_2), \quad (1.27)$$

dann lautet (1.26) mit (1.19')

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2E_1 u_2} \geq u_1 + u_2 + \Delta M$$

Die Schwellenenergie für die kinetische Laborenergie ist deshalb

$$\boxed{T_{\text{Schwelle}} = \Delta M \left[1 + \frac{u_1}{u_2} + \frac{\Delta M}{2u_2} \right]} \quad (1.28)$$

Beispiel: Erzeugung von Antiprotonen

Um Antiprotonen in Proton-Proton Kollisionen zu erzeugen, muss man mindestens ein zusätzliches Proton-Antiproton Paar erzeugen, da für die Zahl der Nukleonen (Protonen und Neutronen) minus die Zahl der Antinukleonen ein Erhaltungssatz gilt. Anwendung von (1.28) gibt

$$\underline{T_{\text{Schwelle}} = 2m_p (1 + 1 + 1) = 5.62 \text{ GeV}}$$

Das Antiproton wurde erstmals mit dem Bevatron in Berkeley (Energie $\approx 7.6 \text{ GeV}$) erzeugt.

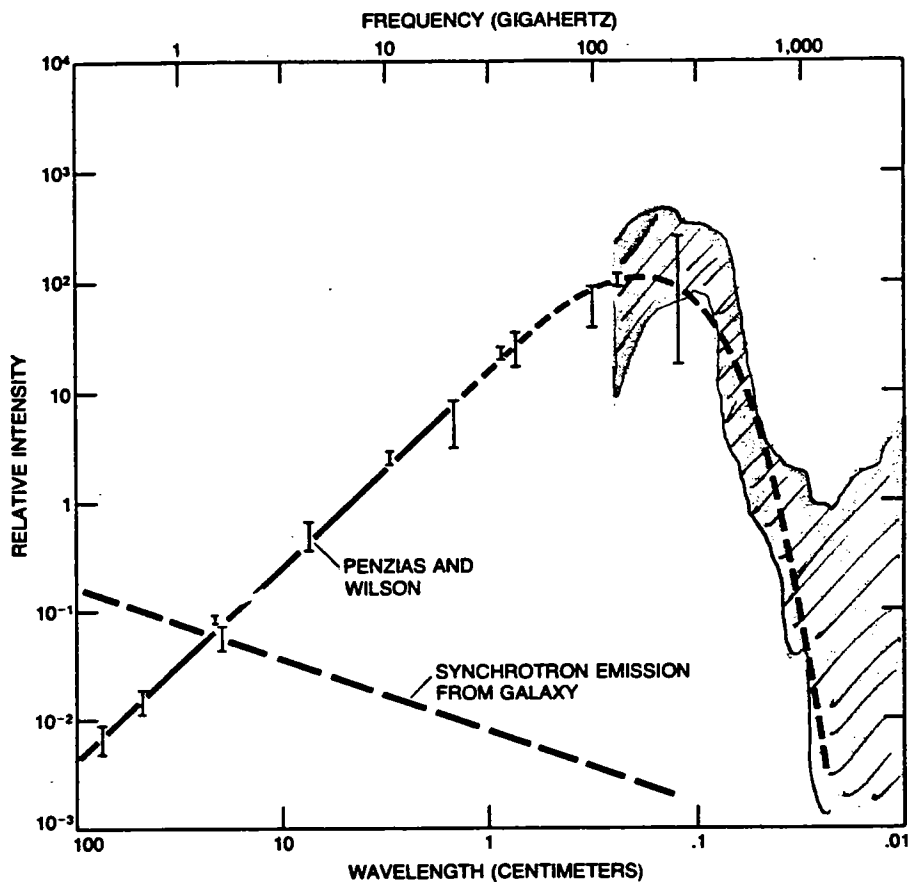
Wir sehen: Die in einer Reaktion zur Verfügung stehende Energie ist \sqrt{s} . Für die Speicher-Ringe des CERN ist $\sqrt{s} \approx 30 + 30 = 60 \text{ GeV}$. Die dazu äquivalente Laborenergie ist nach (1.25)

$$E_1 = \frac{s}{2m_2} \approx \frac{60^2}{2} = \underline{1800 \text{ GeV}} !$$

1.3 Wechselwirkung der kosmischen Strahlung mit der 3°K - Hintergrundstrahlung

Im Jahre 1965 haben Penzias und Wilson vom Bell Lab. im Mikrowellenbereich eine aus allen Richtungen des Weltraumes einbreitende Strahlung nachgewiesen, welche mit grosser Genauigkeit dem Planck'schen Strahlungsgesetz für eine Temperatur von $\approx 3^\circ \text{K}$ folgt (s. Fig. , aus Scientific American, May 1978).

Es hat sich gezeigt, dass diese Strahlung in hohem Masse isotrop ist (auf 1 in 10^3 , auch bei hoher Winkelauflösung). Dieses Faktum macht es unwahrscheinlich, dass die 3°K - Strahlung als Superposition von diskreten Quellen verstanden werden kann. Sonst müsste es sehr viele Quellen sehr weit weg geben.



