

Spezielle Relativitätstheorie

(N. Straumann)

Einleitung

Raum und Zeit gehören zu den grundlegendsten Begriffen der Physik. Jede physikalische Theorie setzt zur Formulierung ihrer Gesetze und deren Interpretation eine gewisse Raum-Zeit Geometrie voraus. So kann z.B. das Galilei'sche Trägheitsgesetz nur formuliert werden, wenn die Raum-Zeit Mannigfaltigkeit (unter anderem) ein vierdimensionaler affiner Raum ist. In der Newton'schen Mechanik wird überdies vorausgesetzt, dass die Gleichzeitigkeit von räumlich auseinanderliegenden Ereignissen eine objektive Bedeutung hat und für die räumlichen Schnitte gleicher Zeit die Euklidische Geometrie gilt. Ohne diese zusätzliche Struktur könnte z.B. das Newton'sche Gravitationsgesetz gar nicht formuliert werden.

Die Automorphismengruppe dieser Raum-Zeit Struktur (Galilei-Raum-Zeit) ist die bekannte Galileigruppe. In einer Galilei Raum-Zeit gibt es ausgezeichnete affine Koordinatensysteme, die sog. Galilei Systeme, welche der speziellen Struktur besonders angepasst sind und physikalisch den Inertialsystemen entsprechen. Die Galileigruppe operiert frei und transitiv auf dieser Familie von ausgezeichneten Systemen, d.h. zu zwei Systemen gibt es genau eine Galilei Transformation, welche das erste in das zweite überführt. [Man vergesse während sich die entsprechenden Aussagen für den dreidimensionalen Euklidischen Raum.]

Die Galileigruppe ist zugleich die Invarianzgruppe (Symmetriegruppe) der Newton'schen Mechanik: Alle Galilei Systeme sind gleichberechtigt. In ihnen drücken sich die mechanischen Gesetze völlig identisch aus (Relativitätsprinzip der Newton'schen Mechanik).

Die Maxwell'schen Gleichungen sind hingegen nicht invariant unter Galilei Transformationen. Dies folgt sofort daraus, dass

nach den Maxwell'schen Gleichungen die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen im Vakuum eine feste Zahl c ist, welche mit Laborexperimenten an Ladungen und Strömen gemessen werden kann. In einem Galilei transformierten System müsste sich diese Geschwindigkeit aber ändern (Addition der Geschwindigkeiten!).

Für das System der Mechanik plus der Elektrodynamik sieht es also zunächst so aus, dass sich die Invarianzgruppe auf die Euklidische Bewegungsgruppe reduziert und ein Inertialsystem gegenüber allen anderen ausgezeichnet ist (absoluter Raum). Zahlreiche optische Experimente, insbesondere der berühmte Versuch von Michelson und Morley haben aber gezeigt, dass diese Vorstellung keine empirische Grundlage hat. Vielmehr erwies sich die Lichtgeschwindigkeit als unabhängig von der Bewegung der Lichtquelle.

Diese verworrene Lage wurde durch die Spezielle Relativitätstheorie (SRT) von Einstein (1905) schlagartig geklärt, indem er sich vom Dogma einer absoluten Zeit befreite und die folgenden Postulate an die Spitze seiner Theorie stellte:

(I) Spezielles Relativitätsprinzip :

| Die Naturgesetze (insbesondere der Mechanik und der Elektrodynamik) lauten in allen Inertialsystemen gleich.

(II) Konstanz der Lichtgeschwindigkeit :

| Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich derselben universellen Konstanten c , unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle.

Aus (I) folgt, dass entweder die Mechanik oder die Elektrodynamik, oder beide abzuändern sind. (I) und (II) zusammen implizieren, dass mindestens die Mechanik abzuändern ist.

Es ist bemerkenswert, dass Einstein nicht die Maxwell'schen Gleichungen an die Spitze gestellt hat, sondern lediglich eine Folgerung aus diesen (Konstanz der Lichtgeschwindigkeit). Dies hat seinen Grund vermutlich unter anderem darin, dass Einstein 1905 nicht mehr volles Vertrauen zu den Maxwell'schen Gleichungen hatte, denn im selben Jahr entstand in Bern auch die Photonenhypothese (siehe das Zitat weiter unten).

Aus (I) und (II) lässt sich die Transformationsgruppe herleiten, welche verschiedene Inertialsysteme verbindet. Diese Gruppe, die sog. inhomogene Lorentzgruppe, ist zugleich die Invarianzgruppe der physikalischen Gesetze. Diese ist natürlich von der Galileigruppe verschieden, wovon die Gleichzeitigkeit von räumlich auseinanderliegenden Ereignissen ihre absolute Bedeutung verliert.

Wir werden sehen, dass die Maxwell'schen Gleichungen bezüglich der inhomogenen Lorentzgruppe invariant sind und deshalb durch die Einstein'schen Postulate keiner Änderung bedürfen.

Die Mechanik muss aber in eine Lorentzinvariante Form abgeändert werden. Die Änderung wirkt sich erst bei hohen Geschwindigkeiten $\sim c$ aus. In diesem Bereich hat sich die neue Mechanik glänzend bewährt (sonst würden Beschleunigungsanlagen bei hoher Energie nicht funktionieren).

Damit haben wir in wenigen Sätzen die SRT skizziert. Diese hat sich notwendigerweise aus der Elektrodynamik und Optik entwickelt. Unabhängig von Einstein waren auch Lorentz und Poincaré der Theorie sehr nahe gekommen. Es war aber Einstein, der die wirkliche Bedeutung der Lorentztransformationen als Automorphismen der physikalischen Raum-Zeit erkannte. Lorentz bemerkte dazu 1928:

"... Daher führte ich das Konzept der lokalen Zeit ein, die für relativ zueinander bewegte Bezugssysteme verschieden ist. Ich dachte aber nie, dass sie etwas mit der wirklichen Zeit zu tun hat. Die wirkliche Zeit was für

wird noch immer durch das alte Konzept einer absoluten Zeit gegeben, die unabhängig von jedem Koordinatensystem ist. Es gab für mich nur diese eine wahre Zeit. Ich betrachtete die Zeittransformationen nur als heuristische Arbeitshypothese. So ist die Relativitätstheorie wirklich allein Einsteins Werk". Den gleichen Standpunkt dürfte auch Poincaré angenommen haben. Die formale Seite der SRT ist aber bei Poincaré schon sehr weit entwickelt.

Die SRT war für die weitere Entwicklung der Physik von ausschlaggebender Bedeutung. Das Problem Nr. 1 der theoretischen Physik besteht auch heute noch in der Schaffung einer relativistischen Quantentheorie. Trotz jahrzehntelanger Bemühungen ist dies bis jetzt nur partiell gelungen. Es besteht die begründete Hoffnung, dass die Phänomene der Elementarteilchen-Physik im Rahmen einer solchen Theorie beschrieben werden können. Diese Hoffnung wird vor allem durch den beispiellosen Erfolg der Quanten-Elektrodynamik gestützt. Diese Theorie befriedigt (cum grano salis) die Postulate einer relativistischen Quantentheorie in einem "störungstheoretischen Sinne".

Noch kurz vor seinem Tod, am 19. Februar 1955, beantwortete Einstein die Frage nach der Entstehung der SRT so:

«Es ist zweifellos, daß die Spezielle Relativitätstheorie, wenn wir ihre Entwicklung rückschauend betrachten, im Jahre 1905 reif zur Entdeckung war. Lorentz hatte schon erkannt, daß für die Analyse der Maxwell'schen Gleichungen die später nach ihm benannte Transformation wesentlich sei, und Poincaré hat diese Erkenntnis noch vertieft. Was mich betrifft, so kannte ich nur Lorentz' bedeutendes Werk von 1895, aber nicht Lorentz' spätere Arbeit und auch nicht die daran anschließende Untersuchung von Poincaré. In diesem Sinne war meine Arbeit selbständig. Was dabei neu war, war die Erkenntnis, daß die Bedeutung der Lorentztransformation über den Zusammenhang mit den Maxwell'schen Gleichungen hinausging und das Wesen von Raum und Zeit im allgemeinen betraf. Auch war die Einsicht neu, daß die 'Lorentz-Invarianz' eine allgemeine Bedingung sei für jede physikalische Theorie. Dies war für mich von besonderer Wichtigkeit, weil ich schon früher erkannt hatte, daß die Maxwell'sche Theorie die Mikrostruktur der Strahlung nicht darstelle und deshalb nicht allgemein haltbar sei.»

Kapitel I. Raum und Zeit in der Newton'schen Mechanik

In diesem Kapitel analysieren wir die der klassischen Mechanik zugrunde gelegte Struktur des Raum-Zeit-Kontinuums.

§ 1. Inertialsystem und Inertialzeit

Wir denken uns ein Bezugssystem gegeben, welches durch einen geeigneten starren Körper (etwa die Wände eines Laboratoriums) repräsentiert wird. In jedem solchen Bezugssystem legen wir die Maßstäbe für Länge und Zeit gleich fest (d.h. durch dasselbe physikalische Phänomen: z.B. mit Hilfe der roten Cd-Linie als Längeneinheit und der Frequenz einer Atomuhr für die Zeitmessung). Wir haben gute empirische Gründe für die Längenmessungen die Euklidische Geometrie anzunehmen.

Das Trägheitsgesetz von Galilei zeichnet eine Klasse von Bezugssystemen aus.

Definition. Jedes Bezugssystem, gegen welches die Bahnen von drei vom gleichen Punkt nach verschiedenen (nicht in einer Ebene liegenden) Richtungen fortgeschleuderten, dann aber sich selbst überlassenen Massenpunkten geradlinig sind, heißt Inertialsystem.

Aus Erfahrung wissen wir: (i) Es gibt solche Systeme (zumindest in Abwesenheit von Gravitationsfeldern). (ii) Gegen ein Inertialsystem ist auch die Bahn jedes anderen, sich selbst überlassenen Massenpunktes geradlinig. In diesen Erfahrungen äußert sich ein Teil des Trägheitsgesetzes aus.

Des Präzisions halber müsste man folgendes befügen: Es ist denkbar, dass in Nichtinertialsystemen die Euklidische Geometrie nicht mehr gilt [Dies ist in der SRT tatsächlich der Fall], wohl aber in Inertialsystemen. In diesem Falle müsste man sagen: Es gibt Bezugssysteme, in denen sowohl die Euklidische Geometrie als auch das Trägheitsgesetz gelten [Die Geometrie gehört untrennbar zur Physik!].

Im weiteren wählen wir ^{als} Zeitskala immer eine Inertial-
zeitskala im Sinne folgender

Definition. Inertialzeitskala heisst jede Zeitskala, nach
der ein sich selbst überlassener, bewegter Massenpunkt in
einer Inertialbahn gleiche Strecken in gleichen Zeiten zu-
rückt.

Die Erfahrung zeigt uns: Nach einer Inertialzeitskala
legt auch jeder andere, sich selbst überlassene Massenpunkt
in einer Inertialbahn gleiche Strecken in gleichen Zeiten
zurück.

Die im Anschluss an die beiden letzten Definitionen aus-
gesprochenen Erfahrungen bilden das Trägheitsgesetz aus:

Trägheitsgesetz: In einem Inertialsystem bewegt sich ein
unbeeinflusster Massenpunkt relativ zu einer Inertialzeit-
skala gleichförmig und geradlinig.

Die Begriffe dieses Abschnittes sind auch für die SRT zentral.
Die allgemeine Relativitätstheorie stellt uns eine Verall-
gemeinerung der SRT dar, als es in ihr nur noch den Be-
griff des lokalen Inertialsystems gibt.

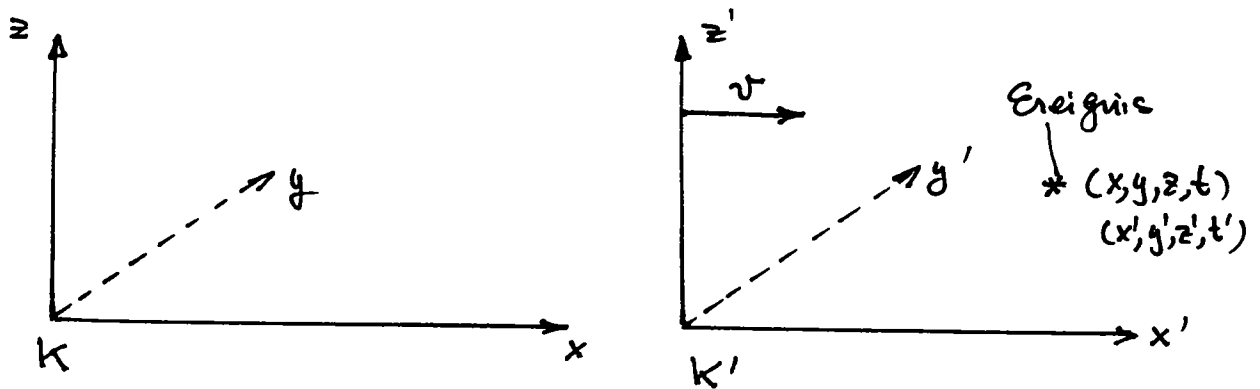
§2. Absolute Zeit, Galilei-Transformationen

In der "vorrelativistischen" Physik (< 1905) wurde un-
ausgesprochen angenommen, dass die Gleichzeitigkeit von
räumlich distanten Ereignissen eine objektive (unabhängig
vom Bezugssystem) Bedeutung hat*). Würde es beliebig grosse
Signalgeschwindigkeiten geben, so wäre dem nicht zu wider-
sprechen. Dann hätte man die Möglichkeit distante Uhren
zu synchronisieren. In der SRT wird sich aber erweisen,
dass die Lichtgeschwindigkeit eine maximale Signalgeschwin-
digkeit ist. Einstein erkannte, dass deshalb die Gleichzeitig-
keit von räumlich getrennten Ereignissen ihre objektive
Bedeutung verliert. Dies werden wir im Kapitel II besprechen,

*) Siehe z.B. das Zitat von Lorentz in der Einleitung

aber vorläufig (in diesem Kapitel) an der absoluten Zeit festhalten [„Der Glaube an die objektive Bedeutung der Gleichzeitigkeit beruht ungerüchlich, zweifellos auf der Annahme, dass jedermann mit voller Selbstverständlichkeit die Dürge, die er sieht, in den Zeitpunkt ihrer Wahrnehmung setzt“ (H. Weyl)].

Wir betrachten nun den Übergang von einem Inertialsystem K auf ein zweites Inertialsystem K' . Dabei wählen wir zuerst eine spezielle Situation (siehe Fig.), bei der sich K' in der x -Richtung von K mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt und die Cartesischen Achsen von K' bei der Bewegung parallel zu denjenigen von K bleiben.



Ferner mögen die beiden Systeme für $t = t' = 0$ zusammenfallen. Ein Ereignis, wie des Aufleuchten einer Lampe, habe die Raum-Zeit Koordinaten (x, y, z, t) bezüglich K und (x', y', z', t') bezüglich K' .

Die klassischen (und "common sense") Beziehungen zwischen den beiden Koordinatensätzen sind durch die spezielle Galilei-Transformation

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, & y' &= y, & z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{2.1}$$

gegeben. Die letzte Gleichung drückt den absoluten Charakter der Zeit aus.

Wir betrachten nun noch allgemeine Galilei-Transformationen (gedrehte Achsen, allgemeine Richtung der Relativgeschwindigkeit).

keit, Verschiebung der Koordinaten - sowie des Zeitsprungs):

$$\begin{aligned}\underline{x}' &= R \underline{x} + \underline{v} t + \underline{a} \\ t' &= t + b\end{aligned}\tag{2.2}$$

Dabei ist R eine Drehung: $R^T R = 1$. Die Galileitransformation ist charakterisiert durch

$$g = (R, \underline{v}, \underline{a}, b)$$

Die Menge dieser Transformationen bildet eine Gruppe mit der Identität $(1, \underline{0}, \underline{0}, 0)$, dem Multiplikationsgesetz (Zusammensetzung von zwei Galileitransformationen)

$$g_1 g_2 = (R_1 R_2, R_1 \underline{v}_2 + \underline{v}_1, R_1 \underline{a}_2 + \underline{v}_1 b_2 + \underline{a}_1, b_1 + b_2)\tag{2.3}$$

und dem Inversen

$$g^{-1} = (R^{-1}, -R^{-1} \underline{v}, -R^{-1} \underline{a} + R^{-1} \underline{v} b, -b)\tag{2.4}$$

Verifiziere, dass alle Gruppenaxiome erfüllt sind. Diese Gruppe ist isomorph der Gruppe aller reeller 5×5 Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} R & \underline{v} & \underline{a} \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\tag{2.5}$$

Falls $R \in SO(3) := \{ R \mid R^T R = 1, \det R = 1 \}$ wird diese Gruppe die eigentliche orthogonale Galileigruppe G_+^\uparrow genannt. Die volle Galileigruppe G wird durch G_+^\uparrow , sowie die Raum- und Zeitspiegelungen

$$\begin{aligned}P: (\underline{x}, t) &\mapsto (-\underline{x}, t) \\ T: (\underline{x}, t) &\mapsto (\underline{x}, -t)\end{aligned}\tag{2.6}$$

erzeugt. Die Galileigruppe hat unter anderen die folgenden Untergruppen:

- (a) Die Euklidische Bewegungsgruppe bestehend aus den Elementen

$$(R, 0, a, 0)$$

(b) Die Menge der speziellen Galilei Transformationen (dreiparametrische Abelsche Untergruppe):

$$g(\underline{v}) = (1, \underline{v}, 0, 0)$$

Beachte

$$g(\underline{v}_1) g(\underline{v}_2) = g(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)$$

(Additionsgesetz der Geschwindigkeiten)

§ 3. Das Relativitätsprinzip der Newton'schen Mechanik

Die folgende Aufgabe gehört zu den Alltagsverfahrungen: Es ist unmöglich durch mechanische Experimente innerhalb eines abgeschlossenen Kastens ("abgeschlossen" soll heißen, dass wir weder durch Fenster noch sonstwie die Aussenwelt beobachten können) zu entscheiden, ob sich der Kasten in "Ruhe" oder in gleichförmig geradliniger Bewegung befindet.

Dies wollen wir an einem Beispiel nachrechnen. Dazu betrachten wir ein abgeschlossenes System von N Massenpunkten, zwischen denen Zentralkräfte (aber keine äusseren Kräfte) wirken. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$m_k \ddot{\underline{x}}_k = \sum_{l \neq k} \underline{F}_{kl}, \quad (1 \leq k \leq N) \quad (3.1)$$

wobei

$$\underline{F}_{kl} = \underline{x}_{kl} f_{kl}(|\underline{x}_{kl}|), \quad \underline{x}_{kl} := \underline{x}_k - \underline{x}_l \quad (3.2)$$

[Wegen $\underline{x}_{kl} = -\underline{x}_{lk}$ gilt das Reaktionsprinzip $\underline{F}_{kl} = -\underline{F}_{lk}$]

Nun behaupte ich: Ist $\underline{x}_k(t), k=1, \dots, N$, eine Lösung von (3.1) so auch die Galilei transformierte Bahn $\hat{\underline{x}}_k(t)$, definiert durch

$$\hat{\underline{x}}_k(\pm t + b) := \pm R \underline{x}_k(t) + \underline{v}t + \underline{a} \quad (3.3)$$

In der Tat ist offensichtlich

$$\frac{d^2}{dt^2} \hat{\underline{x}}_k(t) = \pm R \left(\frac{d^2}{dt^2} \underline{x}_k \right) (\pm t - b)$$

und

$$\underline{F}_{ve}(\hat{x}_{ve}(t)) = \pm R \underline{F}_{ve}(x_{ve}(\pm t - b))$$

Aus (3.1) folgt damit die Behauptung.

Die Galileigruppe ist also eine Invarianzgruppe der Bewegungsgleichungen (3.1). [An Stelle von (3.1) und (3.2) könnten wir auch allgemeinere Galilei-invariante mechanische Systeme betrachten].

Wir fassen den wesentlichen Inhalt des Gesagten zusammen:

Galilei'sches Relativitätsprinzip

Je zwei Inertialsysteme sind über genau eine Galilei-Transformation miteinander verknüpft und umgekehrt führt jede Galilei-Transformation ein Inertialsystem wieder in ein solches über [Die Galileigruppe operiert frei und transitiv auf den Inertialsystemen]. Alle Inertialsysteme sind für die Mechanik gleichberechtigt: Die Gesetze der Mechanik abgeschlossener Systeme sind invariant unter der Galileigruppe.

Durch die Galileigruppe wird im gleichen Sinne die Geometrie der Raum-Zeit Mannigfaltigkeit festgelegt, wie die Euklidische Bewegungsgruppe die Euklidische Geometrie festlegt.

§4. Axiomatische Formulierung der Galilei Raum-Zeit.

Zur Klärung der Begriffe ist es nützlich die Struktur der Galilei Raum-Zeit in einer invarianten (koordinatenfreien) Weise zu formulieren, wie man dies etwa für die Euklidischen Räume gewohnt ist.

Die absolute Bedeutung von gleichförmiger Bewegung beinhaltet unter anderem, dass die Raum-Zeit Mannigfaltigkeit ein affiner Raum ist. Als Repetition der linearen Algebra gebe ich zunächst die axiomatische Definition eines affinen Raumes

Definition 4.1: Ein affiner Raum ist ein Tripel $(M, E, +)$. Davon ist M eine Menge, E ein (endlichdimensionaler) Vektorraum und $+$ bezeichnet eine freie transitive Operation von E , als Abel'sche Gruppe aufgefasst, auf M . Dies be-

denkt: Es gibt eine Abbildung von $E \times M$ auf M , welche einem Paar $(v, p) \in E \times M$ einen Punkt $v+p \in M$ so zuordnet, dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) $(v_1 + v_2) + p = v_1 + (v_2 + p)$,
- (ii) $v + p = p \iff v = 0$ (für jedes $p \in M$),
- (iii) Zu $p, q \in M$ existiert $v \in E$ mit $v + p = q$.

Notation: Den (nach (iii)) eindeutigen Vektor in (iii) bezeichnen wir mit \vec{pq} , oder auch mit $q - p$.

