Kapitel III. Unbeschränkte Operatoren

Die meisten physikalisch interessanten Operatoren in der QM sind unbeschränkt. Wir sind deshalb gezwungen, diese Objekte zu studieren.

§12. Grundbegriffe

Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum. Unter einem Operator in $\mathcal{H}$ verstehen wir jetzt eine lineare Abbildung T deren Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$ ein Teilraum (Untervektorraum) von $\mathcal{H}$ ist. Die Bildmenge $\mathcal{R}(T) = T(\mathcal{D}(T)) = \{Tx : x \in \mathcal{H}\}$ heisst der Wertebereich von T ($\mathcal{R}$ steht für "range"). Wir setzen nicht voraus, dass T beschränkt oder stetig ist. Wenn aber T auf $\mathcal{D}(T)$ beschränkt ist, so ist der folgende Satz relevant.

Satz 12.1. Sei T ein beschränkter Operator von einem normierten Raum X in einen Banach-Raum Y. Dann gibt es genau eine beschränkte Fortsetzung S von T mit $\mathcal{D}(S) = \overline{\mathcal{D}(T)}$; es gilt $\|S\| = \|T\|$.

Beweis. Eindeutigkeit: Ist S eine stetige Fortsetzung von T mit $\mathcal{D}(S) = \overline{\mathcal{D}(T)}$ und ist $x \in \mathcal{D}(S)$, so gibt es eine Folge $\{x_n\}$ aus $\mathcal{D}(T)$ mit $x_n \to x$. Da S stetig ist, gilt $Sx = \lim Tx_n$, d.h., S ist (falls überhaupt eines existiert) durch T eindeutig bestimmt.

Existenz: Sei $x \in \overline{\mathcal{D}(T)}$, $\{x_n\}$ eine Folge aus $\mathcal{D}(T)$ mit $x_n \to x$; $\{x_n\}$ ist also eine Cauchyfolge. Da T beschränkt ist, ist dann auch $\{Tx_n\}$ eine Cauchyfolge, denn es gilt $\|Tx_n - Tx_m\| \le \|T\|\,\|x_n - x_m\|$. Also existiert ein $y \in Y$ mit $Tx_n \to y$. Dieses y ist unabhängig von der Wahl der Folge $\{x_n\}$ aus $\mathcal{D}(T)$ mit $x_n \to x$: Ist $\{x_n'\}$ eine zweite Folge dieser Art, so konvergiert auch die Folge $\{x_1, x_1', x_2, x_2', \dots\}$

gegen x, also ist auch die Folge $\{Tx_1, Tx_1', Tx_2, Tx_2', \ldots\}$ konvergent; der Grenzwert kann nur y sein. Also konvergiert auch $\{Tx_n'\}$ gegen y. Wir definieren $Sx = y$.

<u>S ist linear:</u> Dies folgt aus

$$S(ax+by) = \lim T(ax_n + by_n) = \lim (aTx_n + bTy_n)$$

$$= aSx + bSy; \quad \text{wobei} \quad x_n \to x, \; y_n \to y;$$

$$x_n \in \mathcal{D}(T), \; x \in \overline{\mathcal{D}(T)}$$

$$y_n \in \mathcal{D}(T), \; y \in \overline{\mathcal{D}(T)}$$

<u>S ist beschränkt</u> mit $\|S\| = \|T\|$: Für $x \in \overline{\mathcal{D}(T)}$, $\{x_n\}$ aus $\mathcal{D}(T)$, $x_n \to x$ gilt $\|x_n\| \to \|x\|$ und

$$\|Sx\| = \lim \|Tx_n\| \leq \|T\| \lim \|x_n\| = \|T\| \, \|x\|$$

also $\|S\| \leq \|T\|$. Da offenbar $\|S\| \geq \|T\|$ gilt, folgt die Behauptung. $\square$

Wenn also T auf $\mathcal{D}(T)$ beschränkt ist, können wir zuerst T auf $\overline{\mathcal{D}(T)}$ ausdehnen und dann, z.B., auf $\overline{\mathcal{D}(T)}^{\perp}$ gleich Null setzen und erhalten so einen beschränkten Operator auf ganz $\mathcal{H}$.

Der <u>Graph eines Operators</u> T in $\mathcal{H}$ ist die Teilmenge

$$\mathcal{G}(T) = \{\langle x, Tx\rangle : x \in \mathcal{D}(T)\} \tag{12.1}$$

von $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, wobei $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ als Hilbertraum $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ aufgefasst wird (vgl. Seite 10).

<u>Lemma 12.2.</u> Eine Teilmenge $\mathcal{G}$ von $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ ist genau dann der Graph eines Operators in $\mathcal{H}$, wenn $\mathcal{G}$ ein Teilraum ist mit der Eigenschaft: ist $(0, y) \in \mathcal{G}$, so gilt $y = 0$. Jeder Teilraum eines Graphen ist ein Graph.

<u>Beweis:</u> Ist T ein Operator in $\mathcal{H}$, so ist offenbar $\mathcal{G}(T)$ ein Teilraum, denn für $(x_i, y_i) \in \mathcal{G}(T)$, $a_i \in \mathbb{K}$ $(i=1,2)$ gilt

$$a_1\langle x_1, y_1\rangle + a_2\langle x_2, y_2\rangle = a_1\langle x_1, Tx_1\rangle + a_2\langle x_2, Tx_2\rangle$$

$$= \langle a_1x_1 + a_2x_2, T(a_1x_1 + a_2x_2)\rangle \in \mathcal{G}(T)$$

Ist $(0,y) \in \mathcal{G}(T)$, so folgt $y = T0 = 0$.
Sei umgekehrt $\mathcal{G}$ ein Teilraum von $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ mit der angegebenen Eigenschaft. Wir konstruieren einen Operator T, für den gilt $\mathcal{G} = \mathcal{G}(T)$. Dazu sei

$$\mathcal{D}(T) = \{x \in \mathcal{H} : \text{es gibt ein } y \in \mathcal{H} \text{ mit } \langle x,y\rangle \in \mathcal{G}\}$$

Zu jedem $x \in \mathcal{D}(T)$ gibt es genau ein $y \in \mathcal{H}$ mit $\langle x,y\rangle \in \mathcal{G}$, denn aus $\langle x, y_1\rangle \in \mathcal{G}$ und $\langle x, y_2\rangle \in \mathcal{G}$ folgt (da $\mathcal{G}$ ein Teilraum ist) $\langle 0, y_1 - y_2\rangle \in \mathcal{G}$, also $y_1 - y_2 = 0$. Wir können also eine Abbildung T von $\mathcal{D}(T)$ in $\mathcal{H}$ definieren durch $Tx = y$ für $\langle x,y\rangle \in \mathcal{G}$. T ist linear: Sind $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$ und $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, so gilt $\langle x_i, Tx_i\rangle \in \mathcal{G}$ für $i = 1,2$, also (da $\mathcal{G}$ ein Teilraum ist) $\langle a_1x_1 + a_2x_2, a_1Tx_1 + a_2Tx_2\rangle \in \mathcal{G}$. Nach Definition von T gilt also $T(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1Tx_1 + a_2Tx_2$. Nach Konstruktion gilt auch $\mathcal{G} = \mathcal{G}(T)$. Die letzte Behauptung ergibt sich hieraus unmittelbar. $\square$

S ist eine <u>Erweiterung</u> von T, wenn $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(S)$ und $Sx = Tx$ für $x \in \mathcal{D}(T)$. Dies ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn $\mathcal{G}(T) \subset \mathcal{G}(S)$ ist. Wir schreiben dafür auch

$$T \subset S$$

Der Operator aT, $a \in \mathbb{K}$, ist erklärt durch

$$\mathcal{D}(aT) = \mathcal{D}(T) \quad \text{und} \quad (aT)x = a(Tx) \text{ für } x \in \mathcal{D}(aT)$$

Für zwei Operatoren S und T ist die Summe erklärt durch

$$\mathcal{D}(S+T) = \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T), \quad (S+T)x = Sx + Tx \text{ für } x \in \mathcal{D}(S+T)$$

und das Produkt ist definiert durch

$$\mathcal{D}(S \cdot T) = \{x \in \mathcal{D}(T) : Tx \in \mathcal{D}(S)\}, \quad (ST)x = S(Tx), x \in \mathcal{D}(ST)$$

Da $\mathcal{R}(T)$ ein Teilraum ist, können wir für ein injektives T die <u>Inverse</u> T^{-1} von T erklären durch

$$\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T), \quad T^{-1}y = x \quad \text{für } y = Tx \in \mathcal{R}(T).$$

Wenn $\mathcal{D}(T)$ dicht ist, lässt sich wieder ein adjungierter Operator definieren. Wir sagen ein Operator S sei <u>formal adjungiert</u> zu T, wenn gilt

$$(y, Tx) = (Sy, x) \text{ für alle } x \in \mathcal{D}(T), y \in \mathcal{D}(S); \tag{12.2}$$

dann ist auch T formal adjungiert zu S; wir sagen auch: S und T sind formal adjungiert.

Ist S formal adjungiert zu T, so ist für jedes $y \in \mathcal{D}(S)$ das lineare Funktional L_y mit

$$\mathcal{D}(L_y) = \mathcal{D}(T), \quad L_y x = (y, Tx)$$

stetig, denn es ist für alle $x \in \mathcal{D}(L_y)$

$$L_y x = (y, Tx) = (Sy, x)$$

d.h. L_y ist die Einschränkung des durch Sy erzeugten stetigen Funktionals T_{Sy} auf $\mathcal{D}(T)$.

Ist $\mathcal{D}(T)$ dicht, und ist das Funktional L_y stetig, so lässt es sich nach Satz 12.1 eindeutig auf $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{D}(T)}$ fortsetzen, d.h., es gibt ein durch y und T eindeutig bestimmtes Element

$z_y \in \mathcal{H}$ mit

$$(y, Tx) = L_y x = (z_y, x) \quad \text{für alle } x \in \mathcal{D}(T)$$

Ist S ein zu T formal adjungierter Operator, und ist $y \in \mathcal{D}(S)$, so ist also sicher $Sy = z_y$. In diesem Fall ist also jeder zu T formal adjungierte Operator eine Einschränkung des im folgenden definierten adjungierten Operators T^*.

Sei T ein dicht definierter Operator in $\mathcal{H}$,

$$\mathcal{D}^* = \{ y \in \mathcal{H} : \text{das Funktional } x \mapsto (y, Tx) \text{ ist stetig auf } \mathcal{D}(T) \}$$

$$= \{ y \in \mathcal{H} : \exists\ z_y \in \mathcal{H} \text{ mit } (z_y, x) = (y, Tx) \text{ für alle } x \in \mathcal{D}(T) \} \tag{12.3}$$

Das Element z_y ist eindeutig bestimmt: Gilt $(z_1, x) = (y, Tx) = (z_2, x)$ für alle $x \in \mathcal{D}(T)$, so ist $z_1 - z_2 \in \mathcal{D}(T)^{\perp} = \mathcal{H}^{\perp} = \{0\}$.
$\mathcal{D}^*$ ist ein Teilraum von $\mathcal{H}$ und die Zuordnung $\mathcal{D}^* \to \mathcal{H}$, $y \mapsto z_y$ ist eine lineare Abbildung. Durch

$$\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}^*, \quad T^* y = z_y \quad \text{für } y \in \mathcal{D}(T^*) \tag{12.4}$$

ist also ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ definiert. <u>T^* ist zu T formal adjungiert und ist eine Fortsetzung aller zu T formal adjungierten Operatoren</u>. Man nennt T^* den <u>adjungierten Operator</u>.

<u>Satz 12.3</u>. Sei T ein dicht definierter Operator in $\mathcal{H}$.

a) Ist auch T^* dicht definiert, so ist T^{**} eine Fortsetzung von T.

b) Es gilt $\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^{\perp}$

<u>Beweis:</u> a) Da T und T^* formal adjungiert sind, ist T eine Einschränkung des zu T^* adjungierten Operators T^{**}.

b) Es gilt $y \in \mathcal{N}(T^*) \iff y \in \mathcal{D}(T^*)$ und $T^*y = 0$; da $\mathcal{D}(T)$ dicht ist, ist dies äquivalent zu

$$(Tx, y) = (x, T^*y) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathcal{D}(T)$$

Dies gilt aber genau dann, wenn $y \in \mathcal{R}(T)^\perp$ ist. $\square$

<u>Satz 12.4.</u> Seien S und T dicht definierte Operatoren in $\mathcal{H}$. Dann gilt

a) Ist ST dicht definiert, so gilt $T^*S^* \subset (ST)^*$

b) Ist $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, so ist $(ST)^* = T^*S^*$.

<u>**Beweis:**</u> a) Es ist zu zeigen, dass die Operatoren T^*S^* und ST formal adjungiert sind. Seien $x \in \mathcal{D}(T^*S^*)$ und $y \in \mathcal{D}(ST)$. Dann gilt $x \in \mathcal{D}(S^*)$, $S^*x \in \mathcal{D}(T^*)$, $y \in \mathcal{D}(T)$ und $Ty \in \mathcal{D}(S)$; aus der Definition des adjungierten Operators folgt hiermit

$$(T^*S^*x, y) = (S^*x, Ty) = (x, STy).$$

b) Wegen Teil a) ist nur noch $\mathcal{D}((ST)^*) \subset \mathcal{D}(T^*S^*)$ zu beweisen. Sei $x \in \mathcal{D}((ST)^*)$; da $S^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist, gilt für alle $y \in \mathcal{D}(ST) = \mathcal{D}(T)$

$$((ST)^*x, y) = (x, STy) = (S^*x, Ty)$$

Nach Definition des adjungierten Operators folgt hieraus $S^*x \in \mathcal{D}(T^*)$, d.h. $x \in \mathcal{D}(T^*S^*)$. $\square$

<u>Definition 12.5.</u> Ein Operator T im Hilbertraum $\mathcal{H}$ heisst <u>hermitesch</u>, wenn er zu sich selbst formal adjungiert ist, d.h., wenn gilt

$$(Tx, y) = (x, Ty) \quad \text{für alle } x, y \in \mathcal{D}(T)$$

Ein Operator T ist <u>symmetrisch</u>, wenn er hermitesch und dicht definiert ist. T heisst <u>selbstadjungiert</u>, wenn T dicht definiert ist und $T^* = T$ gilt. (Oft werden hermitesch und symmetrisch synonym gebraucht.)

Man beachte folgendes: ein Operator T ist genau dann symmetrisch, wenn T dicht definiert ist und $T \subset T^*$ gilt. Für Operatoren aus $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ fallen die Begriffe hermitesch, symmetrisch und selbstadjungiert zusammen.

<u>Beispiele</u>. Sei $\mathcal{H} = L^2([0,1])$, bezüglich dem Lebesgue-Mass. Wir definieren Operatoren T_1, T_2, und T_3 in L^2. Ihre Definitionsbereiche sind wie folgt erklärt:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}(T_1) &= \{ \text{absolut stetige Funktionen auf } [0,1] \text{ mit } f' \in L^2 \}; \\
\mathcal{D}(T_2) &= \mathcal{D}(T_1) \cap \{ f : f(0) = f(1) \}; \\
\mathcal{D}(T_3) &= \mathcal{D}(T_1) \cap \{ f : f(0) = f(1) = 0 \}.
\end{aligned}
\tag{12.5}
$$

Diese sind in L^2 dicht. Nun sei

$$T_k f = i f' \quad \text{für } f \in \mathcal{D}(T_k),\ k = 1,2,3. \tag{12.6}$$

Wir behaupten

$$\boxed{T_1^* = T_3,\ T_2^* = T_2,\ T_3^* = T_1.} \tag{12.7}$$

Da $T_3 \subset T_2 \subset T_1$ ist, zeigt dies, dass T_2 eine selbstadjungierte Erweiterung des symmetrischen (aber <u>nicht selbstadjungierten</u>) Operators T_3 ist und dass die Erweiterung T_1 von T_2 <u>nicht symmetrisch</u> ist.

<u>Beweis von (12.7)</u>: Zunächst notiere man

$$(g, T_k f) = \int_0^1 \bar{g}\,(i f') = \int \overline{(i g')}\, f = (T_m g, f)$$

wenn $f \in \mathcal{D}(T_k)$, $g \in \mathcal{D}(T_m)$ und $m + k = 4$, da dann

$f(1)\bar{g}(1) = f(0)\bar{g}(0)$ ist. Dies zeigt, dass T_m zu T_k formal adjungiert ist, d.h., $T_m \subset T_k^*$, oder

$$T_1 \subset T_3^* \quad , T_2 \subset T_2^* \quad , T_3 \subset T_1^* . \qquad (12.8)$$

Sei jetzt $g \in \mathcal{D}(T_k^*)$ und $h = T_k^* g$. Wir setzen $H(x) = {}_0\!\int^x h$. Dann gilt für $f \in \mathcal{D}(T_k)$

$${}_0\!\int^1 \bar{g}\, i f' = (g, T_k f) = (h, f) = \overline{H(1)}\, f(1) - {}_0\!\int^1 \bar{H} f' . \qquad (12.8)$$

Für $k = 1,2$ enthält $\mathcal{D}(T_k)$ nichtverschwindende Konstanten und deshalb folgt aus der letzten Gleichung $H(1) = 0$. Wenn $k = 3$ ist, gilt $f(1) = 0$. In allen Fällen folgt deshalb

$$ig - H \in \mathcal{R}(T_k)^\perp \qquad (12.9)$$

Da für $k=1$ $\mathcal{R}(T_1) = L^2$ ist deshalb $ig = H$ und folglich, wegen $H(1) = 1$, $g \in \mathcal{D}(T_3)$. Damit ist gezeigt, dass $\underline{T_1^* \subset T_3}$ ist.

Für $k = 2,3$ besteht $\mathcal{R}(T_k)$ aus allen $u \in L^2$, so dass ${}_0\!\int^1 u = 0$ ist. Deshalb gilt

$$\mathcal{R}(T_2) = \mathcal{R}(T_3) = \mathcal{M}^\perp \qquad (12.10)$$

wo $\mathcal{M}$ den eindimensionalen Unterraum von L^2 bestehend aus allen Konstanten bezeichnet. Nach (12.9) ist also $ig - H = \text{const}$. Deshalb ist g absolut stetig und $g' \in L^2$ (h ist in L^2!), d.h., $g \in \mathcal{D}(T_1)$. Damit ist gezeigt, dass $\underline{T_3^* \subset T_1}$ ist.

Ist schliesslich $k = 2$ ($H(1) = 0$) so folgt $g(0) = g(1)$, d.h., $g \in \mathcal{D}(T_2)$ und folglich $\underline{T_2^* \subset T_2}$. $\square$

Die Beziehung der Graphen von T und T^* lässt sich in einfacher Weise beschreiben. Dazu benutzen wir die Abbildungen U, V von $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, definiert durch

$$U\langle x, y\rangle = \langle y, -x\rangle$$

$$V\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \tag{12.11}$$

Beides sind offenbar unitäre Transformationen von $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

<u>Satz 12.6.</u> Sei T ein dicht definierter Operator in $\mathcal{H}$. Dann gilt

$$\mathcal{G}(T^*) = U(\mathcal{G}(T)^\perp) = (U\mathcal{G}(T))^\perp \tag{12.12}$$

<u>Beweis:</u> Nach Definition von T^* ist

$$\mathcal{G}(T^*) = \{\langle y, z\rangle \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \mid (y, Tx) = (z, x) \text{ für alle } x \in \mathcal{D}(T)\}$$

$$= \{\langle y, z\rangle \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \mid (\langle y, z\rangle, \langle Tx, -x\rangle) = 0 \text{ für alle } \langle x, Tx\rangle \in \mathcal{G}(T)\}$$

$$= (U\,\mathcal{G}(T))^\perp = U\,\mathcal{G}(T)^\perp$$

□

<u>Satz 12.7.</u> Sei T ein dicht definierter injektiver Operator in $\mathcal{H}$. Dann gilt

a) $$\mathcal{G}(T^{-1}) = V\mathcal{G}(T) \tag{12.13}$$

b) Ist $\mathcal{R}(T)$ dicht, so ist auch T^* injektiv und es ist $T^{*-1} = T^{-1*}$.

<u>Beweis:</u> a) Dies ist trivial.

b) Nach Satz 12.3 gilt $\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp = \{0\}$, d.h., T^* ist injektiv. Wegen $\mathcal{G}(T^{-1}) = V\mathcal{G}(T)$ folgt

$$\mathcal{G}(T^{-1*}) = U^{-1}(\mathcal{G}(T^{-1})^\perp) = U^{-1}V(\mathcal{G}(T)^\perp) =$$
$$= V^{-1}U(\mathcal{G}(T)^\perp) = V^{-1}\mathcal{G}(T^*) = \mathcal{G}(T^{*-1}). \qquad \square$$

Korollar 12.8. Sei T ein dicht definierter Operator in $\mathcal{H}$.

a) T ist genau dann symmetrisch, wenn gilt

$$\mathcal{G}(T) \subset U(\mathcal{G}(T)^\perp) \text{ oder } U\mathcal{G}(T) \subset \mathcal{G}(T)^\perp$$

b) T ist genau dann selbstadjungiert, wenn gilt

$$\mathcal{G}(T) = U(\mathcal{G}(T)^\perp) \text{ oder } U\mathcal{G}(T) = \mathcal{G}(T)^\perp$$

d.h. $$\mathcal{G}(T) \perp U\mathcal{G}(T) \text{ und } \mathcal{G}(T) \oplus U\mathcal{G}(T) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}.$$

Korollar 12.9. Sind T und S dicht definierte Operatoren in $\mathcal{H}$ und gilt $T \subset S$, so folgt $S^* \subset T^*$.

Diese Aussagen folgen unmittelbar aus Satz 12.6.

Satz 12.10. Sei T selbstadjungiert und injektiv. Dann ist auch T^{-1} selbstadjungiert.