INTENSITY OF COSMIC BACKGROUND RADIATION follows the energy spectrum of a black body with a temperature of three degrees K. The first measurement of the radiation was made in 1965 by Arno A. Penzias and Robert W. Wilson, working with a microwave receiver tuned to a wavelength of 7.35 centimeters (corresponding to a frequency of four gigahertz). Most of the subsequent measurements were also done at single wavelengths, indicated by the vertical bars. Recently, however, Paul L. Richards and his co-workers at the University of California at Berkeley have measured the higher-frequency portion of the curve with a wide-band technique, obtaining the results indicated by the colored area. The broken line represents synchrotron radiation from our galaxy: radiation emitted by electrons as they spiral around lines of magnetic force. At frequencies below 10 gigahertz the anisotropy, or the directional nonuniformity, of the synchrotron emission masks the anisotropy in the background radiation.

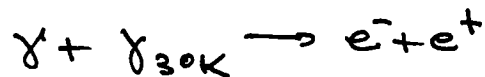
Die plausibelste Hypothese ist die, dass die 3°K-Strahlung das Relikt der Gleichgewichtsstrahlung in einem frühen heissen Zustand des Universums ist, welche sich bei der Expansion des Universums schliesslich (nach der Rekombination zu Atomen) von der Materie entkoppelt hat und sich dann adiabatisch auf die heutige Temperatur von $\approx 3^\circ\text{K}$ abkühlte. Man nennt diese Strahlung deshalb auch "Urquellstrahlung". Penzias und Wilson haben für deren Entdeckung dieses Jahr den Nobelpreis bekommen. Falls diese Strahlung tatsächlich den ganzen Weltraum erfüllt, so müsste sie einen merklichen Einfluss auf die

kosmische Strahlung haben.

a) Paarerzeugung von hochenergetischen γ -Quanten

Wir bemerken zunächst, dass die Photondichte n_γ für die 3°K-Strahlung den Wert $n_\gamma \sim 10^3 / \text{cm}^3$ hat. Ferner ist die mittlere Energie ϵ eines Photons ungefähr 10^{-3} eV .

Hochenergetische kosmische γ -Quanten können durch Zusammenstoß mit 3°K-Photonen Elektron-Positron Paare erzeugen:



Damit dies möglich ist, müsste die Energie E der energetischen γ -Quanten folgende Ungleichung erfüllen

$$s = (k_1 + k_2)^2 = 2k_1 \cdot k_2 = 2\epsilon\epsilon(1 - \cos\theta) \gg (2m_e)^2$$

d.h. es muss

$$\epsilon\epsilon \gg m_e^2$$

sein. Für $\epsilon \sim 10^{-3} \text{ eV}$ bedeutet dies

$$\underline{\underline{E \gg 2.5 \times 10^{14} \text{ eV} \quad !}}$$

Wie gross ist für ein solches γ -Quant die mittlere freie Weglänge λ ? Diese ist allgemein

$$\lambda \approx \frac{1}{n_\gamma \sigma}, \quad \sigma: \text{Wirkungsquerschnitt für Paarerzeugung.}$$

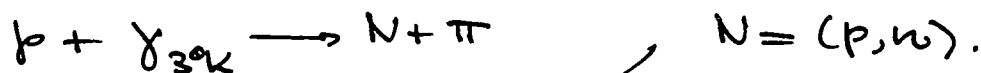
Nun ist $\sigma \sim r_0^2$, $r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2.8 \times 10^{-13} \text{ cm}$: klassischer Elektronenradius. Damit ist $\sigma \sim 10^{-25} \text{ cm}^2$ und $\lambda \sim 10^{22} \text{ cm}$. Unsere Galaxie hat einen Durchmesser von etwa 10^5 Lichtjahren $\sim 10^{23} \text{ cm}$. Also ist λ kleiner als die Ausdehnung der Galaxie. Deshalb erwartet man einen starken

Abfall des kosmischen γ -Hintergrundes bei $E \gtrsim 10^{15}$ eV.
Diesbezügliche Beobachtungen sind unterwegs, werden aber
noch etwas auf sich warten lassen.

Die obigen Abschätzungen kann man durch genauere Berech-
nungen ersetzen, indem man den aus der QED be-
kannten Wirkungsquerschnitt $\sigma(s)$ für Paarerzeugung
benutzt [siehe J. V. Jelley, PRL 16, 479 (1966)].

b) Photoproduktion von π -Mesonen

Ein hochenergetisches Proton der kosmischen Strahlung
kann durch Zusammenstöße mit den Photonen der 3°K -
Strahlung π -Mesonen erzeugen:



Die Variable s ist (p : Protonimpuls)

$$s = (\epsilon + \sqrt{p^2 + m_N^2})^2 - (p^2 + 2p\epsilon \cos\theta + \epsilon^2)$$

$$= 2\epsilon [\sqrt{p^2 + m_N^2} - p \cos\theta] + m_N^2$$

Damit der Prozess möglich ist muss $s \geq (m_N + m_\pi)^2$
sein, d.h. es muss gelten

$$\sqrt{p^2 + m_N^2} - p \cos\theta \geq \frac{m_\pi^2 + 2m_\pi m_N}{2\epsilon} \approx \frac{m_N m_\pi}{\epsilon} \approx 3 \times 10^{20} \text{ eV.}$$