Definition 4.2: Ein Homomorphismus, oder eine affine Abbildung zwischen zwei affinen Räumen $(M_1, E_1, +)$ und $(M_2, E_2, +)$ ist eine Abbildung $f: M_1 \rightarrow M_2$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) Aus $\vec{pq} = \vec{p'q'}$ folgt $\vec{f(p)f(q)} = \vec{f(p')f(q')}$
- (ii) Die Abbildung $\tilde{f}: E \rightarrow E$, definiert durch

$$\tilde{f}(\vec{pq}) = \vec{f(p)f(q)}$$

ist linear.

\tilde{f} nennen wir die im Differenzraum E induzierte lineare Abbildung.

Definition 4.3: Ein affines Koordinatensystem $(o; e_1, \dots, e_n)$ besteht aus einem festen Punkt $o \in M$ und einer Basis (e_1, \dots, e_n) von E . Jeder Punkt $p \in M$ bestimmt eine Folge von n Zahlen x^1, \dots, x^n durch

$$\vec{op} = \sum_{i=1}^n x^i e_i$$

Die $x^i, i=1 \dots n$, sind die affinen Koordinaten von p relativ zum affinen Koordinatensystem $(o; e_1, \dots, e_n)$.

Nun definieren wir axiomatisch die Galilei Raum-Zeit.

Definition 4.4: Eine Galilei Raum-Zeit ist ein vierdimensionaler affiner Raum $(M, E, +)$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Auf dem Differenzraum E existiert eine Linearform τ [Interpretation: Zu zwei Ereignissen $p, q \in M$ ist $\tau(\vec{pq})$ der objektive Zeitunterschied].
- (ii) Auf dem Unterraum $E_0 := \{v \in E \mid \tau(v) = 0\}$ ist eine positiv definite Bilinearform (\cdot, \cdot) gegeben, d.h. E_0 ist ein Euklidischer Vektorraum.

Wir betrachten die Äquivalenzrelation:

$$p \sim q \iff \tau(\vec{pq}) = 0 \quad (\text{d.h. } \vec{pq} \in E_0)$$

Die Äquivalenzklassen bilden die Schichten gleicher Zeit und sind zunächst affine Unterräume^{*} mit Differenzraum E_0 . Da aber E_0 ein Euklidischer Vektorraum ist sind die Schichten konstanter Zeit sogar Euklidische Räume [Euklidischer Raum: affiner Raum mit positiv definierter Bilinearform auf Differenzraum]

Nun zeigen wir, dass die Galilei-Gruppe die Automorphismengruppe einer Galilei Raum-Zeit ist.

Satz 4.1. Die Gruppe der affinen Abbildungen $f: M \rightarrow M$ einer Galilei Raum-Zeit, welche folgende Eigenschaften erfüllen

(i) $f^*(\tau) = \pm \tau$,

wo $f^*(\tau)(v) := \tau(f(v))$;

(ii) Die Restriktion $\tilde{f}|_{E_0}$ von \tilde{f} auf E_0 ist eine orthogonale Transformation von E_0 [Das bedeutet: In

^{*}) Ein affiner Unterraum von $(M, E, +)$ ist eine Teilmenge $N \subset M$ mit der Eigenschaft, dass die Vektoren \vec{pq} ($p, q \in N$) einen Unterraum F von E bilden.

den Schritten gleicher Zeit induziert f eine Euklidische Transformation]
 [ist isomorph zur Galileigruppe G_1 .

Zum Beweis führen wir ein Galilei-Koordinatensystem ein
Definition 4.5: Ein affines Koordinatensystem $(O; e_1, e_2, e_3, e_0)$ einer Galilei Raum-Zeit $(M, E, +, \pi, (\cdot, \cdot))$ ist ein Galileisystem falls die Basisvektoren e_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) die folgenden Bedingungen erfüllen

- (i) $\pi(e_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$ (d.h. $e_i \in E_0$);
- (ii) $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$;
- (iii) $\pi(e_0) = \pm 1$ (4.1)

Beweis von Satz 4.1: Wir drücken einen Automorphismus f in Satz 4.1 in einem Galileisystem aus. f , als affine Transformation, ändert die Koordinaten in Matrixschreibweise gemäß

$$x \mapsto x' = Lx + a, \quad L: \text{lineare Transf.} \tag{4.2}$$

Nun ist

$$\vec{O f(p)} = \vec{O f(O)} + \vec{f(O) f(p)} \tag{4.3}$$

Wenden wir auf (4.3) die Linearform π an so erhalten wir

$$\underbrace{\pi(\vec{O f(p)})}_{x'^0} = \underbrace{\pi(\vec{O f(O)})}_{=: b} + \underbrace{\pi(\vec{f(O) f(p)})}_{f^*(\pi)(\vec{O f}) = \pm \pi(\vec{O f}) = \pm x^0}$$

d.h.

$$x'^0 = \pm x^0 + b \tag{4.4}$$

Für $\pi(\vec{O f}) = 0$, d.h. $x^0 = 0$, ist die Abbildung

$$\vec{O f} \mapsto \vec{f(O) f(p)}$$

eine orthogonale Transformation. Deshalb ist für $x^0 = 0$

$$x'^i = R^i_j x^j + a^i, \quad R^T R = 1 \quad (4.5)$$

Für ein allgemeines x^0 ist nach (4.2), (4.4) und (4.5)

$$\begin{aligned} x'^i &= R^i_j x^j + v^i x^0 + a^i \\ x'^0 &= \pm x^0 + b \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dies ist genau die in §2 angegebene Form einer Galilei-Transformation. \square

Den Galileisystemen entsprechen physikalisch die Inertialsysteme. Sie sind der Struktur einer Galilei Raum-Zeit besonders angepasst.

Die Galilei-Transformationen können wir auch passiv interpretieren (der Satz 4.1 gibt eine aktive Interpretation). Man weist leicht nach, dass der Übergang zwischen zwei Galileisystemen (Def. 4.5) durch genau eine Transformation (4.6) der zugehörigen Koordinaten gegeben ist und dass dabei die ganze Galileigruppe durchlaufen wird. Die Galileigruppe können wir also auffassen entweder aktiv als Automorphismengruppe, oder passiv als Koordinatentransformationen beim Wechsel der Galileisysteme. Diese Bemerkung überträgt sich sinngemäß auf viele andere analoge Situationen.

Die Galilei Raum-Zeit hat eine absolute Faserung: Wir betrachten den Quotientenraum

$$T := M / E_0 \quad (4.7)$$

[Die "Punkte" von T sind die Schichten gleicher Zeit].

T ist in natürlicher Weise ein 1-dimensionaler affiner Raum mit dem Differenzraum E/E_0 . Auf diesem definiert die Linearform π eine Euklidische Metrik und deshalb ist T ein 1-dimensionaler Euklidischer Raum.

Sei $\pi: M \rightarrow T$ die kanonische Projektion von M auf T . In der Sprache der Faserbündel ist (M, T, π) ein Faserbündel mit E_0 als typische Faser (s. Fig.). Man hat also

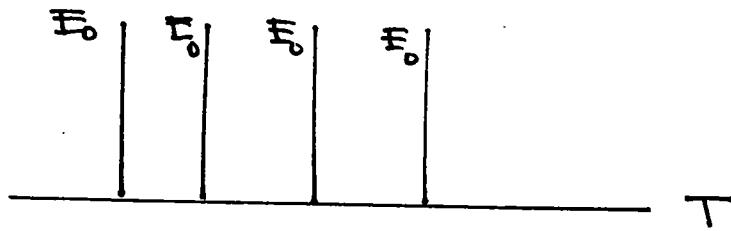


Fig. Galilei Raum-Zeit als Faserbündel

eine "vertikale" Faserung von M . Die Faser über jedem $t \in T$ ist eine gleichzeitige Schicht; π ordnet jedem Ereignis die absolute Zeit zu.

Die Zuordnung $(M, E, +, \pi, (\cdot, \cdot)) \mapsto (M, T, \pi)$ ist ein kovarianter Funktor von der Galileikategorie [Objekte = Galilei-Räume, Morphismen = Galilei-Isomorphismen] in die Kategorie der differenzierbaren Faserbündel, wenn wir einem Galileiisomorphismus $f: M_1 \rightarrow M_2$ den Morphismus (f, s) von (M_1, T_1, π_1) nach (M_2, T_2, π_2) zuordnen, wobei s wie folgt definiert ist

$$\begin{array}{ccc}
 M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \\
 \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\
 T_1 & \xrightarrow{s} & T_2
 \end{array}
 \quad \pi_2 \circ f = s \circ \pi_1$$

(sogar Euklidische-)

s existiert und ist eine affine Transformation von T_1 nach T_2 .

Es gibt aber keine "horizontale" Faserung. Eine horizontale Faserung erhielte man erst dann, der Raum im Sinne Newtons absolut wäre, d.h. wenn es einen objektiven Sinn machen würde von zwei Ereignissen zu verschiedenen Zeiten zu sagen, sie fänden am selben Ort statt. Dann hätte die Raum-Zeit nämlich Galilei eine kanonische Produktstruktur: jedem Ereignis könnten wir seinen objektiven Ort und seine objektive Zeit zuordnen. Für eine Galilei Raum-Zeit gibt es keine kanonische Zerlegung $M = \text{Raum} \times \text{Zeit}$ [Das könnte man wieder gelebt in der Sprache der Kategorien formulieren].

* * *

Damit haben wir die Struktur der Raum-Zeit nämlich

folgt der klassischen Mechanik zur Genüge analysiert. Galilei invariante physikalische Gesetze müssen sich in-
 früher in Galilei'schen Formulierungen lassen und dürfen
 keine weiteren absoluten Elemente*) einführen. Diese beiden
 Forderungen drücken in anderer Sprechweise das Galilei'sche
 Relativitätsprinzip aus.

§5. Der Äther von Maxwell

"Die Emanzipation des Feldbegriffs von der Sehung eines
 materiellen Trägers gehört zu den psychologisch interessantesten
 Vorgängen in der Entwicklung des physikalischen Denkens"
 (A. Einstein).

Die Maxwell'schen Gleichungen der Elektrodynamik sind nicht
 invariant bezüglich der Galileigruppe. Diese Gleichungen ent-
 halten nämlich eine Konstante c , welche zugleich die Aus-
 breitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen an-
 gibt und nach dem Additionstheorem der Geschwindig-
 keiten in der Galilei'schen Kinematik kann diese Ge-
 schwindigkeit nicht unabhängig vom Beobachter sein.

Beobachtet man neben den mechanischen auch elektromag-
 netische Erscheinungen, so sah es deshalb im 19. Jahrh-
 hundert so aus, als ob nun doch ein ausgezeichnetes Iner-
 tialsystem existierte. Das ausgezeichnete Bezugssystem wäre
 dasjenige, in welchem das Licht in jeder Richtung die-
 selbe Geschwindigkeit c besitzt. In diesem System sollte
 der ominöse Äther ruhen, den man sich als mechanischen
 Träger der elektromagnetischen Wellen dachte. Damit war man
 wieder beim absoluten Raum Newtons.

Mit dem Äther war es aber eine sonderbare Sache, denn man
 musste ihm die wertvollsten Eigenschaften zuschreiben.
 Trotzdem befreite man sich nur ganz langsam von diesem
 mysteriösen materiellen Träger, und dies erst nachdem
 zahlreiche Experimente, die versuchten eine Bewegung relativ

*) Ein absolutes Element wäre etwa die Auszeichnung eines
 Vektors $a \in \mathbb{E}$ mit $\pi(a) \neq 0$. Dies würde der Einführung eines
 "horizontalen" Faserung, d.h. des absoluten Raumes entsprechen.

zum ruhenden Äther nachzuweisen, negativ verlaufen waren.

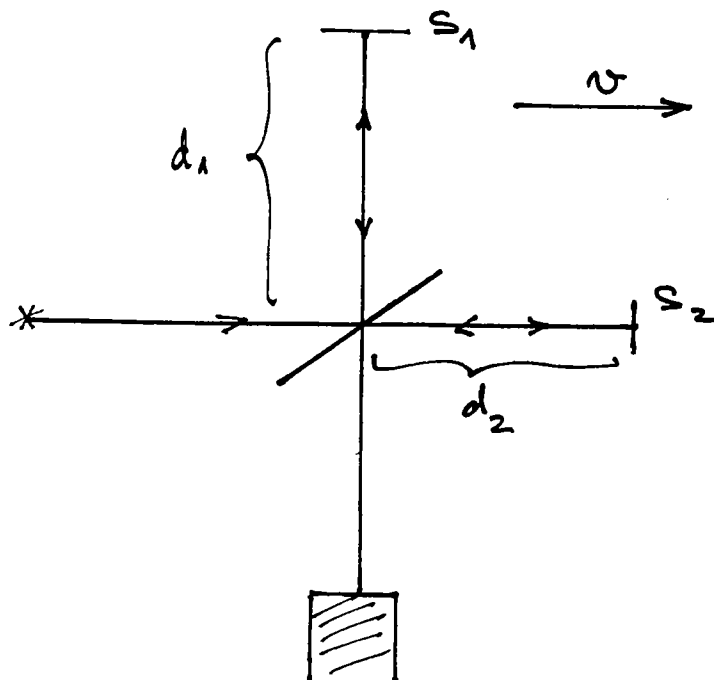
Die SRT hat mit dem Äther restlos aufgeräumt, indem sie seine Überflüssigkeit bzw. prinzipielle Unbeobachtbarkeit aufdeckte.

§ 6. Das Michelson-Morley Experiment (1881, 1887).

"Auf meine eigene Entdeckung hat Michelsons Resultat keinen bedeutenden Einfluss gehabt" (A. Einstein).

Wir wollen an dieser Stelle das berühmteste Experiment besprechen, welches versuchte die Bewegung der Erde relativ zum Äther (mit negativem Resultat) zu bestimmen.

Die benutzte Apparatur ist schematisch in der folgenden Figur dargestellt. Eine Lichtquelle L wird auf eine dünne, halbdurchlässige, versilberte Glasplatte bei P fokussiert. Diese Platte zerlegt den Strahl in zwei senkrechte Teilstrahlen. Der eine geht zum Spiegel S_1 , wird dort zur Platte zurückreflektiert und kommt in F (Beobachtungsfernrohr) mit dem großen Strahl, der vom Spiegel S_2 reflektiert wird zur Interferenz. [Da das Licht auf beiden Wegen P einmal durchsetzt und einmal an P reflektiert wird, ist die Schwingung auf beiden Wegen gleich; auf genaue Halbdurchlässigkeit kommt es also nicht an.]

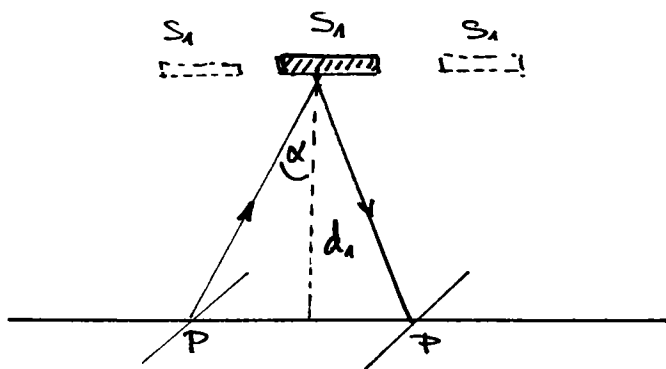


Die Bedingungen sind so gewählt, dass die Weglängen der beiden Lichtstrahlen fast gleich sind.

Angenommen, die Geschwindigkeit v der Erde durch den Äther sei parallel zum Lichtweg von P nach S_2 . Die Geschwindigkeit des Lichtes auf dem Wege von P nach S_2 und zurück ist nach der Äthervorstellung gleich $c \pm v$. Die Zeit t_2 , welche das Licht von P nach S_2 und zurück nach P braucht ist

$$t_2 = d_2 \left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v} \right) = 2 \frac{d_2}{c} \frac{1}{1-v^2/c^2}$$

Für den Lichtweg von P nach S_1 und zurück nach P stellt man sich die Situation zweckmäßig im ausgedehneten ("Ruhe"-) System vor (s. Fig.).



Da $\sin \alpha = v/c$ ist der effektive Lichtweg

$$\frac{2d_1}{\cos \alpha} = 2d_1 \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

und die zugehörige Zeit

$$t_1 = \frac{2d_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Der Unterschied der beiden Zeiten ist

$$\Delta t := t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \left[\frac{d_2}{1-v^2/c^2} - \frac{d_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right]$$

Für $v \ll c$ gilt

$$\Delta t \approx \frac{2}{c} \left[(d_2 - d_1) + \frac{v^2}{c^2} \left(d_2 - \frac{d_1}{2} \right) \right]$$

Rotiert man die Apparatur um 90° , so sind die entsprechenden Zeiten

$$t'_2 = \frac{2d_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad t'_1 = \frac{2d_1}{c} \frac{1}{1-v^2/c^2}$$

und folglich

$$\Delta t' := t'_2 - t'_1 \approx \frac{2}{c} \left[(d_2 - d_1) + \frac{v^2}{c^2} \left(\frac{d_2}{2} - d_1 \right) \right]$$

Deshalb ist

$$\underline{\underline{\Delta t' - \Delta t = -\frac{1}{c} (d_1 + d_2) \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6.1)$$

Dieser Unterschied müsste eine Verschiebung der Interferenzstreifen bewirken.

Numerik: $v_{\text{Erde}} \approx 3 \times 10^6 \text{ cm/sec} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} \approx 10^{-8}$

Mit $d_1 + d_2 \approx 3 \times 10^2 \text{ cm}$ ist der Unterschied (6.1) ungefähr 10^{-16} sec . Die relevante Länge (welche mit der Wellenlänge des Lichtes verglichen werden muss) ist

$$c |\Delta t' - \Delta t| \approx 3 \times 10^6 \text{ cm} = 300 \text{ \AA} \quad (6.2)$$

Da das sichtbare Licht Wellenlängen von der Größenordnung 3000 \AA hat, ist der erwartete Effekt der Verschiebung etwa 10% der Streifenbreite. Der Michelson-Morley Apparat war so konstruiert, dass $v \approx 10^6 \text{ cm/sec}$ hätte beobachtet werden können. Aber keine Verschiebung der Interferenzstreifen wurde festgestellt.

In der Folge wurde das Experiment — bei gleichbleibendem Resultat — mit gesteigerter Empfindlichkeit mehrmals wiederholt. Eine Übersicht findet man in

Shankland et al., Rev. Mod. Phys., 27, 167 (1955).

Historisch wurden verschiedene Ausflüchte versucht um die Äthervorstellung mit dem negativen Ausfall des Michelson-Morley Experiments in Einklang zu bringen. Zunächst könnte man sich vorstellen, dass der Äther von der Erde mitgeschleppt wird. Dann gäbe es aber keine Aberration des

Sternenlichtes [Letztere wurde schon 1727 durch Bradley entdeckt]. Es wären aber immer noch Theorien denkbar, bei denen die Lichtgeschwindigkeit nur gleich c ist, wenn sie relativ zur Quelle gemessen wird (d.h. relativ zum Bezugssystem, in welchem die Quelle ruht). Ein Beispiel einer solchen Theorie wurde von Ritz*) vorgeschlagen.

Schliesslich führten Fitzgerald und Lorentz (1892) die Kontraktionshypothese ein, nach der alle materiellen Körper in der Bewegungsrichtung (relativ zum Äther) universell mit dem Faktor $\sqrt{1-v^2/c^2}$ kontrahiert werden. Dies war wohl der letzte Versuch, die Äthervorstellung zu retten, bevor sie von der SRT weggefasst wurde.

Zur Zeit, als Einstein die universelle Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle postulierte, war dies eine experimentell ungeprüfte Annahme**).

* * *

*) Für eine Diskussion dieser Theorien siehe § 3 im Enzyklopädie Artikel von W. Pauli.

***) Die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit vom Bewegungszustand der Lichtquelle wurde erst in neuerer Zeit in Hochenergieexperimenten eindeutig nachgewiesen. Siehe z.B. T. Aigner et al., PRL 12, 260 (1964) und Archiv f. Fys. 31, 145 (1965).

Kapitel II. Die Grundlagen der Speziellen Relativitätstheorie

"Die Spezielle Relativitätstheorie ist an der Krängasse 49 in Bern entstanden und die Anfänge der Allgemeinen Relativitätstheorie ebenfalls in Bern. Klarer ist sie mir aber erst in Prag und in Zürich geworden, worauf ich sie in Berlin zum vorläufigen Abschluss gebracht habe."
(A. Einstein)

"Zwischen der Konzeption der Idee der Speziellen Relativitätstheorie und der Beendigung der betreffenden Publikation sind fünf oder sechs Wochen vergangen. Es würde aber kaum berechtigt sein, dies als Geburtstag zu bezeichnen, nachdem doch vorher die Argumente und Bausteine jahrelang vorbereitet worden waren, allerdings ohne die endgültige Entscheidung zu bringen. Bei der Allgemeinen Relativitätstheorie kann man erst recht nicht von einem Geburtstag sprechen. (A. Einstein).

§ 1. Die Einstein'schen Postulate

Die am Ende des 1. Kapitels beschriebene verworrene Lage wurde durch die SRT von Einstein (1905) schlagartig geklärt. Einstein empfand es als stossend, dass das Relativitätsprinzip in der Elektrodynamik nicht gelten sollte. Deshalb postulierte er

(I) Spezielles Relativitätsprinzip: Alle Inertialsysteme sind bezüglich allen physikalischen Gesetzen gleichberechtigt.

Daraus folgt, dass entweder die Mechanik oder die Elektrodynamik, oder beide abzuändern sind.

Das Relativitätsprinzip wird durch das folgende Gedankenexperiment verdeutlicht. Man schreibe eine Anzahl von Instruktionen für die Konstruktion eines bestimmten (aber beliebigen) Apparates nieder, inklusive seiner Gebrauch für die Durchführung eines bestimmten Experiments. [Das Experiment darf nur Systeme

beurteilen, deren Zustände durch den Experimentator präpariert werden können]. Nun verleihe man viele Xerox Kopien dieser Instruktionen und verteile sie vielen Experimentatoren, welche sich in verschiedenen Inertialsystemen befinden. Falls diese Experimentatoren kompetent sind, müssen sie alle — innerhalb der Genauigkeit, welche durch den Stand der Technologie möglich ist — identische Resultate für das Experiment erhalten.