Beweis: $\mathcal{R}(T)$ ist dicht, denn es gilt $\{0\} = \mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp$. Damit folgt die Behauptung aus Satz 12.7 b. $\square$

§13. Abgeschlossene Operatoren

Ein Operator T in $\mathcal{H}$ heisst abgeschlossen, wenn sein Graph $G(T)$ in $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ abgeschlossen ist. Ein Operator T heisst abschliessbar, wenn $\overline{G(T)}$ ein Graph ist; aus dem Beweis von Lemma 12.2 wissen wir, dass dann ein eindeutig bestimmter Operator $\overline{T}$ existiert mit $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$; $\overline{T}$ ist abgeschlossen und heisst die Abschliessung von T.

Sei T ein abgeschlossener Operator. Ein Teilraum $\mathcal{D}$ von $\mathcal{D}(T)$ heisst ein determinierender Bereich von T ("core"), wenn für $S = T \restriction \mathcal{D}$ gilt $T = \overline{S}$ (S ist sicher abschliessbar nach Lemma 12.2, denn es ist $\overline{G(S)} \subset G(T)$).
Ist T abschliessbar, so ist $\mathcal{D}(T)$ ein determinierender Bereich.

Die folgenden Aussagen sind bloss Umformulierungen der Definitionen.

1. T ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt: Ist $\{x_n\}$ eine Folge in $\mathcal{D}(T)$, die in $\mathcal{H}$ konvergiert, und ist die Folge $\{Tx_n\}$ in $\mathcal{H}$ konvergent, so gilt $\lim x_n \in \mathcal{D}(T)$ und $T(\lim x_n) = \lim Tx_n$.

2. T ist genau dann abschliessbar, wenn gilt: Ist $\{x_n\}$ eine Folge in $\mathcal{D}(T)$ mit $x_n \to 0$, und ist die Folge $\{Tx_n\}$ in $\mathcal{H}$ konvergent, so gilt $\lim Tx_n = 0$.

3. Ist T abschliessbar, so gilt

$$\mathcal{D}(\overline{T}) = \{x \in \mathcal{H} \mid \text{es ex. eine Folge } \{x_n\} \text{ aus } \mathcal{D}(T) \text{ mit } x_n \to x, \text{ für die auch } \{Tf_n\} \text{ konvergiert}\},$$

$$\overline{T}f = \lim Tx_n \quad \text{für } x \in \mathcal{D}(\overline{T}).$$

Aus der 1. Aussage folgt unmittelbar:

4. Ist T abgeschlossen, so ist $N(T)$ abgeschlossen.

Schliesslich folgt aus (12.13), d.h., $\mathcal{G}(T^{-1}) = V\mathcal{G}(T)$:

5. Ist T injektiv, so ist T genau dann abgeschlossen, wenn T^{-1} abgeschlossen ist.

6. Jeder beschränkte Operator ist abschliessbar.

Ist nämlich $\{x_n\}$ eine Folge in $\mathcal{D}(T)$ mit $x_n \to 0$ und $Tx_n \to y$; dann gilt $\|Tx_n\| \leq \|T\|\|x_n\| \to 0$, also $y = 0$. Daraus folgt die Behauptung nach Aussage 2.

<u>Satz 13.1.</u> Sei T ein dicht definierter Operator in $\mathcal{H}$. Dann gilt

a) T^* ist abgeschlossen

b) T ist genau dann abschliessbar, wenn T^* dicht definiert ist; es gilt dann $\overline{T} = T^{**}$

c) Ist T abschliessbar, so gilt $(\overline{T})^* = T^*$.

<u>Beweis:</u> a) Nach Satz 12.6 ist $\mathcal{G}(T^*) = (U\mathcal{G}(T))^\perp$; also ist $\mathcal{G}(T^*)$ abgeschlossen.

b) Wegen $\overline{\mathcal{G}(T)} = \mathcal{G}(T)^{\perp\perp} = (U^{-1}\mathcal{G}(T^*))^\perp =$

$$= \{\langle x,y\rangle \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} : (x, T^*z) - (y,z) = 0 \text{ für alle } z \in \mathcal{D}(T^*)\}$$

gilt $(0,y) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$ genau dann, wenn $y \in \mathcal{D}(T^*)^\perp$ gilt. Aus $(0,y) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$ folgt also $\underline{y = 0}$ genau dann, wenn $\overline{\mathcal{D}(T^*)} = \mathcal{H}$ ist. Also ist $\overline{\mathcal{G}(T)}$ genau dann ein Graph, wenn T^* dicht definiert ist. Ist $\mathcal{D}(T^*)$ dicht, so gilt $\mathcal{G}(T^{**}) = U^{-1}(\mathcal{G}(T^*)^\perp) = U^{-1}U(\mathcal{G}(T)^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{G}(T)} = \mathcal{G}(\overline{T})$.

c) Ist T abschliessbar, so gilt $\mathcal{G}(T^*) = U(\mathcal{G}(T)^\perp) = U(\overline{\mathcal{G}(T)}^\perp) = U(\mathcal{G}(\overline{T})^\perp) = \mathcal{G}((\overline{T})^*)$, also $T^* = (\overline{T})^*$. □

Satz 13.2. a) Ein Operator in $\mathcal{H}$ ist genau dann abschliessbar, wenn eine abgeschlossene Fortsetzung existiert.
b) Jeder symmetrische Operator $\mathbf{T}$ in $\mathcal{H}$ ist abschliessbar; $\overline{\mathbf{T}}$ ist ebenfalls symmetrisch.

Beweis: a) Ist T abschliessbar, so gilt $T \subset \overline{T}$; $\overline{T}$ ist also eine abgeschlossene Fortsetzung von T. Ist umgekehrt S eine abgeschlossene Fortsetzung von T, so gilt $\mathcal{G}(T) \subset \mathcal{G}(S) = \overline{\mathcal{G}(S)}$, also $\overline{\mathcal{G}(T)} \subset \mathcal{G}(S)$, d.h., $\overline{\mathcal{G}(T)}$ ist ein Graph (vgl. Lemma 12.2).

b) Nach Teil a) ist T abschliessbar, denn es gilt $T \subset T^*$ und T^* ist abgeschlossen (Satz 13.1a). Für alle $x, y \in \mathcal{D}(\overline{T})$ existieren Folgen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ aus $\mathcal{D}(T)$ mit $x_n \to x$, $y_n \to y$, $Tx_n \to \overline{T}x$ und $Ty_n \to \overline{T}y$. Also gilt, da T symmetrisch ist,

$$(\overline{T}x, y) = \lim (Tx_n, y_n) = \lim (x_n, Ty_n) = (x, \overline{T}y).$$

Da $\mathcal{D}(\overline{T})$ dicht ist, ist $\overline{T}$ symmetrisch. □

Der folgende wichtige Satz gilt auch in Banach-Räumen (als Folge des Prinzips der offenen Abbildung). In Hilbert-Räumen ist aber sein Beweis wesentlich einfacher.

Satz 13.3. (Banach; Satz vom abgeschlossenen Graphen). Sei T ein Operator in $\mathcal{H}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
a) T ist abgeschlossen und $\mathcal{D}(T)$ ist abgeschlossen;
b) T ist beschränkt und $\mathcal{D}(T)$ ist abgeschlossen;
c) T ist beschränkt und abgeschlossen.

Beweis: a) ⟹ b): Es ist zu zeigen, dass T beschränkt ist. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$ ist; also ist T^* erklärt. Für alle $y \in \mathcal{D}(T^*)$ mit $\|y\| \le 1$

gilt
$$|(T^*y,x)| = |(y,Tx)| \le \|Tx\| \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H}.$$
Für die Menge der linearen Funktionale $\{L_y : y \in \mathcal{D}(T^*), \|y\| \le 1\}$ auf $\mathcal{H}$ mit $L_y x = (T^*y, x)$ gilt also $|L_y(x)| \le \|Tx\|$, d.h., sie ist punktweise beschränkt. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus (Satz 5.1) existiert ein $C \geqslant 0$ mit
$$\|T^*y\| = \|L_y\| \le C \quad \text{für alle } y \in \mathcal{D}(T^*) \text{ mit } \|y\| \le 1$$
Also ist T^* beschränkt mit $\|T^*\| \le C$. Da T abgeschlossen (also abschliessbar) ist, ist $\mathcal{D}(T^*)$ nach Satz 13.1 b dicht und nach dem anschliessenden Lemma 13.4 abgeschlossen. Es gilt also $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{H}$, d.h., es ist $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Da T abgeschlossen ist, gilt somit $T = \overline{T} = T^{**}$ (Satz 13.1 b) $\in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Die Aussagen b) $\Rightarrow$ c) und c) $\Rightarrow$ a) sind ebenfalls im folgenden Lemma enthalten. □

<u>Lemma 13.4.</u> Ein beschränkter Operator T ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathcal{D}(T)$ abgeschlossen ist.

<u>Beweis</u>: Wir definieren die <u>Graphennorm</u> $\|\cdot\|_T$ durch
$$\|f\|_T = \{\|f\|^2 + \|Tf\|^2\}^{1/2}, \quad f \in \mathcal{D}(T) \tag{13.1}$$
Für alle $x \in \mathcal{D}(T)$ gilt
$$\|x\| \le \|x\|_T \le (1 + \|T\|^2)^{1/2} \|x\|$$
Deshalb ist $\{x_n\}$ genau dann eine Cauchyfolge (konvergent gegen $x \in \mathcal{D}(T)$), wenn $\{x_n\}$ eine T-Cauchyfolge (d.h. eine Cauchyfolge in der T-Norm (13.1)) ist. Also ist $(\mathcal{D}(T), \|\cdot\|)$ genau dann vollständig, wenn $(\mathcal{D}(T), \|\cdot\|_T)$ vollständig ist. Aus dem nächsten Satz folgt deshalb die Behauptung. □

<u>Satz 13.5.</u> T ist genau dann abgeschlossen, wenn $(\mathcal{D}(T), \langle\cdot,\cdot\rangle_T)$ ein Hilbert-Raum ist. Dabei ist $\langle x,y\rangle_T = \langle x,y\rangle + \langle Tx,Ty\rangle$.

Beweis: (Natürlich ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_T$ ein Skalarprodukt). Ist T abgeschlossen und $\{x_n\}$ eine T-Cauchyfolge in $\mathcal{D}(T)$, so sind $\{x_n\}$ und $\{Tx_n\}$ Cauchyfolgen in $\mathcal{H}$; es existieren also $x \in \mathcal{H}$ und $y \in \mathcal{H}$ mit $x_n \to x$, $Tx_n \to y$. Nach der Aussage 1 auf S. 102 ist $x \in \mathcal{D}(T)$, $Tx = y$. Es gilt

$$\|x_n - x\|_T = \{\|x_n - x\|^2 + \|Tx_n - y\|^2\}^{1/2} \longrightarrow 0$$

für $n \to \infty$, d.h., $\{x_n\}$ ist in $(\mathcal{D}(T), \langle\cdot,\cdot\rangle_T)$ konvergent.

Sei nun umgekehrt $(\mathcal{D}(T), \langle\cdot,\cdot\rangle_T)$ vollständig. Ist $\{x_n\}$ eine Folge in $\mathcal{D}(T)$, $x_n \to x \in \mathcal{H}$, $Tx_n \to y \in \mathcal{H}$, so sind $\{x_n\}$ und $\{Tx_n\}$ Cauchyfolgen; also ist $\{x_n\}$ eine T-Cauchyfolge, d.h. es existiert ein $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ mit $\|x_n - x_0\|_T \to 0$. Daraus folgt $\|x_n - x_0\| \to 0$, $\|Tx_n - Tx_0\| \to 0$, also $x = x_0 \in \mathcal{D}(T)$ und $Tx = Tx_0 = y$. □

Der folgende Satz ist eine wichtige Konsequenz von Satz 13.5.

Satz 13.6. Sei T ein Operator in $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$ und $\mathcal{D}(T^*)$ dicht in $\mathcal{H}$. Dann ist $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Speziell ist jeder symmetrische Operator T mit $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$ beschränkt (Satz von Hellinger-Toeplitz).

Beweis: Nach Satz 13.1 ist T abschliessbar. Wegen $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$ gilt $\overline{T} = T$. Also ist T abgeschlossen mit $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist dann T beschränkt. □

Wichtig ist auch der

Satz 13.7. Sei T ein injektiver Operator in $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{R}(T) = \mathcal{H}$. T ist genau dann abgeschlossen, wenn $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist.

Beweis: T ist nach der Aussage 5 auf S. 103 genau dann abgeschlossen, wenn T^{-1} abgeschlossen ist. Damit folgt die Aussage aus Satz 13.3. □

Definition 13.8. Ein symmetrischer Operator T heisst <u>wesentlich selbstadjungiert</u>, wenn $\overline{T}$ selbstadjungiert ist.

Satz 13.9. Ein symmetrischer Operator T ist genau dann wesentlich selbstadjungiert, wenn T^* symmetrisch ist; es gilt dann $\overline{T} = T^*$.

Beweis: Ist T wesentlich selbstadjungiert, so ist $T^* \overset{(\text{Satz 13.1c})}{=} (\overline{T})^* = \overline{T} = T^{**}$, d.h., T^* ist selbstadjungiert (also symmetrisch), und es gilt $\overline{T} = T^*$. Ist umgekehrt T^* symmetrisch, so gilt (da $\overline{T}$ nach Satz 13.2b symmetrisch ist und $(\overline{T})^* = T^*$ ist) $\overline{T} \subset (\overline{T})^* = T^* \subset T^{**} = \overline{T}$ (Satz 13.1b), also $\overline{T} = T^*$.

Satz 13.10. T ist genau dann wesentlich selbstadjungiert, wenn es eine und nur eine selbstadjungierte Erweiterung hat.

Beweis: T sei wesentlich selbstadjungiert und S sei eine selbstadjungierte Erweiterung. Dann ist S abgeschlossen und, wegen $S \supset T$, ist $S \supset T^{**}$ (vgl. Korollar 12.9). Deshalb gilt $S = S^* \subset (T^{**})^* = (\overline{T})^* = \overline{T} = T^{**}$, und folglich ist $S = T^{**} = \overline{T}$.

Gibt es umgekehrt genau eine selbstadjungierte Erweiterung so ist T wesentlich selbstadjungiert (Beweis in Reed & Simon, Abschnitt X.1; wir werden dieses Resultat nicht verwenden). □

Nun geben wir ein wichtiges Kriterium für die Selbstadjungiertheit eines Operators.

Satz 13.11. Sei T ein symmetrischer Operator in einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

(a) T ist selbstadjungiert;

(b) T ist abgeschlossen und $N(T^* \pm i) = \{0\}$

(c) $\mathcal{R}(T \pm i) = \mathcal{H}$

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b): T sei selbstadjungiert und $x \in \mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T)$ erfülle $T^*x = ix$. Dann ist $Tx = ix$ und es gilt $-i(x,x) = (ix,x) = (Tx,x) = (x,T^*x) = (x,Tx) = i(x,x)$, d.h., es ist

$x=0$. Ebenso hat auch $T^*x=-ix$ keine nichttriviale Lösung.

(b) $\Rightarrow$ (c): Da $T^*x=-ix$ keine Lösungen ($\neq 0$) hat, muss $\mathcal{R}(T-i)$ dicht sein. Andernfalls, falls $y\in\mathcal{R}(T-i)^\perp$, würden wir $((T-i)x,y)=0$ für alle $x\in\mathcal{D}(T)$ haben. Deshalb ist $y\in\mathcal{D}(T^*)$ und $(T-i)^*y=(T^*+i)y=0$, was nach Voraussetzung unmöglich ist (ausser für $y=0$). Da $\mathcal{R}(T-i)$ dicht ist, müssen wir nur zeigen, dass dieser Unterraum abgeschlossen ist. Für alle $x\in\mathcal{D}(T)$ gilt

$$\|(T-i)x\|^2=\|Tx\|^2+\|x\|^2$$

Ist also $\{x_n\}$ eine Folge in $\mathcal{D}(T)$ und $(T-i)x_n\to y_0$, so muss x_n gegen einen Vektor x_0 konvergieren, und Tx_n konvergiert ebenfalls. Da T abgeschlossen ist, gilt $x_0\in\mathcal{D}(T)$, $(T-i)x_0=y_0$. Dies zeigt, dass $\mathcal{R}(T-i)$ abgeschlossen und damit $\mathcal{R}(T-i)=\mathcal{H}$ ist. Analog findet man $\mathcal{R}(T+i)=\mathcal{H}$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Sei $x\in\mathcal{D}(T^*)$. Da $\mathcal{R}(T-i)=\mathcal{H}$, gibt es ein $y\in\mathcal{D}(T)$ so, dass $(T-i)y=(T^*-i)x$ ist. Da $\mathcal{D}(T)\subset\mathcal{D}(T^*)$ (T ist symmetrisch), so ist $x-y\in\mathcal{D}(T^*)$ und

$$(T^*-i)(x-y)=0$$

Da $\mathcal{R}(T+i)=\mathcal{H}$ ist $\mathcal{N}(T^*-i)=\{0\}$, d.h., $x=y\in\mathcal{D}(T)$. Dies beweist $\mathcal{D}(T^*)=\mathcal{D}(T)$, und folglich ist T selbstadjungiert. $\square$

<u>Korollar 13.12.</u> Sei T ein symmetrischer Operator in $\mathcal{H}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) T ist wesentlich selbstadjungiert;

(b) $\mathcal{N}(T^*\pm i)=\{0\}$;

(c) $\mathcal{R}(T\pm i)$ ist dicht.

<u>Beweis</u>: (a) $\Leftrightarrow$ (b): Nach Satz 13.11, mit $T\to\overline{T}$. (b) $\Rightarrow$ (c) ist Teil des obigen Beweises. Umkehrung des entsprechenden Argumentes gibt (c) $\Rightarrow$ (b). $\square$

§14. Spektralintegrale

Im folgenden bezeichne $(\Omega, \mathcal{A})$ einen Massraum, $\mathcal{H}$ sei ein Hilbert-Raum und E ein projektionswertiges Mass (Definition 11.1). In Satz 11.5 haben wir jedem $f \in L^\infty(E)$ durch die Formel

$$(\varphi, \hat{E}(f)\psi) = \int_\Omega f \, dE_{\varphi,\psi} \tag{14.1}$$

einen Operator $\hat{E}(f) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ zugeordnet. Wir wollen nun $\hat{E}(f)$ auch für unbeschränkte messbare Funktionen f erklären ($\to$ unbeschränkte Operatoren). Zunächst benötigen wir das folgende

<u>Lemma 14.1.</u> Sei $f: \Omega \to \mathbb{C}$ messbar. Wir setzen

$$\mathcal{D}_f = \{\psi \in \mathcal{H} \mid \int_\Omega |f|^2 dE_{\psi,\psi} < \infty\} \tag{14.2}$$

Dann ist $\mathcal{D}_f$ ein dichter Unterraum von $\mathcal{H}$. Für $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ gilt

$$\int_\Omega |f| \, d|E_{\varphi,\psi}| \leq \|\varphi\|^2 \left(\int_\Omega |f|^2 dE_{\psi,\psi} \right)^{1/2} \tag{14.3}$$

Ist f beschränkt und $\eta = \hat{E}(f)\chi$, so gilt

$$dE_{\eta,\psi} = \bar{f} \, dE_{\chi,\psi} \qquad (\psi \in \mathcal{H}, \chi \in \mathcal{H}) \tag{14.4}$$

<u>Beweis:</u> Für $\chi = \varphi + \psi$, $\Delta \in \mathcal{A}$ gilt

$$\|E(\Delta)\chi\|^2 \leq (\|E(\Delta)\varphi\| + \|E(\Delta)\psi\|)^2$$
$$\leq 2\|E(\Delta)\varphi\|^2 + 2\|E(\Delta)\psi\|^2$$

oder

$$E_{\chi,\chi}(\Delta) \leq 2 E_{\varphi,\varphi}(\Delta) + 2 E_{\psi,\psi}(\Delta)$$

Dies zeigt, dass $\mathcal{D}_f$ bezüglich Addition stabil ist.

Offensichtlich ist dies auch für skalare Multiplikation wahr. Deshalb ist $\mathcal{D}_f$ ein Unterraum.

Wir zeigen nun, dass dieser dicht ist. Für $n = 1, 2, \ldots$ sei $\Delta_n = \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| < n\}$. Für $\psi \in R(E(\Delta_n))$ ist

$$E(\Delta)\psi = E(\Delta)E(\Delta_n)\psi = E(\Delta \cap \Delta_n)\psi$$

so dass

$$E_{\psi,\psi}(\Delta) = E_{\psi,\psi}(\Delta \cap \Delta_n)$$

und deshalb

$$\int_\Omega |f|^2 dE_{\psi,\psi} = \int_{\Delta_n} |f|^2 dE_{\psi,\psi} \leq n^2 \|\psi\|^2 < \infty$$

Dies zeigt $R(E(\Delta_n)) \subset \mathcal{D}_f$. Da aber $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, impliziert die abzählbare Additivität von $\Delta \mapsto E(\Delta)\varphi$ (Proposition 11.3), dass $\varphi = \lim E(\Delta_n)\varphi$ für jedes $\varphi \in \mathcal{H}$, d.h., φ liegt im Abschluss von $\mathcal{D}_f$.

Für $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, f eine beschränkte messbare Funktion auf Ω, gibt es nach dem Radon-Nikodym Theorem (siehe z.B. Hewitt & Stromberg, §19) eine messbare Funktion u auf Ω, mit $|u| = 1$, derart dass

$$u f \, dE_{\varphi,\psi} = |f| \, d|E_{\varphi,\psi}|$$

Folglich

$$\int_\Omega |f| \, d|E_{\varphi,\psi}| = (\varphi, \hat{E}(uf)\psi) \leq \|\hat{E}(uf)\psi\| \, \|\varphi\| \tag{14.5}$$

Nach Satz 11.5 gilt

$$\|\hat{E}(uf)\psi\|^2 = \int_\Omega |uf|^2 dE_{\psi,\psi} = \int_\Omega |f|^2 dE_{\psi,\psi} \tag{14.6}$$

Aus (14.5) und (14.6) folgt (14.3) für ein beschränktes f. Daraus folgt auch der allgemeine Fall.