Wir erwarten deshalb einen "cutoff" im Spektrum der
Protonen der kosmischen Strahlung bei $\approx \underline{3 \times 10^{20} \text{ eV.}}$

Für den Wirkungsquerschnitt der Photoproduktion erwarten
wir folgende Grössenordnung

$$\sigma \sim \frac{e^2}{hc} \left(\frac{h}{m_\pi c} \right)^2, \quad \frac{h}{m_\pi c} : \text{Comptonwellenlänge des } \pi\text{-Mesons}$$

↓
Feinstrukturkonstante $\approx \frac{1}{137}$

d.h. $\sigma \sim 10^{-28} \text{ cm}^2$. Die mittlere freie Weglänge ist deshalb

$$\lambda \sim \frac{1}{n \sigma} \sim 10^{25} \text{ cm} \sim 10^7 \text{ Lichtjahre}$$

[Genauere Rechnungen, welche auf experimentellen Wirkungsquerschnitten beruhen, findet man in: Stedler, PRL 21, 1016 (1968)].

Nun ist für Protonenenergien $E \gtrsim 10^{20} \text{ eV}$ der Krümmungsradius der Protonenbahn im galaktischen Magnetfeld etwa 10 mal der Radius der Galaxie. Andererseits ist die kosmische Strahlung im Bereich $10^{18} - 10^{20} \text{ eV}$ isotrop. Deshalb hat sie wahrscheinlich für $E \gtrsim 10^{18} \text{ eV}$ einen extragalaktischen Ursprung und wir erwarten nach dem Gesagten einen "cutoff" im Fluss der Protonen bei $\sim 10^{21} \text{ eV}$.

Falls kein derartiger Abfall gefunden wird, würde dies bedeuten, dass die hochenergetischen Protonen von nicht sehr weit weg ($\lesssim 10^7$ Lichtjahre) herkommen [Der Virgo Cluster von Galaxien ist etwa 3×10^7 Lichtjahre entfernt].

Über den momentanen Stand der Beobachtungen bin ich nicht genau informiert.

§2. Synchrotron Strahlung

[Literatur: J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, second edition, Chapter 14].

In der Elektrodynamik Vorlesung wird für die abgestrahlte Leistung eines beschleunigten Teilchens die folgende Formel abgeleitet

$$P = \frac{2e^2}{3c} \gamma^6 [\dot{\beta}^2 - (\beta \wedge \dot{\beta})^2] \quad (2.1)$$

Wir wollen diese zunächst aus der nichtrelativistischen

Larmor Formel

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{v}^2 \quad (2.2)$$

ableiten. Da die abgestrahlte Energie dE_{rad} in der Zeit dt gleich $P dt$ ist und dE_{rad} die 0-Komponente eines 4er-Vektors ist, muss P lorentzinvariant sein. Andererseits darf P nur von $\underline{\beta}$ und $\dot{\underline{\beta}}$ abhängen (siehe die Liénard-Wiechert Felder). Durch diese Forderungen und (2.2) ist P eindeutig bestimmt (falls sich P für $\underline{v} = 0$ auf (2.2) reduziert). Um dies zu sehen, schreiben wir (2.2) in der suggestiven Form

$$P = \frac{2e^2}{3m^2 c^3} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}, \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) \quad (2.3)$$

Der folgende Ausdruck ist sicher eine lorentzinvariante Verallgemeinerung von (2.3)

$$P = - \frac{2e^2}{3m^2 c^3} \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}, \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right) \quad (2.4)$$

Dass dieser Ausdruck für P eindeutig bestimmt ist sieht man wie folgt: Wir haben nur die 4er-Vektoren \mathbf{p} und $d\mathbf{p}/d\tau$ zur Verfügung. Aber $(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = mc^2$ und folglich ist $(\mathbf{p}, \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}) = 0$.

Nun formen wir (2.4) um. Wir benutzen

$$\mathbf{p} = m\gamma(c, \underline{v}) = m\gamma c(1, \underline{\beta})$$

und

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} = mc\gamma \left(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d(\gamma \underline{\beta})}{dt} \right)$$

Wegen

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\underline{\beta} \cdot \dot{\underline{\beta}}}{(1-\beta^2)^{3/2}} = \gamma^3 \underline{\beta} \cdot \dot{\underline{\beta}}$$

gilt

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = mc \left(\gamma^4 \beta \cdot \dot{\beta}, \gamma^4 (\beta \cdot \dot{\beta}) \beta + \gamma^2 \dot{\beta} \right)$$

und folglich

$$\begin{aligned} - \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}, \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right) &= m^2 c^2 \gamma^6 \left[(\beta \cdot \dot{\beta})^2 \beta^2 \gamma^2 + \frac{1}{\gamma^2} \dot{\beta}^2 + 2 (\beta \cdot \dot{\beta})^2 - \right. \\ &\quad \left. - \gamma^2 (\beta \cdot \dot{\beta})^2 \right] \\ &= m^2 c^2 \gamma^6 \left[(\beta \cdot \dot{\beta})^2 (\gamma^2 \beta^2 + 2 - \gamma^2) + \frac{1}{\gamma^2} \dot{\beta}^2 \right] \end{aligned}$$