Die Invarianzgruppe, welche zwischen Inertialsystemen verbindet, ist durch (I) und das folgende Postulat bestimmt.

(II) Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen allseitig gleich derselben Grösse c , unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle.

Diese Forderung steht natürlich im Widerspruch zum Galilei'schen Transformationsgesetz. Deshalb müssen die Gesetze der Mechanik abgeändert werden.

Das weitere Programm sieht nun wie folgt aus: (i) Bestimmung der Invarianzgruppe (inhomogene Lorentzgruppe). (ii) Nachweis der Lorentzinvarianz der Maxwell'schen Gleichungen. (iii) Neuformulierung einer Lorentzinvarianten Mechanik.

Bevor wir dieses Programm aufnehmen, wollen wir noch einige Sätze aus der Einsteinschen Arbeit von 1905 wiedergeben. Diese beginnt nach einem einleitenden Passus mit den folgenden Worten:

*Beispiele ähnlicher Art, sowie die mißlungenen Versuche, eine Bewegung der Erde relativ zum 'Lichtmedium' zu konstatieren, führen zu der Vermutung, daß dem Begriffe der absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinungen entsprechen, sondern daß vielmehr für alle Koordinatensysteme, für welche die mechanischen Gleichungen gelten, auch die gleichen elektrodynamischen und optischen Gesetze gelten, wie dies für die Größen erster

Ordnung bereits erwiesen ist. Wir wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden 'Prinzip der Relativität' genannt werden wird) zur Voraussetzung erheben und außerdem die mit ihm nur scheinbar unverträgliche Voraussetzung einführen, daß sich das Licht im leeren Raume stets mit einer bestimmten, vom Bewegungszustande des emittierenden Körpers unabhängigen Geschwindigkeit c fortpflanze. Diese beiden Voraussetzungen genügen, um zu einer einfachen und widerspruchsfreien Elektrodynamik bewegter Körper zu gelangen, unter Zugrundelegung der MAXWELLSchen Theorie für ruhende Körper. Die Einführung eines 'Lichtäthers' wird sich insofern als überflüssig erweisen, als nach der zu entwickelnden Auffassung weder ein mit besonderen Eigenschaften ausgestatteter 'absolut ruhender Raum' eingeführt noch einem Punkte des leeren Raumes, in welchem elektromagnetische Prozesse stattfinden, ein Geschwindigkeitsvektor zugeordnet wird.*

(A. Einstein)

§ 2. Folgerungen aus dem Relativitätsprinzip

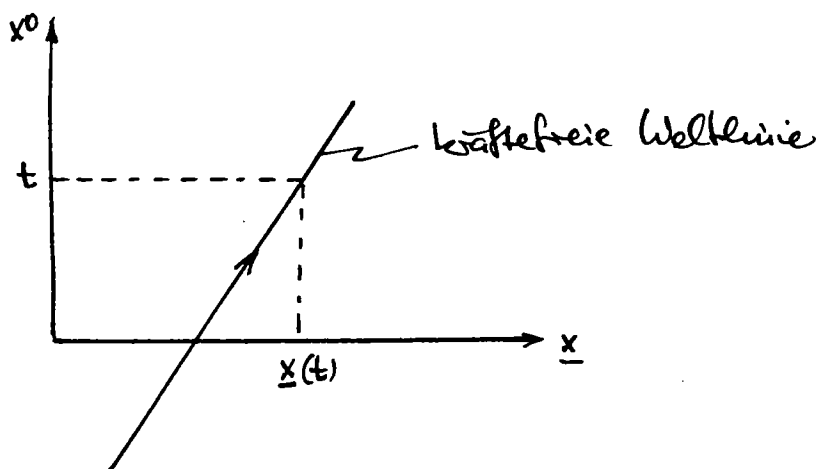
In diesem Abschnitt analysieren wir die Einschränkungen des Relativitätsprinzips an die Transformationsgruppe, welche zwischen den Inertialsystemen vermittelt, unter den zusätzlichen Annahmen:

- (i) Homogenität von Raum und Zeit;
- (ii) Isotropie des Raumes.

Für die Raum-Zeit Koordinaten eines Ereignisses bezüglich einem Inertialsystem verwenden wir die Bezeichnung

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \underline{x}) \quad , \quad (2.1)$$

wo $\underline{x} = (x^1, x^2, x^3)$ die Cartesischen Koordinaten sind. In diesen Koordinaten bewegt sich ein freier Massenpunkt längs einer Geraden (siehe Fig.).



Da in allen Inertialsystemen das Trägheitsgesetz gilt [An diesem Gesetz und dessen Benutzung von Inertialsystemen und Inertialzeiten wird festgehalten], müssen die gesuchten Transformationen physikalisch realisierbare Geraden wieder in solche überführen. Dies ist sicher der Fall, wenn die Transformationen affin sind, aber die Umkehrung gilt nicht ohne weitere Einschränkungen [siehe z.B. V. Fock, Theorie von Raum, Zeit und Gravitation, Akademie-Verlag, Berlin, speziell Kap. I und Anhang A]. Der affine Charakter der Transformationen folgt aber aus der Annahme (i) (Homogenität von Raum und Zeit), zusammen mit einer Stetigkeitsannahme. Dies wollen wir be-

weisen. Dazu betrachten wir eine Transformation

$$x' = \varphi(x) \quad (2.2)$$

zwischen zwei Inertialsystemen K und K' . Unterwerfen wir die Punkte x bezüglich K einer Raum-Zeit-Translation $a \in \mathbb{R}^4$, so entspricht dies einer Translation a' bezüglich K' , welche von a und φ , aber nicht von x abhängt:

$$\varphi(x+a) = \varphi(x) + a'(\varphi, a) \quad (2.3)$$

Dies ist ein Ausdruck der Homogenitätsannahme. Setzen wir in (2.3) $x=0$, so erhalten wir $a' = \varphi(a) - \varphi(0)$ und damit für (2.3)

$$\varphi(x+a) = \varphi(x) + \varphi(a) - \varphi(0)$$

Von dieser Gleichung subtrahieren wir $\varphi(0)$ und erhalten für $\psi(x) := \varphi(x) - \varphi(0)$ die Funktionalgleichung

$$\psi(x+a) = \psi(x) + \psi(a). \quad (2.4)$$

ferner ist nach Def.

$$\psi(0) = 0. \quad (2.4')$$

Falls ψ im Ursprung stetig ist, folgt daraus dass ψ linear ist: Zunächst ergibt sich aus (2.4) für eine ganze positive Zahl n $\psi(nx) = n\psi(x)$. Ferner folgt aus (2.4') und (2.4) $0 = \psi(0) = \psi(x + (-x)) = \psi(x) + \psi(-x)$, d.h. $\psi(-x) = -\psi(x)$. Für eine rationale Zahl $r = m/n$ implizieren diese Eigenschaften

$$r\psi(x) = \frac{m}{n}\psi(x) = \frac{1}{n}\psi(mx) = \frac{1}{n}\psi\left(n\frac{m}{n}x\right) = \psi\left(\frac{m}{n}x\right) = \psi(rx) \quad (2.5)$$

Nach (2.4) hat die Stetigkeitsannahme zur Folge, dass ψ überall stetig ist. Daraus folgt, dass (2.5) auch für irrationale Zahlen gültig ist. Damit ist gezeigt, dass die Transformationen (2.2) affin ist:

$$x' = \Lambda x + a \quad (2.6)$$

Da sich für die raum-zeitlichen Translationen a keine Einschränkungen ergeben, betrachten wir bis auf Weiteres nur

homogene Transformationen.

Eine Untergruppe der gesuchten Transformationsgruppe ist die Gruppe

$$x' = \Lambda x, \quad \Lambda = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R \end{array} \right), \quad R \in SO(3) \quad (2.7)$$

Daneben untersuchen wir jetzt die Transformationsgruppe, welche zwischen Inertialsystemen vermittelt, deren räumliche Achsen zur Zeit $t=0$ zusammenfallen. Dann stellt uns zur Konstruktion von Λ nur die Relativgeschwindigkeit \underline{v} (des Systems K' relativ zu K) zur Verfügung. Aus Isotropiegründen hat dann (2.6) die Form

$$\begin{aligned} x'^0 &= a(v) x^0 + b(v) (\underline{v}, \underline{x}) \\ \underline{x}' &= c(v) \underline{x} + \frac{d(v)}{v^2} \underline{v} (\underline{v}, \underline{x}) + e(v) \underline{v} x^0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

($v := |\underline{v}|$). Man mache sich klar, dass (2.8) der allgemeinste Ansatz für die betrachtete Situation ist.

Aus der Bedeutung von \underline{v} folgt zunächst: $\underline{x} = \underline{v} x^0$ impliziert $\underline{x}' = 0$, was nach (2.8) zur Einschränkung

$$c(v) + d(v) + e(v) = 0 \quad (2.9)$$

führt.

Nach dem Relativitätsprinzip sind die Funktionen $a(v) - e(v)$ universelle Funktionen von v . Eine weitere Einschränkung an diese ergibt sich aus der Betrachtung der umgekehrten Transformation von K' nach K .

Wir erwarten, dass sich K gegen K' mit der Geschwindigkeit $-\underline{v}$ bewegt. Diese sehr plausible Vermutung wollen wir auf das Relativitätsprinzip zurückführen (siehe V. Berzi, V. Corini, J. Math. Phys. 10, 1518 (1969)). Dazu mache man sich zuerst klar, dass \underline{v} und die "reziproke" Geschwindigkeit \underline{v}' (K gegen K') proportional sein müssen, sonst könnte die Zusammensetzung der Transformation (2.8) mit der entsprechenden für K' nach K nicht zur identischen Transformation führen. Aus dem Relativitätsprinzip folgt

$$\underline{v}' = f(v) \underline{v} / v, \quad \underline{v} = f(v') \underline{v}' / v', \quad f(0) = 0,$$

mit einer universellen Funktion f . Dies führt zur Funktionalgleichung

$$|f(|f(v)|)| = v, \quad f(0) = 0, \quad (2.10)$$

für die Funktion $|f|$. Diese bildet den — aufgrund des Relativitätsprinzips universellen (!) — Bereich der möglichen Beträge der Relativgeschwindigkeiten zwischen Inertialsystemen umkehrbar eindeutig (wieder wegen des Relativitätsprinzips!) auf sich ab. Nehmen wir an, dass dieser Bereich zusammenhängend ist und dass $|f|$ stetig ist, so folgt nach einem bekannten Satz der Analysis, dass $|f|$ stetig monoton sein muss (siehe z.B. J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Theorem 4.2.2). Wegen $|f(0)| = 0$, $|f(v)| \geq 0$ muss $|f|$ stetig monoton wachsend sein. Ausser für $|f(v)| = v$ ist dies aber im Widerspruch zur Funktionalgleichung (2.10). Folglich ist $v' = \pm v$. Die formale Möglichkeit $v' = -v$ würde zu einer Transformation mit Umkehr des Zeit sinnes führen, was wir vorläufig ausschliessen wollen.

Die Transformation von K' nach K lautet deshalb

$$x^0 = a(v) x'^0 - b(v) (v, \underline{x}')$$

$$\underline{x} = c(v) \underline{x}' + \frac{d(v)}{v^2} v (v, \underline{x}') - e(v) v x'^0$$

Setzt man dies in (2.8) ein, so ergibt sich die Identität nur, wenn

$$c^2 = 1, \quad a^2 - e b v^2 = 1, \quad e^2 - e b v^2 = 1$$

$$e(a+e) = 0, \quad b(a+e) = 0 \quad (2.11)$$

gilt, wie man durch Spezialisierung auf $\underline{v} = (v, 0, 0)$ leicht nachrechnet.

Der Wert $c = -1$ kann ausgeschlossen werden (man mache sich dies klar). Nach der dritten Gleichung in (2.11) ist $e \neq 0$, daher ist $a+e = 0$ nach der vierten Gleichung. Dadurch ist auch die fünfte erfüllt, und die zweite wird mit der dritten gleichwertig. Wir haben damit

$$b = \frac{1-a^2}{av^2}, \quad c = 1, \quad d = a-1, \quad e = -a \quad (2.12)$$

Mit diesen Ergebnissen lautet (2.8) für $v = (v, 0, 0)$

$$x'^0 = a(v) x^0 + \frac{1 - a^2(v)}{v a(v)} x^1$$

$$x'^1 = a(v) x^1 - v a(v) x^0$$

$$x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3.$$

(2.13)

Nach dem Relativitätsprinzip müssen diese Transformationen eine Gruppe bilden. Die Matrix, die zu den beiden ersten Zeilen von (2.13) gehört, lautet

$$A(v) = \begin{pmatrix} a(v) & \frac{1 - a^2(v)}{v a(v)} \\ -v a(v) & a(v) \end{pmatrix}$$

Multiplizieren wir diese mit $A(v')$, so muss das Resultat von der Form $A(u)$ sein. Die Gleichheit der diagonalen Elemente von $A(u)$ gibt die Beziehung

$$\frac{1 - a^2(v)}{v^2 a^2(v)} = \frac{1 - a^2(v')}{v'^2 a^2(v')}$$

d.h.

$$\kappa = \frac{a^2(v) - 1}{v^2 a^2(v)} \quad (2.14)$$

ist eine universelle Konstante. Deshalb hat $a(v)$ die Form

$$a(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa v^2}} \quad (2.15)$$

und (2.8) lautet ($b(v) = -\kappa a(v)$):

$$x'^0 = a(v) (x^0 - \kappa (v, \underline{x})) \quad (2.16)$$

$$\underline{x}' = \underline{x} + \frac{a(v) - 1}{v^2} v (v, \underline{x}) - a(v) v x^0$$

Wählen wir $\kappa = 0$ so erhalten wir die spezielle Galileitransf.

$$x'^0 = x^0, \quad \underline{x}' = \underline{x} - v x^0 \quad (2.17)$$

Im folgenden betrachten wir den Fall $\kappa \neq 0$ und untersuchen

die durch (2.7) und (2.16) erzeugte Transformationsgruppe.

§3. Invarianz der Lichtgeschwindigkeit und die Gruppe der Lorentztransformationen

Die universelle Konstante κ hat die Dimension eines reziproken Geschwindigkeitsquadrates. Zu ihrer Bedeutung bemerken wir, dass sowohl die Transformationen (2.7) als auch (2.16) die quadratische Form

$$Q_{\kappa}(x) := \frac{1}{\kappa} t^2 - \underline{x}^2 \quad (3.1)$$

invariant lassen. Dies zeigt für $\kappa > 0$, dass $c := \frac{1}{\sqrt{\kappa}}$ eine invariante Geschwindigkeit ist: Für eine Bewegung $\underline{x}(t)$ bezüglich K mit $|\dot{\underline{x}}| = c$ gilt auch relativ zu einem transformierten System $|\dot{\underline{x}}'| = c$.

Nach der Erfahrung (Postulat II) spielt die Lichtgeschwindigkeit

$$c = 2.997925 \times 10^{10} \text{ cm/sec} \quad (3.2)$$

diese Rolle. Damit ist

$$\alpha(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} =: \gamma \quad (3.3)$$

und (2.16) geht über in die speziellen Lorentztransformationen

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{1}{c^2} (\underline{v}, \underline{x}) \right) \\ \underline{x}' &= \underline{x} + \frac{\gamma - 1}{v^2} \underline{v} (\underline{v}, \underline{x}) - \gamma \underline{v} t \end{aligned} \quad (3.4)$$

Für $c \rightarrow \infty$ geht diese Transformation in die spez. Galilei-Transf. (2.17) über.

Für $\underline{v} = (v, 0, 0)$ (spezielle Lorentztransf. in der x^1 -Richtung) erhalten wir aus (3.4)

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x^1 \right) \\ x'^1 &= \gamma \left(x^1 - vt \right) \end{aligned} \quad (3.4')$$

Den Fall $\kappa < 0$ wollen wir nicht näher betrachten, da er physi.

keitsch uninteressant ist.

Für $x = 1/c^2$ lautet die quadratische Form (3.1)

$$Q(x) = c^2 t^2 - \underline{x}^2 = x^T G x \quad (3.5)$$

mit $x = (ct, \underline{x})$ (neue Konvention!) und

$$G = (g_{\mu\nu}) := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Die durch (2.7) und (3.4) erzeugte Transformationsgruppe ist eine Untergruppe der homogenen Lorentzgruppe L , definiert durch

$$L = \{ \Lambda = \text{reelle } 4 \times 4 \text{ Matrix} \mid \Lambda^T G \Lambda = G \} \quad (3.2)$$

Wir werden sie im nächsten Abschnitt in einfacher Weise charakterisieren. Die inhomogenen Lorentztransf. $x' = \Lambda x + a$, $\Lambda \in L$, nennt man zu Ehren von Poincaré auch Poincaré-Transformationen.

§4. Mathematisches zur Lorentzgruppe

Wir zeigen zunächst, dass jede E_1^2 -Transformation $x' = \varphi(x)$, welche die metrische Form

$$g := g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (4.1)$$

invariant lässt eine Poincaré-Transformation ist. Nun ist

$$dx'^\mu = \varphi^\mu_{\nu} dx^\nu$$

Also gibt die Bedingung

$$g_{\mu\nu} dx'^\mu \otimes dx'^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$$

die Gleichung

$$(\mathcal{D}\varphi)^T G \mathcal{D}\varphi = G \quad (4.2)$$

daraus folgt zunächst $\det \mathcal{D}\varphi = \pm 1 \neq 0$ und φ ist

deshalb unkehrbar. Nun differenzieren wir die Gleichung (4.2) nach x . In Komponenten:

$$g_{\mu\nu} (\varphi^{\mu}_{,\alpha} \varphi^{\nu}_{,\beta})_{,\gamma} = 0$$

oder

$$g_{\mu\nu} \varphi^{\mu}_{,\alpha\gamma} \varphi^{\nu}_{,\beta} + g_{\mu\nu} \varphi^{\mu}_{,\alpha} \varphi^{\nu}_{,\beta\gamma} = 0$$

Darin permutieren wir die Indizes α, β, γ zyklisch, addieren zwei der entstehenden Gleichungen und subtrahieren die dritte. Auf Grund der Symmetrie von $g_{\mu\nu}$ ergibt sich

$$g_{\mu\nu} \varphi^{\mu}_{,\alpha\beta} \varphi^{\nu}_{,\gamma} = 0$$

und folglich verschwinden die 2. Ableitungen $\varphi^{\mu}_{,\alpha\beta}$. Dies zeigt, dass φ linear ist, und die Bedingung (4.2) verlangt, dass φ eine Poincaré-Transformation ist.

Bemerkung: Verlangt man, dass φ die Form (3.8) nur bis auf einen ortabhängigen Skalenfaktor invariant lässt, so erhält man die konforme Gruppe. Diese enthält, neben den Poincaré-Transf. auch nichtlineare Transformationen. [Die Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum sind invariant bezüglich der konformen Gruppe].

Wir untersuchen jetzt die homogene Lorentz-Gruppe. Aus $\Lambda^T G \Lambda = G$ folgt $\det \Lambda = \pm 1$. Beide Fälle kommen vor: z.B. $\Lambda = 1, \Lambda = -1$ haben $\det \Lambda = +1$, während $\Lambda = P, T$ $\det \Lambda = -1$ haben.

Die 0_0 -Komponente von $\Lambda^T G \Lambda = G$ lautet

$$(\Lambda^0_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 = 1 \Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 \geq 1 \quad (4.3)$$

d.h. $\Lambda^0_0 \geq 1$ oder $\Lambda^0_0 \leq -1$. Beide Fälle kommen vor (z.B. $\Lambda = P, T$). Diese Unterscheidung hat die folgende geometrische Bedeutung: Wir betrachten den Lichtkegel, definiert durch $x^T G x = 0$ (siehe Fig.). Das Innere dieses Kegels ist charakterisiert durch $x^T G x > 0$. Dieses ist offen und

besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten V_+ und V_- , die durch $x^0 > 0$, $x^0 < 0$ unterschieden werden. Das Innere des Lichtkegels wird durch $x \mapsto \Lambda x$ auf sich abgebildet. Deshalb gibt es nur die beiden Möglichkeiten

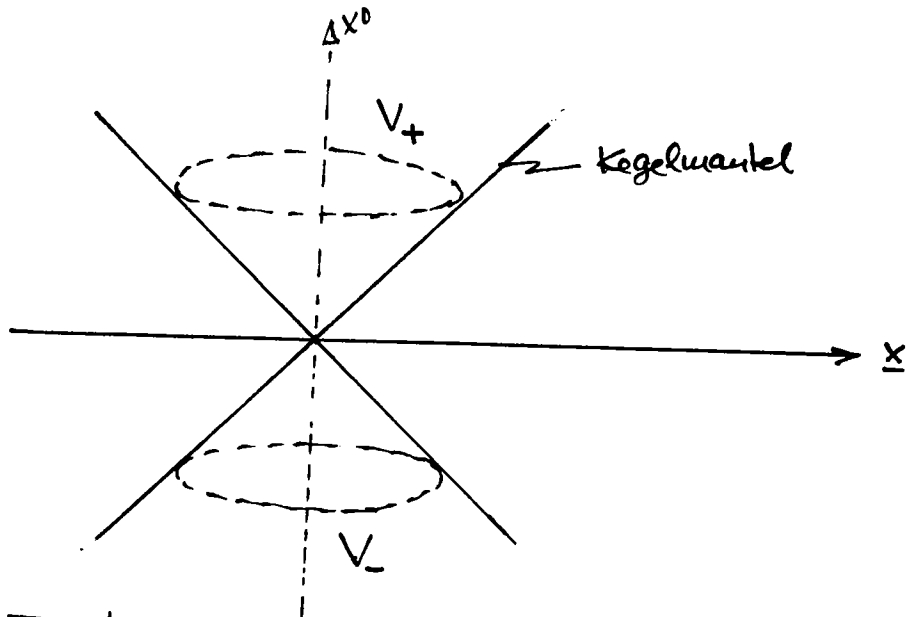


Fig. Lichtkegel

- (i) $\Lambda: V_{\pm} \longrightarrow V_{\pm} \quad (\Lambda^0_0 \geq 1)$
 (ii) $\Lambda: V_{\pm} \longrightarrow V_{\mp} \quad (\Lambda^0_0 \leq -1)$ (4.4)

[Beachte, dass der Vektor $e = (1, 0, 0, 0)$ in $(\Lambda^0_0, \Lambda^i_0)$ übergeht].