Schliesslich gilt auch (14.4), denn für jedes beschränkte messbare g ist

$$\int_\Omega g\, dE_{\eta,\psi} = (\eta, \hat{E}(g)\psi) = (\hat{E}(f)\chi, \hat{E}(g)\psi) = (\chi, \hat{E}(\bar{f})\hat{E}(g)\psi)$$
$$= (\chi, \hat{E}(\bar{f}g)\psi) = \int_\Omega \bar{f} g\, dE_{\chi,\psi} . \qquad \square$$

Satz 14.2. Mit den bisherigen Bezeichnungen gilt:

(a) Jeder messbaren Funktion $f: \Omega \to \mathbb{C}$ entspricht ein abgeschlossener Operator $\hat{E}(f)$ mit dichtem Definitionsbereich $\mathcal{D}(\hat{E}(f)) = \mathcal{D}_f$, welcher charakterisiert ist durch

$$(\varphi, \hat{E}(f)\psi) = \int_\Omega f\, dE_{\varphi,\psi} \quad (\psi \in \mathcal{D}_f, \varphi \in \mathcal{H}) \qquad (14.7)$$

und folgende Gleichung erfüllt:

$$\| \hat{E}(f)\psi \|^2 = \int_\Omega |f|^2\, dE_{\psi,\psi} \quad (\psi \in \mathcal{D}_f) \qquad (14.8)$$

(b) Das Multiplikationstheorem gilt in der folgenden Form: Für messbare Funktionen f und g ist

$$\hat{E}(f)\hat{E}(g) \subset \hat{E}(fg) \qquad (14.9)$$

und

$$\mathcal{D}(\hat{E}(f)\hat{E}(g)) = \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{fg} \qquad (14.10)$$

Deshalb gilt $\hat{E}(f)\hat{E}(g) = \hat{E}(fg) \iff \mathcal{D}_{fg} \subset \mathcal{D}_g$.

(c) Für jedes messbare $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ist

$$\hat{E}(f)^* = \hat{E}(\bar{f}) \qquad (14.11)$$

und

$$\hat{E}(f)\hat{E}(f)^* = \hat{E}(|f|^2) = \hat{E}(f)^*\hat{E}(f) \qquad (14.12)$$

Beweis: Für $\psi \in \mathcal{D}_f$ ist $\varphi \longmapsto \int_\Omega f\, dE_{\varphi,\psi}$ ein konjugiert-lineares Funktional, welches nach (14.3) beschränkt ist und dessen

Norm höchstens gleich $\left(\int |f|^2 dE_{\psi,\psi}\right)^{1/2}$ ist. Deshalb gibt es ein eindeutiges Element $\hat{E}(f)\psi \in \mathcal{H}$, welches für jedes $\varphi \in \mathcal{H}$ die Gl. (14.7) erfüllt und die Eigenschaft

$$\|\hat{E}(f)\psi\|^2 \leq \int_\Omega |f|^2 dE_{\psi,\psi} \qquad (\psi \in \mathcal{D}_f) \qquad (14.13)$$

hat. Die Linearität von $\hat{E}(f)$ auf $\mathcal{D}_f$ folgt aus (14.7), da $E_{\varphi,\psi}$ in ψ linear ist.

Wir zeigen, dass in (14.13) das Gleichheitszeichen gilt. Dazu führen wir zu jedem f die Trunkierungen $f_n = f\chi_n$, mit $\chi_n(\omega) = 1$ für $|f(\omega)| \leq n$ und $\chi_n(\omega) = 0$ für $|f(\omega)| > n$. Da jedes f_n beschränkt ist gilt $\mathcal{D}_{f-f_n} = \mathcal{D}_f$. Deshalb ist nach (14.13)

$$\|\hat{E}(f)\psi - \hat{E}(f_n)\psi\|^2 \leq \int |f-f_n|^2 dE_{\psi,\psi}$$

und die rechte Seite strebt mit $n \to \infty$ (nach dem dominierten Konvergenz Theorem) gegen Null. Da f_n beschränkt ist, gilt (14.8) für f_n an Stelle von f (Satz 11.5). Dies zeigt, dass (14.8) auch für f gilt.

Unter Teil (a) müssen wir noch zeigen, dass $\hat{E}(f)$ abgeschlossen ist. Dies ergibt sich aus Satz 13.1 a, wenn die (gleich zu beweisende) Gl. (14.11) auf $\bar{f}$ an Stelle von f angewandt wird.

Nun beweisen wir (b). Zunächst sei f beschränkt; dann ist $\mathcal{D}_{fg} \supset \mathcal{D}_g$. Für $\chi \in \mathcal{H}$, $\eta = \hat{E}(\bar{f})\chi$ ist nach (14.4) und Satz 11.5:

$$(\chi, \hat{E}(f)\hat{E}(g)\psi) = (\hat{E}(\bar{f})\chi, \hat{E}(g)\psi) = (\eta, \hat{E}(g)\psi) =$$
$$= \int_\Omega g\, dE_{\eta,\psi} = \int_\Omega fg\, dE_{\chi,\psi} = (\chi, \hat{E}(fg)\psi).$$

d.h.,

$$\hat{E}(f)\hat{E}(g)\psi = \hat{E}(fg)\psi \quad \text{für} \quad \psi \in \mathcal{D}_g,\ f \in L^\infty \qquad (14.14)$$

Für $\varphi = \hat{E}(g)\psi$ folgt aus (14.14) und (14.8)

$$\int_\Omega |f|^2 dE_{\varphi,\varphi} \underset{\substack{\uparrow \\ (f \text{ beschränkt})}}{=} \|\hat{E}(f)\varphi\|^2 = \|\hat{E}(f)\hat{E}(g)\psi\|^2 = \|\hat{E}(fg)\psi\|^2$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \mathcal{D}_{fg} \supset \mathcal{D}_g}}{=} \int_\Omega |fg|^2 dE_{\psi,\psi}$$

d.h.

$$\int_\Omega |f|^2 dE_{\varphi,\varphi} = \int_\Omega |fg|^2 dE_{\psi,\psi} \quad (\psi \in \mathcal{D}_g, f \in L^\infty) \tag{14.15}$$

Nun sei f beliebig (möglicherweise unbeschränkt). Da (14.15) für alle $f \in L^\infty$ gültig ist, ist die Gleichung auch für alle messbaren f richtig. Da $\mathcal{D}(\hat{E}(f)\hat{E}(g))$ aus allen $\psi \in \mathcal{D}_g$ besteht, sodass $\varphi \in \mathcal{D}_f$ ist, und da (14.15) zeigt, dass $\varphi \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow \psi \in \mathcal{D}_{fg}$) sehen wir, dass gilt

$$\mathcal{D}(\hat{E}(f)\hat{E}(g)) = \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{fg}.$$

Ist $\psi \in \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{fg}$ und $\varphi = \hat{E}(g)\psi$ und sind f_n wieder die Trunkierungen von f (siehe letzte Seite), so gilt $f_n \to f$ in $L^2(E_{\varphi,\varphi})$, $f_n g \to fg$ in $L^2(E_{\psi,\psi})$. Aus (14.14), mit f_n an Stelle von f ergibt sich deshalb

$$\hat{E}(f)\hat{E}(g)\psi = \hat{E}(f)\varphi \underset{\substack{\uparrow \\ (\text{s. letzte Seite})}}{=} \lim \hat{E}(f_n)\varphi = \lim \hat{E}(f_n g)\psi = \hat{E}(fg)\psi.$$

Dies beweist (14.9) und damit (b).

Sei jetzt $\psi \in \mathcal{D}_f$ und $\varphi \in \mathcal{D}_{\bar{f}} = \mathcal{D}_f$. Auf der vorangegangenen Seite wurde gezeigt, dass $\hat{E}(f)\psi = \lim \hat{E}(f_n)\psi$ ist. Deshalb folgt aus Satz 11.5:

$$(\varphi, \hat{E}(f)\psi) = \lim(\varphi, \hat{E}(f_n)\psi) = \lim(\hat{E}(\bar{f}_n)\varphi, \psi) = (\hat{E}(\bar{f})\varphi, \psi)$$

Deshalb ist $\varphi \in \mathcal{D}(\hat{E}(f)^*)$ und

$$\hat{E}(\bar{f}) \subset \hat{E}(f)^* \tag{14.16}$$

Um zu (14.11) zu gelangen, zeigen wir, dass jedes $\chi \in \mathcal{D}(\hat{E}(f)^*)$ in $\mathcal{D}_f$ liegt. Für ein festes χ sei $\eta = \hat{E}(f)^*\chi$. Aus $f_n = f\chi_n$ folgt nach (b) (vgl. die Bemerkung weiter unten):

$$\hat{E}(f_n) = \hat{E}(f)\,\hat{E}(\chi_n)$$

Da $\hat{E}(\chi_n)$ selbstadjungiert ist, schliessen wir aus den Sätzen 12.4 und 11.5 dass

$$\hat{E}(\chi_n)\,\hat{E}(f)^* \subset [\hat{E}(f)\,\hat{E}(\chi_n)]^* = \hat{E}(f_n)^* = \hat{E}(\bar{f}_n)$$

Also gilt

$$\hat{E}(\chi_n)\eta = \hat{E}(\bar{f}_n)\chi \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Da $|\chi_n| \leq 1$ folgt daraus und aus (14.8)

$$\int_\Omega |f_n|^2 \, dE_{\chi,\chi} = \int_\Omega |\chi_n|^2 \, dE_{\eta,\eta} \leq E_{\eta,\eta}(\Omega)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Deshalb ist $\chi \in \mathcal{D}_f$ und (14.11) ist bewiesen. Schliesslich folgt (14.12) aus (14.11), (wegen*) $\mathcal{D}_{f\bar{f}} \subset \mathcal{D}_f$) durch eine weitere Anwendung des Multiplikationstheorems. ∎

<u>Bemerkungen</u>: Für beschränktes g ist $\mathcal{D}_{fg} \subset \mathcal{D}_g$ (da $\mathcal{D}_g = \mathcal{H}$), so dass $\hat{E}(f)\,\hat{E}(g) = \hat{E}(fg)$. Dies zeigt auch

$$\hat{E}(g)\hat{E}(f) \subset \hat{E}(f)\,\hat{E}(g) \qquad (14.17)$$

weil $\hat{E}(g)\,\hat{E}(f) \subset \hat{E}(gf) = \hat{E}(fg) = \hat{E}(fg)$ gilt.
Ist speziell g eine Indikatorfunktion (von $\Delta \in \mathcal{A}$), so lautet (14.17)

$$E(\Delta)\,\hat{E}(f) \subset \hat{E}(f)\,E(\Delta) \qquad (14.18)$$

---

*) Für ein endliches Mass ist $L^q \subset L^p$ für $0 < p < q < \infty$, wie man aus der Hölder-Ungleichung leicht findet (vgl. Hewitt & Stromberg, (13.17)).

Für $\psi \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{R}(E(\Delta))$ folgt

$$E(\Delta)\hat{E}(f)\psi = \hat{E}(f)E(\Delta)\psi = \hat{E}(f)\psi \qquad (14.19)$$

d.h., $\hat{E}(f)$ bildet $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{R}(E(\Delta))$ in $\mathcal{R}(E(\Delta))$ ab.

<u>Satz 14.3.</u> In der Situation von Satz 14.2 ist $\mathcal{D}_f = \mathcal{H}$ genau dann, wenn $f \in L^\infty(E)$.

<u>Beweis:</u> Es sei $\mathcal{D}_f = \mathcal{H}$. Da $\hat{E}(f)$ ein abgeschlossener Operator ist, gilt nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen (Satz 13.3) $\hat{E}(f) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Ist $f_n = f\chi_n$ eine Trunkierung von f, so folgt aus dem Multiplikationstheorem (14.9) und dem Satz 11.5

$$\|f_n\|_\infty = \|\hat{E}(f_n)\| = \|\hat{E}(f)\hat{E}(\chi_n)\| \leq \|\hat{E}(f)\|,$$

da $\|\hat{E}(\chi_n)\| = \|\chi_n\|_\infty \leq 1$. Also ist $\|f\|_\infty \leq \|\hat{E}(f)\|$ und $f \in L^\infty(E)$. Die Umkehrung ist in Satz 11.5 enthalten. $\square$

<u>Satz 14.4.</u> Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ Messräume, E ein projektionswertiges Mass auf $\mathcal{A}$ und $\Phi: \Omega \to \Omega'$ eine messbare Abbildung (d.h. $\Phi^{-1}(\Delta') \in \mathcal{A}$ für jedes $\Delta' \in \mathcal{A}'$). Durch $E'(\Delta') := E(\Phi^{-1}(\Delta'))$ wird ein projektionswertiges Mass auf $\mathcal{A}'$ definiert. Ferner gilt für jede $\mathcal{A}'$-messbare Funktion $f: \Omega' \to \mathbb{C}$

$$\int_{\Omega'} f \, dE'_{\varphi,\psi} = \int_\Omega (f\circ\Phi)\, dE_{\varphi,\psi} \qquad (14.20)$$

wenn eines der beiden Integrale existiert.

<u>Beweis:</u> Ist f eine Indikatorfunktion, so ist (14.20) gleichbedeutend mit der Definition von E'. Mit den Indikatorfunktionen gilt (14.20) auch für messbare Funktionen f. Durch

Routinerechnungen verifiziert man, dass E' ein projektionswertiges Mass ist.

§15. Der Spektralsatz für (unbeschränkte) selbstadjungierte Operatoren

Es sei U_t eine stark stetige einparametrige unitäre Gruppe in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Der Operator A mit

$$\mathcal{D}(A) = \{\psi \in \mathcal{H} \mid \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U_t - 1)\psi \text{ existiert}\} \tag{15.1}$$

$$iA\psi = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U_t - 1)\psi \quad \text{für } \psi \in \mathcal{D}(A) \tag{15.2}$$

heisst der <u>infinitesimale Generator</u> von $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Nach dem Satz von Stone hat U_t die folgende Spektraldarstellung

$$U_t = \int e^{it\lambda}\, dE(\lambda) \tag{15.3}$$

Mit Hilfe der Spektralschar E definieren wir den Operator

$$T = \hat{E}(id) = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, dE(\lambda) \tag{15.4}$$

Nach Satz 14.2 ist T selbstadjungiert.

<u>Proposition 15.1.</u> Es gilt $A = T$.

<u>Beweis:</u> Für $\psi \in \mathcal{D}(T)$ existiert nach Satz 14.2 das Integral $\int_{\mathbb{R}} \lambda^2\, dE_{\psi,\psi}$ $(\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}_{id})$. Wegen

$$\frac{1}{t}(e^{it\lambda} - 1) \longrightarrow i\lambda \quad \text{für } t \to 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

und

$$\left| \frac{1}{t}(e^{it\lambda} - 1) \right| \leq |\lambda| \quad \text{für } \lambda, t \in \mathbb{R},\ t \neq 0$$

erhalten wir, mit dominierter Konvergenz,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U_t - 1)\psi = i \int \lambda\, dE(\lambda)\psi = iT\psi \quad \text{für } \psi \in \mathcal{D}(T)$$

Dies beweist $T \subset A$. Andererseits sieht man sofort, dass A symmetrisch ist. Deshalb ist $A = T$. $\square$

Damit ist gezeigt, dass der infinitesimale Generator von U_t selbstadjungiert und gleich $\hat{E}(\mathrm{id})$ ist.
Umgekehrt gilt der folgende

<u>Satz 15.2.</u> Sei E ein projektionswertiges Mass und U_t durch (15.3) definiert. Dann ist U_t eine stark stetige einparametrige unitäre Gruppe und der infinitesimale Generator ist gleich $\hat{E}(\mathrm{id})$.

<u>Beweis:</u> Der erste Teil der Aussage ist in Satz 11.6 enthalten und der zweite Teil fällt mit der Proposition 15.1 zusammen. $\square$

Wir zeigen unten, dass umgekehrt zu jedem selbstadjungierten Operator eine <u>eindeutige</u> stark stetige unitäre Gruppe U_t existiert, deren infinitesimaler Generator gleich A ist. Daraus folgt, dass zu jedem selbstadjungierten Operator A ein projektionswertiges Mass E mit $A = \hat{E}(\mathrm{id})$ existiert. E ist überdies eindeutig, da U_t eindeutig durch A bestimmt ist und nach Satz 15.2 die Darstellung (15.3) hat, in welcher E nach Satz 11.7 eindeutig ist.

Wir halten dieses zentrale Resultat fest:

<u>Satz 15.3 (Spektralsatz).</u> Zu jedem selbstadjungierten Operator A gibt es genau ein projektionswertiges Mass E auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit $A = \hat{E}(\mathrm{id})$ oder kurz $A = \int \lambda \, dE(\lambda)$.

<u>Notation:</u> Ist E_A das Spektralmass eines selbstadjungierten Operators A, so schreiben wir für $\hat{E}_A(f)$ auch $f(A)$.

Die Beziehung zwischen unitären Gruppen und selbstadjungierten

Operatoren lässt sich wie folgt zusammenfassen:

<u>Satz 15.4</u> (Stone). Der infinitesimale Generator A einer stark stetigen einparametrigen Gruppe U_t ist selbstadjungiert und es ist

$$U_t = e^{iAt} \tag{15.5}$$

Umgekehrt wird durch (15.5) für jeden selbstadjungierten Operator A eine stark stetige einparametrige unitäre Gruppe U_t definiert, deren infinitesimaler Generator gerade A ist.

Wir sind noch den Beweis schuldig, dass jeder selbstadjungierte Operator eine unitäre Gruppe erzeugt. Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen.

<u>Definition 15.5.</u> Sei T ein abgeschlossener Operator in $\mathcal{H}$. Die <u>Resolventenmenge</u>, $\varrho(T)$, besteht aus allen komplexen Zahlen z, für die $z \cdot I - T$ eine Bijektion von $\mathcal{D}(T)$ auf $\mathcal{H}$ ist. Für $z \in \varrho(T)$ ist $R(z,T) = (z \cdot I - T)^{-1}$ die <u>Resolvente</u> von T bei z. (Diese ist nach Satz 13.7 beschränkt!) Das Komplement von $\varrho(T)$, $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \varrho(T)$, ist das <u>Spektrum</u> von T. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heisst <u>Eigenwert</u> von T, wenn $\mathcal{N}(\lambda \cdot I - T) \neq \{0\}$ ist und $\mathcal{N}(\lambda \cdot I - T)$ heisst <u>Eigenraum</u> zum Eigenwert λ. (Jeder Eigenwert ist also in $\sigma(T)$.)

<u>Satz 15.6.</u> Sei T selbstadjungiert. Jedes nicht-reelle z ist in $\varrho(T)$ (d.h. $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$) und es gilt

$$\| R(z,T) \| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} z|} \tag{15.6}$$

Ferner ist $\sigma(T)$ abgeschlossen (dies ist allgemein wahr).

<u>Beweis:</u> Wir zeigen zunächst, dass $z - T$ für $\operatorname{Im} z \neq 0$

injektiv ist. Dies folgt für $\psi \in \mathcal{D}(T)$ aus

$$\|(z-T)\psi\|^2 = (\operatorname{Im} z)^2 \|\psi\|^2 + \|(\operatorname{Re} z - T)\psi\|^2 \geq (\operatorname{Im} z)^2 \|\psi\|^2 \qquad (15.7)$$

Als nächstes zeigen wir, dass $\mathcal{R}(z-T) = \mathcal{H}$ ist, wenn $\operatorname{Im} z \neq 0$. Da T abgeschlossen ist, ist auch $(z-T)^{-1}$ abgeschlossen (vgl. Aussage 5 auf S. 103). Angenommen $\mathcal{R}(z-T) \neq \mathcal{H}$, dann existiert ein Element $\varphi \neq 0$, so dass für alle $\psi \in \mathcal{D}(T)$

$$(\varphi, (z-T)\psi) = ((\bar{z}-T)\varphi, \psi) = 0$$

Da $\mathcal{D}(T)$ dicht ist, folgt daraus $T\varphi = \bar{z}\varphi$, d.h. $\varphi \in \mathcal{N}(\bar{z}-T)$, Widerspruch!

Damit ist gezeigt, dass $z \in \varrho(T)$ für $\operatorname{Im} z \neq 0$. Aus der Ungleichung (15.7) folgt ferner die Ungleichung (15.6).

Schliesslich zeigen wir noch die Abgeschlossenheit des Spektrums. Sei $z_0 \in \varrho(T)$, dann gilt für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ für ein $C > 0$

$$\|(z_0-T)^{-1}\varphi\|^2 \leq C \|\varphi\|^2$$

und hieraus für $\psi \in \mathcal{D}(T)$

$$\|(z_0-T)\psi\|^2 \geq \frac{1}{C} \|\psi\|^2$$

Für alle z mit $|z-z_0| < \frac{1}{2C}$ folgt daraus, mit der Dreiecksungleichung,

$$\|(z-T)\psi\|^2 \geq \|(z_0-T)\psi\| - |z-z_0| \, \|\psi\| \geq \frac{1}{2C} \|\psi\|$$

d.h. $\mathcal{N}(z-T) = \{0\}$. Wie oben gezeigt wurde, ist dann aber auch $\mathcal{R}(z-T) = \mathcal{H}$, d.h., $z \in \varrho(T)$. Deshalb ist $\varrho(T)$ offen und folglich $\sigma(T)$ abgeschlossen. $\square$

Jetzt holen wir den Beweis des folgenden Satzes nach.