Wir benutzen

$$(\beta \wedge \dot{\beta})^2 = \beta^2 \dot{\beta}^2 - (\beta \cdot \dot{\beta})^2$$

und erhalten so

$$\begin{aligned} - \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}, \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right) &= m^2 c^2 \gamma^6 \left[-(\beta \wedge \dot{\beta})^2 + \beta^2 \dot{\beta}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \dot{\beta}^2 \right. \\ &\quad \left. - (\beta \cdot \dot{\beta})^2 + (\beta \cdot \dot{\beta})^2 (\gamma^2 \beta^2 + 2 - \gamma^2) \right] \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_0 \end{aligned}$$

d.h.

$$\underline{- \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}, \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right) = m^2 c^2 \gamma^6 \left[\dot{\beta}^2 - (\beta \wedge \dot{\beta})^2 \right]}$$

Dies zeigt, dass (2.4) mit (2.1) übereinstimmt.

In einem Linearbeschleuniger ist speziell

$$P = \frac{ze^2}{3c} \gamma^6 \dot{\beta}^2 \quad (2.5)$$

Da

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = mc \frac{d}{dt} (\gamma \dot{\beta}) = mc \left[\gamma^3 (\beta \cdot \dot{\beta}) \beta + \gamma \dot{\beta} \right]$$

gilt für lineare Beschleunigung

$$\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2 = \gamma^6 m^2 c^2 \left[\beta^4 \dot{\beta}^2 + \frac{\dot{\beta}^2}{\gamma^4} + \frac{2}{\gamma^2} \beta^2 \dot{\beta}^2 \right] = \gamma^6 \dot{\beta}^2 m^2 c^2$$

Folglich ist

$$P = \frac{ze^2}{3u^2c^3} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2 \quad (\text{Lineareschleunigung}) \quad (2.6)$$

Nun ist $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ ($p = |\mathbf{p}|$) gleich der Energieänderung $\frac{dE}{dx}$ des Teilchens pro Längeneinheit. Folglich gilt für lineare Beschleunigung

$$P = \frac{ze^2}{3u^2c^3} \left(\frac{dE}{dx} \right)^2 \quad (2.7)$$

Die rechte Seite hängt nur von der treibenden Kraft ab. Wichtig ist die Größe

$$\frac{P}{dE/dt} = \frac{ze^2}{3u^2c^3} \frac{1}{v} \frac{dE}{dx} \xrightarrow{(\beta \rightarrow 1)} \frac{ze^2/mc^2}{uc^2} \frac{dE}{dx}$$

Der Energieverlust ist deshalb unwichtig, solange der Energiegewinn nicht von der Ordnung $mc^2 = 0.511 \text{ MeV}$ über eine Distanz von $e^2/mc^2 = 2.83 \times 10^{-13} \text{ cm}$, d.h. $2 \times 10^{14} \text{ MeV/Meter}$ ist. Typische Energiegewinne in Maschinen sind weniger als 10 MeV/Meter .

Die Umstände ändern sich drastisch bei Zirkularbeschleunigern. In solchen Maschinen ändert \mathbf{p} die Richtung sehr schnell, aber die Energieänderung pro Umlauf ist klein. Dies bedeutet

$$\left| \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right| = \gamma \omega |\mathbf{p}| \gg \frac{1}{c} \frac{dE}{dt} \quad (\omega: \text{Kreisfrequenz})$$

Deshalb ist

$$-\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2 \approx \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2 = \gamma^2 \omega^2 |\mathbf{p}|^2 = \gamma^4 u^2 c^2 \beta^2 \omega^2$$

Sei ρ der Bohrradius, d.h. $\omega = c\beta/\rho$, so ist nach (2.4)

$$P \approx \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{\rho^2} \beta^4 \gamma^4 \quad (2.8)$$

Der Strahlungsverlust pro Umlauf ist

$$\delta E = \frac{2\pi \rho}{c \beta} P = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{\rho} \beta^3 \gamma^4 \quad (2.9)$$

Für hochenergetische Elektronen ($\beta \approx 1$) ist

$$\delta E (\text{MeV}) = 8.85 \times 10^{-2} \frac{[E (\text{GeV})]^4}{\rho (\text{Meter})} \quad (2.10)$$

Beim 10 GeV Cornell Elektronen-Synchrotron ist $\rho \approx 100 \text{ m}$, das maximale Magnetfeld ist $\approx 3.3 \text{ kG}$ und die $+f$ Spannung pro Umlauf ist 10.5 MV bei 10 GeV . Nach (2.10) ist der Energieverlust pro Umlauf gleich 8.85 MeV .