Die Transformationen mit $\Lambda^0_0 \geq 1$ sind also durch die Invarianz von V_+ charakterisiert und bilden daher eine Gruppe. Die eigentliche orthochrone Lorentzgruppe L_+^{\uparrow} ist definiert durch

$$L_+^{\uparrow} = \{ \Lambda \in L \mid \det \Lambda = 1, V_{\pm} \longrightarrow V_{\pm} \} \quad (4.5)$$

Diese ist ein Normalteiler von L . L können wir in vier unzusammenhängende Stücke zerlegen:

$$L = L_+^{\uparrow} \cup PL_+^{\uparrow} \cup TL_+^{\uparrow} \cup PTL_+^{\uparrow} \quad (4.6)$$

(Nebenklassen von L_+^{\uparrow}). Folgende Teilmengen von L sind Untergruppen:

$$L_+^{\uparrow}, L_+^{\uparrow} \cup PL_+^{\uparrow}, L_+^{\uparrow} \cup TL_+^{\uparrow}, L_+^{\uparrow} \cup PTL_+^{\uparrow}$$

Später werden wir sehen, dass L_+^\uparrow zusammenhängend ist. Deshalb ist (3.4) die Zerlegung von L in Zusammenhangskomponenten.

Struktur	$\det \Lambda$	Λ^0
L_+^\uparrow	1	≥ 1
PL_+^\uparrow	-1	≥ 1
TL_+^\uparrow	-1	≤ -1
PTL_+^\uparrow	1	≤ -1

(4.7)

Diskussion von L_+^\uparrow

Die reelle Drehgruppe $SO(3)$ ist in L_+^\uparrow wie folgt isomorph eingebettet:

$$R \in SO(3) \mapsto \Lambda(R) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R \end{array} \right) \quad (4.8)$$

$$[\Lambda(R_1)\Lambda(R_2) = \Lambda(R_1 R_2)]$$

Daneben betrachten wir die Untergruppe von L_+^\uparrow , welche x^2 und x^3 invariant lässt. Eine solche Transformation hat die Form

$$\Lambda = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Die Bedingung $\Lambda^T G \Lambda = G$ liefert

$$a^2 - c^2 = 1 \implies a = \operatorname{Ch} X_1, c = -\operatorname{Sh} X_1$$

$$b^2 - d^2 = 1 \implies d = \operatorname{Ch} X_2, b = -\operatorname{Sh} X_2$$

$$ab - cd = 0 \implies \operatorname{Sh}(X_1 - X_2) = 0 \implies X_1 = X_2 \equiv X$$

Deshalb hat Λ die Form

$$\Lambda(X) = \left(\begin{array}{cc|c} \operatorname{Ch} X & -\operatorname{Sh} X & 0 \\ -\operatorname{Sh} X & \operatorname{Ch} X & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (4.9)$$

Umgekehrt ist (4.9) für jedes $X \in \mathbb{R}$ ein Element der betrachteten Untergruppe. Der Parameter X ist dadurch ausgezeichnet, dass

$$\Lambda(\chi_1) \Lambda(\chi_2) = \Lambda(\chi_1 + \chi_2), \quad (4.10)$$

d.h. $\chi \mapsto \Lambda(\chi)$ ist eine 1-parametrische Untergruppe.

Interpretation von (4.9): x^1 und t transformieren sich gemäß

$$\begin{aligned} ct' &= ct \operatorname{Ch} \chi - x^1 \operatorname{Sh} \chi \\ x^1 &= -ct \operatorname{Sh} \chi + x^1 \operatorname{Ch} \chi \end{aligned} \quad (4.11)$$

Der (räumliche) Nullpunkt des neuen Koordinatensystems hat also im alten System die Koordinaten

$$x^1 = ct \operatorname{Th} \chi, \quad x^2 = x^3 = 0.$$

Setzen wir $\operatorname{Th} \chi =: v/c \quad (< 1!)$ (4.12)

so stimmt (4.11) mit der speziellen Lorentz-Transformation (3.4') überein:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x^1 \right) \\ x^1 &= \gamma (x^1 - vt) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Im Limes $c \rightarrow \infty$ (bei festem v) erhalten wir daraus die spezielle Galilei-Transformation $G(v)$:

$$t' = t, \quad x^1' = x^1 - vt$$

Hier ist, wie früher schon bekannt, v der natürliche Parameter

$$G(v_1) G(v_2) = G(v_1 + v_2) \quad (4.14)$$

Diese Gleichung drückt das Additionstheorem der Geschwindigkeiten in der Galilei'schen Kinematik aus. In der Einsteinschen Kinematik geht dieses nicht mehr, da χ und nicht v additiv ist. Betrachten wir v als Parameter, so folgt aus (4.10) und (4.12)

$$\Lambda(v_1) \Lambda(v_2) = \Lambda(v_3)$$

mit

$$v_3/c = \operatorname{Th}(\chi_1 + \chi_2), \quad v_{1,2}/c = \operatorname{Th} \chi_{1,2}.$$

Folglich

$$\underline{v_3 = c \frac{\operatorname{Th} \chi_1 + \operatorname{Th} \chi_2}{1 + \operatorname{Th} \chi_1 \operatorname{Th} \chi_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}} \quad (4.15)$$

Dies ist das Einsteinsche "Additionstheorem" gleichgerichteter Geschwindigkeiten. v_3 bleibt immer kleiner als c , auch wenn $v_{1,2}$ an c herankommen. Für $v_2 \rightarrow c$ bleibt $v_3 \rightarrow c$. Dies ist lediglich eine explizite Verifikation des 2. Einsteinschen Postulates.

Drehungen und spezielle Lorentztransformationen in der x^1 -Richtung erzeugen die ganze Gruppe L_+^\uparrow . Es gilt der

Satz: Jedes $\Lambda \in L_+^\uparrow$ kann in folgender Weise dargestellt werden

$$\Lambda = \Lambda(R_1) \Lambda(X) \Lambda(R_2). \quad (4.16)$$

Beweis: Falls aus $x^0 = 0$ auch $(\Lambda x)^0 = 0$ folgt, dann ist Λ eine Drehung und (4.16) ist trivial. Wir nehmen deshalb an, dies sei nicht der Fall. Betrachten wir das Bild von $x^0 = 0$ und davon $(\Lambda x)^0 = 0$, so ist dies eine Ebene E' ; das Urbild $\Lambda^{-1}(E')$ sei E . Da in E und E' die Nullkomponenten verschwinden, lassen sich diese Ebenen durch eigentliche Drehungen R_2 bzw. R_1 in die Ebene $x^0 = x^1 = 0$ überführen. Definieren wir also die Lorentztransformation Λ_0 durch

$$\Lambda = \Lambda(R_1^{-1}) \Lambda_0 \Lambda(R_2) \quad (4.17)$$

So bildet Λ_0 die Ebene $x^0 = x^1 = 0$ in sich ab. Deshalb muss Λ_0 die folgende Form haben

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \mu & \nu \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu, \nu: \text{ reelle Zahlen} \quad (4.18)$$

Λ_0^{-1} hat dieselbe Eigenschaft, ist also ebenfalls von der Form

$$\Lambda_0^{-1} = \begin{pmatrix} l & 0 \\ u & v \end{pmatrix}$$

Aus $\Lambda_0 \Lambda_0^{-1} = 1$ erhält man $l = \lambda^{-1}$, $v = \nu^{-1}$. Die Bedingung $\Lambda_0^T \mathbb{G} \Lambda_0 = \mathbb{G}$, resp. $\Lambda_0^{-1 T} \mathbb{G} = \mathbb{G} \Lambda_0^{-1}$ gibt

$$\lambda^T g \lambda = g, \quad \nu^T \nu = 1, \quad \mu = u = 0,$$

wobei $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Somit ist

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$$

das Produkt einer speziellen Lorentztransf. in der x^1 -Richtung und einer Drehung. Dies beweist mit (4.17) den Satz. \square

Folgerungen.

1. Die in §3 behandelte Untergruppe — erzeugt durch die Transformationen (2.7) und (3.4) — fällt mit L_+^\uparrow zusammen. Die kleinste Invarianzgruppe, welche die Einstein'schen Postulate erfüllt, ist demnach die Gruppe P_+^\uparrow der Transformationen

$$x' = \Lambda x + a, \quad \Lambda \in L_+^\uparrow, \quad a \in \mathbb{R}^4 \quad (4.19)$$

2. L_+^\uparrow ist zusammenhängend, d.h. jedes $\Lambda \in L_+^\uparrow$ lässt sich innerhalb L_+^\uparrow stetig in die 1 überführen.

Beweis: Man deformiere in (4.16) R_1, R_2 innerhalb $SO(3)$ stetig in 1 und lasse $\chi \rightarrow 0$.

3. Folgendes ist mandamental wichtig zu wissen! Sei $\Lambda \rightarrow \mu(\Lambda)$ eine stetige reelle Funktion auf L_+^\uparrow mit den Eigenschaften

$$\mu(\Lambda_1)\mu(\Lambda_2) = \mu(\Lambda_1\Lambda_2), \quad \mu(1) = 1. \quad (4.20)$$

Dann ist $\mu(\Lambda) = 1$ für alle Λ .

Beweis: Wir beweisen dies zuerst für die Untergruppe der Drehungen $R(\varphi)$ mit dem Winkel φ um eine feste Achse. Sei $\mu(\varphi) := \mu(R(\varphi))$; dann ist nach (4.20)

$$\mu(\varphi_1)\mu(\varphi_2) = \mu(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Deshalb ist (mit dem gleichen Argument wie auf Seite 24)

$$\mu(\varphi) = e^{\alpha\varphi}, \quad \alpha \text{ reell.}$$

Da aber $\mu(\varphi + 2\pi) = \mu(\varphi)$ ist, folgt $\mu(\varphi) \equiv 1$. Ein analoges Argument funktioniert für die speziellen Lorentztransf. $\Lambda(\chi)$:

Sei $\mu(\chi) := \mu(\Lambda(\chi))$, dann gilt

$$\mu(\chi_1)\mu(\chi_2) = \mu(\chi_1 + \chi_2) \implies \mu(\chi) = e^{\alpha\chi}, \quad \alpha \text{ reell.}$$

Für die Drehung $\Lambda(R) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ um die 3-Achse um

den Winkel π ist aber

$$\Lambda(R) \Lambda(X) \Lambda(R) = \Lambda(-X) \Rightarrow \mu(X) = \mu(-X) \Rightarrow \alpha = 0,$$

d.h. $\mu(X) \equiv 1$. Aus (4.16) folgt damit $\mu(\Lambda) = 1$ für alle $\Lambda \in L_+^\uparrow$.

4. Als Ergänzung zu 1. zeigen wir: Die einzige Untergruppe von L_+^\uparrow , welche grösser ist als die Untergruppe der eigentlichen Drehungen ist L_+^\uparrow selber.

Beweis: Aus $\Lambda = \Lambda(R_1) \Lambda(X) \Lambda(R_2)$ mit

$$\Lambda(R_i) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R_i \end{array} \right), \quad \Lambda(X) = \left(\begin{array}{cc|c} \operatorname{Ch} X & -\operatorname{Sh} X & 0 \\ -\operatorname{Sh} X & \operatorname{Ch} X & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

folgt

$$\Lambda^0_0 = \operatorname{Ch} X. \tag{4.21}$$

Falls $\Lambda \in L_+^\uparrow$ keine Drehung ist, so ist also $\Lambda^0_0 = \operatorname{Ch} X \neq 1$, d.h. $X > 1$. Wir bilden

$$\Lambda' = \Lambda(X) R(\varphi) \Lambda(X)$$

mit

$$R(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{cc} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{array} \end{array} \right)$$

Dann ist

$$\Lambda'^0_0 = \operatorname{Ch}^2 X + \cos \varphi \operatorname{Sh}^2 X \tag{4.22}$$

Schreiben wir also Λ' in der Form $\Lambda' = \Lambda(R'_1) \Lambda(X') \Lambda(R'_2)$, so folgt aus (4.21) und (4.20)

$$\operatorname{Ch} X' = \operatorname{Ch}^2 X + \cos \varphi \operatorname{Sh}^2 X$$

Variiert also φ von 0 bis 2π , so variiert X' von 0 bis $2X$. Jede Untergruppe, die ausser den Drehungen noch Λ enthält, enthält also alle $\Lambda(X')$ mit $0 \leq X' \leq 2X > 0$ und damit alle speziellen Lorentztransf. in der X -Richtung; somit ist sie mit L_+^\uparrow identisch. \square

Bemerkung: Als mögliche Kandidaten für die Invarianzgruppe kommen also ausser $\mathcal{P}_+^\uparrow = i L_+^\uparrow$ (i : inhomogen) auch die Untergruppen $i(L_+^\uparrow \cup PL_+^\uparrow)$, $i(L_+^\uparrow \cup TL_+^\uparrow)$ und $i(L_+^\uparrow \cup PTL_+^\uparrow)$,

sowie die volle Gruppe iL in Frage. Für die Mechanik und die Elektrodynamik ist iL die Invarianzgruppe. In anderen Bereichen der Physik ist sie kleiner (P-, T- und PT Vertauschungen bei den schwachen Wechselwirkungen).

§5. Der Minkowski Raum

"Die Ausdränkungen über Raum und Zeit, die ich Ihnen entwörden möchte sind auf experimentell - physikalischen Boden erwachsen. Darin liegt ihre Stärke. Ihre Tendenz ist eine radikale. Von Stund an sollen 'Raum für sich' und 'Zeit für sich' völlig zu Schatten herabsinken, und nur noch eine Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren" (H. Minkowski).

"Seit die Mathematiker über die Relativitätstheorie hergefallen sind, verstehe ich sie selbst nicht mehr!" (A. Einstein)

"Die Verallgemeinerung der Relativitätstheorie wurde sehr erleichtert durch die Gestalt, welche der Speziellen Relativitätstheorie durch Minkowski gegeben wurde...." (A. Einstein).

Die inhomogene Lorentzgruppe ist die Automorphismengruppe der Raum-Zeit Mannigfaltigkeit der SRT. Wie im ersten Kapitel für die Galilei Raum-Zeit wollen wir jetzt diese Mannigfaltigkeit in einer invarianten Weise beschreiben.

Definition: Ein Minkowski Raum ist ein vierdimensionaler affiner Raum $(M, E, +)$, in welchem im Differenzraum eine nichtausgeartete symmetrische Bilinearform (\cdot, \cdot) der Signatur $(+, -, -, -)$ ausgezeichnet ist [E ist ein pseudo-Euklidischer Vektorraum].

Es gilt der

Satz: Die Automorphismengruppe eines Minkowski Raumes ist isomorph zur inhomogenen Lorentzgruppe.

Beweis: Wir wählen ein spezielles affines Koordinatensystem

$(0, e_0, e_1, e_2, e_3)$ mit

$$(e_\mu, e_\nu) = g_{\mu\nu}, \quad G = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Das ist immer möglich. Ein solches Koordinatensystem nennen wir ein Lorentzsystem.

Sei f ein Automorphismus von M . Dies bedeutet: f ist eine affine Transformation mit $(\tilde{f}(v_1), \tilde{f}(v_2)) = (v_1, v_2)$, für alle $v_1, v_2 \in E$.

Nun ist

$$\overrightarrow{0 f(p)} = \overrightarrow{0 f(0)} + \underbrace{\tilde{f}(0)}_{\tilde{f}(\overrightarrow{0 p})} \tilde{f}(p) \quad (5.2)$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} \overrightarrow{0 f(p)} &= x^\mu e_\mu \\ \overrightarrow{0 f(0)} &= a^\mu e_\mu \\ \overrightarrow{0 p} &= x^\mu e_\mu \end{aligned} \quad (5.3)$$

so folgt aus (5.2)

$$x^\mu e_\mu = a^\mu e_\mu + x^\mu \tilde{f}(e_\mu) \quad (5.4)$$

Sei
$$\tilde{f}(e_\mu) = \Lambda^\nu_\mu e_\nu \quad (5.5)$$

Da $(\tilde{f}(e_\mu), \tilde{f}(e_\nu)) = (e_\mu, e_\nu) = g_{\mu\nu}$ ist, folgt

$$\left. \begin{aligned} x' &= \Lambda x + a \\ \Lambda^T G \Lambda &= G \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Dies ist eine inhomogene Lorentztransformation. Umgekehrt induziert jede inhomogene Lorentztransf. einen Automorphismus des Minkowski Raumes. \square

Die Lorentzsysteme entsprechen den Inertialsystemen. Die inhomogene Lorentzgruppe operiert auf diesen frei und transitiv. Die metrische Form in einem Lorentzsystem lautet für $v_1, v_2 \in E$:

$$(v_1, v_2) = g_{\mu\nu} v_1^\mu v_2^\nu = v_1^0 v_2^0 - \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 \quad (5.7)$$

Die Raum-Zeit Mannigfaltigkeit des SRT hat die Struktur

eines Minkowski Raumes. Die Gesetze der relativistischen Physik müssen sich invariant in Minkowski-Räumen formulieren lassen und dürfen keine weiteren absoluten Elemente einführen.*).

Dies ist, in einer invarianten Sprechweise, das Kerüst der SRT. [Das "Relative" kommt dadurch zustande, dass verschiedene Bezugssysteme gleichberechtigt sind]. Es ist auffallend, wie viel "einfacher" die geometrische Struktur eines Minkowski-Raumes im Vergleich zu einem Galilei-Raum ist.

Bezeichnungen:

- $v \in E$ ist zeitlich falls $(v, v) > 0$
- $v \in E$ ist lichtartig " $(v, v) = 0$
- " " raumartig " $(v, v) < 0$.

Kausalitätsverhältnisse

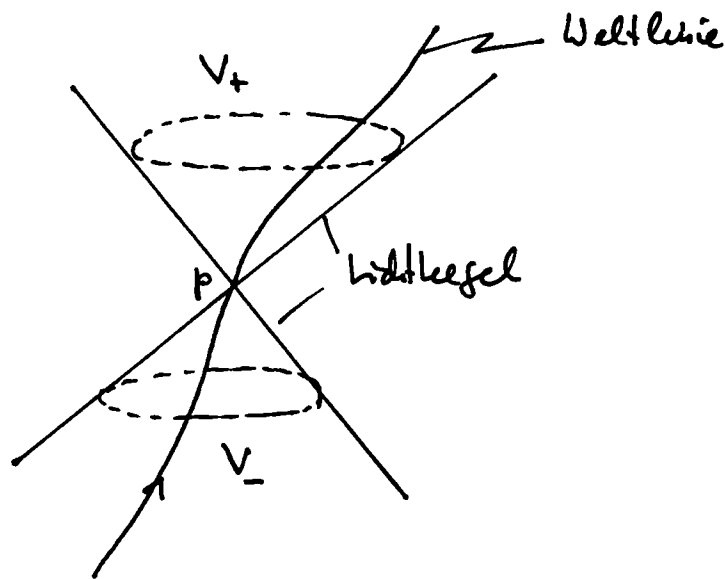
Im Minkowski Raum hat es keinen invarianten Sinn von der Gleichzeitigkeit zweier nicht-koinzidenter Ereignisse zu sprechen. Wie können wir dann aber noch Vergangenheit und Zukunft bezeichnen?

Die Kausalitätsverhältnisse im Minkowski Raum werden durch

*) Dies muss im folgenden Sinne präzisiert werden. A priori sind solche absoluten Elemente zugelassen, welche die Invarianzgruppe auf iL_+^4 reduzieren. Tatsächlich führen die schwachen und die "super-schwachen" Wechselwirkungen der Elementarteilchen zu solchen absoluten Elementen, was sich in einer Verletzung der P, T und PT Invarianz dieser Wechselwirkungen äußert. Z.B. ist ein "gespiegelter Neutrinozustand" kein physikalisch möglicher Zustand, womit ein absoluter Schraubensinn ausgezeichnet ist.

Siehe z.B. den Nobelpreisvortrag von C.N. Yang.

die metrische Form g bestimmt. Zu jedem Ereignis (Weltpunkt) $p \in M$ gehört der Lichtkegel durch p , d.h. die Menge der Punkte $v+p$ mit $(v, v) \geq 0$ (s. Fig.).



Ein im Weltpunkt p abgeschicktes Lichtsignal erreicht genau die Mantelfläche des Vorwärtskegels V_+ [Die Ausbreitung von V_+ gegenüber V_- führt eine Zeitrichtung (Orientierung) ein]. Betrachten wir eine durch p verlaufende Weltlinie eines Massenpunktes (s. Fig.): $\lambda \mapsto x(\lambda)$, dann muss der Vektor $dx/d\lambda$ für jedes λ zeitartig sein. Beweis: Führen wir ein Lorentzsystem ein, so ist

$$\left(\frac{dx}{d\lambda}, \frac{dx}{d\lambda} \right) = c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 = \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 (c^2 - v^2) > 0,$$

denn v muss $< c$ sein*). Der Weltpunkt p kann also nur die Ereignisse im abgeschlossenen Vorkegel V_+ kausal beeinflussen. Der Mantel des vorderen Kegels berührt meine aktive

*) Ein anderer Beweis ergibt sich aus folgender Überlegung: Falls q raumartig zu p liegt (d.h. \vec{pq} raumartig ist), so können wir diesen Vektor, bis auf eine Normierung, als räumlichen Basisvektor eines Lorentzsystems benutzen. In diesem System hätten dann p und q dieselbe Zeit. Folglich kann q nicht in der Zukunft von p sein, da c die obere Grenze für Signalgeschwindigkeiten ist. Falls $dx/d\lambda$ an einer Stelle raumartig würde, so gäbe es auf der Weltlinie Punkte die raumartig zueinander liegen, was nach dem Gesagten ausgeschlossen ist.