<u>Satz 15.7.</u> Sei T selbstadjungiert. Dann ist T der infinitesimale Generator einer eindeutigen stark stetigen einparametrigen

Gruppe von unitären Transformationen. (Eindeutigkeit bedeutet: Sind $U_t^{(1)}$ und $U_t^{(2)}$ unitäre Gruppen mit Erzeugenden T_1 resp. T_2, dann impliziert $U_t^{(1)} \neq U_t^{(2)}$ für ein t, dass $T_1 \neq T_2$.)

<u>Bemerkung</u>. Der folgende Beweis lässt sich mit geringfügigen Änderungen auf Banach-Räume übertragen und man erhält so einen Beweis des Satzes von Hille-Yosida für Kontraktions-Halbgruppen (siehe, z.B., Reed & Simon, Bd. 2, Theorem X.47a).

<u>Beweis</u>: Nach Satz 15.6 ist $i\lambda \in \varrho(T)$ für $\lambda \neq 0$ und

$$\|(i\lambda+T)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0) \tag{15.8}$$

Für $\lambda \neq 0$ definieren wir den beschränkten Operator

$$T^{(\lambda)} = i\lambda + \lambda^2 (i\lambda+T)^{-1} \tag{15.9}$$

und zeigen zuerst, dass für $\lambda \to \pm\infty$, $T^{(\lambda)} \xrightarrow{s} T$ auf $\mathcal{D}(T)$. Für $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ ist $T^{(\lambda)}\varphi = i\lambda(i\lambda+T)^{-1}T\varphi$. Ferner gilt nach (15.8)

$$i\lambda(i\lambda+T)^{-1}\varphi - \varphi = (i\lambda+T)^{-1}T\varphi \xrightarrow[\lambda\to\pm\infty]{} 0 \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(T))$$

Nun ist aber nach (15.8) die Familie $\{i\lambda(i\lambda+T)^{-1} \mid \lambda \neq 0\}$ gleichmässig beschränkt in der Norm, und deshalb gilt ($\mathcal{D}(T)$ ist dicht!) $i\lambda(i\lambda+T)^{-1}\psi \xrightarrow[(\lambda\to\pm\infty)]{} \psi$ für alle $\psi \in \mathcal{H}$. Damit ist gezeigt

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} T^{(\lambda)}\varphi = T\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(T) \tag{15.10}$$

Wir notieren ferner, dass nach Satz 12.7 b $T^{(\lambda)*} = T^{(-\lambda)}$ ist. Deshalb ist

$$A^{(\lambda)} = \frac{1}{2}\left(T^{(\lambda)} + T^{(-\lambda)}\right) \tag{15.11}$$

selbstadjungiert und es gilt nach (15.10)

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} A^{(\lambda)}\varphi = T\varphi \quad , \quad \varphi \in \mathcal{D}(T) \tag{15.12}$$

Da $A^{(\lambda)}$ beschränkt und selbstadjungiert ist, können wir mit der Exponentialreihe die 1-parametrige unitäre Gruppe

$$U_t^{(\lambda)} = e^{itA^{(\lambda)}} \tag{15.13}$$

definieren. Die gesuchte unitäre Gruppe wird daraus als starker Limes für $\lambda \to \pm\infty$ hervorgehen.
Für alle $\mu, \lambda, t \neq 0$ und alle $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ gilt

$$U_t^{(\lambda)}\varphi - U_t^{(\mu)}\varphi = \int_0^t \frac{d}{ds}\left(U_s^{(\lambda)}\, U_{t-s}^{(\mu)}\,\varphi\right) ds$$

Folglich gilt*)

$$\| U_t^{(\lambda)}\varphi - U_t^{(\mu)}\varphi \| \leq \int_0^{|t|} \| U_s^{(\lambda)}\, U_{t-s}^{(\mu)} \| \cdot \| A^{(\mu)}\varphi - A^{(\lambda)}\varphi \|\, ds$$

$$\leq |t|\, \| A^{(\mu)}\varphi - A^{(\lambda)}\varphi \| \tag{15.14}$$

Mit (15.12) schliessen wir, dass mit $\lambda \to \infty$ $\{U_t^{(\lambda)}\varphi\}$ eine Cauchy-Schar ist für jedes $t \neq 0$ und $\varphi \in \mathcal{D}(T)$. Da aber $\mathcal{D}(T)$ dicht ist und die $U_t^{(\lambda)}$ gleichmässig beschränkt sind, gilt die gleiche Aussage für alle $\varphi \in \mathcal{H}$. Nun definieren wir auf ganz $\mathcal{H}$

$$U_t = s\text{-}\lim U_t^{(\lambda)} \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{15.15}$$

---

*) Wir bemerken, dass $U_t^{(\lambda)}$ und $U_s^{(\mu)}$ kommutieren, weil $\{T^{(\lambda)}\}_{\lambda\neq 0}$ eine kommutierende Familie ist. Letzteres sieht man z.B. daraus, dass für einen abgeschlossenen Operator T die sog. erste Resolventengleichung

$$R(z,T) - R(z',T) = (z'-z)\,R(z,T)\,R(z',T) = (z'-z)\,R(z',T)\,R(z,T) \quad \text{für } z, z' \in \rho(T)$$

gilt (Übung).

U_t ist eine unitäre Gruppe von Operatoren, da die Unitarität und die Gruppeneigenschaft bei starker Limesbildung erhalten bleiben. Die Ungleichung (15.14) zeigt weiter, dass die Konvergenz $U_t^{(\lambda)} \xrightarrow{s} U_t$ gleichmässig in t auf endlichen Intervallen ist. Deshalb ist U_t stark stetig.

Wir zeigen nun, dass der infinitesimale Generator gleich T ist. Für alle t und $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ ist

$$U_t^{(\lambda)}\varphi - \varphi = i \int_0^t U_s^{(\lambda)} A^{(\lambda)}\varphi \, ds$$

und deshalb nach (15.12)

$$U_t\varphi - \varphi = i \int_0^t U_s T\varphi \, ds \qquad (15.16)$$

Dies zeigt

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U_t\varphi - \varphi) = iT\varphi \qquad \text{für } \varphi \in \mathcal{D}(T)$$

Bezeichnet $\tilde{T}$ den infinitesimalen Generator von U_t so gilt also $\tilde{T} \supset T$. Da beide Operatoren selbstadjungiert sind ist deshalb $\tilde{T} = T$.

Schliesslich beweisen wir noch die Eindeutigkeit von U_t. Dazu benützen wir die folgende Formel (siehe Lemma 15.8 unten):

$$(i\lambda + T)^{-1}\psi = i \int_0^\infty e^{-\lambda t} U_t\psi \, dt \qquad (\psi \in \mathcal{H}, \lambda > 0) \qquad (15.17)$$

Gäbe es zu T zwei unitäre Gruppen $U_t^{(1)}$ und $U_t^{(2)}$, die sich in einem Punkt $t_0 \neq 0$ unterscheiden, so wäre dies im Widerspruch zu (15.17), denn die gewöhnliche Laplace-Transformation ist auf beschränkten Funktionen injektiv. ∎

<u>Lemma 15.8.</u> Ist T der infinitesimale Generator einer stark stetigen unitären Gruppe U_t, dann gilt

$$(i\lambda + T)^{-1}\psi = i \int_0^\infty e^{-\lambda t} U_t\psi \, dt \qquad (\psi \in \mathcal{H}, \lambda > 0)$$

Beweis: Da $\|U_t\| = 1$, ist für $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ durch

$$R\psi := \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, U_t \psi \, dt$$

ein beschränkter linearer Operator mit Norm $\le (\mathrm{Re}\,\lambda)^{-1}$. Für $\tau > 0$ gilt, wenn $iT_t := \frac{1}{t}(U_t - 1)$ ist,

$$iT_\tau R\psi = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda t}(U_{t+\tau} - U_t)\psi\, dt$$

$$= \frac{e^{\lambda\tau}-1}{\tau}\int_0^\infty e^{-\lambda t} U_t\psi\, dt - \frac{e^{\tau\lambda}}{\tau}\int_0^\tau e^{-\lambda t} U_t \psi\, dt$$

Für $\tau \to 0$ gilt also $iT_\tau R\psi \to \lambda R\psi - \psi$. Deshalb ist $R\psi \in \mathcal{D}(T)$ und $iTR\psi = \lambda R\psi - \psi$, d.h., $(\lambda - iT)R\psi = \psi$. Zusätzlich gilt für $\psi \in \mathcal{D}(T)$ $TR\psi = RT\psi$, da

$$T\int_0^\infty e^{-\lambda t} U_t\psi\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T U_t \psi\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U_t T\psi\, dt$$

Für das erste Gleichheitszeichen denke man sich die Integrale als Grenzwerte von Riemannschen Summen dargestellt und benutze die Abgeschlossenheit von T. Die Vertauschbarkeit von T und U_t auf $\mathcal{D}(T)$ folgt aus der Definition von T (15.2) und $T_\tau U_t = U_t T_\tau$ als Folge der Gruppeneigenschaft von U_t. Somit gilt für $\psi \in \mathcal{D}(T)$, $R(\lambda - iT)\psi = \psi = (\lambda - iT)R\psi$, d.h.

$$iR = (i\lambda + T)^{-1}$$

und dies stimmt mit der Behauptung überein. □

* * *

Wir wollen nun zeigen, dass man jeden selbstadj. Operator als Operator der Multiplikation mit der Funktion id in einem Raum der Art $\bigoplus_{i\in I} L^2(\mathbb{R}, \mu_i)$ darstellen kann.

Sei zunächst $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $\{\mu_j\}_{j\in I}$ eine Familie von Massen.

In $\bigoplus_{j\in I} L^2(\Omega,\mu_j)$ definieren wir, in naheliegender Verallgemeinerung des Beispiels auf S. 79 das projektionswertige Mass:

$$F(\Delta)\{f_j\} = \{1_\Delta f_j\} \quad \text{für } \{f_j\} \in \bigoplus_{j\in I} L^2(\Omega,\mu) \qquad (15.18)$$

Man verifiziert leicht, dass für eine F-messbare Funktion u

$$\mathcal{D}(\hat{E}(u)) = \{ \{f_j\} \in \bigoplus_{j\in I} L^2(\Omega,\mu_j) \mid \{uf_j\} \in \bigoplus_{j\in I} L^2(\Omega,\mu_j) \}$$
$$\hat{E}(u)\{f_j\} = \{u f_j\} \qquad (15.19)$$

Als weiteres Hilfsmittel benötigen wir den

<u>Satz 15.9.</u> Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ Hilberträume, U ein unitärer Operator von $\mathcal{H}_1$ auf $\mathcal{H}_2$ und E ein Spektralmass in $\mathcal{H}_1$ über Ω. Dann wird durch

$$F(\Delta) = U E(\Delta) U^{-1} \quad , \ \Delta \in \mathcal{A} \qquad (15.20)$$

($(\Omega,\mathcal{A})$: Messraum) ein Spektralmass in $\mathcal{H}_2$ erklärt. Eine Funktion $f:\Omega \to \mathbb{C}$ ist genau dann F-messbar, wenn sie E-messbar ist. Ferner gilt

$$\hat{F}(u) = U \hat{E}(u) U^{-1} \qquad (15.21)$$

<u>Beweis:</u> Es ist klar, dass F ein Spektralmass über Ω in $\mathcal{H}_2$ ist. Ist $\mu_\psi(\Delta) = \|E(\Delta)\psi\|^2 = E_{\psi,\psi}(\Delta)$ und $\nu_\varphi(\Delta) = F_{\varphi,\varphi}(\Delta)$, so ist offenbar $\mu_\psi(\Delta) = \nu_{U\psi}(\Delta)$. Also ist u genau dann E-messbar, wenn es F-messbar ist, und es gilt $L^2(\Omega,\mu_\psi) = L^2(\Omega,\nu_{U\psi})$. Da die Gl. (15.21) für Treppenfunktionen evident ist, folgt die Behauptung unmittelbar.

$\square$

Nun zeigen wir, dass jede Spektralschar E unitär äquivalent zu (15.18) ist. Genauer gilt der

<u>Satz 15.10.</u> Sei E eine Spektralschar über Ω im Hilbert-Raum $\mathcal{H}$. Dann existiert eine Familie $\{\mu_i\}_{i\in I}$ von positiven Massen (card $I \leq \dim \mathcal{H}$) und ein unitärer Operator $U: \mathcal{H} \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} L^2(\Omega,\mu_i)$ so, dass mit dem Spektralmass F in (15.18) gilt

$$E(\Delta) = U^{-1} F(\Delta) U \quad \text{für alle } \Delta \in \mathcal{A} \tag{15.22}$$

Für jede $\mathcal{A}$-messbare Funktion u gilt

$$\hat{E}(u) = U^{-1} \hat{F}(u)\, U\,; \tag{15.23}$$

dabei ist $\hat{F}(u)$ der <u>maximale Operator der Multiplikation</u> mit u in $\bigoplus_{i\in I} L^2(\Omega,\mu_i)$, definiert in (15.19).

<u>Beweis:</u> Für ein $\psi \in \mathcal{H}$, $\psi \neq 0$, sei $\mathcal{H}_\psi = \overline{L\{E(\Delta)\psi : \Delta \in \mathcal{A}\}}$ und $\mu_\psi = E_{\psi,\psi}$.

Durch

$$U_{\psi,0}: \quad \sum_{j=1}^{n} c_j E(\Delta_j)\psi \longmapsto \sum_{j=1}^{n} c_j 1_{\Delta_j} \tag{15.24}$$

wird eine isometrische Abbildung von $L\{E(\Delta)\psi : \Delta \in \mathcal{A}\}$ in $L^2(\Omega,\mu_\psi)$ definiert, wie man leicht nachprüft. Der Wertebereich von $U_{\psi,0}$ enthält nach (15.24) die Treppenfunktionen, ist also dicht in $L^2(\Omega,\mu_\psi)$. Die Abschliessung $U_\psi = \overline{U_{\psi,0}}$ ist also unitär von $\mathcal{H}_\psi$ auf $L^2(\Omega,\mu_\psi)$, und es gilt für alle $\varphi \in \mathcal{H}_\psi$

$$U_\psi(E(\Delta)\varphi) = 1_\Delta\, U_\psi \varphi\,, \tag{15.25}$$

da dies für $U_{\psi,0}$ (und $\varphi \in \mathcal{D}(U_{\psi,0})$) nach (15.24) offenbar gültig ist.

Mit dem Zornschen Lemma sieht man sofort, dass ein maximales System $\{\mathcal{H}_{\psi_i}\}_{i\in I}$ existiert mit $\mathcal{H}_{\psi_i} \perp \mathcal{H}_{\psi_j}$ für $i \neq j$ (Halbordnung = Inklusion, obere Schranke = Vereinigung). Wir schreiben $\mathcal{H}_i$ für $\mathcal{H}_{\varphi_i}$ und zeigen $\mathcal{H} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$. Wäre $\mathcal{H} \neq \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$, so gäbe es ein $\varphi \in \mathcal{H}$, $\varphi \neq 0$, mit $\varphi \perp \mathcal{H}_i$ für alle $i \in I$. Dann gilt aber auch $E(\Delta)\varphi \perp \mathcal{H}_i$ für alle $i \in I$ und somit $\mathcal{H}_\varphi \perp \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$; das wäre ein Widerspruch zur Maximalität.

Sind $\mu_i = \mu_{\varphi_i}$, $U_i : \mathcal{H}_i \longrightarrow L^2(\Omega, \mu_i)$ die zugehörigen unitären Abbildungen und P_i die orthogonalen Projektionen auf $\mathcal{H}_i$, so ist

$$U\varphi = \{U_i P_i \varphi\} \qquad (\varphi \in \mathcal{H}) \tag{15.26}$$

eine unitäre Abbildung von $\mathcal{H}$ auf $\bigoplus_{i\in I} L^2(\Omega,\mu_i)$. Es gilt für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ (mit (15.25)):

$$U E(\Delta)\varphi = \{U_i P_i E(\Delta)\varphi\}_{i\in I} = \{U_i E(\Delta) P_i \varphi\} =$$

$$= \{1_\Delta U_i P_i \varphi\} \underset{(15.18)}{=} F(\Delta) U\varphi$$

Dies beweist (15.22). Mit dem Satz 15.9 folgt auch (15.23). Der Rest der Behauptung ist in (15.19) enthalten. □

Diesen Satz kombinieren wir nun mit dem Spektralsatz 15.3.

<u>Satz 15.11</u> (Spektraldarstellungssatz). Sei T ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$. Dann existiert eine Familie $\{\mu_i\}_{i\in I}$ von positiven Massen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und ein unitärer Operator U von $\mathcal{H}$ auf $\bigoplus_{i\in I} L^2(\mathbb{R},\mu_i)$ so, dass gilt

$$T = U^{-1} T_{id} U, \tag{15.27}$$

wobei T_{id} der maximale Operator der Multiplikation mit der Funktion id in $\bigoplus_{i\in I} L^2(\mathbb{R},\mu_i)$ ist. Für die Spektralschar E von T gilt

$$E(\Delta) = U^{-1} 1_\Delta U \tag{15.28}$$

Bemerkungen: Für die Aussage dieses Satzes sagen wir kurz: Jeder selbstadjungierte Operator ist unitär äquivalent zu einem Multiplikationsoperator mit der Funktion $u = \mathrm{id}$. Man muss aber beachten, dass diese Darstellung nicht eindeutig ist. Von dieser Freiheit macht man in der Quantenmechanik Gebrauch.

Beweis: Ist E die Spektralschar von T, so ist $T = \hat{E}(\mathrm{id})$. Mit den oben benutzten Bezeichnungen gilt dann

$$T = \hat{E}(\mathrm{id}) = U^{-1}\hat{F}(\mathrm{id})\,U = U^{-1}\,T_{\mathrm{id}}\,U \qquad \square$$

§16. Spektren selbstadjungierter Operatoren

Satz 16.1. Sei E ein Spektralmass auf einer Menge Ω, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ sei messbar und

$$\Delta_\lambda = \{\omega \in \Omega : f(\omega) = \lambda\} \tag{16.1}$$

(a) Ist λ im wesentlichen Wertebereich*) von f bezüglich E und $E(\Delta_\lambda) \neq 0$, dann ist $\mathcal{N}(\hat{E}(f) - \lambda I) \neq \{0\}$.

(b) Ist λ im wesentlichen Wertebereich von f, aber $E(\Delta_\lambda) = 0$, dann ist $\hat{E}(f) - \lambda \cdot 1$ eine ein-eindeutige Abbildung von $\mathcal{D}_f$ auf einen dichten echten Unterraum von $\mathcal{H}$ und es existiert eine Folge von normierten Vektoren φ_n so, dass

$$\lim_{n\to\infty} [\, \hat{E}(f)\varphi_n - \lambda\varphi_n \,] = 0 \tag{16.2}$$

(c) $\sigma(\hat{E}(f))$ ist der wesentliche Wertebereich von f.

---

*) Für Definition siehe §11, S. 80.

Bemerkungen: In der Terminologie von Definition 15.5 ist im Fall (a) λ ein Eigenwert von $\hat{E}(f)$. Im Falle (b) liegt λ im kontinuierlichen Spektrum von $\hat{E}(f)$ und die Aussage unter (b) lässt sich so ausdrücken: λ ist ein approximativer Eigenwert von $\hat{E}(f)$.

Beweis: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $\lambda = 0$ annehmen.

(a) Falls $E(\Delta_0) \neq 0$, dann existiert ein $\psi_0 \in \mathcal{R}(E(\Delta_0))$ mit $\|\psi_0\| = 1$. Für die Indikatorfunktion 1_{Δ_0} von Δ_0 gilt $f \cdot 1_{\Delta_0} = 0$, also $\hat{E}(f)\hat{E}(1_{\Delta_0}) = 0$ auf Grund des Multiplikationstheorems. Da $\hat{E}(1_{\Delta_0}) = E(\Delta_0)$, folgt

$$\hat{E}(f)\psi_0 = \hat{E}(f)E(\Delta_0)\psi_0 = \hat{E}(f)\hat{E}(1_{\Delta_0})\psi_0 = 0$$

d.h. $\mathcal{N}(\hat{E}(f)) \neq \{0\}$.

(b) Die Hypothese ist jetzt $E(\Delta_0) = 0$, aber $E(\Delta_n) \neq 0$ für $n = 1, 2, \ldots$, wo

$$\Delta_n = \{\omega \in \Omega : |f(\omega)| < \tfrac{1}{n}\}$$

Wählen $\psi_n \in \mathcal{R}(E(\Delta_n))$, $\|\psi_n\| = 1$. Wie unter (a) gilt

$$\|\hat{E}(f)\psi_n\| = \|\hat{E}(f 1_{\Delta_n})\psi_n\| \leq \|\hat{E}(f \cdot 1_{\Delta_n})\| = \|f 1_{\Delta_n}\|_\infty \leq \frac{1}{n}.$$

Also gilt $\hat{E}(f)\psi_n \to 0$, obschon $\|\psi_n\| = 1$. Dies beweist (16.2).

Gilt $\hat{E}(f)\psi = 0$ für ein $\psi \in \mathcal{D}_f$, dann ist

$$\int_\Omega |f|^2 \, dE_{\psi,\psi} = 0$$

Da $|f| > 0$ fast überall $[E_{\psi,\psi}]$, muss $E_{\psi,\psi}(\Omega) = 0$ sein. Aber $E_{\psi,\psi}(\Omega) = \|\psi\|^2$. Deshalb ist $\hat{E}(f)$ injektiv.

Genauso ist $\hat{E}(f)^* = \hat{E}(\bar{f})$ injektiv. Gilt $\varphi \perp \mathcal{R}(\hat{E}(f))$, dann ist $\psi \mapsto (\varphi, \hat{E}(f)\psi) = 0$ stetig in $\mathcal{D}_f$; deshalb ist $\varphi \in \mathcal{D}(\hat{E}(f)^*)$ und

$$(\hat{E}(\bar{f})\varphi, \psi) = (\varphi, \hat{E}(f)\psi) = 0 \qquad (\psi \in \mathcal{D}_f)$$

Dies zeigt $\hat{E}(f)\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ ($\hat{E}(f)$ ist injektiv!).
Also ist $\mathcal{R}(\hat{E}(f))$ dicht in $\mathcal{H}$.
Da $\hat{E}(f)$ abgeschlossen ist, gilt dies auch für $\hat{E}(f)^{-1}$! Wäre $\mathcal{R}(\hat{E}(f))$ ganz $\mathcal{H}$, dann wäre nach dem Satz des abgeschlossenen Graphen (Satz 13.3) $\hat{E}(f)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Das ist aber in Anbetracht der oben konstruierten Folge $\{\varphi_n\}$ unmöglich. Damit ist (b) bewiesen.