Übung: Drücke die abgestrahlte Leistung (bei inkohärenter Strahlung) in einem zirkularen Elektronenbeschleuniger durch δE (2.10) und den zirkulierenden Strom (in Ampère) aus. Wie gross ist die abgestrahlte Leistung für einen Elektron-Positron Speicher mit 100 GeV für beide Strahlen und einem Radius von 16 km ?

Aus (2.1) folgt auch

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^4 \dot{\underline{v}}^2 = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^2 \left(\frac{d\underline{p}}{dt} \right)^2, \quad (2.12)$$

denn für eine zirkuläre Bewegung ist $\frac{d\underline{p}}{dt} = \gamma m \dot{\underline{v}}$, da $\underline{\beta} \perp \dot{\underline{\beta}}$.

Vergleichen wir (2.12) mit (2.6), so sehen wir, dass bei gleicher treibender Kraft die Strahlung im zirkularen Fall um γ^2 grösser ist als für lineare Beschleunigung.

* * *

Ein Teilchen bewege sich in einem homogenen Magnetfeld \underline{B} . Nach (II.10.13) ist $dy/dt = 0$ (Energie bleibt konstant) und nach (II.10.12) gilt damit

$$\dot{\underline{v}} = \frac{e}{\gamma mc} \underline{v} \wedge \underline{B} \quad (\Rightarrow \underline{v} \perp \dot{\underline{v}}) \quad (2.13)$$

Aus (2.1) folgt

$$P = \frac{2e^2}{3c} \gamma^6 \dot{\beta}^2 (1 - \beta^2)$$

und aus (2.13)

$$\dot{\beta} = \frac{e}{\gamma mc} \beta B_{\perp}, \quad B_{\perp}: \text{Komponente von } \underline{B} \text{ senkrecht zu } \underline{\beta}$$

Also

$$P = \frac{2e^2}{3c} \gamma^6 \frac{e^2}{\gamma^2 u^2 c^2} \beta^2 \frac{1}{\gamma^2} B_{\perp}^2 = \frac{2}{3} \frac{e^4 B_{\perp}^2}{u^2 c^3} \underbrace{\gamma^2 \beta^2}_{\gamma^2 - 1}$$

oder

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^4 B_{\perp}^2}{u^2 c^3} \left[\left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 - 1 \right] \quad (2.14)$$

Synchrotron Alter

Für hochrelativistische Elektronen gilt also

$$\frac{dE}{dt} = -\rho E^2, \quad \rho := \frac{2e^4}{3u^4 c^3} B_{\perp}^2 \quad (2.15)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$\frac{1}{E} = \rho t + \text{const.}$$

Für $t=0$ sei $E = E_0 \gg mc^2$; dann gilt

$$t = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right),$$

$$E = \frac{E_0}{1 + \rho E_0 t}. \quad (2.16)$$

Nach der Zeit

$$t_{1/2} = \frac{1}{\rho E_0}$$

ist $E = \frac{1}{2} E_0$. Numerisch ist

$$t_{1/2} (\text{Sek.}) = \frac{5.1 \times 10^8}{[B_{\perp} (\text{Gauss})]^2} \frac{mc^2}{E_0} \quad (2.17)$$

Anwendung auf den Krebs Nebel

Der Krebs Nebel ist das Relikt einer Supernova, welche 1054 nach Chr. aufleuchtete. Dieser Nebel sendet eine beachtliche Synchrotronstrahlung aus, welche sich bis in den Röntgenbereich erstreckt. Aus dem Spektrum dieser Strahlung [dieses haben wir nicht abgeleitet; siehe aber den Literaturhinweis am Anfang dieses Abschnittes] kann man schliessen, dass die Strahlung von Elektronen herrührt, welche Geschwindigkeiten mindestens bis zu $E_0 \approx 5 \times 10^{11} \text{ eV}$ haben und sich in einem Magnetfeld von $B_{\perp} \approx 3 \times 10^{-4} \text{ Gauss}$ bewegen. Setzt man diese Zahlen in (2.17) ein, so erhält man

$$t_{1/2} \approx 180 \text{ Jahre}$$

Da der Krebs Nebel anderseits ≈ 500 Jahre alt ist, müssen ständig hochrelativistische Elektronen nachgeliefert werden. Der Ursprung dieser Elektronen war lange ein Rätsel. Heute weiss man, dass sie vom zentralen Pulsar stammen. Siehe in diesem Zusammenhang:

W. Frieder & N. Svanmann: Acceleration of Charged Particles in the Electromagnetic Field of Pulsars,

HPA 45, 1089 (1972).