Zukunft von meiner aktiven Vergangenheit her. Hingegen sind im Inneren des hinteren Kegels alle die Ereignisse lokalisiert, die ich entweder lebhaft miterlebt (mitangesehen) habe, oder von denen mir irgendeine Kunde gekommen sein kann, und diese Ereignisse haben möglicherweise Einfluss auf mich gehabt; ausserhalb dessen aber liegt alles, was ich noch mit-leben werde oder doch mit-erleben würde, wenn meine Lebensdauer unbegrenzt wäre und mein Blick überall hindringen könnte: der Mantel des hinteren Kegels scheidet meine passive Vergangenheit von meiner passiven Zukunft" (H. Weyl).

Kausalität und Lorentzgruppe

Wir führen im Minkowski Raum eine Halbordnung ein: $x < y$, falls $y-x$ ein zukunftsorientierter ($x^0 < y^0$) zeitartiger Vektor ist.

Eine bijektive Abbildung φ von M (diese braucht nicht stetig zu sein) nennen wir einen kausalen Automorphismus falls sowohl φ als auch φ^{-1} die Halbordnung erhalten:

$$x < y \iff \varphi(x) < \varphi(y) \quad \text{für alle } x, y \in M$$

Die kausalen Automorphismen bilden eine Gruppe, welche wir die Kausalitätsgruppe nennen. Bemerkenswertes Weise gilt (ohne Stetigkeitsannahmen) der folgende

Satz (E.C. Zeeman). Die Kausalitätsgruppe ist gleich der Transformationsgruppe, welche durch $i(L_+^\uparrow \cup PL_+^\uparrow)$ und die Dilatationen (Multiplikation mit einem Skalar) erzeugt wird.

Beweis: Siehe E.C. Zeeman, J. Math. Phys. 5, 490 (1964).

* * *

Ergänzung: Überlichtgeschwindigkeit?

Die Lorentztransformationen werden offensichtlich für $|v| \geq c$ sinnlos. Inertialsysteme werden sich deshalb nur mit Relativgeschwindigkeiten $|v| < c$ bewegen. Dieses Resultat wird sich auch in der relativistischen Mechanik ergeben.

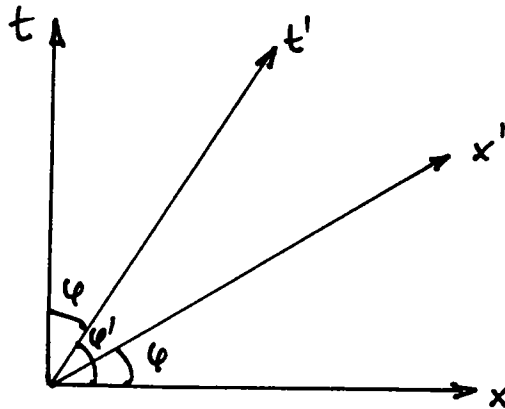
Es gibt aber überhaupt keine Signale, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten. Gäbe es nämlich ein solches Signal, so könnte man in die eigene Vergangenheit signalisieren. Dies macht man sich am einfachsten klar, indem man die (speziellen) Lorentztransformationen geometrisch darstellt.

Bei Beschränkung auf eine Raumdimension lautet (3.4') für $c=1$

$$t' = \gamma(t - vx)$$

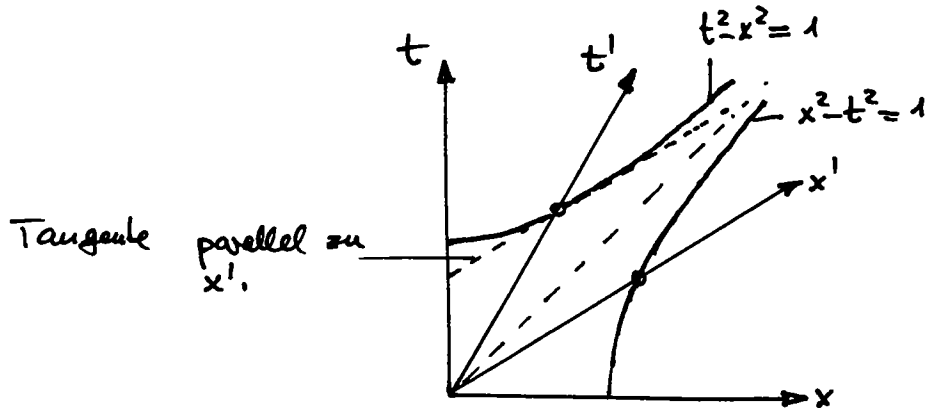
$$x' = \gamma(x - vt)$$

Daraus folgt lernt die Richtigkeit der folgenden Figur



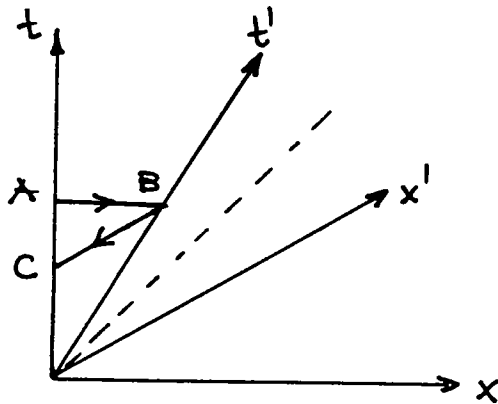
mit $\text{tg } \phi = v$, $\text{tg } \phi' = 1/v$.

Die Einheiten auf den transformierten Achsen sind durch $t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2$ bestimmt: $(t'=1, x'=0)$ liegt auf $t^2 - x^2 = 1$ und $(t'=0, x'=1)$ auf $x^2 - t^2 = 1$ (s. Fig.)



Die Einheitspunkte sind also die Schnittpunkte der transformierten Achsen mit diesen Hyperbeln. [Zeige, dass die Tangenten an die Hyperbeln in diesen Punkten jeweils parallel zur anderen Achse sind].

Der Einfachheit halber nehmen wir nun an, es gäbe ein Signal das sich (relativ zu seiner Quelle) mit unendlicher Geschwindigkeit bewegt. [Verallgemeinere das folgende Argument für $v > c$]. In der folgenden Figur werde von einem Beobachter auf der Weltlinie $x=0$ bei A ein solches Signal emittiert und von einem bewegten Beobachter B reflektiert. Das reflektierte Signal würde auf der Weltlinie $x=0$ im Punkte C, also vor der ursprünglichen Emission empfangen.



Die Begrenzung aller Signalgeschwindigkeiten durch c impliziert unter anderem, dass es keine starren Körper gibt: Stößt man nämlich einen solchen Körper an einem Ende an, so bewegt sich (auf Grund seiner Startheit) zugleich auch sein anderes Ende, und wir hätten ein unendlich schnelles Signal zur Verfügung.

Warnung: Selbstverständlich darf z.B. die Phasengeschwindigkeit einer Welle durchaus c überschreiten. Auch die Gruppengeschwindigkeit ist nicht immer die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Wellenpaketes.

* * *

§ 6. Einstein - Synchronisierung und die Relativität der Gleichzeitigkeit

Aus einem Brief von Einstein an seinen Freund Solovine:
"... Charakteristisch für die Relativitätstheorie ist ferner ein mehr erkenntnistheoretischer Gesichtspunkt. Es gibt in der Physik keinen Begriff, dessen Verwendung a priori nötig oder berechtigt wäre. Ein Begriff erhält seine Daseinsberechtigung nur durch seine klare und eindeutige Verknüpfung mit Erlebnissen bzw. mit physikalischen Erfahrungsphänomenen. So werden in der Relativitätstheorie die Begriffe absolute Gleichzeitigkeit, absolute Geschwindigkeit -... usw. verworfen, weil sich ihre eindeutige Verbindung mit der Erlebniswelt als unmöglich herausstellt. ... Jedem physikalischen Begriff muss eine solche Definition gegeben werden, dass auf Grund dieser Definition das Zutreffen oder Nicht-Zutreffen desselben in konkreten Fälle prinzipiell entschieden werden kann -...".

* * *

Die folgenden Überlegungen (Vergl. § 1, 2 der Einstein'schen Originalarbeit) hätten wir schon ganz am Anfang dieser Vorlesung ausstellen können. Sie dienen vor allem dazu, sich vom Dogma der objektiven Bedeutung der Gleichzeitigkeit räumlich auseinanderliegender Ereignisse zu befreien.

Wir stellen die Frage: Wann sind zwei Ereignisse, relativ zu einem Inertialsystem, gleichzeitig? Mit anderen Worten: Wie sind zwei Uhren zu synchronisieren, welche sich in festen Punkten A und B (relativ zu einem Inertialsystem) befinden?

Zunächst könnte man daran denken, eine Uhr von A nach B zu transportieren. Wir müssen aber damit rechnen, dass sich bei dieser Bewegung der Gang der Uhr verändert. Um diesen Einfluss zu bestimmen, brauchen wir aber schon zwei synchronisierte Uhren in A und B.

Wir können auch daran denken Signale von A nach B zu schicken. Dagegen könnte man aber einwenden, dass diese Methode nur funktioniert wenn die Signalgeschwindigkeit bekannt ist, und um diese zu bestimmen müssen die Uhren in A und B schon synchronisiert sein.

Wir zeigen nun, dass man eine solche Definition von Gleichzeitigkeit (relativ zu einem Inertialsystem) geben kann, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen die gleiche ist. Damit wird aber die Gleichzeitigkeit relativ, d.h. abhängig vom Bezugssystem.

A. Einstein-Synchronisierung

Die folgende Konstruktion bezieht sich auf ein festes Inertialsystem K. In diesem seien eine Anzahl Standarduhren (z.B. Atomuhren) in festen, bezuglos K ruhenden Positionen gegeben (im Idealfall in jedem Punkt).

Wir gehen aus von der

Erfahrungstatsache: Die Zeit, welche das Licht braucht um einen geschlossenen Polygonzug von der Länge L zu durchlaufen ist gleich L/c mit einer vom Weg unabhängigen Konstanten c. [Beachte: Diese Zeit kann mit einer einzigsten Uhr gemessen werden].

Nun synchronisieren wir Uhren in A und B so, indem wir zur Zeit t ein Lichtsignal in A aussenden und die Uhr in B so stellen, dass

$$t(\text{Ankunft}) = t + \frac{|AB|}{c}$$

ist. Dies ist eine mögliche Synchronisierung aller Uhren in K.

Eigenschaften der Synchronisierung

Die gewählte Synchronisierung ist brauchbar, weil sie die Eigenschaft einer Äquivalenzrelation hat!

(i) A ist mit sich selbst synchron (Reflexivität)

(ii) Ist B mit A synchron, so auch A mit B (Symmetrie)

(iii) Ist B mit A und C mit B synchron, so auch C mit A (Transitivität).

Beweis von (i) - (iii): Die beiden ersten Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition und der zugrundeliegenden Erfahrungstatsache. Zum Beweis von (iii) denken wir uns in A zwei Uhren aufgestellt und richten die Uhr in B durch Lichtsignale synchron mit der ersten Uhr in A, die Uhr in C synchron mit B und die zweite Uhr in A synchron mit C. Es ist zu zeigen, dass die beiden Uhren in A ständig dieselbe Zeit anzeigen.

Nach Definition zeigt aber die zweite Uhr in A die Zeit $t + L/c$, wenn ein Lichtsignal, das zu der auf der ersten Uhr in A abgelesenen Zeit t abgeschickt wird und den gebrochenen Weg ABCA von der Länge L durchlaufen hat, wieder in A ankommt. Unsere Behauptung besagt also, dass die Zeit, welche zwischen Abgang und Ankunft jenes Lichtsignals in A verstricht gleich L/c ist. Dies ist aber gerade die experimentelle Tatsache von der wir ausgegangen sind. \square

Da die Synchronizität eine Äquivalenzrelation ist, können wir alle Uhren von einer Zentraluhr (in Neuenburg) aus durch Radiosignale richten; diese Regulierung ist unabhängig vom gewählten Zentrum.

Nach dem Relativitätsprinzip muss die zugrundeliegende Erfahrungstatsache auch in einem zweiten Inertialsystem K' (mit derselben Konstanten c) gelten. In jedem Inertialsystem haben wir damit eine konsistente Zeitdefinition.

B. Relativität der Gleichzeitigkeit

Man kann uns leicht sehen, dass die Gleichzeitigkeit ein relativer Begriff ist. Dazu beobachten wir zwei Blitzzeit-

schläge in A und B, welche bezüglich K gleichzeitig stattfinden. Diese kommen dann gleichzeitig im Mittelpunkt M von A und B an. Nun betrachten wir ein zweites Inertialsystem K' und darin zwei feste Punkte A' und B', die im Moment der Blitzschläge mit A und B zusammenfallen. Zum gleichen Zeitpunkt, von K aus gesehen, wird der Mittelpunkt M' von A' und B' mit M zusammenfallen. Da sich aber M', wie A' und B', relativ zu K bewegt, wird $M' \neq M$ sein im Moment wo sich die Signale in M treffen. Die Lichtsignale werden sich also nicht in M' treffen. Folglich sind die Ereignisse bezüglich K' nicht gleichzeitig.

Nur für $c \rightarrow \infty$ ist die Zeit absolut und dies ist eine gute Näherung für das alltägliche Leben abseits von Hoch-Energieanlagen.

Bemerkungen

1. Vom rein kinematischen Standpunkt aus könnte man die Uhren auch anders synchronisieren. Wir könnten z.B. ein Inertialsystem willkürlich auszeichnen und in diesem die Einstein-Synchronisierung verwenden, aber in allen anderen Systemen die Einstein-Zeit t durch $t \rightarrow t + f(x)$ ersetzen ($f(x)$ kann für jedes Inertialsystem anders gewählt werden). Insbesondere könnte man f so einrichten, dass es keine Relativität der Gleichzeitigkeit gibt ("Äther Standpunkt" von Lorentz). Kinematisch sind beide Standpunkte gleichberechtigt. [Dies wurde von P. Ehrenfest in seiner Leipziger Antrittsvorlesung (1913) in sehr eindrücklicher Weise dargestellt]. Nehmen wir aber zur Kinematik die Dynamik hinzu, so erweist sich der Einstein'sche Standpunkt gegenüber dem "Äther Standpunkt" noch überlegen. Da das Einstein'sche Synchronisierungsverfahren ein systeminternes Verfahren ist (dieses ist in jedem Inertialsystem ohne Bezugnahme auf andere Systeme ausführbar), ergibt sich aus dem Relativitätsprinzip die Forderung der Lorentz-invarianz aller Naturgesetze. [Vom "Äther Standpunkt" aus könnte man z.B. auf folgende Hypothese von Maxwell und

Miller (1904) kommen: "Wenn der Fitzgerald-Lorentz-Effekt existiert, könnte er alle Materialen gleichermaßen beeinflussen, unabhängig von der Natur des Materials. Aber es ist auch möglich, dass der Effekt von den Materialeigenschaften abhängt, so dass Fichtenholz mehr beeinflusst wird als Sandstein. In diesem Fall würde Fichtenholz — in einem Experiment wie 1887, bei dem Sandstein keine Verschiebung der Interferenzstreifen ergab — mehr als Sandstein komprimiert werden, und zu einem Effekt mit umgekehrtem Vorzeichen zu dem der ursprünglich einfachen Theorie führen". Tabächlich haben Morley und Miller das Michelson-Morley-Experiment 1904 auf einem Fichtenholzgerüst wiederholt, um festzustellen, ob dieses Material bei der Bewegung durch den Äther ebenso kontrahiert wird wie der ursprünglich verwendete Sandstein].

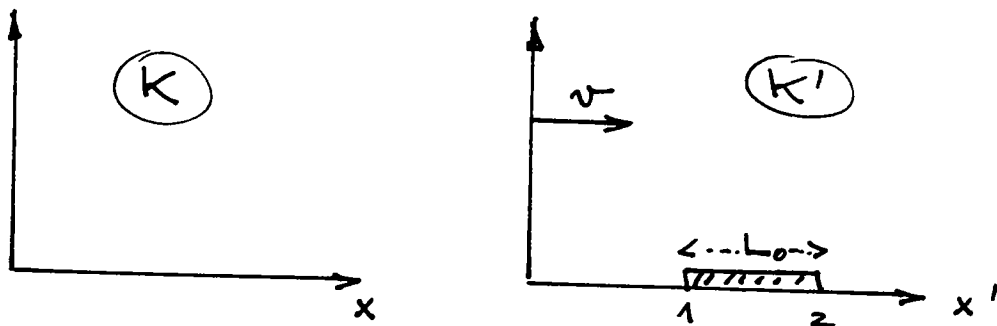
2. Die Einstein-Synchronisierung wird heute auch praktisch bei Navigations-Systemen verwendet.

§7. Einfache Folgerungen der SRT

Beweis wir den mathematischen Apparat weiter ausbauen, wollen wir einige einfache, aber wichtige Folgerungen ^{aus} der SRT ableiten.

A. Die Lorentzkontraktion

Wir betrachten einen Stab, welcher bezüglich eines Inertialsystems K' ruht und darin die Länge L_0 hat (s. Fig.).



Die x' -Koordinaten der Endpunkte des Stabes seien x'_i ($i=1,2$) bezogen auf K' . Nach Definition ist $L_0 = x'_2 - x'_1$. Die Länge

des Stabes bezüglich K ist $L = x_2 - x_1$ [$x_i, i=1,2$, sind die instantanen Endpunkte des Stabes für dieselbe Zeit t (relativ zu K)]. Aus dem Transformationsgesetz

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \\ x' &= \gamma (x - vt) \end{aligned} \quad (7.1)$$

folgt *)

$$L_0 = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L$$

oder

$$\boxed{L = \sqrt{1 - v^2/c^2} L_0} \quad (7.2)$$

Der bewegte Stab erscheint also kürzer. Da die transversalen Längen ungeändert bleiben, gilt für ein Volumen V entsprechend

$$\boxed{V = \sqrt{1 - v^2/c^2} V_0} \quad (7.3)$$

3. Die Zeitdilatation

Wir betrachten wieder die beiden Systeme K und K' und nehmen an, dass sich in Koordinatenursprung von K' eine bezüglich K' ruhende Uhr befindet. Zur Zeit $t'=t=0$ sollen die Ursprünge der beiden Systeme K und K' zusammenfallen. Nachdem bezüglich K die Zeit t verstrichen ist, zeigt die beobachtete Uhr in ihrem Ruhesystem K' die Zeit (siehe (7.1))

$$t' = \gamma t - \gamma \frac{v}{c^2} \cdot vt = \sqrt{1 - v^2/c^2} t$$

an (zur Zeit t ist $x=vt$).

Eine bewegte Uhr geht also um den Faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ langsamer (Zeitdilatation).

Fundamentale Uhren sind z.B. die instabilen Elementarteilchen. Falls die mittlere Lebensdauer eines ruhenden Teilchens gleich τ_0 ist, so lebt dasselbe bewegte Teilchen um Mittel länger,

*) Es spielt keine Rolle, dass t' für die beiden Endpunkte nicht gleich ist, da der Stab im geschwindigen System ruht.

Wäandladi

$$\tau = \gamma \tau_0 \quad (7.4)$$

In Hochenergieanlagen sind heute γ -Faktoren $> 10^3$ etwas Alltägliches. Dabei wird ihre Lebensdauer enorm verlängert. Interessant ist auch folgendes Beispiel. Durch die kosmische Strahlung werden in einer Höhe von 10-20 km sekundär Myonen erzeugt. Ein ruhendes Myon hat eine Lebensdauer $\tau_0 = 2.2 \times 10^{-6}$ Sec. Ohne Zeitdilatation könnte es höchstens $c \tau_0 = 0.66$ km weit kommen, ohne im Fickel zu zerfallen. Tatsächlich erstreckt aber ein grosser Bruchteil die Erdoberfläche, weil $\gamma \approx 10-40$ ist.

Verallgemeinerung auf beschleunigte Bewegungen

Wir betrachten jetzt eine allgemeine Bewegung (einer Uhr) längs der Weltlinie $x(\lambda)$. Die Grösse

$$\left(\frac{dx}{d\lambda}, \frac{dx}{d\lambda} \right) = \left(\frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 - \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 > 0$$

ist unabhängig vom Inertialsystem und positiv. Wir können deshalb den Parameter $\lambda = s$ so wählen, dass

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 1 \quad (7.5)$$

ist. Der so festgelegte Parameter s ist lorentzinvariant: Die transformierte Bahn $x'(s) = \Lambda x(s) + a$ erfüllt wieder die Gleichung (7.5). Diese können wir auch so schreiben

$$\left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 (1 - v^2/c^2) = 1, \quad v = \frac{dx}{dt}$$

oder
$$ds = c \sqrt{1 - \beta^2} dt, \quad \beta := v/c \quad (7.6)$$

Das Differential $d\tau$ der Eigenzeit ist definiert durch

$$\boxed{d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \beta^2} dt} \quad (7.7)$$

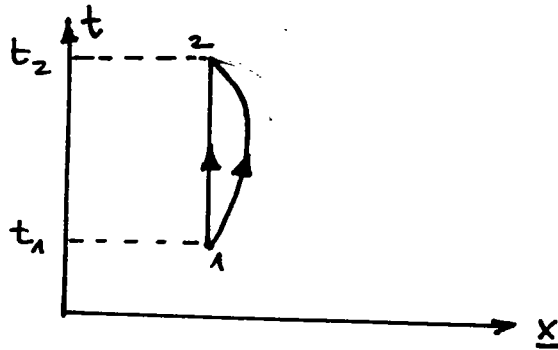
Im momentanen Ruhesystem ($dx' = 0$) ist $d\tau = dt'$.

Die Eigenzeit einer bestimmten Bewegung wird also mit einer, bezüglich dem bewegten Körper ruhenden Uhr gemessen. Allerdings muss man dafür sorgen, dass die Uhr genügend "robust" ist (mehr dazu weiter unten).

Der Unterschied der Eigenzeit τ in zwei Punkten ^{1 und 2} der Weltlinie $x(\tau)$ ist

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \beta^2} dt \quad (7.8)$$

Das Integral rechts wird maximal für die gerade Verbindung der beiden Weltpunkte 1 und 2, denn nehmen wir diese Gerade als Zeitachse eines Inertialsystems (s. Fig.), so fallen in (7.8) die negativen Glieder für die gerade Bewegung fort, die für die anderen Kurven auf treten, während t denselben Bereich durchläuft.