(c) Aus (a) und (b) folgt, dass der wesentliche Wertebereich von f eine Teilmenge von $\sigma(\hat{E}(f))$ ist. Um die umgekehrte Inklusion zu erhalten, nehmen wir an 0 sei nicht im wesentlichen Wertebereich von f. Dann ist $g = 1/f \in L^\infty(E)$, $fg = 1$, also $\hat{E}(f)\hat{E}(g) = \hat{E}(1) = I$. Dies beweist $\mathcal{R}(\hat{E}(f)) = \mathcal{H}$ und damit $\hat{E}(f)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (Satz vom abgeschlossenen Graphen). □

Folgerung:
Ist speziell E die Spektralschar zu einem selbstadjungierten Operator T, $T = \hat{E}(id)$, so gilt

$$\sigma(T) = \text{Träger von } E \tag{16.3}$$

Tatsächlich ist der wesentliche Wertebereich der Funktion id bezüglich E gerade gleich dem Träger von E und deshalb gilt die Aussage nach Satz 16.1 (c).
Aus (16.3) und Satz 14.3 folgt: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \sigma(T)$ kompakt.

* * *

Kapitel IV. Die formalen Prinzipien der Quantenmechanik

In diesem Kapitel besprechen wir die allgemeine formale Struktur der QM. Diese ergibt sich durch eine naheliegende Abstraktion aus der Wellenmechanik. (Es gibt zahlreiche Versuche diese Struktur aus "physikalisch einleuchtenden" Postulaten zu deduzieren. Davon halte ich aber nicht allzuviel.) In diesen allgemeinen Rahmen fügt sich auch die relativistische Quantentheorie (Quantenfeldtheorie) ein. Es gibt bis heute nicht die geringsten Hinweise, dass dieser zu eng sein könnte.

§17. Die kinematische Struktur der QM

In der Wellenmechanik werden die Zustände eines N-Teilchensystems durch Einheitsstrahlen $\underset{\sim}{\psi} = \{e^{i\alpha}\psi \mid \|\psi\| = 1\}$ im Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes (\mathbb{C}^{2s+1})^{\otimes N}$ beschrieben. (Für identische Teilchen muss man sich auf den symmetrischen, bzw. antisymmetrischen Teilraum beschränken.) Den Observablen entsprechen lineare selbstadjungierte Operatoren. Der Erwartungswert einer Observablen A im Zustand $\underset{\sim}{\psi}$ ist $(\psi, A\psi)$, $\psi \in \underset{\sim}{\psi}$. Diese Aussagen wollen wir in naheliegender Weise verallgemeinern.

Die Grundbegriffe sind: <u>Zustände</u>, <u>Observable</u>, <u>Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Observablen in einem Zustand</u>.

Sei S ein physikalisches System. Die QM beschreibt die kinematische Struktur des Systems wie folgt (wir sehen vorläufig von sog. Superauswahlregeln ab):

(i) Die (reinen) <u>Zustände</u> entsprechen 1-1-deutig den

Einheitsstrahlen eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$.

(ii) Die Observablen entsprechen (im allgemeinen unbeschränkten) selbstadjungierten Operatoren in $\mathcal{H}$.

(iii) Ist A eine Observable (selbstadjungierter Operator) und E^A das zu A gehörige projektionswertige Mass, so ist die Wahrscheinlichkeit, $\mathbb{P}^A_{\underset{\sim}{\psi}}(\Delta)$, bei der Messung von A im Zustand $\underset{\sim}{\psi}$ einen Wert in Δ zu finden:

$$\mathbb{P}^A_{\underset{\sim}{\psi}}(\Delta) = (\psi, E^A(\Delta)\psi) = E^A_{\psi,\psi}(\Delta) \tag{17.1}$$

$\mathbb{P}^A_{\underset{\sim}{\psi}}$ ist ein W-Mass und ist die Verteilung (im Sinne der W-Theorie) der Observablen A im Zustand $\underset{\sim}{\psi}$.
Der Erwartungswert von A im Zustand $\underset{\sim}{\psi}$ ist demnach

$$\langle A\rangle_{\underset{\sim}{\psi}} = \int \lambda \, d\mathbb{P}^A_{\underset{\sim}{\psi}}(\lambda) = \int \lambda \, dE^A_{\psi,\psi}(\lambda) = (\psi, A\psi) \tag{17.2}$$

(Dieser existiert natürlich nur für $\psi \in \mathcal{D}(A)$.)

Die charakteristische Funktion der Verteilung $\mathbb{P}^A_{\underset{\sim}{\psi}}$ ist

$$\varphi^A_{\underset{\sim}{\psi}}(t) = \int e^{it\lambda} \, d\mathbb{P}^A_{\underset{\sim}{\psi}}(\lambda) = \int e^{it\lambda} \, dE^A_{\psi,\psi}(\lambda) = (\psi, e^{itA}\psi) \tag{17.3}$$

<u>Bemerkungen</u>: Der Träger des Spektralmasses E^A ist nach (16.3) gleich dem Spektrum $\sigma(A)$ von A. Der Träger des W-Masses $\mathbb{P}^A_{\underset{\sim}{\psi}}$ ist offensichtlich in $\sigma(A)$ enthalten, d.h. $\mathbb{P}^A_{\underset{\sim}{\psi}}(\Delta) = 0$ für $\Delta \cap \sigma(A) = \emptyset$. In diesem Sinne nimmt die Observable A nur Werte in $\sigma(A)$ an.

(iv) Mit A ist auch $f(A)$, für jede Borel-messbare reelle Funktion f, eine Observable. Die Observablen sollen die Zustände separieren: Falls $\underset{\sim}{\varphi} \neq \underset{\sim}{\psi}$, dann existiert eine Observable A, sodass $\langle A \rangle_{\underset{\sim}{\varphi}} \neq \langle A \rangle_{\underset{\sim}{\psi}}$

<u>Bemerkungen:</u> Ist wieder E^A das Spektralmass zu A, so ist nach dem Satz 14.4 das Spektralmass $E^{f(A)}$ von $f(A)$ gegeben durch

$$E^{f(A)}(\Delta) = E^A(f^{-1}(\Delta)) \tag{17.4}$$

Deshalb ist das W-Mass $\mathbb{P}_{\underset{\sim}{\psi}}^{f(A)}$ das Bildmass von $\mathbb{P}_{\underset{\sim}{\psi}}^{A}$ unter der Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h.,

$$\mathbb{P}_{\underset{\sim}{\psi}}^{f(A)}(\Delta) = \mathbb{P}_{\underset{\sim}{\psi}}^{A}(f^{-1}(\Delta)) \tag{17.5}$$

Da mit A auch $1_\Delta(A)$ (1_Δ: Indikatorfunktion) ~~auch~~ eine Observable ist und $1_\Delta(A) = E^A(\Delta)$ ist, sind auch alle $E^A(\Delta)$ Observablen. Als Projektoren haben die $E^A(\Delta)$ nur die Eigenwerte 0 und 1. Diese entsprechen "Ja–Nein Aussagen". Die Spektralzerlegung einer Observablen A kann man als eine Zerlegung nach solchen Ja–Nein Aussagen auffassen. Genau diese Zerlegung nimmt ein Experimentalphysiker (approximativ) vor, wenn er eine Observable etwa mit einem Zählersystem bestimmt.

§18. Kompatible Observablen

Die <u>Unschärfe</u> einer Observablen A in einem Zustand $\underset{\sim}{\psi}$ ist die Streuung der W-Verteilung $\mathbb{P}_{\underset{\sim}{\psi}}^{A}$, d.h.,

$$(\Delta A)^2_{\underset{\sim}{\psi}} = \int \lambda^2 dP^A_{\underset{\sim}{\psi}}(\lambda) - \left(\int \lambda \, dP^A_{\underset{\sim}{\psi}}(\lambda) \right)^2$$

$$= \int \lambda^2 dE^A_{\psi,\psi} - \left(\int \lambda \, dE^A_{\psi,\psi} \right)^2 \quad ; \quad (\psi \in \underset{\sim}{\psi}). \qquad (18.1)$$

Für $\psi \in \mathcal{D}(A)$ können wir dies nach (14.7) und (14.8) wie folgt schreiben:

$$(\Delta A)^2_{\underset{\sim}{\psi}} = \| A\psi \|^2 - (\psi, A\psi)^2$$

$$= \| [A - (\psi, A\psi)] \psi \|^2 \qquad (18.2)$$

d.h.,

$$(\Delta A)_{\underset{\sim}{\psi}} = \| [A - (\psi, A\psi)] \psi \| \qquad (18.3)$$

<u>Satz 18.1</u> (allgemeine Unschärferelation). Für zwei Observablen A und B gilt die Unschärferelation

$$\boxed{(\Delta A)_{\underset{\sim}{\psi}} (\Delta B)_{\underset{\sim}{\psi}} \geq \frac{1}{2} \left| \Phi_{A,B}(\psi, \psi) \right|} \quad , \quad \psi \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) \qquad (18.4)$$

Dabei ist $\Phi_{A,B}$ die Bilinearform auf $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$, definiert durch

$$\Phi_{A,B}(\varphi, \psi) = i(A\varphi, B\psi) - i(B\varphi, A\psi) \qquad (18.5)$$

<u>Beweis:</u> Sei $\hat{A} = A - \langle A \rangle$ $(\langle A \rangle = (\psi, A\psi))$, $\hat{B} = B - \langle B \rangle$ und $\psi \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$. Dann ist nach (18.3) und (18.5) für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \| (\hat{A} + i\alpha \hat{B}) \psi \|^2 = (\Delta A)^2_{\underset{\sim}{\psi}} + \alpha^2 (\Delta B)^2_{\underset{\sim}{\psi}} + \alpha \, \Phi_{A,B}(\psi, \psi)$$

Die Diskriminante dieser quadratischen Form muss deshalb ≤ 0 sein; diese Bedingung ist aber äquivalent zu (18.4). $\square$

Sind speziell A und B zwei beschränkte selbstadjungierte Operatoren, so können die Unschärfen von A und B nur dann gleichzeitig beliebig klein werden, wenn A und B kommutieren.
Wir sagen deshalb, dass zwei (oder mehrere) Observablen <u>kompatibel</u> sind, wenn sie im Sinne der folgenden Definition miteinander kommutieren.

<u>Definition 18.2.</u> Zwei selbstadjungierte Operatoren A und B <u>kommutieren</u>, falls alle Projektionen der zugeordneten projektionswertigen Massen E^A und E^B miteinander vertauschen.

Nach Satz 11.5 vertauschen A und B genau dann, wenn E^A mit allen $\hat{E}^B(g)$, $g \in L^\infty(E^B)$ vertauscht und dies ist – nach dem gleichen Satz – genau dann der Fall, wenn alle $\hat{E}^A(f)$ mit allen $\hat{E}^B(g)$ ($f \in L^\infty(E^A)$, $g \in L^\infty(E^B)$) vertauschen. Diese Aussage ist im folgenden Satz enthalten:

<u>Satz 18.3.</u> Die folgenden Aussagen für zwei selbstadjungierte Operatoren A und B sind äquivalent:

(i) $[e^{itA}, E^B(\Delta)] = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle Borelmengen Δ.

(ii) $[e^{itA}, e^{isB}] = 0$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$

(iii) $[E^A(\Delta), E^B(\Delta')] = 0$ für alle $\Delta, \Delta' \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

(iv) $[f(A), g(B)] = 0$ für alle $f \in L^\infty(E^A)$, $g \in L^\infty(E^B)$

<u>Beweis:</u> Aus (i) folgt ($U(t) := e^{itA}$) :

$$e^{itA} e^{isB} e^{-itA} = \int e^{is\lambda} d(U(t) E^B(\lambda) U^{-1}(t))$$

$$= \int e^{is\lambda} dE^B(\lambda) = e^{isB}$$

d.h. (ii). Sei umgekehrt (ii) erfüllt. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt mit dem Satz von Fubini

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) (e^{itA} \varphi, \psi) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda} d(E^A(\lambda)\varphi, \psi) \right) dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda) d(E^A(\lambda)\varphi, \psi) = (\varphi, \hat{f}(A)\psi).$$

Benutzen wir also (ii) und nochmals den Satz von Fubini, so ergibt sich für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$(\varphi, \hat{f}(A) \hat{g}(B) \psi) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t) g(s) (\varphi, e^{-itA} e^{-isB} \psi) dt\, ds$$

$$= (\varphi, \hat{g}(B) \hat{f}(A) \psi).$$

d.h.,

$$[\hat{f}(A), \hat{g}(B)] = 0 \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Da die Fourier-Transformation $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ <u>auf</u> $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ abbildet, folgt $[f(A), g(B)] = 0$ für alle $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Nun kann aber die Indikatorfunktion 1_Δ des Intervalls $\Delta = (a, b)$ als punktweiser Limes einer gleichmässig beschränkten Folge f_n von Funktionen in $\mathcal{S}$ dargestellt werden. Nach Satz 11.5 konvergiert dann die Folge $f_n(A)$ stark gegen $1_\Delta(A) = E^A(\Delta)$. Deshalb gilt $[E^A(\Delta), g(B)] = 0$ für alle $g \in \mathcal{S}$ und eine Wiederholung des Arguments für B zeigt, dass aus (ii) die Aussage (iii) folgt. Die Äquivalenz von (iii) und (iv) wurde bereits gezeigt. Aus (iv) folgt aber, mit dem gleichen Argument wie oben, natürlich auch (i).

□

Nun betrachten wir eine endliche Anzahl von kompatiblen Observablen $A_1, \dots, A_n$ mit den zugehörigen projektionswertigen Massen $E^{A_1}, \dots, E^{A_n}$. Nach Definition vertauschen diese miteinander. Deshalb gibt es ein eindeutiges projektionswertiges Mass $E^{A_1,\dots,A_n}$ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ mit der Eigenschaft

$$E^{A_1,\dots,A_n}(\Delta_1 \times \dots \times \Delta_n) = E^{A_1}(\Delta_1) \cdot \dots \cdot E^{A_n}(\Delta_n) \qquad (\Delta_i \in \mathcal{B}) \tag{18.6}$$

Dies kann man durch eine Modifikation der Konstruktion von Produktmassen, oder auch auf folgende Weise einsehen. Sei $U_t^{(k)} = e^{itA_k}$, $U_{(t_1,\dots,t_n)} = U_{t_1}^{(1)} U_{t_2}^{(2)} \dots U_{t_n}^{n}$. Nach Satz 18.3 vertauschen die 1-parametrigen Gruppen $U_t^{(k)}$ untereinander und $(t_1,\dots,t_n) \longmapsto U_{(t_1,\dots,t_n)}$ ist eine stark stetige unitäre Darstellung von $\mathbb{R}^n$ (s. Satz 15.4). Nach dem Satz 11.7 hat $U_{(t_1,\dots,t_n)}$ eine eindeutige Spektralzerlegung

$$U_{(t_1,\dots,t_n)} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sum_{k=1}^{n} t_k \lambda_k} \, dE^{A_1,\dots,A_n}_{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)} \tag{18.7}$$

Da $U_t^{(k)} = U_{(0,\dots,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{k-te Stelle}}}{t},0,\dots,0)}$, ist A_k der infinitesimale Generator von ~~,~~ d.h.,

$$A_k = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_k \, dE^{A_1,\dots,A_n}_{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)} \tag{18.8}$$

(vgl. Proposition 15.1). Das projektionswertige Mass $E^{A_1,\dots,A_n}$ erfüllt (18.6). Dies sieht man wie folgt. Durch

$$\Delta \longmapsto E^{A_1,\dots,A_n}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{k-te Stelle}}}{\Delta} \times \mathbb{R} \dots \times \mathbb{R}) \tag{18.9}$$

wird offensichtlich ein projektionswertiges Mass auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ definiert und nach (18.8) stimmt dieses mit E^{A_k} überein (da E^{A_k} durch A_k eindeutig bestimmt ist).

Nun ist aber

$$\Delta_1 \times \Delta_2 \times \cdots \times \Delta_n = \bigcap_{k=1}^{n} (\mathbb{R} \times \cdots \times \Delta_k \times \mathbb{R} \cdots \times \mathbb{R})$$

Mit der Eigenschaft (iii) auf S. 77 für $E^{A_1, \dots, A_n}$ folgt deshalb die Behauptung (18.6). Die Eindeutigkeit von $E^{A_1, \dots, A_n}$ ist offensichtlich, da $\mathcal{B}^n$ von den Mengen $\{\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n \mid \Delta_k \in \mathcal{B}\}$ erzeugt wird*).

Das Born'sche Postulat (iii) auf S. 131 kann nun wie folgt verallgemeinert werden: Sind $A_1, \dots, A_n$ kompatible Observable, so ist die Wahrscheinlichkeit, $\mathbb{P}_{\psi}^{A_1, \dots, A_n}(\Delta)$, bei der gleichzeitigen Messung von $A_1, \dots, A_n$ im Zustand ψ ~~[illegible]~~ Werte $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Delta \in \mathcal{B}^n$ zu finden:

$$\mathbb{P}_{\tilde{\psi}}^{A_1, \dots, A_n}(\Delta) = E_{\psi,\psi}^{A_1, \dots, A_n}(\Delta) = (\psi, E^{A_1, \dots A_n}(\Delta)\psi). \tag{18.10}$$

$\mathbb{P}_{\tilde{\psi}}^{A_1, \dots, A_n}$ ist die gemeinsame Verteilung der kompatiblen Observablen $A_1, \dots, A_n$. Nach dem Satz 15.10 können wir kompatible Observablen in einem Raum $\bigoplus_{m \in I} L^2(\mathbb{R}^n, \mu_m)$ wie folgt darstellen:

$$A_k: \quad \{\psi_m(x)\}_{m \in I} \longmapsto \{x_k \psi_m(x)\}_{m \in I} \tag{18.11}$$

Schreiben wir $\psi(x; m)$ für $\psi_m(x)$, so gilt

---

*) Da für jedes $\psi \in \mathcal{H}$ $E_{\psi,\psi}^{A_1, \dots, A_n}$ ein endliches Mass ist, folgt die Eindeutigkeit von $E^{A_1, \dots A_n}$ aus der entsprechenden Eindeutigkeitsaussage für gewöhnliche Masse.

$$(\psi,\varphi) = \sum_m \int d\mu_m \, \overline{\psi(x;m)}\, \varphi(x;m) \qquad (18.12)$$

$$(\psi, A_k\varphi) = \sum_m \int d\mu_m \, \overline{\psi(x;m)}\, x_k\, \varphi(x;m) \qquad (18.13)$$

Dies sind Dirac ähnliche Formeln, nur treten jetzt an Stelle der formalen Summen Integrale über Masse μ_m auf (welche von der Form $\mu_m = E^{A_1,\dots,A_n}_{\psi_m,\psi_m}$ sind).

Jeder messbaren Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ entspricht nach Satz 14.2 ein abgeschlossener Operator $\hat{E}^{A_1,\dots,A_n}(f)$ mit dichtem Definitionsbereich $\mathcal{D}_f$. Wir schreiben dafür auch $f(A_1,\dots,A_n)$. Nach Satz 14.2 gilt insbesondere:

$$f(A_1,\dots,A_n)^* = \overline{f}(A_1,\dots,A_n) \qquad (18.14)$$

$$f(A_1,\dots,A_n)\, g(A_1,\dots,A_n) \subseteq (f\cdot g)(A_1,\dots,A_n)$$

In der Darstellung (18.11) gilt nach Satz 15.10:

$$\big(f(A_1,\dots,A_n)\,\psi\big)(x;m) = f(x_1,\dots,x_n)\,\psi(x;m) \qquad (18.15)$$

§19. Vollständige Systeme von kompatiblen Observablen

Wenn in der Darstellung (18.11) die Indexmenge I nur aus einem Element besteht, so sprechen wir von einem vollständigen System kompatibler Observablen.

__Definition 19.1__. Die selbstadjungierten Operatoren $A_1,\dots,A_n$ in $\mathcal{H}$ bilden ein __vollständiges System__ falls folgendes gilt: Es existiert eine unitäre Transformation $U: \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R}^n,\mu)$, μ ein Borel-Mass mit $\operatorname{supp}\mu = \sigma(A_1)\times\cdots\times\sigma(A_n)$, sodass $A_k' = UA_kU^{-1}$ $(k=1,\dots,n)$ die folgende Form hat:

$$(A_k' \psi)(x) = x_k \psi(x) \quad , \quad \psi \in \mathcal{D}(A_k') \tag{19.1}$$

$$\mathcal{D}(A_k') = \{ \psi \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu) \mid \int_{\mathbb{R}^n} x_k^2 |\psi(x)|^2 d\mu(x) < \infty \} . \tag{19.2}$$

Dies ist natürlich nur möglich, wenn $A_1, .., A_n$ vertauschbar sind. Sei $E^{A_1,..,A_n}$ das zugehörige Spektralmass. Nach dem Beweis von Satz 15.10 bilden $A_1, ..., A_n$ ein vollständiges System, falls $\mathcal{H}$ einen Vektor ψ_0 enthält, welcher bezüglich $E^{A_1,..,A_n}$ <u>zyklisch</u> ist, d.h., für den gilt

$$\overline{L\{ E^{A_1,..,A_n}(\Delta)\psi_0 : \Delta \in \mathcal{B}^n \}} = \mathcal{H} \tag{19.3}$$

Als Mass μ in der Definition 19.1 kann man dann das W-Mass $E^{A_1,..,A_n}_{\psi_0,\psi_0}$ wählen.