Radio Galaxien, das Energieproblem

Im Schlüsseljahr 1954 identifizierten Baade und Hinkowski die Radioquelle Cygnus A mit dem hellsten Mitglied eines schwachen Klusters von Galaxien und bestimmten dessen Rotverschiebung zu $z = 0.057$. Falls diese Rotverschiebung dem Hubble'schen Gesetz folgt, so ist die Distanz zu Cygnus A etwa 170 Mpc. Dann ist aber die absolute Radioluminosität etwa 10^{45} erg/s. Dies ist 10 Millionen mal mehr als die Radiostrahlung von gewöhnlichen Galaxien und 10 mal mehr als die optische Strahlung einer Galaxie. Wir werden die physikalische Bedeutung dieses außerordentlichen Resultates weiter unten diskutieren.

In der Zwischenzeit sind die Radiogalaxien sehr genau untersucht worden. Dies wurde möglich durch die sehr hohe Auflösung, die man durch die Synthese von vielen kleinen Teleskopen erreicht hat [Für eine erste Einführung lese man den Artikel in Scientific American, August 1975, Seite 26]. Viele dieser Radioquellen haben eine Doppelstruktur, wie die Helligkeitsverteilung im folgenden Bild für Cygnus A zeigt. Beachte auch die außerordentliche Kollinearität der beiden "hot spots" mit der dazwischenliegenden elliptischen Galaxie. Über die teilweise riesigen Dimensionen gibt das zweite Bild Auskunft. Die Bilder deuten stark darauf hin, dass eine gewaltige Explosion in der zentralen optischen Galaxie in zwei entgegengesetzten Richtungen Ströme von Plasma und relativistischen Teilchen ausgestossen hat. Wahrscheinlich kommt die Energie aus einem kleinen Gebiet des galaktischen Kerns. Letztlich hat sie wahrscheinlich einen gravitativen Ursprung (schwarze Löcher?). Das Synchrotron Alter (2.17) ist wieder kürzer als das Alter der Radioquelle, welches man aus den riesigen Dimensionen abschätzt ($\approx 10^9$ Jahre für 3C236).

Deshalb ist eine ständige Energiezufuhr nötig.
Es besteht kaum ein Zweifel, dass die Radiostrahlung
Synchrotronstrahlung ist. Diese Hypothese wird durch die
Tabelle gestützt, dass die Radiostrahlung häufig linear
polarisiert ist.

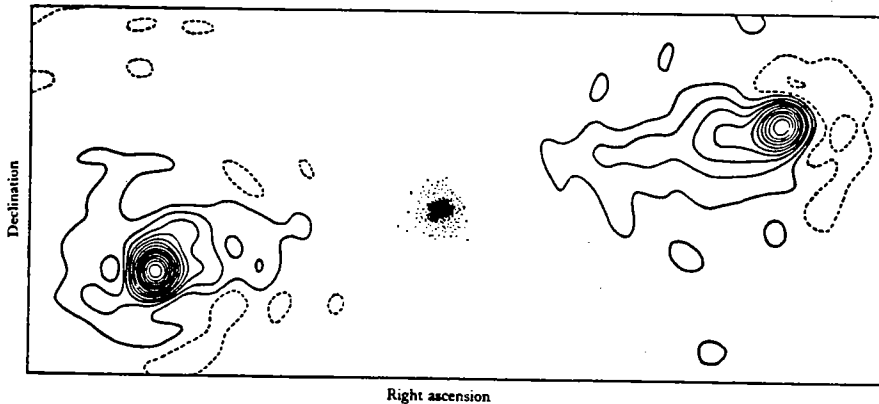
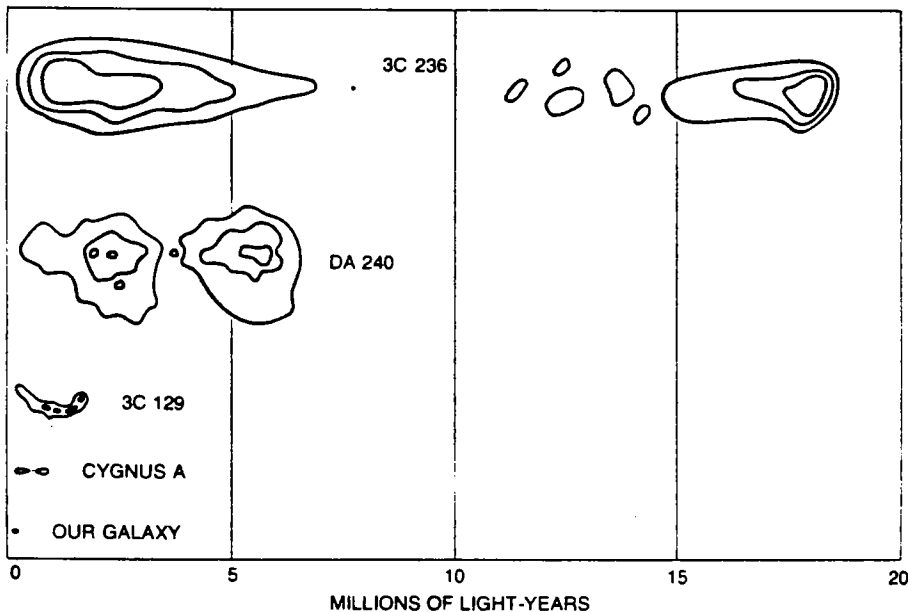


Fig. 24. Contours of the radio galaxy Cygnus A (after S. Mitton and M. Ryle, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 146, 223 (1969)) superposed on a photograph showing the optical galaxy midway between the two radio sources.