(7.8) verallgemeinert die Formel (7.4) (t wird mit ruhenden Uhren gemessen!).

Die Formel (7.8) ist experimentell verifiziert worden. Als Uhr wurde ein μ -Meson verwendet, welches mit Hilfe eines Magnetfeldes auf einer Kreisbahn gehalten wird. Im sogenannten g-2 Experiment hat man am CERN solche μ -Mesonen benutzt um das gyromagnetische Verhältnis dieser Teilchen zu bestimmen (Test der Quantenelektrodynamik). Im letzten dieser Experimente war $\gamma \approx 30$ und die Lebensdauer der μ -Mesonen stimmte mit (7.8) genau überein.

An diesem Beispiel kann man auch das sogenannte Zwillings-"Paradox" illustrieren. Betrachten wir neben dem kreisenden μ -Meson noch ein ruhendes (Zwillingsbruder), so lebt dieses

weniger lang als das bewegte Teilchen und zwar in einem objektiven Sinn: Wenn das ruhende Teilchen in einem festen Punkt auf der Bahn des bewegten Teilchens sitzt, so werden sich die beiden in allgemeiner mehrmals begegnen, aber das bewegte Teilchen wird (meistens) feststellen, dass es seinen ruhenden Zwillingbruder überlebt.

Diese Situation sieht auf den ersten Blick sehr unsymmetrisch aus: Da Bewegung relativ ist, könnte man ja das im Laborsystem bewegte Teilchen als ruhend ansehen. Von diesem Standpunkt aus müsste das im Laborsystem ruhende Teilchen länger leben, was dem obigen Ergebnis widerspricht.

Tatsächlich ist die Situation überhaupt nicht symmetrisch, denn das Laborsystem ist ein Inertialsystem, während das Ruhesystem des kreisenden Muons ein beschleunigtes Bezugssystem ist. Insofern liegt gar kein Paradoxon vor.

Es wird oft gesagt, das Zwillingsparadox löse sich erst in der allgemeinen Relativitätstheorie auf. Dies ist blanke Unsinn. Die allg. Relativitätstheorie spielt erst eine Rolle, wenn starke Gravitationsfelder vorhanden sind die den Raum krümmen. In den Laborhallen des CERN ist aber der Raum nicht besonders krumm; für die Muonen ist er in beliebig guter Näherung flach und es gilt die SRT.

Über das Zwillingsparadox werden immer wieder merkwürdige Artikel geschrieben. Die einzig relevante Frage ist aber die folgende: Bleibt die Uhr bei der Beschleunigung intact? Kollert z.B. ein Muon um einen Atomkern (muonisches Atom), so ist die Beschleunigung ganz außerordentlich. Da die Bindungsenergie im Vergleich zur Zerfallsenergie nicht ganz vernachlässigbar ist, ändert sich die Lebensdauer in einer berechenbaren Weise (Änderung des Phasentraumes) und in Übereinstimmung mit dem Experiment.

Das kreisende Muon im g-2 Experiment steht in Wechselwirkung mit dem magnetischen Feld, welches das Teilchen auf seine Bahn zwingt. Diese Wechselwirkung führt grundsätzlich zu einer Änderung der Lebensdauer, welche aber ausser-

ordentlich gering ist. Die relativistische Quantentheorie erlaubt es diese Änderung zu berechnen (Diplomarbeit!).

Kronen sind also ausgezeichnete "Uhren", die für alle "praktischen" Zwecke ausreichen. Im Prinzip kann man aber sogar eine ideale Uhr konstruieren, bei der keinerlei Beschleunigungseffekte auf treten. Dazu verwenden wir irgend eine "gute" Uhr (also nicht, beispielsweise, eine Uhr aus magnetisierbarem Material, welche bei Beschleunigung durch ein Magnetfeld stehen bleibt). Da Beschleunigungen in der SRT eine absolute Bedeutung haben, können wir die Uhr mit einem Beschleunigungsmessgerät versehen (System von Federn). Die Ablesung dieses Gerätes verwendet man nun den Einfluss der Beschleunigung auf die Uhr zu korrigieren. Diese ideale Uhr gibt dann die Eigenzeit (7.8) an.

C. Das Additionstheorem der Geschwindigkeiten

Wir beobachten einen Massenpunkt, der sich mit der Geschwindigkeit \underline{u}' bezüglich K' bewegt. Wir berechnen die Geschwindigkeit \underline{u} mit der sich dieser Massenpunkt relativ zu K bewegt, wenn sich K' gegen K mit der Geschwindigkeit \underline{v} bewegt.

Dazu bilden wir zunächst die Umkehrung der spez. Lorentz-Transformationen (3.4) für $\underline{c} = 1$:

$$t = \gamma t' + \gamma \underline{v} \cdot \underline{x}'$$

$$\underline{x} = \underline{x}' + \frac{\gamma - 1}{v^2} (\underline{v} \cdot \underline{x}') \underline{v} + \gamma \underline{v} t'$$

Setzen wir darin $\underline{x}' = \underline{u}' t'$ ein, so folgt für $\underline{u} = \underline{x}/t$

$$\underline{u} = \frac{\underline{u}'/\gamma + (\gamma - 1)/\gamma v^2 (\underline{v} \cdot \underline{u}') \underline{v} + \underline{v}}{1 + \underline{v} \cdot \underline{u}'} \quad (7.9)$$

Spezialfälle:

1) \underline{u}' parallel zu \underline{v} :
$$\underline{u} = \frac{\underline{v} + \underline{u}'}{1 + \underline{v} \cdot \underline{u}'} \quad (7.10)$$

2) \underline{u}' senkrecht zu \underline{v} :

$$\underline{u} = \underline{v} + \sqrt{1-\beta^2} \underline{u}'$$

Dies zeigt, dass die Bewegung senkrecht zur Relativgeschwindigkeit verlangsamt ist (Effekt der Zeitdilatation).

3) Aus (29) folgt allgemein

$$u^2 = 1 - \frac{(1-u'^2)(1-v^2)}{(1+v \cdot u')^2} \leq 1$$

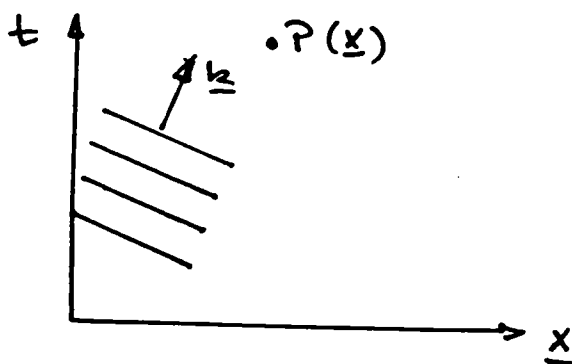
Wir erhalten $u^2 = 1$ nur für $u'^2 = 1$ oder $v^2 = 1$ (Invarianz der Lichtgeschwindigkeit)

D. Dopplereffekt, Aberration

Invarianz der Phase einer ebenen Welle

Das Resultat der folgenden Überlegung werden wir später mit "schöneren" Mitteln eleganter herleiten.

Wir betrachten eine ebene Welle $\propto \exp(i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t))$ und zeigen, dass die Phase sich beim Übergang zu einem anderen Lorentzsystem nicht ändert. Dies sieht man durch folgende Abzählung: Zur Zeit $t=0$ passiere ein Wellenbündel den Ursprung des Systems K . Ein Beobachter im Punkte P mit den Koordinaten \underline{x} (siehe Fig.) beginnt die Wellenbündel zu zählen, wenn jener in P ankommt. Er beginnt also zur Zeit $\frac{1}{c} \underline{k} \cdot \underline{x}$ zu zählen ($\underline{k} := \underline{k}/|\underline{k}|$). Da in der Zeiteinheit $\omega/2\pi$ Wellen-



bündel passieren, hat der Beobachter zur Zeit t im ganzen

$$(t - \underline{k} \cdot \underline{x} / c) \frac{\omega}{2\pi}$$

Bündel gezählt.

Das System K' bewege sich mit Geschwindigkeit v bezüglich K . Die Ursprünge von K und K' mögen zur Zeit $t=t'=0$ zusammenfallen. Ein bezüglich K' ruhender Beobachter im Punkte P' mit den Koordinaten \underline{x}' beginne zu zählen, wenn die besagte Welle Π erreicht und er zähle bis zur Zeit t' . Falls der Punkt P' so gewählt ist, dass er am Ende der Zählperiode mit dem Punkt P zusammenfällt, dann haben beide Beobachter dieselbe Zahl von Wellenbündel gezählt. Aber der Beobachter in K'

hat deren

$$(t' - \underline{k}' \cdot \underline{x}' / c) \frac{\omega'}{2\pi}$$

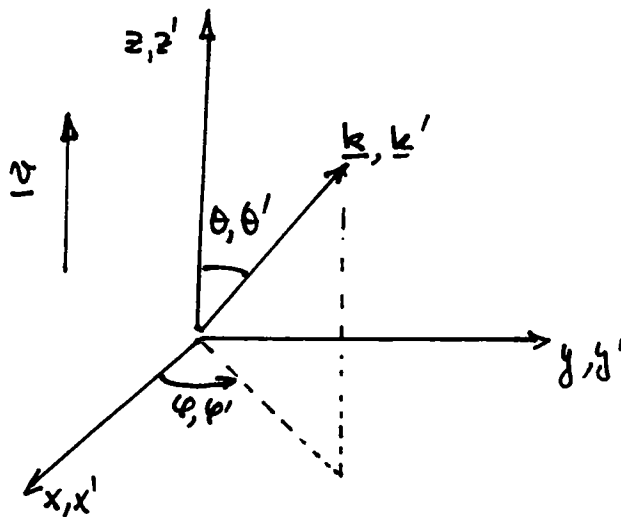
gezählt. In der betrachteten Situation sind (t, \underline{x}) und (t', \underline{x}') über eine eine Lorentztransformation verknüpft.

Es gilt also

$$\underline{k}' \cdot \underline{x}' - \omega' t' = \underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t \quad (\text{Invariante der Phase})$$

Deshalb transformieren sich (\underline{k}, ω) wie (\underline{x}, ct) .

Das System K' bewege sich mit der Geschwindigkeit v in der z -Richtung relativ zum System K . Die Polwinkel von $\underline{k}, \underline{k}'$ seien $(\theta, \varphi), (\theta', \varphi')$ (s. Fig.)



Aus dem Transformationsgesetz

$$\begin{aligned} z' &= \gamma(z - vt) \quad , \quad x' = x, \quad y' = y \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{1}{c}\beta z\right) \end{aligned} \quad (7.11)$$

folgt

$$\begin{aligned} k'_x &= k_x, \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = \gamma\left(k_z - \beta/c \omega\right) \\ \omega' &= \gamma\left(\omega - v k_z\right) \end{aligned} \quad (7.12)$$

Für Lichtwellen ist $|k| = \omega/c$, $|k'| = \omega'/c$ und wir bekommen aus (7.12)

$$\omega' = \gamma \omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right) \quad (7.13)$$

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \beta} \quad (7.14)$$

$$\varphi' = \varphi \quad (7.15)$$

Anderer Formen derselben Beziehung (7.14) sind

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta' &= \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \theta}{1 - \beta \cos \theta} \\ \cos \theta' &= \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta' &= \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta \end{aligned} \right\} \quad (7.14')$$

(7.13) ist die Formel für den relativistischen Dopplereffekt und (7.14), (7.14') stellen die Absorptionsgleichung dar.

Speziell für $\theta = 0$ erhält man aus (7.13)

$$\omega' = \gamma \omega (1 - \beta) \quad (7.15)$$

und daraus für die Wellenlängen

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad (7.16)$$

Setzen wir $1 + z := \lambda'/\lambda = 1 + \Delta\lambda/\lambda$ (7.17)

so gilt also

$$\boxed{1+z = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}} \quad (7.18)$$

Für Quasare mit den größten Rotverschiebungen ist $z > 3$. Welcher Fluchtgeschwindigkeit würde dies entsprechen?

Interessant ist auch der transversale Dopplereffekt: Für $\theta = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir aus (7.13)

$$\omega' = \gamma \omega \quad (= \omega + \mathcal{O}(v^2/c^2)) \quad (7.19)$$

Ursprünglich schlug Einstein vor, diesen Effekt bei den Kanalstrahlen zu überprüfen. Der Dopplereffekt 2. Ordnung wurde erst gegen 1940 experimentell mit hoher Genauigkeit bestätigt (spektroskopisch an bewegten Atomen sowie mit Positronenabsorption).

Übungsaufgabe (Dopplereffekt in Medien): Wiederhole die obigen Rechnungen für Licht in einem Medium und zeige, dass an Stelle von (7.13) gilt

$$\omega' = \gamma \omega (1 - \beta n \cos\theta), \quad n: \text{Brechungsindex.}$$

Aus (7.14) erhalten wir die Aberration des Lichtes. K sei das Ruhesystem einer emittierenden Lichtquelle (Stern) und \underline{v} sei die Geschwindigkeit des Beobachters (Erde) relativ zur Quelle. Ist z.B. $\theta = \pi/2$ (senkrechter Einfall auf die Erdoberfläche; \underline{v} sei parallel zur Oberfläche), so ist nach (7.14) der Beobachtungswinkel θ' gegeben durch

$$\tan \theta' = \pm \frac{1}{\beta \gamma}$$

Für den Aberrationswinkel $\alpha = \text{Abweichung des Winkels } \theta' \text{ von } 90^\circ$ gilt

$$\boxed{\tan \alpha = \beta \gamma} \quad (7.20)$$

Der nichtrelativistische Ausdruck $\tan \alpha = v/c$ wird also mit dem Faktor γ korrigiert. Da für die Erde $\beta \approx 10^{-4}$ ist, ist dieser

Korrektureffekt un beobachtbar. Bei der Strahlung von schnell bewegten Elementarteilchen spielt er aber eine wichtige Rolle (etwa für die Aufstellung der Zähler beim Zerfall $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ für schnelle π^0 ; siehe Kapitel III).

F. Versuch von Fizeau

In der einfachsten Version des Fizeau Experimentes fließt eine Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit v parallel oder antiparallel zum Lichtweg. Der Brechungsindex der Flüssigkeit sei gleich n . Die Lichtgeschwindigkeit im System K' , in welchem die Flüssigkeit ruht, ist $u' = c/n$. Aus dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten, (7.16), folgt für die Geschwindigkeit u des Lichtes im Laborsystem

$$u = \frac{c/n \pm v}{1 \pm v/nc} \approx \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad (7.21)$$

Diese Formel wurde auf Grund eines Äthermodells, schon 1818 von Fresnel vorgeschlagen. Fizeau hat diese Formel 1859, innerhalb der experimentellen Fehler, bestätigt.

Verfeinerung für Dispersion

Falls der Brechungsindex merklich von der Wellenlänge λ abhängt (Dispersion) ergibt sich ein Zusatzterm zu (7.21) (H.A. Lorentz). Auf Grund der Dopplerverschiebung ändert sich nämlich die Wellenlänge im Ruhesystem der Flüssigkeit um

$$\Delta\lambda \approx \pm \lambda v/u' = \pm \lambda n v/c$$

(niederste Ordnung von (7.16) in v/c). Die relevante Geschwindigkeit des Lichtes im Medium ist deshalb

$$\frac{c}{n(\lambda + \Delta\lambda)} \approx \frac{c}{n(\lambda)} - \frac{c}{n^2} \frac{dn}{d\lambda} \Delta\lambda \approx \frac{c}{n} \mp v \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}$$

An Stelle von (7.21) erhalten wir daher

$$u \approx \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda}\right) \quad (7.22)$$

Die Dispersionskorrektur in (7.22) wurde von Zeeman (1914, 1915)

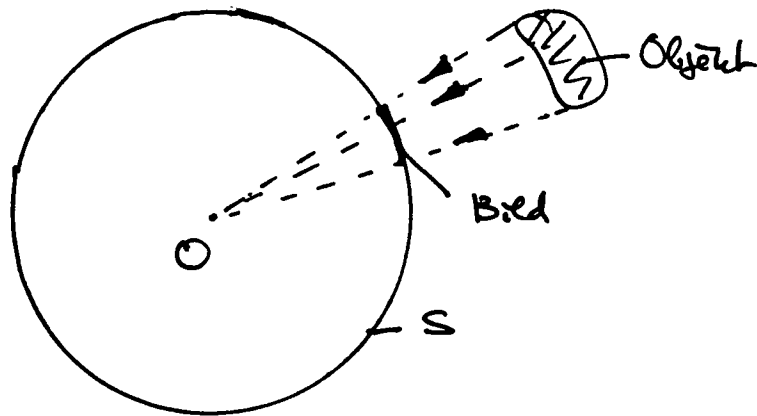
experimentell bestätigt.

Während eines halben Jahrhunderts betrachtete man den Versuch von Fizeau (und seine Verbesserung durch Michelson und Morley 1886) als unmittelbare Widerlegung des Relativitätsprinzips und als schlagender Beweis für die Existenz des "ruhenden Äthers". Die SRT sieht in ihm nicht anderes als eine Bestätigung für das Einsteinsche Additionstheorem der Geschwindigkeiten. So kann man sich täuschen!

61. Unsichtbarkeit der Lorentzkontraktion

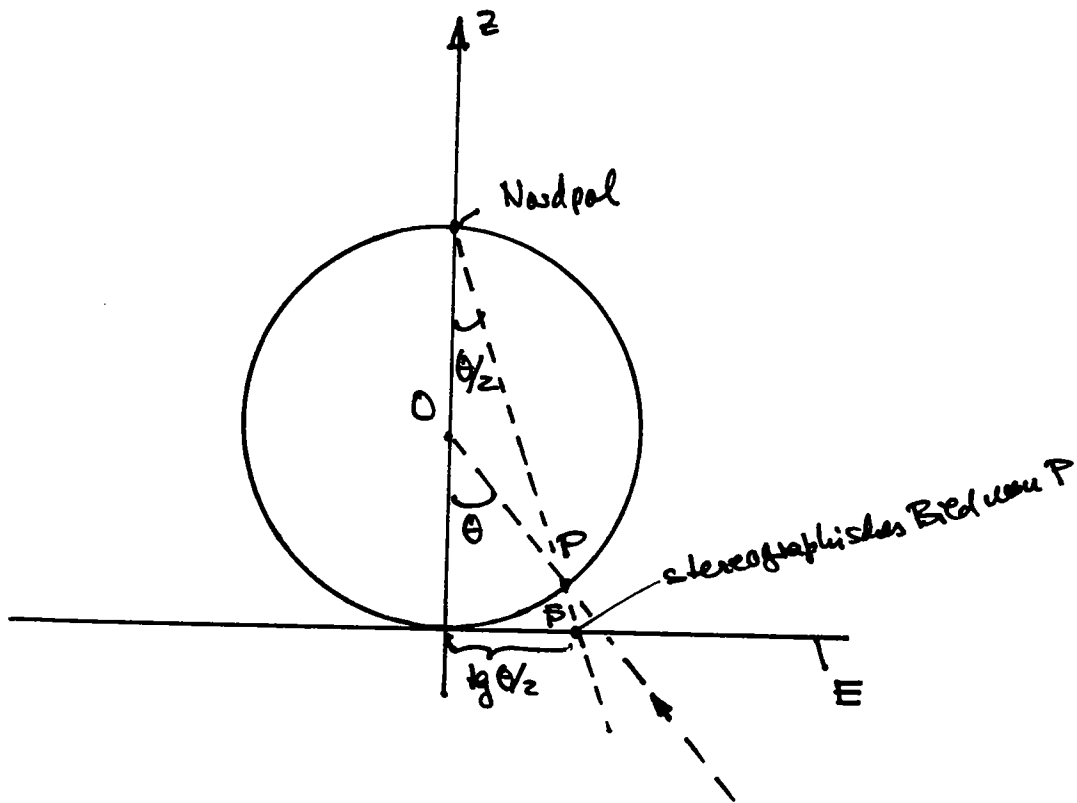
Erstaunlicherweise wurde erst 1959 (unabhängig von R. Penrose und J. Terrell) bemerkt, dass bei der visuellen oder photographischen Beobachtung schnell bewegter Objekte die Lorentzkontraktion nicht festgestellt werden kann.

Wir untersuchen zunächst die visuelle Erscheinung eines Objektes für verschiedene Inertialbeobachter. Für einen Beobachter O läßt sich diese durch die Abbildung auf die Sphäre S mit Mittelpunkt O und Durchmesser 1 darstellen (s. Fig.).



Um zu sehen, wie dasselbe Objekt für einen gleichförmig bewegten Beobachter O' mit "Sphäre" S' erscheint, betrachten wir auch die stereographische Projektion des Bildes auf S auf die Ebene E in der nachstehenden Figur.

Die Aberrationsformel (3. Gleichung von (7-14')) zeigt, dass sich die stereographischen Projektionen für O und für O' lediglich um eine Dilatation (Messstabsänderung) unterscheiden.



Als Beispiel betrachten wir eine bezüglich O' ruhende Kugel. Auf S' erscheint diese als Kreis. Das stereographische Bild ist wieder ein Kreis. [Kreise auf S gehen in Kreise oder Geraden über *)]. Dasselbe gilt auch für das stereographische Bild für O' , da sich letzteres nur um eine Translation unterscheidet. Folglich erscheint auch für O' auf S' ein Kreis. Allen gleichförmig bewegten Beobachtern erscheint also die Kugel als Kreis. Dies beruht natürlich auf Retardierungseffekten.

*) Dies ergibt sich aus folgenden Fakten: (i) Bei der stereographischen Projektion entspricht jeder Drehung der Sphäre S eine gebrochene lineare Transformation (Möbius Transformation) der komplexen Koordinate von E [siehe z.B. H.A. Newman, Lineare Darstellungen der Lorentzgruppe, Berlin 1963 (Deutscher Verlag der Wissenschaften), §1.5]. Letztere bilden übrigens gerade die Automorphismen der Poincaré'schen Zahlenkugel (siehe z.B. H. Cartan, Analytische Funktionen, B.I., Abschnitt VI.2). (ii) Die Möbiustransformationen führen Kreise und Geraden wieder in Kreise und Geraden über (siehe irgend ein Buch über Funktionentheorie). [Die gebrochenen Transformationen sind natürlich auch konform].