Umgekehrt folgt aber aus der Vollständigkeit von $A_1, .., A_n$, dass ein separabler (!) Hilbertraum einen zyklischen Vektor ψ_0 enthält. Um dies einzusehen, benötigen wir zwei Lemmatas.

<u>Lemma 19.2.</u> Ist $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ separabel, dann ist das Mass μ σ-endlich.

<u>Beweis:</u> Wir nehmen das Gegenteil an. Dann gibt es eine überabzählbare Familie $\mathcal{F}$ von paarweise disjunkten messbaren Mengen mit nichtverschwindendem endlichem Mass. Die Funktionen

$$e_S(x) = \frac{1}{\sqrt{\mu(S)}} 1_S \quad , \quad S \in \mathcal{F}$$

bilden deshalb eine überabzählbare Familie von orthonormierten Vektoren. Widerspruch! $\square$

Lemma 19.3. Sei μ ein σ-endliches Mass von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ und $h(x)$ eine stetige positive Funktion in $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$. Dann ist

$$f_0(x) = e^{-\alpha \sum_{i=1}^{n} |x_i|} h(x) \quad , \alpha > 0$$

in $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ und die Familie der Funktionen $p(x) \cdot f_0(x)$ (p: Polynom) ist dicht in $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$.

Beweis: Siehe E. Prugovečki, Quantum Mechanics in Hilbert Space, Academic Press 1971, p. 318.

Korollar 19.4. Mit denselben Voraussetzungen und Bezeichnungen ist f_0 zyklisch bezüglich E, definiert durch (siehe das Beispiel auf S. 79):

$$E(\Delta) f = 1_\Delta f \quad , \text{ für } f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu) \, , \Delta \in \mathcal{B}^n$$

Beweis: Wenn dies nicht der Fall wäre, so würde ein $g \neq 0$ in $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ existieren mit

$$(g, E(\Delta) f_0) = 0 \quad \text{für alle } \Delta \in \mathcal{B}^n$$

Dann wäre aber

$$(g, p f_0) = (g, \hat{E}(p) f_0) = 0$$

für alle Polynome p. Dies ist nach Lemma 19.3 ein Widerspruch. ∎

Nicht ganz unerwartet gilt der folgende

Satz 19.5. Sei $A_1, \ldots, A_n$ ein vollständiges System von kompatiblen Observablen in einem separablen Hilbertraum. Der beschränkte Operator A vertausche mit $A_1, \ldots, A_n$ (d.h. mit den E^{A_k}). Dann ist A eine Funktion von $A_1, \ldots, A_n$.

Beweis: Nach Korollar 19.4 existiert ein zyklischer Vektor ψ_0 und deshalb gibt es eine Folge $\{\psi_m\}$ der Form

$$\varphi_m = \sum_k a_m^{(k)} E^{A_1,\dots,A_n}(\Delta_m^{(k)})\,\psi_0 \qquad \text{(endliche Summe!)}$$

welche stark gegen $A\psi_0$ konvergiert. Sei

$$f_m = \sum_k a_m^{(k)}\, 1_{\Delta_m^{(k)}}$$

dann ist $\varphi_m = \hat{E}^{A_1,\dots,A_n}(f_m)\psi_0$ und nach (11.15)

$$\|\varphi_m - \varphi_\ell\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f_m - f_\ell|^2\, dE^{A_1,\dots,A_n}_{\psi_0,\psi_0}$$

Deshalb ist $\{f_m\}$ eine Cauchyfolge in $L^2(\mathbb{R}^n, E^{A_1,\dots,A_n}_{\psi_0,\psi_0})$ und konvergiert deshalb gegen ein Element f in diesem Raum. Offenbar gilt $\hat{E}^{A_1,\dots,A_n}(f_m)\psi_0 \longrightarrow \hat{E}^{A_1,\dots,A_n}(f)\psi_0$, d.h.

$$\hat{E}^{A_1,\dots,A_n}(f)\psi_0 = A\psi_0$$

Da A mit allen E^{A_k} vertauscht, kommutiert A auch mit allen Operatoren der Form

$$D = \sum_{k=1}^m a_k E^{A_1,\dots,A_n}(\Delta_k)$$

Man sieht leicht, dass $D\psi_0 \in \mathcal{D}(\hat{E}^{A_1,\dots,A_n}(f))$ und damit gilt

$$AD\psi_0 = DA\psi_0 = D\hat{E}^{A_1,\dots,A_n}(f)\psi_0 = \hat{E}^{A_1,\dots,A_n}(f)D\psi_0$$

d.h., A und $\hat{E}^{A_1,\dots,A_n}(f) = f(A_1,\dots,A_n)$ stimmen auf allen Vektoren $D\psi_0$, also auf einer dichten Menge überein. Nun ist aber A beschränkt und $f(A_1,\dots,A_n)$ abgeschlossen (Satz 14.2). Deshalb ist

$$A = f(A_1,\dots,A_n) \qquad \square$$

* * *

§20. Verallgemeinerung des Zustandsbegriffs

Für viele Zwecke (insbesondere die Quantenstatistik) erweist sich eine Verallgemeinerung des Zustandsbegriffs als sehr nützlich. Wir betrachten eine Folge von (reinen) Zuständen $\underset{\sim}{\varphi}_k$ mit den zugehörigen 1-dimensionalen Projektoren $P_{\underset{\sim}{\varphi}_k}$. Die $\varphi_k \in \underset{\sim}{\varphi}_k$ mögen ein orthonormiertes System bilden. Es kann nun sein, dass die Information über ein physikalisches System insofern unvollständig ist, als wir nur wissen, das sich das System mit den Wahrscheinlichkeiten p_k in den reinen Zuständen $\underset{\sim}{\varphi}_k$ befindet. Dabei sei

$$0 \leq p_k \leq 1 \quad , \quad \sum_k p_k = 1 \tag{20.1}$$

Der zugehörige <u>Dichteoperator</u> ist

$$\varrho = \sum_k p_k P_{\underset{\sim}{\varphi}_k} \tag{20.2}$$

Der Erwartungswert einer Observablen A im <u>verallgemeinerten Zustand</u> ist (A sei der Einfachheit halber beschränkt):

$$\langle A \rangle_\varrho = \sum_k p_k \langle A \rangle_{\varphi_k} = \sum_k p_k (\varphi_k, A\varphi_k)$$

$$= \sum_k p_k \, Sp\,(A P_{\varphi_k}) \tag{20.3}$$

Aus (20.1) folgt, dass <u>ϱ in der Spurklasse</u> ist und dies gilt auch für $A\varrho$, wenn A beschränkt ist (Korollar 9.7). Nach (20.3) gilt

$$\boxed{\langle A \rangle_\varrho = Sp\, A\varrho \underset{\uparrow \atop (9.4)}{=} Sp\, \varrho A} \tag{20.4}$$

Ordnen wir insbesondere jedem Projektor P die Zahl $\mu(P) = Sp\, P\varrho$ zu, so gilt

(i) $\mu(P) \geqslant 0$ für jedes P

(ii) $\mu(\mathbb{1}) = 1$

(iii) $\mu(P_1+P_2) = \mu(P_1)+\mu(P_2)$ falls $P_1 \cdot P_2 = 0$
(P_1, P_2 kompatibel)

Eine Abbildung $\mu : P \longmapsto \mu(P)$ welche diese drei Eigenschaften erfüllt, nennt man ein positives normiertes Mass auf dem Hilbertraum. Nun gilt der tiefliegende

<u>Satz 20.1</u> (Gleason). Jedes positive normierte Mass μ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit $\dim \mathcal{H} \geqslant 3$ ist von der Form

$$\mu(P) = \operatorname{Sp} \varrho P \tag{20.5}$$

wobei ϱ ein Dichteoperator der Form (20.2), (20.1) ist.

<u>Beweis:</u> Siehe R. Jost, Studies in Mathematical Physics, Princeton Univ. Press, 1976, Seite 327.

Der Satz von Gleason zeigt, dass wir mit Recht die Dichteoperatoren als die <u>Zustände</u> eines Systems betrachten. Diese kann man auch so charakterisieren:

$$\varrho \text{ Dichteoperator} \iff \varrho^* = \varrho,\ \varrho \geqslant 0,\ \varrho \in \text{Spurklasse},$$
$$\operatorname{Sp} \varrho = 1$$

(vgl. §§ 8,9). Offensichtlich ist die Menge der statistischen Operatoren konvex. Die reinen Zustände entsprechen den Extremalpunkten dieser konvexen Menge. Falls ϱ kein reiner Zustand ist spricht man auch von einem <u>Gemisch</u>. Einen reinen Zustand kann man, wie leicht zu sehen ist, durch die Gleichung

$$\varrho^2 = \varrho \tag{20.6}$$

charakterisieren.

§21. Automorphismen

Die folgende Definition ist natürlich.

Definition 21.1. Unter einem Automorphismus verstehen wir eine Abbildung α, welche jedem Zustand $\underset{\sim}{\psi}$ einen Zustand $\alpha(\underset{\sim}{\psi})$ und jeder Observablen A eine Observable $\alpha(A)$ so zuordnet, dass gilt:

(i) $\underset{\sim}{\psi} \longmapsto \alpha(\underset{\sim}{\psi})$ ist surjektiv

(ii) $\mathbb{P}^{\alpha(A)}_{\alpha(\underset{\sim}{\psi})} = \mathbb{P}^{A}_{\underset{\sim}{\psi}}$ (Invarianz der Verteilungen)

Wir definieren

$$(\underset{\sim}{\varphi}, \underset{\sim}{\psi}) := |(\varphi, \psi)| \ , \quad \varphi \in \underset{\sim}{\varphi}, \psi \in \underset{\sim}{\psi} \tag{21.1}$$

Proposition 21.2. Ist α ein Automorphismus so gilt

$$(\alpha(\underset{\sim}{\varphi}), \alpha(\underset{\sim}{\psi})) = (\underset{\sim}{\varphi}, \underset{\sim}{\psi}) \tag{21.2}$$

Eine Bijektion der Zustände, welche (21.2) erfüllt, nennen wir einen Wigner-Automorphismus.

Zum Beweis von Proposition 21.2 benötigen wir zunächst das

Lemma 21.3. Sei α ein Automorphismus. Dann gilt für jede reelle Borelfunktion f

$$\alpha(f(A)) = f(\alpha(A)) \tag{21.3}$$

Beweis: Es gilt

$$\mathbb{P}^{\alpha(f(A))}_{\alpha(\underset{\sim}{\psi})}(\Delta) = \mathbb{P}^{f(A)}_{\underset{\sim}{\psi}}(\Delta) \underset{(17.5)}{=} \mathbb{P}^{A}_{\underset{\sim}{\psi}}(f^{-1}(\Delta)) = \mathbb{P}^{\alpha(A)}_{\alpha(\underset{\sim}{\psi})}(f^{-1}(\Delta)) \underset{(17.5)}{=} \mathbb{P}^{f(\alpha(A))}_{\alpha(\underset{\sim}{\psi})}(\Delta)$$

d.h. (vgl. (17.1)),

$$E^{f(\alpha(A))}_{\psi,\psi} = E^{\alpha(f(A))}_{\psi,\psi} \quad \text{für alle } \psi.$$

Deshalb stimmen die Spektralmasse $E^{f(\alpha(A))}$ und $E^{\alpha(f(A))}$ und folglich auch die Operatoren $f(\alpha(A))$ und $\alpha(f(A))$ miteinander überein.

$\square$

<u>Korollar 21.4.</u> Für einen Automorphismus α und reelle beschränkte Borel-funktionen f_1, f_2 gilt:

$$\alpha(f_1(A)+f_2(A)) = f_1(\alpha(A)) + f_2(\alpha(A))$$
$$\alpha(f_1(A)f_2(A)) = f_1(\alpha(A))f_2(\alpha(A)) \tag{21.4}$$

<u>Beweis:</u> Es ist (mit Satz 11.5)

$$\alpha(f_1(A)+f_2(A)) = \alpha((f_1+f_2)(A)) = (f_1+f_2)(\alpha(A))$$
$$= f_1(\alpha(A)) + f_2(\alpha(A))$$

Ebenso beweist man die 2. Gl. von (21.4). $\square$

Insbesondere folgt für einen Projektor P (wegen $P^2 = P$):
$\alpha(P) = \alpha(PP) = \alpha(P)\alpha(P)$; also ist $\alpha(P)$ wieder ein Projektor

Jedem Einheitsstrahl $\underset{\sim}{\varphi}$ ist eindeutig der Projektor $P_{\underset{\sim}{\varphi}}$ auf den von $\underset{\sim}{\varphi}$ erzeugten 1-dimensionalen Unterraum zugeordnet:

$$P_{\underset{\sim}{\varphi}}\psi = (\varphi,\psi)\varphi \quad , \varphi \in \underset{\sim}{\varphi} \tag{21.5}$$

Nun gilt das

<u>Lemma 21.5.</u> Es sei α ein Automorphismus. Dann gilt für jeden Einheitsstrahl (Zustand) $\underset{\sim}{\varphi}$

$$\alpha(P_{\underset{\sim}{\varphi}}) = P_{\alpha(\underset{\sim}{\varphi})} \tag{21.6}$$

<u>Beweis</u>: Sei $\psi \in \underset{\sim}{\psi}$ und $\psi' \in \alpha(\underset{\sim}{\psi})$. Aus der Invarianz der Erwartungswerte unter α folgt insbesondere

$$(\psi', \alpha(P_{\underset{\sim}{\varphi}})\psi') = (\psi, P_{\underset{\sim}{\varphi}}\psi) \qquad (*)$$

Speziell für $\underset{\sim}{\psi} = \underset{\sim}{\varphi}$ folgt daraus

$$(\varphi', \alpha(P_{\underset{\sim}{\varphi}})\varphi') = 1 \qquad (\varphi' \in \alpha(\underset{\sim}{\varphi}))$$

und deshalb $\alpha(P_{\underset{\sim}{\varphi}})\varphi' = \varphi'$, d.h., φ' ist im Wertebereich von $\alpha(P_{\underset{\sim}{\varphi}})$. Da andererseits φ' nach Definition im Wertebereich von $P_{\alpha(\underset{\sim}{\varphi})}$ liegt, gilt

$$\alpha(P_{\underset{\sim}{\varphi}}) = P_{\alpha(\underset{\sim}{\varphi})} + Q \qquad (**)$$

mit einem Projektor Q, welcher orthogonal zu $P_{\alpha(\underset{\sim}{\varphi})}$ ist: $QP_{\alpha(\underset{\sim}{\varphi})} = 0$. Für $\underset{\sim}{\psi} \perp \underset{\sim}{\varphi}$ folgt aber aus $(*)$: $(\psi', \alpha(P_{\underset{\sim}{\varphi}})\psi') = 0$, d.h.,

$$(\psi', P_{\alpha(\underset{\sim}{\varphi})}\psi') + (\psi', Q\psi') = |(\psi', \varphi')|^2 + \|Q\psi'\|^2 = 0,$$

also $(\psi', \varphi') = 0$ und $Q\psi' = 0$. Die erste Gleichung besagt: Aus $\underset{\sim}{\psi} \perp \underset{\sim}{\varphi}$ folgt $\alpha(\underset{\sim}{\psi}) \perp \alpha(\underset{\sim}{\varphi})$. Deshalb folgt aus der 2. Gleichung $Q = 0$ <u>oder</u> $Q = P_{\alpha(\underset{\sim}{\varphi})}$. Die 2. Möglichkeit ist aber ausgeschlossen $(QP_{\alpha(\underset{\sim}{\varphi})} = 0)$, d.h., es ist nach $(**)$ $\alpha(P_{\underset{\sim}{\varphi}}) = P_{\alpha(\underset{\sim}{\varphi})}$. □

<u>Beweis von Proposition 21.2</u>: Aus (21.6) und $(*)$ folgt
$(\psi', P_{\alpha(\underset{\sim}{\varphi})}\psi') = (\psi, P_{\underset{\sim}{\varphi}}\psi)$, d.h. $(\alpha(\underset{\sim}{\psi}), \alpha(\underset{\sim}{\varphi})) = (\underset{\sim}{\psi}, \underset{\sim}{\varphi})$. □

Ein Automorphismus im Sinne der Definition 21.1 induziert also einen Wigner-Automorphismus der Einheitsstrahlen (des komplexen projektiven Raumes $P(\mathcal{H})$ zu $\mathcal{H}$).

<u>Beispiele für Wigner-Automorphismen</u>:

a) Es sei U ein unitärer Operator in $\mathcal{H}$. Wir setzen

$$\underset{\sim}{U} : \underset{\sim}{\varphi} \longmapsto \underset{\sim}{U\varphi} \quad , \quad \varphi \in \underset{\sim}{\varphi} \tag{21.7}$$

Die Abbildung $\underset{\sim}{\varphi} \longmapsto \underset{\sim}{U}\underset{\sim}{\varphi}$ ist offensichtlich ein Wigner-Automorphismus.

b) Sei jetzt A ein antiunitärer Operator in $\mathcal{H}$, d.h. eine Bijektion von $\mathcal{H}$ mit

$$\text{(i)} \quad A(a\varphi + b\psi) = \bar{a}A\varphi + \bar{b}A\psi \qquad \text{(antilinear)}$$

$$\text{(ii)} \quad (A\varphi, A\psi) = \overline{(\varphi,\psi)} \tag{21.8}$$

Wieder setzen wir

$$\underset{\sim}{A} : \underset{\sim}{\varphi} \longrightarrow \underset{\sim}{A\varphi} \quad , \quad \varphi \in \underset{\sim}{\varphi} \tag{21.9}$$

Auch $\underset{\sim}{A}$ ist ein Wigner-Automorphismus.

Ein wichtiger Satz von Wigner besagt, dass man auf diese Weise alle Wigner-Automorphismen erhält:

<u>Satz 21.6 (Wigner)</u>. Jeder Wigner-Automorphismus ist von der Form

$$\alpha(\underset{\sim}{\psi}) = \underset{\sim}{U\psi} \quad , \quad \psi \in \underset{\sim}{\psi} \tag{21.10}$$

wo U entweder eine unitäre oder eine antiunitäre Transformation ist, welche bis auf eine Phase bestimmt ist, d.h., falls $\alpha(\underset{\sim}{\psi}) = \underset{\sim}{U'\psi}$, dann ist $U' = e^{i\theta}U$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Der Beweis dieses Theorems wird auf den Anhang A verschoben.

Wir betrachten nun wieder einen Automorphismus α. Nach Proposition 21.2 und dem Satz von Wigner existiert ein unitärer, bzw. antiunitärer Operator U, sodass (21.10) gilt. Wir behaupten, dass folgendes gilt

$$\alpha(A) = UAU^{-1} \quad \text{für alle Observablen } A$$

<u>Beweis:</u> Aus

$$\mathbb{P}^{\alpha(A)}_{\alpha(\underset{\sim}{\varphi})}(\Delta) = (U\varphi, E^{\alpha(A)}(\Delta)U\varphi) = (\varphi, U^{-1}E^{\alpha(A)}U\varphi) =$$

$$= \mathbb{P}^{A}_{\underset{\sim}{\varphi}}(\Delta) = (\varphi, E^{A}(\Delta)\varphi)$$

folgt

$$U^{-1}E^{\alpha(A)}_{(\Delta)}U = E^{A}(\Delta)$$

oder

$$E^{\alpha(A)}(\Delta) = UE^{A}(\Delta)U^{-1} = E^{UAU^{-1}}(\Delta)$$

d.h., $\alpha(A)$ und UAU^{-1} haben dieselben Spektralmasse. Deshalb sind die Operatoren gleich. $\square$

Zusammenfassend haben wir also

$$\alpha(\underset{\sim}{\varphi}) = \underset{\sim}{U\varphi}\,, \quad \alpha(A) = UAU^{-1} \tag{21.11}$$

wobei U ein, bis auf eine Phase eindeutiger, unitärer oder antiunitärer Operator ist.

* * *

§22. Dynamik, Schrödingergleichung

Wir betrachten ein abgeschlossenes quantenmechanisches System. Die Zeitevolution wird von folgender Form sein: Ist das System zur Zeit $t=0$ im Zustand $\underset{\sim}{\psi}$, so ist der Zustand zur Zeit t,

$$\underset{\sim}{\psi}_t = \alpha_t(\underset{\sim}{\psi}) \qquad (22.1)$$

wobei α_t ein Wigner-Automorphismus ist. Von $t \mapsto \alpha_t$ verlangen wir Messbarkeit, d.h., dass $t \mapsto (\alpha_t(\underset{\sim}{\varphi}), \underset{\sim}{\chi})$ für alle $\underset{\sim}{\varphi}, \underset{\sim}{\chi} \in P(\mathcal{H})$ messbar ist.

Ferner wird $t \mapsto \alpha_t$ die Gruppeneigenschaft

$$\alpha_t \alpha_s = \alpha_{t+s} \qquad (22.2)$$

erfüllen.

Bevor wir ein weiteres wichtiges Resultat formulieren, benötigen wir folgende

<u>Definition 22.1.</u> Eine Abbildung $t \mapsto U(t)$ von $\mathbb{R}$ in die unitären Operatoren von $\mathcal{H}$ ist <u>schwach messbar</u>, falls $t \mapsto (\varphi, U(t)\psi)$ für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ messbar ist.

Der Beweis des folgenden Satzes wird auf den Anhang B verschoben.

<u>Satz 22.2.</u> Ist $t \mapsto \alpha_t$ eine messbare Familie von Wigner-Automorphismen, welche die Gruppeneigenschaft $\alpha_t \alpha_s = \alpha_{t+s}$ erfüllt, dann gibt es eine Familie $U(t)$ von unitären Operatoren, so dass $\alpha_t(\underset{\sim}{\psi}) = \underset{\sim}{U(t)\psi}$ und so, dass $U(t)$ schwach messbar ist.