FOUR RADIO GALAXIES are compared in size with our galaxy, which is 100,000 light-years in diameter. They range from Cygnus A, 600,000 light-years across, to DA 240 and 3C 236, which are exceptionally large. Typical double galaxies are about size of Cygnus A.

Nun kommen wir zum Energieproblem. Wir wollen die minimale Energie abschätzen, welche in der Radioquelle in Form von relativistischen Teilchen und Magnetfeldern gespeichert ist.

Die Elektronenverteilung in der Quelle sei

$$N(E) = N_0 E^{-\gamma}, \quad E_1 \leq E \leq E_2 \quad (2.18)$$

Die gesamte Energie der Elektronen ist dann

$$E_e = \int E N(E) dE = N_0 \int_{E_1}^{E_2} E^{-\gamma+1} dE \quad (2.19)$$

Diese Elektronen geben die folgende Leuchtkraft für die Synchrotronstrahlung (siehe (2.14))

$$L = \int_{E_1}^{E_2} C_2 B_{\perp}^2 E^2 N(E) dE = N_0 C_2 B_{\perp}^2 \int_{E_1}^{E_2} E^{-\gamma+2} dE \quad (2.20)$$

Dabei ist

$$C_2 = \frac{2e^4}{3u^4 c^7} = 2.37 \times 10^{-3} \text{ (cgs)} \quad (2.21)$$

Wir eliminieren N_0 in (2.19) und (2.20)

$$E_e = C_2^{-1} L B_{\perp}^{-2} \frac{\gamma-3}{\gamma-2} \frac{E_1^{-\gamma+2} - E_2^{-\gamma+2}}{E_1^{-\gamma+3} - E_2^{-\gamma+3}} \quad (2.22)$$

Darin ersetzen wir noch die cutoff Energien durch die sog. kritischen Frequenzen. Ein Elektron strahlt hauptsächlich in der Nähe der Frequenz

$$\nu_c = C_1 B_{\perp} E^2, \quad C_1 = \frac{3e}{4\pi u^3 c^5} = 6.27 \times 10^{18} \text{ (cgs)} \quad (2.23)$$

(siehe Jackson, loc. cit.).

Damit können wir (2.22) in folgender Form schreiben, wobei $\alpha = -(1-\gamma)/2$ den Spektralindex bezeichnet:

$$E_e = c_2^{-1} c_1^{1/2} \tilde{c}(\alpha, \gamma_1, \gamma_2) B_{\perp}^{-3/2} L \equiv c_{12}(\alpha, \gamma_1, \gamma_2) B_{\perp}^{-3/2} L \quad (2.24)$$

mit

$$\tilde{c}(\alpha, \gamma_1, \gamma_2) = \frac{2\alpha - 2}{2\alpha - 1} \frac{\gamma_1^{(1-2\alpha)/2} - \gamma_2^{(1-2\alpha)/2}}{\gamma_1^{1-\alpha} - \gamma_2^{1-\alpha}} \quad (2.25)$$

Wir betrachten jetzt

$$E_{\text{total}} := E_e + E_B + E_P \quad (2.26)$$

\downarrow magnetische Energie, \searrow Energie der schweren Teilchen

Es sei $E_P = k E_e$ mit $1 \lesssim k \lesssim 10^3$. Die magnetische Energie ist

$$E_B = \frac{B^2}{8\pi} \phi \frac{4\pi}{3} R^3, \quad \phi: \text{Bruchteil des Volumens, welches durch Magnetfelder ausgefüllt ist.}$$

Die Gesamtenergie ist deshalb, wenn wir in (2.24) B_{\perp} durch B ersetzen

$$E_{\text{tot}} = (1+k) c_{12} B^{-3/2} L + \frac{B^2 \phi R^3}{6} \quad (2.27)$$

Das Minimum bezüglich B wird für

$$E_B = \frac{3}{4} (1+k) E_e \quad (2.28)$$

erreicht (fast Equipartition) mit zugehörigem Magnetfeld

$$B^{(\text{min})} = (4.5)^{2/7} (1+k)^{2/7} c_{12}^{2/7} \phi^{-2/7} R^{-6/7} L^{2/7} \quad (2.29)$$

Nach (2.28) ist

$$E_{\text{tot}}^{(\text{min})} = \frac{7}{4} (1+k) E_e = \frac{7}{4} (1+k) c_{12} B^{-3/2} L \quad (2.30)$$