Durch eine Drehung kann man einen Kreis auf S in die spezielle Lage mit dem Nordpol als Mittelpunkt überführen. Für letzteren Fall ist das stereographische Bild natürlich ein Kreis. \square

Um zeigen wir, dass bei photographischen Aufnahmen in grossen Abstand (sodass die Konvergenz der Lichtstrahlen vernachlässigbar ist) stets nur eine Verdrehung des Objektes festzustellen ist.

Dazu beweisen wir das folgende kinematische

Lemma: Falls in einem Inertialsystem K zwei Lichtstrahlen nebeneinander und parallel im Abstand Δa laufen, so tun sie dies auch in jedem anderen Inertialsystem K' (in gleichem Abstand Δa).

Beweis: Wir betrachten längs den Weltlinien der beiden Lichtstrahlen L_1 und L_2 je ein Ereignis e_1 bzw. e_2 . Falls e_2 (bezüglich K) um Δt später ist als e_1 , so ist (bezüglich K) der räumliche Abstand von e_1 und e_2 gleich $[(\Delta a)^2 + c^2(\Delta t)^2]^{1/2}$ und folglich ist (der Minkowski-Abstand) Δs^2 von e_1 und e_2 gleich $-(\Delta a)^2$. Das invariante Δs^2 ist also unabhängig von Δt . Würde nun die Behauptung des Lemma für ein System K' nicht zutreffen und L_2 parallel zu L_1 im Abstand $\Delta a'$ um die Länge $\Delta l'$ vorauslaufen, so wäre der Minkowski-Abstand von zwei Ereignissen $\Delta s^2 = c^2 dt'^2 - [(\Delta a')^2 + (c\Delta t' + \Delta l')^2]$ nicht unabhängig vom zeitlichen Abstand $\Delta t'$ der beiden Ereignisse. Dies wäre im Widerspruch zur Invarianz von Δs . Aus dieser folgt, neben $\Delta l' = 0$, auch $\Delta a' = \Delta a$. \square

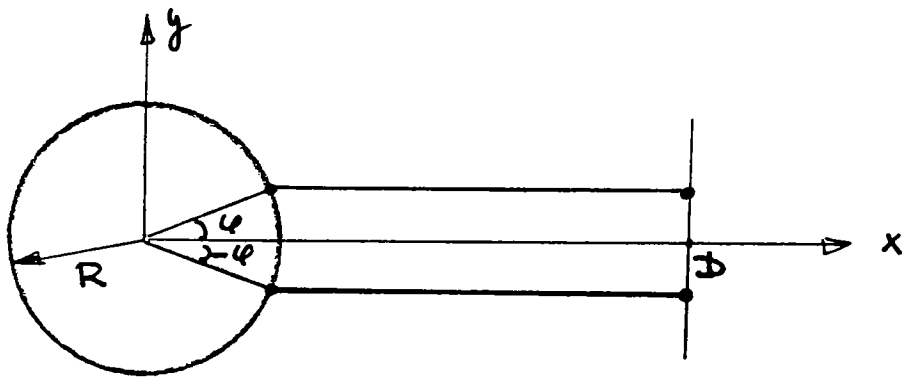
Fallen die Lichtstrahlen senkrecht auf die Photoplatte, so wird bei der Photographie ein Bündel von parallel nebeneinanderlaufenden Lichtstrahlen eingefangen. Nach dem Lemma laufen sie auch in jedem anderen Inertialsystem in gleichen Abständen parallel und nebeneinander und erzeugen also, bei senkrechtem Einfall auf die Photoplatte, immer dasselbe Bild. Auf Grund der Aberration sieht deshalb ein Beobachter einen vorbeifliegenden Körper unkontrahiert, aber verdreht. Falls der Körper bezüglich K' ruht und die Lichtstrahlen in K senkrecht auf die Photoplatte einfallen ($\theta = \pi/2$), so ist der Winkel der Drehung $\alpha = \theta - \theta' = \pi/2 - \theta'$ nach (7.14') gegeben durch

$$\cos \alpha = \sin \theta' = \sqrt{1 - \beta^2}$$

F. Retardierung und scheinbare Überlichtgeschwindigkeit

Im Jahre 1971 erregten radioastronomische Beobachtungen grosses Aufsehen, da diese zeigten, dass sich die Komponenten der quasi-stellaren Radioquellen (Quasare) 3C 279 und 3C 273 mit 6- bzw. 4-facher Lichtgeschwindigkeit auseinanderbewegen. Wir wollen an einem Beispiel zeigen, dass auf Grund von Retardierungseffekten Überlichtgeschwindigkeiten von bewegten Objekten vorgetäuscht werden können.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf zwei Raumdimensionen und betrachten einen Gasring in der (x,y) -Ebene des Systems K , dessen Zentrum sich zur Zeit $t=0$ im Nullpunkt befindet und sich mit der Geschwindigkeit v in negativer x -Richtung von einem in $(x=D, y=0)$ ruhenden Beobachter entfernt (s. Fig.)



Der Ring leuchtet im unbewegten System K' zur Zeit $t'=0$ auf. Der Beobachter in D empfängt zuerst das Licht welches vom Punkte mit $\varphi=0$ auf dem Kreisring emittiert wird. Danach sieht er zwei symmetrisch gelegene, auseinanderlaufende Lichtflecken (von $\pm\varphi$, mit wachsendem φ , hervörkündend). Selbstverständlich nähern sich diese Flecken wieder.

Wir wollen zeigen, dass anfänglich die beiden Flecken — vom Beobachter aus gesehen — mit Überlichtgeschwindigkeit auseinanderlaufen. Bezüglich K' entspricht das Aufleuchten des Ringes den Ereignissen

$$t'=0, \quad x'=R \cos \varphi, \quad y'=R \sin \varphi \quad (0 \leq \varphi < 2\pi)$$

Diesen entsprechen die Koordinaten ($c=1$)

$$t = \gamma(t' - vx') = -\gamma v R \cos \varphi$$

$$x = \gamma(x' - vt') = \gamma R \cos \varphi$$

(7.23)

$$y' = y = R \sin \varphi$$

relativ zu K . Selbstverständlich hängt t von φ ab. Nun berechnen wir die Ankunftszeit t_a der Leuchteignisse in $\pm \varphi$ beim Beobachter. Diese ist nach (7.23)

$$t_a - t = [(\gamma - \gamma R \cos \varphi)^2 + R^2 \sin^2 \varphi]^{1/2}$$

d.h.

$$t_a = -\gamma v R \cos \varphi + [\dots]^{1/2} \approx -\gamma v R \cos \varphi + \gamma R \cos \varphi$$

(7.24)

($R \ll D$). Der Beobachter sieht zur Zeit t_a zwei Lichtpunkte im Abstand $y = R \sin \varphi$. Nach (7.24) ist

$$y(t_a) = \{R^2(1 - \cos^2 \varphi)\}^{1/2} = \{R^2 [1 - (\frac{D - t_a}{\gamma R(1+v)})^2]\}^{1/2}$$

$$= [R^2 - (D - t_a)^2 \frac{1-v}{1+v}]^{1/2}$$

(7.25)

Die Relativgeschwindigkeit ist, mit (7.24)

$$\frac{dy}{dt_a} = 2 \frac{1}{2} \frac{1}{y} = 2 (D - t_a) \frac{1-v}{1+v} = 2 \gamma (1-v) d\varphi = 2 \sqrt{\frac{1-v}{1+v}} d\varphi$$

(7.26)

Diese ist also proportional zum $d\varphi$. Für den Beobachter ergibt sich deshalb der Eindruck eines Objektes, das in zwei Bundesstaaten explodiert, die anfänglich scheinbar mit vielfacher Lichtgeschwindigkeit auseinanderfliegen.

Dieses Beispiel zeigt, dass man bei der Interpretation optischer Daten vorsichtig sein muss. (Vgl. auch die Übungen).

8. Tensoralgebra und Tensoranalysis im Minkowski Raum

In der SRT entsprechen den physikalischen Grössen "geometrische Objekte" des Minkowski Raumes. Besonders einfache geometrische Objekte sind die Vektor- und Tensorfelder, da sich diese unter der Poincaré-Gruppe linear transformieren. Klassische physikalische Felder lassen sich (im allgemeinen) durch Tensorfelder darstellen. [In der Quantentheorie benötigt man zusätzlich sog. Spinorfelder].

In diesem Abschnitt entwickeln wir deshalb die Tensoranalysis im Minkowski Raum. Mit deren Hilfe wird es möglich sein, die Forderung der Lorentzinvarianz der Naturgesetze "problemlos" zu erfüllen.

8.1. Das Tensorprodukt von Vektorräumen

Vorbemerkungen: Im folgenden sind alle Vektorräume reell und endlichdimensional (wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt wird). Ist E ein Vektorraum, so bezeichnet E^* den dualen Raum, d.h. den Vektorraum der Linearformen auf E mit Werten in \mathbb{R} . Sei $u^* \in E^*$ eine Linearform, so schreiben wir für den Wert von u^* auf $v \in E$

$$u^*(v) \equiv \langle u^*, v \rangle$$

Der duale Raum von E^* ist natürlich isomorph zu E [Man identifiziere $u \in E$ mit der Linearform $u^* \mapsto \langle u^*, u \rangle$ auf E^*]. Damit ist die Dualität von E und E^* eine wechselseitige Beziehung. Wir schreiben deshalb statt $\langle u^*, u \rangle$ oft auch $\langle u, u^* \rangle$.

Es seien E_1, \dots, E_p Vektorräume. Eine p-Linearform (Multilinearform) über E_1, \dots, E_p ist eine reelle Funktion $T: E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow \mathbb{R}$ welche linear in allen Argumenten ist:

$$\begin{aligned} T(u_1, \dots, u_i, \lambda u_i + \mu v_i, u_{i+1}, \dots, u_p) &= \\ &= \lambda T(u_1, \dots, u_i, \dots, u_p) + \mu T(u_1, \dots, v_i, \dots, u_p), (\lambda, \mu \in \mathbb{R}, i=1, \dots, p). \end{aligned}$$

Diese p-Linearformen bilden in natürlicher Weise einen Vektorraum über \mathbb{R} :

$$(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)(u_1, \dots, u_p) := \lambda_1 T_1(u_1, \dots, u_p) + \lambda_2 T_2(u_1, \dots, u_p)$$

Diesen Vektorraum bezeichnet man mit

$$E^*_1 \otimes E^*_2 \otimes \dots \otimes E^*_p$$

und nennt ihn das Tensorprodukt der Räume E^*_i ($E^*_i = \text{Dualraum zu } E_i$). Dieser Raum wird durch die folgenden speziellen Linearformen aufgespannt:

$$T(u_1, \dots, u_p) := \langle u^{*1}, u^1 \rangle \dots \langle u^{*p}, u^p \rangle, \quad (u^{i*} \in E^*_i). \quad (1)$$

Die Richtigkeit dieser Aussage wird sich weiter unten zeigen.

Da jeder Vektorraum natürlich isomorph zu $(E^*)^*$ ist, ist damit auch $E_1 \otimes \dots \otimes E_p$ definiert: Seine Elemente sind die p -linearformen $S: E^*_1 \times \dots \times E^*_p \rightarrow \mathbb{R}$.

8.2. Tensoren über einem Vektorraum, Algebraische Operatoren

Sei jetzt E ein fester Vektorraum und $E_i = E$ oder E^* .

Tensoren über E heißen die Elemente der Räume $E_1 \otimes \dots \otimes E_p$ ($p = 1, 2, \dots$). Die Folge E_1, \dots, E_p in $E_1 \otimes \dots \otimes E_p$, d.h. die Angabe ob $E_i = E$ oder $E_i = E^*$, bestimmt den Typ des Tensors:

$T(u_1, \dots, u_p)$ heißt kovariant (kontravariant) im i^{ten} Argument u_i falls $u_i \in E$ ($u_i \in E^*$) ist; p ist die Stufe des Tensors T .

Als Tensoren der Stufe 0 nimmt man die reellen Zahlen ("Skalare") hinzu. Tensoren der Stufe 1 fallen mit E bzw. E^* zusammen; $u \in E$ ($u^* \in E^*$) ist ein kontravarianter (kovarianter) Vektor.

Vertauscht man in $T(u_1, \dots, u_p)$ zwei Variable vom gleichen Typ, so entsteht ein neuer Tensor S vom gleichen Typ wie T

$$S(\dots u_i, \dots u_k \dots) = T(\dots u_k \dots u_i \dots)$$

Speziell heißt T symmetrisch (antisymmetrisch) in u_i, u_k falls $S = T$ ($S = -T$).

Das Tensorprodukt $T \otimes S$ von zwei beliebigen Tensoren ist erklärt durch

$$(T \otimes S)(u_1, \dots, u_{p+q}) := T(u_1 \dots u_p) S(u_{p+1}, \dots, u_{p+q})$$

Beachte, dass im allgemeinen $T \otimes S \neq S \otimes T$. (2)

Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2) \otimes S &= \lambda_1 T_1 \otimes S + \lambda_2 T_2 \otimes S \\ T \otimes (\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2) &= \lambda_1 T \otimes S_1 + \lambda_2 T \otimes S_2 \end{aligned}$$

Ferner ist das Produkt assoziativ

$$(T_1 \otimes T_2) \otimes T_3 = T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3)$$

Für ausgearbeitete Tensoren der Form (1) können wir schreiben

$$T = u_1 \otimes \dots \otimes u_p, \quad u_i \in E, E^* \quad (3)$$

dann für dieses T gilt nach (2)

$$T(v_1, \dots, v_p) = \prod_{i=1}^p \langle u_i, v_i \rangle \quad (4)$$

[In dieser Gleichung bilden (u_i, v_i) ein duales Paar]

Die Kontraktion (Spur, Verjüngung) eines Tensors T bezüglich eines dualen Variablenpaares erklären wir zuerst für die speziellen Tensoren (3): Falls u_1 und u_2 zueinander dual sind, setzen wir

$$Sp_{(1,2)} u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_p := \langle u_1, u_2 \rangle u_3 \otimes \dots \otimes u_p$$

Diese Operation kann eindeutig linear auf ganz $E_1 \otimes \dots \otimes E_p$ (E_1, E_2 duales Paar) fortgesetzt werden. Dies kann man abstrakt beweisen (mit Universalitätseigenschaft des Tensorproduktes). Die Behauptung folgt aber unmittelbar aus dem Komponentenkalkül (siehe unten). Damit wird eine lineare Abbildung

$$Sp_{(1,2)} : E_1 \otimes \dots \otimes E_p \longrightarrow E_3 \otimes \dots \otimes E_p \quad (= \mathbb{R} \text{ für } p=2)$$

definiert. Analog definiert man die Spur $Sp_{(i,k)}$ für jedes duale Paar E_i, E_k .

8.3. Tensoren über einem metrischen Raum

Eine Metrik auf einem Vektorraum E bedeutet für uns eine symmetrische Bilinearform $G(u, v)$ (auch "Skalarprodukt" genannt) auf E , welche nicht ausgeartet ist: $G(x, y) = 0$ für alle y ist nur möglich, falls $x = 0$ ist. G ist also ein ausgezeichneteter, kovarianter und symmetrischer Tensor 2. Stufe.

Da G nicht ausgeartet ist, gehört zu jedem $u \in E$ ein eindeutiges duales Element $u^* \in E^*$ definiert durch

$$\langle u^*, v \rangle = G(u, v) \quad \text{für alle } v .$$

Die Zuordnung $u \mapsto u^*$ ist ein Isomorphismus von E auf E^* . Damit können wir E und E^* identifizieren.

8.4. Komponentenkalkül

Wir betrachten jetzt wieder den allgemeinen Fall. Es sei e_1, \dots, e_m eine Basis von E . Der duale Raum besitzt stets eine eindeutige duale Basis e^1, \dots, e^m , die durch

$$\langle e^i, e_j \rangle = \delta^i_j$$

definiert ist. Durch die Stellung der Indizes unterscheiden wir auch die Komponenten von Vektoren aus E bzw. E^* :

$$\begin{aligned} x \in E &: x = x^i e_i \\ y \in E^* &: y = y_i e^i \end{aligned} \quad (\text{Summenkonvention !})$$

Mit dieser Bezeichnung gilt

$$\langle y, x \rangle = y_i x^i \quad (y \in E^*, x \in E)$$

Ein Tensor, z.B. $T \in E^* \otimes E^* \otimes E$ nimmt dann die Form an

$$\begin{aligned} T(u, v, w) &= T(u^i e_i, v^j e_j, w_k e^k) \\ &= \underbrace{T(e_i, e_j, e^k)}_{\equiv T_{ij}^k} u^i v^j w_k \end{aligned} \quad (5)$$

$\equiv T_{ij}^k$: Komponenten von T in der Basis e_1, \dots, e_m .

Der Typ des Tensors wird durch die Stellung der Indizes zum Ausdruck gebracht.

Der Tensor T lässt sich durch die Komponenten wie folgt darstellen

$$T = T_{ij}^k e^i \otimes e^j \otimes e_k \quad (6)$$

In der Tat ist

$$T(u, v, w) = T_{ij}^k \langle e^i, u \rangle \langle e^j, v \rangle \langle e_k, w \rangle$$

Aber

$$\langle e^i, u \rangle = \langle e^i, u^l e_l \rangle = u^l \langle e^i, e_l \rangle = u^i, \text{ etc.}$$

Allgemein bilden etwa die Tensoren

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$$

eine Basis von

$$\underbrace{E \otimes \dots \otimes E}_{p \text{ mal}} \otimes \underbrace{E^* \otimes \dots \otimes E^*}_{q \text{ mal}}$$

Beweis: Übungsaufgabe.

Die lineären Operationen mit Tensoren vom gleichen Typ sind offensichtlich komponentenweise auszuführen:

Sei z.B. $T \in E^* \otimes E$, $S \in E^* \otimes E$, so ist
 $(\lambda T + \mu S)^i_j = \lambda T^i_j + \mu S^i_j$

Das Tensorprodukt drückt sich in Komponenten wie folgt aus: Seien z.B. S_i^k und T_{ik}^l die Komponenten von S und T , so ist

$$(S \otimes T)_i^{kjl^m} = S_i^k T_{jl^m} \quad (7)$$

Die Vertauschung gleichartiger Variablen entspricht der Vertauschung der entsprechenden (gleichgestellten) Indizes: z.B. ist für $T \in E \otimes E$

$$S(u,v) = T(v,u) \quad \text{äquivalent zu} \quad S_{ik} = T_{ki}$$

Daraus folgt insbesondere, dass die Symmetrie (Antisymmetrie) von Tensorkomponenten in gleichgestellten Indizes unabhängig von der Basis ist.

Sehr einfach ist die Kontraktion: Sei z.B. $T \in E \otimes E^* \otimes E$ und $S = \text{Sp}_{(1,2)} T$, dann ist

$$S^i = T^k_i \quad (8)$$

Beweis: Diese Bildung ist linear in T und stimmt für $T = u \otimes v \otimes w$ mit der früheren Definition überein: Die Komponenten der rechten Seite von

$$\text{Sp}_{(1,2)} u \otimes v \otimes w = \langle u, v \rangle w$$

sind $(u^k v_k) w^i$, in Übereinstimmung mit (8).

Basistransformation:

Ändern wir die Basis e_i gemäss

$$\bar{e}_i = \bigwedge_i^k e_k, \quad (9)$$

so ändert sich die duale Basis gemäss

$$\bar{e}^i = \bigwedge_k^i e^k, \quad (10)$$

wobei die beiden Matrizen (Λ_i^k) und (Λ_k^i) , welche durch die Stellung der Indizes unterschieden werden, kontragredient zueinander sind:

$$\Lambda_i^l \Lambda_k^l = \delta^i_k \quad (11)$$

Die Vektorkomponenten transformieren sich gemäss

$$\bar{x}^i = \Lambda_i^k x^k, \quad \bar{x}_i = \Lambda_i^k x_k \quad (12)$$

Für die Tensorkomponenten gilt nach (5) das Transformationsgesetz

$$\bar{T}_{ik}^l = \Lambda_i^p \Lambda_k^q \Lambda_r^l T_{pq}^r, \quad (13)$$

woraus die allgemeine Regel ersichtlich ist.

Ordnet man umgekehrt jedem Paar von dualen Basen ein System von Zahlen T_{ij}^k so zu, dass das Transformationsgesetz (13) gilt, so wird dadurch ein Tensor definiert: Die Grösse $T(u,v,w) := T_{ij}^k u^i v^j w_k$ ist unabhängig vom Koordinatensystem und offensichtlich multilinear in den Argumenten.

Metrische Räume:

Sei jetzt E speziell ein metrischer Raum mit der metrischen Form $G(u,v)$. In einer Basis e_1, \dots, e_m von E gilt

$$G(u,v) = g_{ik} u^i v^k \quad (14)$$

mit

$$g_{ik} = g_{ki}, \quad \text{Det}(g_{ik}) \neq 0 \quad (15)$$

Durch die Identifikation von E^* mit E wird die duale Basis e^1, \dots, e^m zu einer zweiten Basis von E , welche definiert ist durch

$$G(e^i, e_k) = \delta^i_k \quad (16)$$

Jeder Vektor aus E hat dann zwei Darstellungen

$$x = x^i e_i = x_i e^i \quad (17)$$

x^i : kontravariante Komponenten von x

x_i : kovariante " " " " .

Es gilt

$$x_i = g_{ik} x^k, \quad x^i = g^{ik} x_k, \quad (18)$$

wobei (g^{ik}) die zu (g_{ik}) inverse Matrix ist:

$$g^{il} g_{lk} = \delta^i_k .$$

Man kann nun jede Multilinearform von p Vektoren, je nach Be-
lieben, durch die kovarianten bzw. kontravarianten Vektorkompo-
nenten ausdrücken, z.B.

$$T(u,v,w) = T_{ij}^k u^i v^j w_k = T_i^{jk} u^i v_j w_k = \text{etc.} \quad (19)$$

Es gilt

$$T_{ij}^k = g_{j\ell} T_i^{\ell k} \quad , \quad T_i^{jk} = g^{j\ell} T_{i\ell}^k \quad , \quad \text{etc.} \quad (19')$$

für die verschiedenartigen Komponenten des Tensors T .