Die messbare Auswahl $t \mapsto U(t)$ muss

$$U(t)U(s) = \omega(t,s)\,U(t+s) \qquad (22.3)$$

erfüllen, wobei $\omega(t,s) \in \mathbb{C}$ den Betrag 1 hat (auf Grund der Eindeutigkeitsaussage im Wignerschen Satz 21.6. Ausserdem ist $\omega(t,s)$ eine messbare Funktion.

Aus (22.3) entnimmt man, dass ω ein Multiplikator im folgenden Sinne ist:

<u>Definition 22.3.</u> Ein (Borel) <u>Multiplikator</u> auf $\mathbb{R}$ ist eine messbare Abbildung $\omega : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \{\alpha \mid |\alpha| = 1\}$, so dass für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\omega(a,b)\,\omega(a+b,c) = \omega(a,b+c)\,\omega(b,c) \qquad (23.4)$$

ist.

Jeder messbaren Funktion $\lambda : \mathbb{R} \to \{\alpha \mid |\alpha| = 1\}$ kann man in folgender Weise einen Multiplikator $\partial\lambda$ zuordnen:

$$\partial\lambda(a,b) = \lambda(a+b)\,\lambda(a)^{-1}\,\lambda(b)^{-1} \qquad (23.5)$$

(verifiziere (23.4)).

Im Anhang C wird der folgende Satz bewiesen.

<u>Satz 22.4.</u> Jeder Borel Multiplikator auf $\mathbb{R}$ ist von der Form $\omega = \partial\lambda$ für ein λ.

Setzen wir deshalb $\tilde{U}(t) = \lambda(t)\,U(t)$, so ist $\tilde{U}(t)$ schwach messbar und überdies gilt

$$\tilde{U}(t)\,\tilde{U}(s) = \tilde{U}(t+s) \qquad (23.6)$$

d.h., $t \mapsto \tilde{U}(t)$ ist eine schwach messbare unitäre Darstellung von $\mathbb{R}$. Nach Satz 11.8 (von Neumann) ist deshalb $t \mapsto \tilde{U}(t)$ sogar stark stetig. Benutzen wir jetzt noch den Satz von Stone, so ergibt sich der zentrale

<u>Satz 22.5.</u> Sei $t \mapsto \alpha_t$ eine Abbildung von $\mathbb{R}$ in die

Wigner-Automorphismen welche messbar ist und $\alpha_t \alpha_s = \alpha_{t+s}$ erfüllt. Dann existiert ein selbstadjungierter Operator H, welcher bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist, so dass

$$\alpha_t(\underset{\sim}{\psi}) = \underset{\smile}{e^{-iHt}\psi} \tag{23.7}$$

Physikalisch ist H der Hamilton-Operator.
Für geeignete Repräsentanten in (22.1) ist also

$$\psi_t = e^{-iHt}\psi \tag{23.8}$$

Falls $\psi \in \mathcal{D}(H)$ dann gilt (s. Satz 15.4):

$$\boxed{i\,\frac{\partial \psi_t}{\partial t} = H\,\psi_t}$$

Dies ist die Schrödinger-Gleichung für die dynamische Entwicklung des Zustandes.

* * *

§ 23. Darstellungen der kanonischen Vertauschungsrelationen

Für N Massenpunkte ist der Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^f)$, $f = 3N$. Die Koordinaten des Konfigurationsraumes $\mathbb{R}^f$ seien $x_1, .., x_f$. Die Positionsoperatoren $(q_1, .., q_f)$ und die Impulsoperatoren $(p_1, .., p_f)$ sind auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^f)$ wesentlich selbstadjungiert und gegeben durch ($\hbar = 1$):

$$(q_k \psi)(x_1, .., x_f) = x_k \psi(x_1, .., x_f)$$
$$(p_k \psi)(x_1, .., x_f) = \frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}(x_1, .., x_f) \qquad (23.1)$$

q_k und p_k lassen $\mathcal{S}(\mathbb{R}^f)$ invariant und darauf gelten die Vertauschungsrelationen

$$[p_k, q_l] = \frac{1}{i}\delta_{kl}, \quad [p_k, p_l] = [q_k, q_l] = 0 \qquad (23.2)$$

Man kann nun fragen, inwieweit die VR (23.2) die Operatoren $\{q_k, p_k\}$ bestimmen. Ist vielleicht jede Darstellung im wesentlichen die <u>Schrödingerdarstellung</u> (23.1). Diese Fragen muss man präzisieren. Wir diskutieren hier eine Formulierung von H. Weyl. Dazu betrachten wir die 1-parametrigen Gruppen ($\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^f$):

$$U(\underline{a}) = e^{i \sum a_k p_k}, \quad V(\underline{b}) = e^{i \sum b_k q_k} \qquad (23.3)$$

<u>Formal</u> erhalten wir aus (23.2) leicht die Multiplikationsregeln (<u>Weyl'schen Relationen</u>):

$$U(\underline{a}_1)\, U(\underline{a}_2) = U(\underline{a}_1 + \underline{a}_2), \quad V(\underline{b}_1)\, V(\underline{b}_2) = V(\underline{b}_1 + \underline{b}_2)$$
$$U(\underline{a})\, V(\underline{b}) = e^{i(\underline{a}, \underline{b})}\, V(\underline{b})\, U(\underline{a}), \quad (\underline{a}, \underline{b}) = \sum a_i b_i \qquad (23.4)$$

Nun gilt der zentrale

Satz 23.1 (von Neumann). Es seien $\underline{a} \mapsto U(\underline{a})$, $\underline{b} \mapsto V(\underline{b})$ stark stetige unitäre Darstellungen von $\mathbb{R}^f$ in einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$, welche die Weylschen Relationen (23.4) erfüllen. Ist diese Darstellung irreduzibel *), so ist sie unitär äquivalent zur Schrödingerdarstellung $\{U_S(\underline{a}), V_S(\underline{b})\}$ in $L^2(\mathbb{R}^f)$, definiert durch

$$
\begin{aligned}
(U_S(\underline{a})\psi)(\underline{x}) &= \psi(\underline{x}+\underline{a}) \\
(V_S(\underline{b})\psi)(\underline{x}) &= e^{i(\underline{b},\underline{x})}\,\psi(\underline{x})
\end{aligned}
\tag{23.5}
$$

Die allgemeine Darstellung lautet (bis auf unitäre Äquivalenz):

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^f) \otimes \mathcal{H}' \quad , \quad \mathcal{H}' : \text{Hilbertraum}$$

$$U(\underline{a}) = U_S(\underline{a}) \otimes 1 \;,\; V(\underline{b}) = V_S(\underline{b}) \otimes 1. \tag{23.6}$$

Bemerkungen:

1) Nichttriviale Faktoren $\mathcal{H}'$ in (23.6) treten bei Teilchen mit inneren Freiheitsgraden auf (Spin, Isospin, etc.)

2) Die Schrödingerdarstellung (23.5) ist irreduzibel (Übung).

3) Der Satz 23.1 lässt sich nicht auf unendlich viele Freiheitsgrade (Feldtheorie) ausdehnen. Tatsächlich gibt es in diesem Fall unendlich viele inäquivalente irreduzible Darstellungen der kanonischen VR.

4) Von Neumann hat den Satz 23.1 erstmals 1931 bewiesen. Inzwischen gibt es auch andere Beweise; siehe, z.B.,

---

*) irreduzibel: Ausser $\{0\}$ und $\mathcal{H}$ gibt es keine Unterräume $\mathfrak{M}$ von $\mathcal{H}$, welche unter $U(\underline{a})$ und $V(\underline{b})$ invariant sind (d.h. $U(\underline{a})\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$, $V(\underline{b})\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$).

HELVETICA PHYSICA ACTA

SOCIETATIS PHYSICAE HELVETICAE
COMMENTARIA PUBLICA

A New Proof of von Neumann's Theorem Concerning the Uniqueness of the Schrödinger Operators

BY N. STRAUMANN

BIRKHÄUSER VERLAG BASEL

SEPARATUM VOLUMEN 40 FASCICULUS 5 1967

Anhang A. Beweis des Satzes von Wigner

In diesem Anhang beweisen wir den Satz 21.6. Zunächst betrachten wir den zweidimensionalen Fall. Die folgenden Matrizen

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

bilden eine Basis des reellen Vektorraumes aller selbstadjungierten 2x2 Matrizen. Sei

$$A = \alpha + \underline{a} \cdot \underline{\sigma} \qquad (\underline{a} \in \mathbb{R}^3) \tag{A.2}$$

Für eine unitäre (antiunitäre) Matrix U gilt

$$U A U^* = \alpha + R(U)\underline{a} \cdot \underline{\sigma}, \tag{A.3}$$

wobei $R(U)$ eine orientierungserhaltende (umkehrende) Isometrie von $\mathbb{R}^3$ ist. Das Bild von R ist die Menge aller Isometrien. Ferner gilt $R(U) = R(U') \Longleftrightarrow U = e^{i\theta} U'$.

Zum Beweis dieser Fakten benutzen wir den bekannten 2:1 Homomorphismus von $SU(2)$ auf $SO(3)$ (siehe, z.B., QM I, §18). Für ein unitäres U ist $U = e^{i\theta}\tilde{U}$, $\tilde{U} \in SU(2)$, wobei $e^{i\theta}$ bis auf ± 1 bestimmt ist. Da $R(U) = R(\tilde{U}) \in SO(3)$, sind die Behauptungen im unitären Fall offensichtlich richtig. Der antiunitäre Fall ergibt sich aus der Bemerkung, dass für die antiunitäre Transformation $U: A \to \bar{A}$ $R(U)$ gleich der Reflexion an der Ebene senkrecht zur 2-Achse ist und eine allgemeine antiunitäre Transformation als Produkt dieser speziellen antiunitären Transformation und einer unitären Matrix dargestellt werden kann.

Nun sind die 1-dimensionalen Projektoren von der Form

$$P(\underline{a}) = \frac{1}{2}(1 + \underline{a} \cdot \underline{\sigma}), \quad |\underline{a}| = 1 \tag{A.4}$$

Ordnen wir jedem Zustand $\underset{\sim}{\varphi}$ den 1-dimensionalen Projektor $P_{\underset{\sim}{\varphi}}$ gemäss (21.5) zu, dann ist (siehe (21.1))

$$(\underset{\sim}{\varphi},\underset{\sim}{\psi}) = Sp(P_{\underset{\sim}{\varphi}}P_{\underset{\sim}{\psi}})^{1/2} \tag{A.5}$$

(Übungsaufgabe).
Wegen

$$2\,Sp\big(P(\underline{a})P(\underline{b})\big) = 1+\underline{a}\cdot\underline{b} \tag{A.6}$$

ist deshalb jedem zweidimensionalen Wigner-Automorphismus α eine Isometrie der Sphäre S^2 zugeordnet: $\alpha \longmapsto R(U)$
Nach (A.3) gilt

$$P_{\alpha(\underset{\sim}{\varphi})} = U P_{\underset{\sim}{\varphi}} U^* \tag{A.7}$$

und dies ist äquivalent zu $\alpha(\underset{\sim}{\varphi}) = \underset{\sim}{U\varphi}$.

Damit ist das Wigner-Theorem im zweidimensionalen Fall bewiesen. Dieser Spezialfall vermittelt uns auch eine gewisse Einsicht in diesen wichtigen Satz.

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall. Für die Elemente von $P(\mathcal{H})$ (d.h. die Strahlen) benutzen wir die Buchstaben $p, q, \ldots$. Ist M ein Unterraum von $\mathcal{H}$, so bezeichne $P(M)$ die Menge der Strahlen in M.

Zunächst benötigen wir das folgende

<u>Lemma A.1.</u> Es sei α ein Wigner-Automorphismus und M ein k-dimensionaler Unterraum. Dann gibt es einen k-dimensionalen Unterraum M', so dass $\alpha(p) \in P(M')$ genau dann wenn $p \in P(M)$. (M' bezeichnen wir mit $\alpha(M)$).

<u>Beweis</u>: Sei $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ eine orthonormierte Basis von M. Wir wählen Repräsentanten $\psi_1, \ldots, \psi_k$ aus $\alpha(\underset{\sim}{\varphi}_1), \ldots, \alpha(\underset{\sim}{\varphi}_k)$ und setzen $M' = L(\psi_1, \ldots, \psi_k)$ (lineare Spanne). Da auch die ψ_i orthonormiert sind ist $\dim M' = k$. Nun ist

$p \in P(\mathcal{M}) \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{p} (p, \underset{\sim}{\varphi}_i)^2 = 1 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{k} (\alpha(p), \alpha(\underset{\sim}{\varphi}_i))^2 = 1$

$\Longleftrightarrow \alpha(p) \in P(\mathcal{M}')$. $\square$

Lemma A.2. Für jeden zweidimensionalen Unterraum $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ und jeden Wigner-Automorphismus, α, existiert eine unitäre oder antiunitäre Abbildung $U: \mathcal{M} \to \alpha(\mathcal{M})$, so dass

$$\alpha(\underset{\sim}{\varphi}) = \underset{\sim}{U\varphi} \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{M}.$$

U ist eindeutig bis auf eine Phase.

Beweis: Sei φ_1, φ_2 eine orthonormierte Basis von $\mathcal{M}$ und $\psi_i \in \alpha(\underset{\sim}{\varphi}_i)$, $i = 1,2$. Wir definieren eine unitäre Transformation $V: \alpha(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$ durch $V\psi_i = \varphi_i$. Setzen wir $\alpha_V(\underset{\sim}{\psi}) = \underset{\sim}{V\psi}$, so wird durch $\beta = \alpha_V \circ \alpha$ ein Wigner-Automorphismus $\beta: P(\mathcal{M}) \to P(\mathcal{M})$ definiert. Das Lemma ergibt sich deshalb aus der Gültigkeit des Wigner-Theorems im zweidimensionalen Fall. $\square$

Lemma A.3. Wenn die Abbildung U in Lemma A.2 unitär (bzw. antiunitär) für ein $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ ist, so ist sie auch unitär (bzw. antiunitär) für jedes zweidimensionale $\mathcal{M}' \subset \mathcal{H}$

Beweis: Durch

$$\rho(p,q) = \sqrt{1 - (p,q)}$$

wird auf $P(\mathcal{H})$ eine Metrik*) und damit eine Topologie definiert. Jeder Wigner-Automorphismus ist natürlich eine

---

*) Die Dreiecksungleichung für ρ folgt aus derjenigen auf $\mathcal{H}$ und der folgenden Bemerkung: Zu $\psi \in p$ existiert ein $\eta \in q$, so dass $\rho(p,q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\psi - \eta\|$.

Isometrie von $P(\mathcal{H})$ und folglich stetig.

Zu $p, q, r \in P(\mathcal{H})$, mit Repräsentanten $\psi \in p$, $\eta \in q$, $\gamma \in r$, betrachten wir die Zahl

$$\chi(p,q,r) = (\psi,\eta)(\eta,\gamma)(\gamma,\psi)$$

welche unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist. χ ist überdies stetig in allen drei Variablen: Für $p_n \to p$ gibt es $\psi_n \in p_n$, $\psi \in p$ so dass $\|\psi_n - \psi\| \to 0$.

Nun seien ψ und ϕ orthonormierte Vektoren und

$$p = \underset{\sim}{\psi}, \quad q = \underset{\sim}{\eta}, \quad \eta := \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi - \phi), \quad r = \underset{\sim}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi - i\phi)$$

Dann ist $\chi(p,q,r) = \frac{1}{4}(1+i)$. M' sei der zweidimensionale Unterraum, der durch ψ, ϕ aufgespannt wird. Die nach dem Lemma A.2 durch α induzierte Abbildung ist unitär (bzw. antiunitär) falls $\chi(\alpha(p),\alpha(q),\alpha(r)) = \frac{1}{4}(1+i)$ (bzw. $\frac{1}{4}(1-i)$). Ist M'' ein weiterer zweidimensionaler Unterraum, so können wir ψ und ϕ stetig in orthonormierte Vektoren ψ' und ϕ' überführen, welche M'' erzeugen. Dabei gehen p, q, r in p', q', r' über und aus Stetigkeitsgründen ist $\chi(\alpha(p),\alpha(q),\alpha(r)) = \frac{1}{4}(1+i)$ genau dann wenn $\chi(\alpha(p'),\alpha(q'),\alpha(r')) = \frac{1}{4}(1+i)$.

□

<u>Lemma A.4.</u> Die Dimension von $\mathcal{H}$ sei gleich 3. Es sei α ein Wigner-Automorphismus und ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 eine orthon. Basis von $\mathcal{H}$. Wenn α die Teilmengen $P([\phi_1,\phi_2])$ und $P([\phi_1,\phi_3])$ punktweise invariant lässt, dann ist α gleich der Identität.

<u>Beweis:</u> Es sei $\eta = a\phi_1 + b\phi_2 + c\phi_3$ mit $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Zunächst zeigen wir $\alpha(\underset{\sim}{\eta}) = \underset{\sim}{\eta}$. Dazu wählen wir $\eta' \in \alpha(\underset{\sim}{\eta})$ mit $(\phi_1, \eta') = a$, wodurch η' bestimmt wird. Ferner sei $b' = (\phi_2, \eta')$.

Da $(\underset{\sim}{\eta}, \underset{\sim}{\psi}) = (\underset{\sim}{\eta}', \underset{\sim}{\psi}')$ für $\psi = \phi_2$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \phi_2)$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$, gilt

$$|b| = |b'|; \quad |a+b| = |a+b'|; \quad |a-ib| = |a-ib'|$$

Für festes b fordern diese drei Gleichungen, dass b' auf drei Kreisen liegt, welche sich nur in einem Punkte schneiden können. Deshalb ist $b' = b$ und analog $c' = c$, d.h. $\eta' = \eta$. Der Fall $a = 0$ ergibt sich durch Stetigkeit. $\square$

<u>Lemma A.5.</u> Der Satz von Wigner gilt für $\dim \mathcal{H} = 3$.

<u>Beweis</u>: Wir beweisen nur die Existenz; die Eindeutigkeit folgt aus dem allgemeinen Beweis weiter unten.
Für eine unitäre oder antiunitäre Transformation U bezeichne α_U den zugehörigen Wigner-Automorphismus. Ist nun ein Wigner-Automorphismus α gegeben, so genügt es offenbar $U_1, .., U_k$ zu finden, so dass $\alpha_{U_k} \circ \dots \circ \alpha_{U_1} \circ \alpha = id$, da dann $\alpha = \alpha_U$, $U = U_1^{-1} \dots U_k^{-1}$.
Wir wählen eine orthonormierte Basis ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 von $\mathcal{H}$ und ψ_1, ψ_2, ψ_3 so, dass $\alpha(\underset{\sim}{\phi}_i) = \underset{\sim}{\psi}_i$. Es sei U_1 die eindeutige unitäre (bzw. antiunitäre) Transformation mit $U_1 \psi_i = \phi_i$ falls α unitär (bzw. antiunitär) auf den zweidimensionalen Unterräumen ist. Für $\alpha_1 := \alpha_{U_1} \circ \alpha$ gilt $\alpha_1(\underset{\sim}{\phi}_i) = \underset{\sim}{\phi}_i$ und α_1 ist auf den zweidimensionalen Unterräumen unitär. Aus der Gültigkeit des Satzes von Wigner in 2 Dimensionen ergibt sich die Existenz eines unitären $V_1 : [\phi_1, \phi_2] \to [\phi_1, \phi_2]$ mit $\alpha_1 \restriction \mathbb{P}[\phi_1, \phi_2] = \alpha_{V_1}$.
Wir setzen $U_2 = V_1^{-1}$ auf $[\phi_1, \phi_2]$ und gleich der Identität auf $[\phi_3]$. Dann ist $\alpha_2 := \alpha_{U_2} \circ \alpha_1$ die Identität auf $\mathbb{P}([\phi_1, \phi_2])$ und auf $\mathbb{P}([\phi_3])$. Wenden wir den zweidimen-

sionalen Fall jetzt auf $[\Phi_1,\Phi_3]$ an, so ergibt sich die Existenz von einem unitären $V_2 : [\Phi_1,\Phi_3] \to [\Phi_1,\Phi_3]$ mit $\alpha_2 \restriction P([\Phi_1,\Phi_3]) = \alpha_{V_2}$ und die Phase lässt sich so fixieren, dass $V_2\Phi_1 = \Phi_1$. Sei jetzt $U_3 = V_2^{-1}$ auf $[\Phi_1,\Phi_3]$ und gleich der Identität auf $[\Phi_2]$ (und also auf allen $[\Phi_1,\Phi_2]$). Dann ist $\alpha_{U_3} \circ \alpha_2$ gleich der Identität auf $P([\Phi_1,\Phi_2])$ und $P([\Phi_1,\Phi_3])$ und also gleich der Identität nach dem Lemma A.4. $\square$

<u>Lemma A.6.</u> Für jeden dreidimensionalen Unterraum $M \subset \mathcal{H}$ und Wigner-Automorphismus α gibt es ein unitäres oder antiunitäres $U : M \to \alpha(M)$.