Benutzen wir darin noch (2.29) so kommt

$$E_{\text{tot}}^{(\text{min})} = c_{13} (1+k)^{4/7} \phi^{3/7} R^{9/7} L^{4/7} \quad (2.31)$$

mit

$$\log C_{13} = -0.036 + (4/7) \log C_{12}$$

Als Beispiel betrachten wir die relativ schwache Quelle Fornax A:

$$\nu_1 \sim 10^7, \nu_2 \sim 10^{10} \text{ Hz}, \alpha = -0.75$$

$$L = 2.8 \times 10^{41} \text{ erg/s}$$

Durchmesser = 89 kpc, Volumen $V = 2.2 \times 10^{70} \text{ cm}^3$
(2 Quellen). Für $k = 100$ gilt (2.31)

$$\underline{E_{\text{tot}}^{(\text{min})} \approx 1.3 \times 10^{59} \text{ erg}, B^{(\text{min})} = 8 \times 10^{-6} \text{ Gauss}}$$

In diesem Beispiel entsprechen

$$\begin{array}{ccc} \nu_1 & \leq \nu & \leq \nu_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_1 & \leq E & \leq E_2 \end{array}, E_1 = 280 \text{ keV}, E_2 = 9 \text{ GeV}$$

Die totale Zahl der relativistischen Elektronen ist $\sim 10^{60.3}$,
entsprechend einer Dichte $\sim 10^{10} / \text{cm}^3$. Die Lebensdauer
von 9 GeV Elektronen in 8 Mikrogauss ist nach (2.17)
 $t_{1/2} = 1.4 \times 10^7$ Jahre, also sehr kurz.

Bei Cygnus A kommt man auf $\underline{E_{\text{tot}}^{(\text{min})} = 10^{60.6} \text{ erg.}}$

Nun ist

$$10^{60} \text{ erg} \approx 10^6 M_{\odot} c^2$$

Das Energieproblem, welches durch die Radiogalaxien aufge-
worfen wird ist gigantisch!

* * *

§ 3. Relativistische Strahlungsdämpfung

Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass das Modell (II.11.18) - (II.11.20) mit grundsätzlichen Schwierigkeiten behaftet ist, da die Punktteilchen eine divergente elektromagnetische Selbstenergie haben. In der Elektrodynamik Vorlesung wird diese Schwierigkeit durch eine Renormierung der Masse der Teilchen unter dem Tisch geschoben (ebenso auch in der QED).

Wir wollen an dieser Stelle die relativistische Verallgemeinerung der Strahlungsdämpfungskraft

$$\frac{ze^2}{3c^3} \frac{d^3 \underline{x}}{dt^3} \quad (3.1)$$

"herleiten".

Die Bewegungsgleichung eines Teilchens hat die Form

$$m \frac{dx^\mu}{d\tau^2} = \frac{e}{c} F^\mu_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} + g^\mu \quad (3.2)$$

Die räumlichen Komponenten des Vierervektors g^μ müssen sich für $v \ll c$ auf (3.1) reduzieren. Offensichtlich hat der Vektor

$$\frac{ze^2}{3c^3} \frac{d^3 x^\mu}{d\tau^3} \quad (3.3)$$

diese Eigenschaft. Da $\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} = c^2$ ist muss g^μ in (3.2) die Bedingung

$$g^\mu \frac{dx_\mu}{d\tau} = 0 \quad (3.4)$$

erfüllen. Der Ausdruck (3.3) erfüllt diese Bedingung aber nicht. Wir müssen also zu (3.3) einen Vektor addieren, der aus $dx^\mu/d\tau$ und seinen Ableitungen aufgebaut ist und dessen räumliche Komponenten im Grenzfall $v=0$ verschwinden. Offensichtlich muss dieser Vektor proportional zu $dx^\mu/d\tau$ sein. Der Proportionalitätsfaktor α ist so zu wählen, dass die Beziehung $g^\mu dx_\mu/d\tau = 0$ erfüllt

wird:

$$u_\mu (\ddot{u}^\mu + \alpha u^\mu) = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{c^2} u_\nu \ddot{u}^\nu$$

Folglich ist

$$g^\mu = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\ddot{u}^\mu - \frac{1}{c^2} u^\mu u_\nu \ddot{u}^\nu \right), \quad (3.5)$$

oder mit

$$0 = (u_\nu \ddot{u}^\nu)' = \dot{u}_\nu \ddot{u}^\nu + u_\nu \ddot{u}^\nu$$

aus Gleich

$$g^\mu = \frac{2e^2}{3c^3} \left[\ddot{u}^\mu + \frac{1}{c^2} (\dot{u}_\nu \ddot{u}^\nu) u^\mu \right]. \quad (3.6)$$

Dieser Ausdruck wurde erstmals von Dirac 1938 hergeleitet, wobei er sich aber nicht auf das nichtrelativistische Resultat (3.1) berufen hat.

Die Schwierigkeiten (Wegauflösungen, Akausalitäten), die mit der Gleichung (3.2), d.h. mit

$$m \ddot{x}^\mu = \frac{e}{c} F^\mu_\nu \dot{x}^\nu + \frac{2e^2}{3c^3} \left[\ddot{x}^\mu + \frac{1}{c^2} \dot{x}^\mu (\ddot{x}^\nu \ddot{x}_\nu) \right] \quad (3.7)$$

verbunden sind, haben wir in der Elektrodynamik diskutiert.

* * *