Der Komponentenkalkül ist vor allem bei praktischen Rechnungen
wichtig.

8.5. Grassman Algebra über einem Vektorraum

Wir betrachten einen festen Vektorraum E und die dazugehörigen
Räume

$$T_p(E) := \underbrace{E^* \otimes \dots \otimes E^*}_{p \text{ mal}}$$

[= p -Multilinearformen über E] . Darin betrachten wir den Unterraum
 $\Lambda^p(E)$ der total antisymmetrischen Tensoren. Für $\omega \in \Lambda^p(E)$ gilt also

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_p) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_p)$$

für alle $v_1 \dots v_p \in E$.

Wir definieren für ein $T \in T_p(E)$

$$(\alpha T)(v_1, \dots, v_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sgn } \sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \quad ,$$

(α : Alternierungsoperator)

wo die Summe über die Permutationsgruppe S_p von p Objekten läuft;
 $\text{sgn } \sigma$ bezeichnet die Signatur der Permutation $\sigma \in S_p$.

Es gilt

- (i) Falls $T \in T_p(E)$, dann $\alpha T \in \Lambda^p(E)$
- (ii) Falls $\omega \in \Lambda^p(E)$, dann $\alpha \omega = \omega$
- (iii) $\alpha \circ \alpha = \text{id}$ (21)

Beweis: Übungsaufgabe.

Sei jetzt $\omega \in \Lambda^p(E)$ und $\eta \in \Lambda^q(E)$. Wir definieren das äußere
Produkt $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{p+q}(E)$ durch

$$\omega \wedge \eta := (p+q)!/p!q! \alpha(\omega \otimes \eta) \quad (22)$$

Man verifiziert leicht die folgenden Eigenschaften von \wedge :

(i) \wedge ist bilinear:

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$$

$$\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2$$

$$(a\omega) \wedge \eta = \omega \wedge (a\eta) = a(\omega \wedge \eta), \quad a \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \quad \omega \wedge \eta = (-1)^{p \cdot q} \eta \wedge \omega \quad (23)$$

Etwas schwieriger ist der Beweis der Assoziativität

$$(iii) \quad (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) \quad (24)$$

Beweis: (1) Wir zeigen zuerst: Falls $S \in T_p(E)$, $T \in T_q(E)$ und $\alpha S = 0$, dann

$$\alpha(S \otimes T) = \alpha(T \otimes S) = 0$$

Nun ist

$$(S \otimes T)(v_1, \dots, v_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (sgn \sigma) \cdot S(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) T(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)})$$

Sei $G \subset S_{p+q}$ die Menge der Permutationen σ welche $p+1, \dots, p+q$ festlassen, dann

$$\sum_{\sigma \in G} (sgn \sigma) S(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) T(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}) = \left[\sum_{\sigma' \in S_p} (sgn \sigma') S(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(p)}) \right] T(v_{p+1}, \dots, v_{p+q}) = 0.$$

Sei jetzt $\sigma_0 \notin G$. Sei $G \cdot \sigma_0 := \{ \sigma \sigma_0 : \sigma \in G \}$

und sei $v_{\sigma_0(1)} \dots v_{\sigma_0(p+q)} = w_1, \dots, w_{p+q}$. Dann

$$\sum_{\sigma \in G \cdot \sigma_0} (sgn \sigma) S(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) T(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}) = \left[sgn \sigma_0 \sum_{\sigma' \in G} sgn \sigma' S(w_{\sigma'(1)}, \dots, w_{\sigma'(p)}) \right] \cdot T(w_{p+1}, \dots, w_{p+q}) = 0.$$

Man beachte, dass $G \cap G \cdot \sigma_0 = \emptyset$: Für ein $\sigma \in G \cap G \cdot \sigma_0$ ist $\sigma = \sigma' \cdot \sigma_0$ für ein $\sigma' \in G$ und folglich $\sigma_0 = \sigma \cdot (\sigma')^{-1} \in G$ (da $G =$ Gruppe), im Widerspruch zur Annahme.

Wir können nun in der obigen Weise fortfahren, indem wir S_{p+q} in disjunkte Untermengen zerlegen (Nebenklassen nach G). Die Summe

Über jede dieser Untermengen verschwindet. Daraus folgt die Behauptung:

(2) Nun zeigen wir

$$\alpha(\alpha(\omega \otimes \gamma) \otimes \theta) = \alpha(\omega \otimes \gamma \otimes \theta) = \alpha(\omega \otimes \alpha(\gamma \otimes \theta))$$

Es gilt

$$\alpha(\alpha(\gamma \otimes \theta) - \gamma \otimes \theta) = \alpha(\gamma \otimes \theta) - \alpha(\gamma \otimes \theta) = 0$$

Also folgt aus (1)

$$0 = \alpha(\omega \otimes [\alpha(\gamma \otimes \theta) - \gamma \otimes \theta]) = \alpha(\omega \otimes \alpha(\gamma \otimes \theta)) - \alpha(\omega \otimes \gamma \otimes \theta)$$

Die andere Gleichung beweist man ähnlich.

(3) Nun ist für $\omega \in \Lambda^p(E), \gamma \in \Lambda^q(E), \theta \in \Lambda^r(E)$,

mit offensichtlichen Proportionalitätsfaktoren # ,

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \gamma) \wedge \theta &= \# \alpha((\omega \wedge \gamma) \otimes \theta) = \\ &= \# \alpha(\alpha(\omega \otimes \gamma) \otimes \theta) \stackrel{(2)}{=} \# \alpha(\omega \otimes \gamma \otimes \theta) \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist aber, wie man analog zeigt, auch gleich $\omega \wedge (\gamma \wedge \theta)$. Damit ist die Assoziativität bewiesen. \square

Satz Sei θ^i eine Basis von E^* . Dann ist die Menge ($m = \dim E$)

$$\theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq m \quad (25)$$

eine Basis des Raumes $\Lambda^p(E)$, welcher demnach die Dimension

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (26)$$

hat.

Beweis: Falls $\omega \in \Lambda^p(E) \subset T_p(E)$, dann ist sicher

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_p} a_{i_1, \dots, i_p} \theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p}$$

Also

$$\omega = \alpha \omega = \sum_{i_1, \dots, i_p} a_{i_1, \dots, i_p} \underbrace{\alpha(\theta^{i_1} \otimes \dots \otimes \theta^{i_p})}_{\# \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p}}$$

Deshalb spannen die Elemente (25) $\Lambda^p(E)$ auf. Die lineare Unabhängigkeit dieser Elemente sieht man so: Sei

$$\sum_{i_1, \dots, i_p} a_{i_1, \dots, i_p} \theta^{i_1} \wedge \theta^{i_2} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p} = 0$$

Wenden wir beide Seiten dieser Gleichung auf $(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$ an, wo e_i die duale Basis von θ^i ist, so erhalten wir sofort $a_{j_1 \dots j_p} = 0$.

Wir setzen $\Lambda^0(E) := \mathbb{R}$. Natürlich ist $\Lambda^p(E) = 0$ für $p > m := \dim E$. Die Grassman-Algebra $\Lambda(E)$ ist definiert als die direkte Summe

$$\Lambda(E) := \bigoplus_{p=0}^m \Lambda^p(E), \quad (m = \dim E)$$

wobei das äussere Produkt bilinear auf ganz $\Lambda(E)$ ausgedehnt wird. Für $T \in \Lambda^p(E)$ lauten die Tensorkomponenten

$$(aT)_{i_1 \dots i_p} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (\text{sgn } \sigma) T_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_p)} \quad (27)$$

Bsp. Sei $R \in \Lambda^1(E)$, $S \in \Lambda^1(E)$ und $T \in \Lambda^2(E)$.

Dann sind die Tensorkomponenten der äusseren Produkte $R \wedge S$ und $S \wedge T$

$$(R \wedge S)_{ik} = (R_i S_k - R_k S_i) \quad (28)$$

$$(R \wedge T)_{ikl} = (S_i T_{kl} + S_k T_{li} + S_l T_{ik}) \quad (29)$$

Der Raum $\Lambda^m(E)$, $m = \dim E$, ist eindimensional. Deshalb ist jedes $\Omega \in \Lambda^m(E)$ von der Form

$$\Omega = a \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \dots \wedge \theta^m, \quad \theta^i: \text{Basis von } E^*, a \in \mathbb{R}.$$

Bei einer Basisänderung ändert sich a gemäss

$$\bar{a} = \text{Det}(\Lambda_i^k) a$$

Für einen metrischen Raum gilt andererseits für $g = \text{Det}(g_{ik})$, wenn $G = g_{ik} \theta^i \otimes \theta^k$, das Transformationsgesetz

$$\sqrt{|g|} = \sqrt{|g|} |\text{Det}(\Lambda_i^k)|$$

Wählen wir also in E^* eine Orientierung und definieren

$$\eta := \pm \sqrt{|g|} \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \dots \wedge \theta^m$$

\pm für positive (negative) Basis θ^i ,

so wird dadurch eine m -Form definiert, welche unabhängig von der Basis ist.

Die Komponenten von η sind

$$\eta_{i_1 \dots i_m} = \pm \sqrt{|g|} \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}$$

Ihre kontravarianten Komponenten lauten

$$\eta^{i_1 \dots i_m} = \pm \operatorname{sign}(g) \frac{1}{\sqrt{|g|}} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}$$

Für $\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ i_1 & \dots & i_m \end{pmatrix}$ schreiben wir auch

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_m} := \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ i_1 & \dots & i_m \end{pmatrix}$$

Jedem $\omega \in \Lambda^p(E)$ können wir mit η eine $(m-p)$ -Form $*\omega \in \Lambda^{m-p}(E)$ zuordnen:

$$(*\omega)_{i_{p+1} \dots i_m} := \frac{1}{p!} \eta_{i_1 \dots i_m} \omega^{i_1 \dots i_p}$$

Dabei sei $\omega = (1/p!) \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \dots \wedge dx^{i_p}$

Diese Zuordnung [man kann sie auch unabhängig von einer Basis definieren] ist ein-eindeutig. Man beweist leicht

$$*(*\omega) = (-1)^{(m-p)p} \operatorname{sign}(g) \omega$$

Beispiel: $E = \mathbb{R}^3$ mit Euklidischer Metrik; S, T seien Vektoren. Dann ist für ein positives Cartesisches KS

$[(S \wedge T)]_3 = (S_1 T_2 - S_2 T_1)$ und zyklisch, d.h. die Grösse $*(S \wedge T)$ ist das Vektorprodukt von S mit T .

8.6. Tensorfelder über affinen Räumen

Vorbemerkungen: Sei (M, E) ein affiner Raum und $f: M \rightarrow F$ eine Abbildung von M in einen Vektorraum F . Diese Abbildung ist in $p \in M$ differenzierbar falls eine lineare Abbildung $Df(p): E \rightarrow F$ existiert, derart, dass ($v \in E$)
Differenzen vektor

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{\| (f(v+p) - f(p)) - Df(p)v \|^2}{\|v\|^2} = 0 \quad (30)$$

Dabei sind $\|\cdot\|$ irgendwelche Normen in E und F (alle Normen in endlichdim. Vektorräumen sind äquivalent).

Der bekannte Differentialkalkül in Vektorräumen überträgt sich mit geringfügigen Änderungen auf affine Räume.

Definition: Sei (M, E) ein affiner Raum. Ein Tensorfeld T über M ist eine Abbildung

$$T : M \longrightarrow E_1 \otimes \dots \otimes E_p, \quad E_i = E, E^* .$$

p ist die Stufe des Tensorfeldes und die Folge der E_1, \dots, E_p bestimmt den Typ des Tensorfeldes. Das Tensorfeld ist differenzierbar falls die Abbildung T differenzierbar ist.

Die algebraischen Operationen von Tensoren (der vorangegangenen Abschnitte) lassen sich auf Tensorfelder übertragen, indem man diese punktweise definiert. Ebenso übertragen sich die früheren Bemerkungen für den Fall, dass der Differenzraum E ein metrischer Raum ist.

Die antisymmetrischen Tensorfelder nennt man auch Differentialformen. Die Gesamtheit dieser Formen p^{ter} Stufe bezeichnen wir mit $\wedge^p(M)$.

Koordinatenausdrücke:

Sei (\circ, e_1, \dots, e_m) ein affines Koordinatensystem von (M, E) und z.B. $T : M \longrightarrow E^* \otimes E^* \otimes E$ ein Tensorfeld vom angedeuteten Typ. Bezeichnet e^1, \dots, e^m die duale Basis von e_1, \dots, e_m und ist

$$\vec{op} = x^i e_i, \quad (x^i: \text{ affine Koord. von } p)$$

so setzen wir

$$T_{ij}^k(x^1, \dots, x^m) := T_p(e_i, e_j, e^k) \quad (31)$$

Dies sind die Komponentenfunktionen des Tensorfeldes.

Bei einem Wechsel des affinen Koordinatensystems gilt

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= \wedge_k^i x^k + a^i \\ \bar{T}_{ij}^k(x) &= \wedge_i^p \wedge_j^q \wedge_r^l T_{pq}^r(x) \end{aligned} \quad (32)$$

Ist umgekehrt jedem affinen KS ein System von Funktionen $T_{ij}^k(x)$ so zugeordnet, dass das Transformationsgesetz (32) gilt, so wird durch

$$\begin{aligned} T_p(u, v, w) &= T_{ij}^k(x) u^i v^j w_k \\ \vec{op} &= x^i e_i \\ u &= u^i e_i, \quad v = v^i e_i, \quad w = w_i e^i \end{aligned}$$

ein Tensorfeld definiert, welches unabhängig vom KS ist.

Der Gradient eines Tensorfeldes:

Ist f eine Funktion : $M \rightarrow \mathbb{R}$ so ist Df (siehe (30)) der Gradient von f . Wir schreiben dafür im folgenden auch df oder ∇f . Der Gradient df ist in jedem Punkt eine Linearform von E , d.h. df ist ein kovariantes Vektorfeld.

Ist (x^1, \dots, x^m) ein affines KS, so gehören dazu die Funktionen $p \mapsto x^i(p)$. Die Linearform $dx^i(p)$ hat nach (30) die Eigenschaft

$$\langle dx^i(p), v \rangle = v^i, (v = v^i e_i)$$

d.h. $dx^i(p)$, $i = 1 \dots m$, ist eine duale Basis von e_i :

$$\langle dx^i, e_j \rangle = \delta^i_j \quad (33)$$

Deshalb können wir entwickeln

$$df = f_{,i} dx^i \quad (34)$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten $f_{,i}$ bilde man

$$\langle df, e_i \rangle = f_{,j} \langle dx^j, e_i \rangle = f_{,i}$$

Nun ist

$$\langle df, v \rangle = : \nabla_v f = \text{Richtungsableitung von } f \text{ in der Richtung } v \quad (35)$$

d.h.

$$\nabla_v f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv+p) - f(p)}{t} \quad (36)$$

Sei $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Abbildung, welche p seine affinen Koordinaten zuordnet $\varphi : p \mapsto (x^1(p), \dots, x^m(p))$ und

$$f^* := f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad (37)$$

so ist

$$\nabla_v f = v^i \frac{\partial f^*}{\partial x^i} \circ \varphi \quad (38)$$

Also

$$f_{,i} = \nabla_{e_i} f = \frac{\partial f^*}{\partial x^i} \circ \varphi \quad (39)$$

Für die rechte Seite in (39) schreiben wir kürzer auch $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ oder $\partial_i f$.

An Stelle von (34) können wir also auch schreiben

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \quad (40)$$

[In dieser Gleichung hat d nichts mit "infinitesimalen" Größen zu tun (moderne Interpretation der klassischen Formeln)].

Nun betrachten wir ein differenzierbares Tensorfeld T der Stufe k . Für fest Vektoren v_1, \dots, v_k in E bzw. E^* bilden wir die Funktion

$$f(p) = T_p(v_1, \dots, v_k)$$

und betrachten df . Diese 1-Form hängt linear von v_1, \dots, v_k ab, wie man sofort aus den Definitionen sieht. Wir definieren

$$(\nabla T)(v_1, \dots, v_k, u) := \langle d[T(v_1, \dots, v_k)], u \rangle \quad (41)$$

∇T ist der Gradient von T ; ∇T ist ein Tensorfeld der Stufe $k+1$, wobei die kovariante Stufe um 1 erhöht wurde.

Sind z.B. T_{ij}^k die Komponenten des Tensors T , so lauten diejenigen von ∇T

$$(\nabla T)_{ij}^k = \frac{\partial T_{ij}^k(x)}{\partial x^\ell} \equiv T_{ij}^k, \ell \quad (42)$$

Anwendung: Sind T^{ij} die Komponenten eines Tensorfeldes, so sind $T^{ik},_{k}$ die Komponenten eines Vektorfeldes = Divergenz des Tensors T^{ik} . [In abstrakter Notation ist diese Divergenz - wir bezeichnen sie mit $\nabla \cdot T = \text{Sp}(2,3) \nabla T$]

Man verifiziert leicht die folgenden Regeln

$$\begin{aligned} \nabla(S + T) &= \nabla S + \nabla T \\ \nabla(S \otimes T) &= (\nabla S) \otimes T + S \otimes \nabla T \end{aligned} \quad (43)$$

In einem metrischen Raum, mit metrischer Form G , haben wir die m -Form ($m = \dim E$), oder das "Volumen" (siehe Seite 73)

$$\eta = (\pm) \sqrt{|g|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^m, \\ (\pm) \text{ für positives (negatives) KS.}$$

8.7. Die äussere Ableitung einer Differentialform

Der Gradient einer Differentialform ist (ausser für Funktionen $\in \Lambda^0(M)$) keine Differentialform mehr. Der folgende Differentialoperator (Cartan'sches- oder äusseres Differential) führt eine Differentialform wieder in eine solche über:

Sei $\omega \in \Lambda^p(M)$, dann setzen wir

$$d\omega := \frac{1}{p!} \mathcal{O}_1(\nabla\omega) \tag{44}$$

Nun ist

$$dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \dots \wedge dx^{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq m$$

eine Basis von $\Lambda^p(M)$. Setzen wir

$$\omega = \sum_{(i_1 < i_2 < \dots < i_p)} \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

dann ist, wegen $\nabla(dx^i) = 0$,

$$\nabla\omega = \sum_{i, i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1 \dots i_p, i} dx^i \otimes (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p})$$

Also

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{p!} \sum \omega_{i_1 \dots i_p, i} \mathcal{O}_1(dx^i \otimes (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p})) \\ &= \sum \omega_{i_1 \dots i_p, i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \end{aligned}$$

Folglich

$$d\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} d\omega_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \tag{45}$$

Satz: Das äussere Differential hat folgende Eigenschaften

- (i) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$
- (ii) Ist ω_1 eine k -Form und ω_2 eine l -Form, so ist $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$
- (iii) $d(d\omega) = 0$ ($d \circ d = 0$) (46)

Beweis: (i) folgt aus (44).

(ii) Die Formel ist richtig für

$$\omega_1 = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad \omega_2 = dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}$$

da alle Terme verschwinden. Ebenso gilt die Formel, wenn

$\omega_{1,2}$ eine Funktion ist: z.B.

$$\begin{aligned} d(f\omega) &= \mathcal{O}(\nabla(f\omega)) = \mathcal{O}(f\nabla\omega) + \mathcal{O}(df \otimes \omega) \\ &= f\mathcal{O}(\nabla\omega) + df \wedge \omega = f d\omega + df \wedge \omega \end{aligned}$$

Die allgemeine Formel folgt aus (i) und diesen beiden Beobachtungen.

(iii) Nach (ii) gilt (siehe (45))

$$d(d\omega) = \sum_{i,j} \sum_{i_1 < \dots < i_p} \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

Darin heben sich die Terme paarweise weg.

Satz: Der Operator d ist durch seine Wirkung auf den Funktionen und durch die Eigenschaften des letzten Satzes eindeutig bestimmt.

Beweis: Nach (i) - (iii) folgt

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} d\omega_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

und daraus die Behauptung.

Eine Form ω ist geschlossen, wenn $d\omega = 0$ ist. Sie ist exakt, wenn $\omega = d\varphi$ für eine Form φ ist.

Der folgende Satz gibt ein Kriterium, wann eine geschlossene Form auch exakt ist. Zu seiner Formulierung benötigen wir den folgenden Begriff: Eine offene Umgebung $U \subset M$ ist sternförmig bezüglich $p \in U$, wenn mit jedem $q \in U$ auch das Liniensegment von p nach q in U ist.

Satz (Poincaré Lemma):

Sei $U \subset M$ eine offene sternförmige Umgebung von $p \in M$. Dann ist jede geschlossene Form auf U dort auch exakt.

[Beweis: Siehe z.B. M. Spivak, Calculus on Manifolds, Benjamin 1965, Seite 94].

Beispiele: 1. Sei A eine 1-Form :

$$A = A_\mu dx^\mu.$$

dann ist

$$dA = A_{\mu,\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu = \sum_{\mu < \nu} (A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}) dx^\nu \wedge dx^\mu$$

Die Gleichung

$$dA = 0$$

lautet also in Komponenten

$$A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} = 0.$$

2. Sei F eine 2-Form

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \sum_{\mu < \nu} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$
$$(F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu})$$

dann ist

$$dF = \frac{1}{2} F_{\mu\nu,\lambda} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu =$$
$$= \sum_{\mu < \nu < \lambda} (F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu}) dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu$$

Die Gleichung $dF = 0$ bedeutet also in Komponenten

$$F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0$$

Gilt dies für eine sternförmige Umgebung, so existiert nach dem Poincaré Lemma dort ein kovariantes Vektorfeld A_μ mit

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} \quad (F = dA)$$

Bemerkungen: Der äussere Kalkül lässt sich auf beliebige (orientierbare) differenzierbare Mannigfaltigkeiten übertragen. Darin liegt seine besondere Bedeutung.

Der Operator d ist eine Verallgemeinerung der Rotation. Mit dessen Hilfe lässt sich auch der Stokes'sche Satz verallgemeinern (siehe Differentialgeometrie).