<u>Beweis:</u> Wie von Lemma A.2. $\square$

<u>Beweis von Satz 21.6:</u> Ohne Einschränkung der Allg. können wir annehmen, dass α auf den zweidim. Unterräumen unitär ist. Wir wählen ein festes $\Phi \in \mathcal{H}$ und $\Psi \in \alpha(\underline{\Phi})$. Für ein beliebiges $\eta \in \mathcal{H}$ sei M die Spanne von Φ und η. Nach Lemma A.2 gibt es auf M eine unitäre Transformation $V_M : M \to \alpha(M)$, welche α auf M induziert. Die Phase legen wir durch $V_M\Phi = \Psi$ fest. Nun setzen wir $U\eta = V_M\eta$. Um zu zeigen, dass U linear ist, wählen wir $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{H}$ und bilden die lineare Spanne N von Φ, η_1, η_2. Nach Lemma A.6 gibt es ein unitäres $W : N \to \alpha(N)$ (W kann nicht antiunitär sein, da die Restriktion auf 2-dim. Unterräume unitär sein muss), welches α auf N induziert. Mit einer geeigneten Phasenwahl können

wir $W\phi = \psi$ erreichen. Da die Restriktion von W auf jedes zweidimensionale $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ unitär ist, gilt $W \restriction \mathcal{M} = V_{\mathcal{M}}$ und also $U \restriction \mathcal{N} = W$. Wegen $W(a\eta_1 + b\eta_2) = aW(\eta_1) + bW(\eta_2)$ ist U linear. Nach Konstruktion ist U auch normerhaltend. In der obigen Konstruktion ist nur die Phase von ψ beliebig. $\square$

Anhang B. Beweis von Satz 22.2

Wir benötigen zunächst das folgende

Lemma B.1. Sind $U_1(t)$ und $U_2(t)$ schwach messbar, so gilt dies auch für $U_1(t)\,U_2(t)$. Ist $\psi(t)$ eine schwach messbare vektorwertige Funktion, dann auch $U_1(t)\,\psi(t)$. Sind $\psi(t)$ und $\eta(t)$ messbar, so auch $(\psi(t), \eta(t))$.

Beweis: Es sei $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine orthonormierte Basis. Da

$$(\psi, U_1(t)\,U_2(t)\,\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi, U_1(t)\phi_n)(\phi_n, U_2(t)\,\psi)$$

ist die linke Seite, als Limes von messbaren Funktionen, messbar. Ähnlich beweist man die weiteren Aussagen. $\square$

Lemma B.2. Es gibt eine operatorwertige Funktion $U(\psi,\eta)$, die einem Paar von Einheitsvektoren ψ, η einen unitären Operator zuordnet, so dass gilt:

(1) Ist ϕ orthogonal zu ψ und η, dann ist $U(\psi,\eta)\phi = \phi$

(2) $U(\psi,\eta)\eta = \psi$

(3) Sind $\psi(t)$ und $\eta(t)$ schwach messbar, dann ist $U(\psi(t), \eta(t))$ schwach messbar.

Beweis: Ist $\psi = a\eta$, $a \in \mathbb{C}$, definieren wir $U(\psi,\eta) = 1 + (a-1)P_\eta$. Ist ψ orthogonal zu η, setzen wir

$$U(\psi,\eta)\phi = \phi + (\psi,\phi)(\eta-\psi) + (\eta,\phi)(\psi-\eta)$$

Ist $(\psi,\eta) \neq 0$, $(\psi,\eta) = |(\psi,\eta)|\,e^{i\theta}$, $0 \le \theta < 2\pi$, so definieren wir $U(\psi,\eta)$ so, dass (1) und (2) gilt und ausserdem $U(\psi,\eta)\psi = e^{-2i\theta}\eta$. Die Messbarkeitseigenschaft (3) kann man leicht nachprüfen. $\square$

<u>Lemma B.3.</u> Ist $t \mapsto \alpha_t$ eine messbare Familie von Wigner-Automorphismen, welche $\alpha_t \circ \alpha_s = \alpha_{t+s}$ erfüllt. Dann wird jedes α_t durch eine unitäre Transformation induziert. Für jedes Φ können wir ausserdem ein schwach messbares $\eta(t)$ so wählen, dass $\alpha_t(\underset{\sim}{\Phi}) = \underset{\sim}{\eta}(t)$.

<u>Beweis:</u> Da $\alpha_t = (\alpha_{t/2})^2$ wird α_t durch eine unitäre Transformation induziert. Sei $\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$ eine orthonormierte Basis und $X_k = \{t \mid (\underset{\sim}{\psi}_i, \alpha_t(\underset{\sim}{\Phi})) = 0, i = 1, 2, \dots k-1; (\underset{\sim}{\psi}_k, \alpha_t(\underset{\sim}{\Phi})) \neq 0\}$.
Jedes X_k ist messbar und wir müssen deshalb nur $\eta(t)$ auf jedem X_k messbar wählen. Wir wählen $\eta(t)$ auf X_k so, dass $(\psi_k, \eta(t)) > 0$ und $\alpha_t(\underset{\sim}{\Phi}) = \underset{\sim}{\eta}(t)$. Sei $f_j(t) = (\psi_j, \eta(t))$. Wir müssen zeigen, dass jedes $f_j(t)$ messbar ist. Wie in Lemma A.4 ist f_j bestimmt durch $|(\psi_j, \eta(t))|$, $|(\psi_k + \psi_j, \eta(t))|/\sqrt{2}$, $|(\psi_k + i\psi_j, \eta(t))|/\sqrt{2}$, sodass f_j messbar ist. $\square$

<u>Lemma B.4.</u> Sei $\dim \mathcal{H} = 2$ und $\Phi \in \mathcal{H}$ fest. Ferner sei $t \mapsto \alpha_t$ messbar mit $\alpha_t(\underset{\sim}{\Phi}) = \underset{\sim}{\Phi}$ für alle t. Man wähle $U(t)$, welches α_t unitär induziert so, dass $U(t)\Phi = \Phi$. Dann ist $U(t)$ messbar in t.

<u>Beweis:</u> Wir wählen einen Isomorphismus von $\mathcal{H}$ mit $\mathbb{C}^2$ so, dass Φ dem Vektor $\binom{1}{0}$ entspricht. Nach dem, was am Anfang von Anhang A über den 2-dim. Fall ausgeführt wurde, entspricht α_t einer Drehung um einen Winkel $\theta(t)$ in der 1-2 Ebene, d.h.

$$U(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta(t)} \end{pmatrix}$$

ist messbar. $\square$

<u>Beweis von Satz 22.2</u>: Wir wählen ein festes $\Phi \in \mathcal{H}$. Nach Lemma B.3 gibt es ein messbares $\eta(t)$, so dass $\underset{\sim}{\eta}(t) = \alpha_t(\underset{\sim}{\Phi})$. Wir setzen $\tilde{\alpha}_t = \alpha_{U(\Phi,\eta(t))}\, \alpha_t$ ($U(\Phi,\eta)$ gemäss Lemma B.2). Beachte $\tilde{\alpha}_t(\underset{\sim}{\Phi}) = \alpha_{U(\Phi,\eta(t))}\, \underset{\sim}{\eta}(t) = \underline{U(\Phi,\eta(t))\,\eta(t)} = \underset{\sim}{\Phi}$. Die unitäre Familie $\tilde{U}_t$ induziere $\tilde{\alpha}_t$ und erfülle $\tilde{U}(t)\Phi = \Phi$ (Wahl der Phase). Da $U(\Phi,\eta(t))^{-1}\, \tilde{U}(t)$ die Schar α_t induziert, genügt es*) zu zeigen, dass $\tilde{U}(t)$ messbar ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass $\tilde{U}(t)\Psi$ messbar ist für jedes $\Psi \perp \Phi$. Nun wähle man (unter Benutzung von Lemma B.3) ein messbares $\chi(t)$, so dass $\tilde{\alpha}_t(\underset{\sim}{\Psi}) = \underset{\sim}{\chi}(t)$ und setze $\beta_t = \alpha_{U(\Psi,\chi(t))}\, \tilde{\alpha}_t$. Dann ist β_t eine messbare Familie, welche $P([\Phi,\Psi])$ invariant lässt. Deshalb gibt es nach Lemma B.4 ein messbares $V(t)$ auf $[\Phi,\Psi]$, so dass $V(t)\Phi = \Phi$. Da $U(\Psi,\chi(t))\, \tilde{U}(t)\Psi = \Phi$, schliessen wir auf

$$\tilde{U}(t)\Psi = U(\Psi,\chi(t))^{-1}\, V(t)\,\Psi$$

und folglich ist $\tilde{U}(t)\Psi$ messbar. $\square$

---

*) auf Grund der Lemmata B.1 und B.2

Anhang C. Beweis von Satz 22.4

Dieser Satz ist eine cohomologische Aussage. Wir benötigen zuerst das

Lemma C.1. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass $\omega(a,0)=\omega(0,a)=1$ ist.

Beweis: Setzen wir in der Definition (23.4) $b=c=0$, so ergibt sich $\omega(a,0)=\omega(0,0)$ für alle a, d.h., $\omega(a,0)$ ist eine Konstante. Analog gilt $\omega(0,a)=\omega(0,0)=:d$. Setzen wir $\tilde{\omega}=\omega\cdot\partial\tilde{\lambda}$, mit $\tilde{\lambda}(a)=d$, so ist $\tilde{\omega}$ wieder ein Multiplikator, welcher $\tilde{\omega}(a,0)=\tilde{\omega}(0,a)=1$ erfüllt. Ist $\tilde{\omega}=\partial\lambda'$, dann ist $\omega=\partial[\lambda'\tilde{\lambda}^{-1}]$. □

Von jetzt an wählen wir immer $\omega(a,0)=\omega(0,a)=1$.

Lemma C.2. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir für alle a $\omega(a,-a)=1$ wählen.

Beweis: Zunächst setzen wir in (23.4) $b=-a$, $c=a$ und erhalten

$$\omega(a,-a)\,\omega(0,a)=\omega(a,0)\,\omega(-a,a)$$

so dass $\omega(a,-a)=\omega(-a,a)$. Nun sei $\lambda(a)=\sqrt{\omega(a,-a)}$, wobei das Argument der Wurzel in $[0,\pi)$ liege. Dann ist

$$\partial\lambda(a,-a)=\lambda(0)\,\lambda(a)^{-1}\,\lambda(-a)^{-1}=\omega(a,-a)^{-1}$$

Folglich gilt für $\tilde{\omega}:=\omega\,\partial\lambda$: $\tilde{\omega}(a,-a)=1$. □

Von jetzt an sei $\omega(a,-a)=1$, für alle a.

Lemma C.3. Für einen Multiplikator ω gibt es eine Abbildung $a\mapsto U(a)$ in die unitären Operatoren eines Hilbertraumes, so dass gilt

$$U(a)\,U(b) = \omega(a,b)\,U(a+b) \qquad (*)$$

<u>Beweis:</u> Sei $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ (mit dem Lebesgue Maß). Wir setzen

$$(U(a)f)(b) = \omega(b,a)\,f(a+b)$$

Eine Routinerechnung zeigt die Gültigkeit von $(*)$. $\square$

<u>Lemma C.4.</u> Ist ω ein Multiplikator, so ist $\omega(a,b) = \omega(b,a)$ für alle $a,b \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis:</u> Sei $q(a,b) = \omega(a,b)/\omega(b,a)$ und U eine ω-Darstellung (Lemma C.3). Dann ist

$$U(a)\,U(b)\,U(a)^{-1} = q(a,b)\,U(b) \qquad (**)$$

Wegen $\omega(a,-a) = 1$ ist $U(a)^{-1} = U(-a)$ und folglich gilt einerseits

$$(U(a)U(b))^{-1} = U(-b)\,U(-a) = \omega(-b,-a)\,U(-a-b)$$

und andererseits

$$(U(a)\,U(b))^{-1} = (\omega(a,b)\,U(a+b))^{-1} = \omega(a,b)^{-1}\,U(-a-b)$$

d.h., es gilt $\omega(a,b)\,\omega(-b,-a) = 1$. Aus den Gleichungen $(*)$ und $(**)$ folgt $q(a+b,c) = q(a,c)\,q(b,c)$: Multiplizieren wir nämlich

$$U(c)\,U(a)\,U(c)^{-1} = q(c,a)\,U(a)$$

$$U(c)\,U(b)\,U(c)^{-1} = q(c,b)\,U(b)$$

miteinander, so ergibt sich

$$\underbrace{U(c)\,\underbrace{U(a)\,U(b)}_{\omega(a,b)\,U(a+b)}\,U(c)^{-1}}_{\omega(a,b)\,q(c,a+b)\,U(a+b)} = q(c,a)\,q(c,b)\,\underbrace{U(a)\,U(b)}_{\omega(a,b)\,U(a+b)}$$

d.h. $q(c,a)\,q(c,b) = q(c,a+b)$. Dies ist äquivalent zu Behauptung, da $q(a,b)\,q(b,a) = 1$ ist.
Für festes c ist also die Zuordnung $a \longmapsto q(a,c)$ eine 1-dimensionale messbare unitäre Darstellung von $\mathbb{R}$. Nach dem Satz 11.8 (von Neumann) und dem Satz von Stone für $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ ist deshalb

$$q(a,b) = e^{2\pi i a f(b)}$$

Wegen $q(a,a) = 1$ ist $f(a) = a^{-1} n(a)$, wobei $n(a)$ eine ganze Zahl ist. Wegen $q(a,b)\,q(b,a) = 1$ folgt ferner

$$ab^{-1} n(b) + ba^{-1} n(a) = n(a,b) \;; \quad n(a), n(b), n(a,b): \text{ganze Zahlen}$$

Sei $b = a(\sqrt[3]{2})$. Da $\sqrt[3]{2}$, $(\sqrt[3]{2})^{-1}$ und 1 über $\mathbb{Z}$ unabhängig sind, schliessen wir auf $n(a) = 0$ für alle a, d.h., $q(a,b) = 1$ für alle a, b. $\square$

<u>Lemma C.5.</u> Zu jedem Multiplikator ω gibt es eine irreduzible unitäre Familie $\{U(a)\}$ in einem Hilbertraum, so dass $U(a)\,U(b) = \omega(a,b)\,U(ab)$.

<u>Beweis:</u> Wir nennen eine Funktion ϕ auf $\mathbb{R}$ <u>ω-positiv</u>, falls $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$ und

$$\int \overline{f(a)}\, f(b)\, \phi(b-a)\, \omega(-a,b)\, da\, db \geq 0$$

für alle $f \in L^1(\mathbb{R})$. Man sieht leicht, dass für eine ω-Darstellung U die Funktion $\phi(a) = (\psi, U(a)\psi)$ ω-positiv ist. Nach Lemma C.3 gibt es also ω-positive Funktionen.

Für ein gegebenes ω-positives ϕ können wir auf $L^1(\mathbb{R})$ die folgende Sesquilinearform bilden:

$$(f,g) = \int \overline{f(a)}\, g(b)\, \phi(b-a)\, \omega(-a,b)\, da\, db$$

und in offensichtlicher Weise einen Hilbertraum bilden.
Die Abbildung $(U(a)f)(b) = \omega(a,b-a) f(b-a)$ erfüllt offenbar $U(a)U(b)f = \omega(a,b)\, U(a+b) f$, $U(0) = 1$, $(f, U(a)g) = (U(-a)f, g)$, so dass U eine ω-Darstellung ist.

Wir zeigen nun, dass ϕ so gewählt werden kann, dass diese irreduzibel ist. Dabei begnügen wir uns mit einer groben Skizze*).

Zunächst zeigt man, dass die ω-positiven Funktionen eine kompakte konvexe Menge in der $*(L^1)$-Topologie bilden. Nach dem Satz von Krein-Milman Theorem (siehe z.B. Rudin, p.70) besitzt diese Menge deshalb Extremalpunkte. Schliesslich weist man nach, dass solche Extremalpunkte zu irreduziblen Darstellungen führen.

<u>Lemma C.6 (Schur).</u> Eine unitäre Familie $\{U(a)\}$ in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist genau dann irreduzibel, wenn die einzigen beschränkten Operatoren, die mit allen $U(a)$ vertauschen, Vielfache der Identität sind.

<u>Beweis</u>: Falls $\{U(a)\}$ nicht irreduzibel ist und $M \subset \mathcal{H}$ ein nichttrivialer abgeschlossener invarianter Unterraum ist, so vertauscht der Projektor P_M auf M mit allen $U(a)$ und ist ein Operator $\neq \alpha \cdot 1$.

---

*) Für weitere Einzelheiten siehe z.B.: Hewitt und Ross, Abstract Harmonic Analysis, Bd. 1, Springer 1963, speziell (21.33) und (21.34).

Ist andererseits $\{U(a)\}$ irreduzibel und B ein beschränkter selbstadjungierter Operator $\neq 0$, der mit allen $U(a)$ vertauscht. Dann kommutiert auch das Spektralmass E^B mit allen $U(a)$. Deshalb ist $E^B(\Delta)$ für alle Δ entweder 0 oder 1 (da sonst $E^B(\Delta)$ die Familie $\{U(a)\}$ reduziert). Dies impliziert $B = \text{konst.}\ 1$. Ist nun B ein beliebiger beschränkter Operator, der mit allen $U(a)$ vertauscht, so gilt dies auch für B^*. Aus $B = \frac{B+B^*}{2} + i\,\frac{B-B^*}{2i}$ folgt dann die Behauptung. $\square$

<u>Beweis von Satz 22.4</u>: Nach Lemma C.3 ist $\{U(a)\}$ eine kommutierende Familie. Die irreduzible Darstellung von Lemma C.5 ist deshalb nach dem Schur'schen Lemma C.6 eindimensional. Wenn diese die Multiplikation mit λ ist, so gilt also

$$\lambda(a)\,\lambda(b) = \omega(a,b)\,\lambda(a+b)$$

d.h. (siehe (23.57)), $\omega = \partial\lambda$. $\square$

Die Beweise in diesen Anhängen wurden aus der folgenden Publikation entnommen: B. Simon, Quantum Dynamics: From Automorphism to Hamiltonian, Studies in Mathematical Physics, Princeton Univ. Press, 1976, Seite 327.

Kap. V Störungen von selbstadjungierten Operatoren

Sei A ein selbstadjungierter Operator. Intuitiv erwartet man: Ist B ein symmetrischer Operator und nicht "zu gross im Vergleich zu A", dann ist auch $A+B$ selbstadjungiert. Die präzise Form dieser Aussage gibt das berühmte Theorem von Kato und Rellich. Dieses hat sehr wichtige Anwendungen in der Quantenmechanik.

Wir müssen zunächst erklären, was wir unter "kleinen" Störungen verstehen.

Definition: Seien A und B dicht definierte Operatoren auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Es gelte ferner:

(i) $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$

(ii) Für gewisse Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ ist

$$\|B\varphi\| \leq a\|A\varphi\| + b\|\varphi\|. \qquad (1)$$

Dann sagen wir B sei A-beschränkt. Das Infimum aller a in (ii) nennt man die relative Schranke von B bezüglich A.

Natürlich genügt es, (1) auf einem determinierenden Bereich von A zu haben.

Nun beweisen wir das folgende wichtige Resultat:

Satz (Kato–Rellich–Theorem): Es sei A selbstadjungiert, B symmetrisch, sowie A-beschränkt mit relativer Schranke $a<1$. Dann ist $A+B$ auf $\mathcal{D}(A)$ selbstadjungiert und wesentlich selbstadjungiert auf jedem determinierenden Bereich von A. Ist ferner A nach unten durch M beschränkt, dann ist $A+B$ nach unten durch $M-\max\left\{\frac{b}{1-a}, a|M|+b\right\}$ beschränkt, wobei a und b die Zahlen in (1) sind.

Beweis: Nach Satz 13.11 folgt die erste Behauptung, wenn wir zeigen können, dass $\mathcal{R}(A+B\pm i\mu_0)=\mathcal{H}$ ist für ein $\mu_0>0$. Nun ist für $\mu>0$, $\varphi\in\mathcal{D}(A)$

$$\|(A+i\mu)\varphi\|^2=\|A\varphi\|^2+\mu^2\|\varphi\|^2.$$

Setzen wir darin $\varphi=(A+i\mu)^{-1}\psi$, so folgt sofort

$$\|A(A+i\mu)^{-1}\|\leq 1,\quad \|(A+i\mu)^{-1}\|\leq\mu^{-1}.$$

Dies benutzen wir in (1) für $\varphi=(A+i\mu)^{-1}\psi$:

$$\begin{aligned}\|B(A+i\mu)^{-1}\psi\| &\leq a\|A(A+i\mu)^{-1}\psi\|+b\|(A+i\mu)^{-1}\psi\|\\ &\leq \left(a+\frac{b}{\mu}\right)\|\psi\|.\end{aligned}$$

Für ein grosses μ_0 hat also $C:=B(A+i\mu_0)^{-1}$ eine Norm kleiner als Eins ($a<1$!). Dann ist aber

$-1 \notin \sigma(C)$, also $\mathcal{R}(1+C) = \mathcal{H}$. Da A selbstadjungiert ist, ist nach S.13.11 auch $\mathcal{R}(A+i\mu_0) = \mathcal{H}$. Deshalb impliziert die Gleichung

$$(1+C)(A+i\mu_0)\varphi = (A+B+i\mu_0)\varphi \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{D}(A)$$

tatsächlich $\mathcal{R}(A+B+i\mu_0) = \mathcal{H}$. Genau gleich beweist man auch $\mathcal{R}(A+B-i\mu_0) = \mathcal{H}$ und somit ist $A+B$ auf $\mathcal{D}(A)$ selbstadjungiert.

Sei jetzt $\mathcal{D}_0$ ein determinierender Bereich von A ($\overline{A|\mathcal{D}_0} = A$). Aus (1) folgt leicht $\mathcal{D}(\overline{(A+B)|\mathcal{D}_0}) \supset \mathcal{D}(\overline{A|\mathcal{D}_0}) = \mathcal{D}(A)$ und folglich ist $A+B$ wesentlich selbstadjungiert auf $\mathcal{D}_0$.

Schliesslich beweisen wir die Beschränktheitsaussagen. Sei $-t < M$. Dann ist $\mathcal{R}(A+t) = \mathcal{H}$ und wie eben zeigt man, dass $\|B(A+t)^{-1}\| < 1$ falls

$$-t < M - \max\left\{\frac{b}{1-a},\ a|M| + b\right\}.$$

Dann ist wieder $\mathcal{R}(A+B+t) = \mathcal{H}$ und $(A+B+t)^{-1} = (A+t)^{-1}(1+C)^{-1}$, weshalb $-t \in \rho(A+B)$. $\square$

Nun besprechen wir wichtige Anwendungen des Kato-Rellich-Theorems. Dazu benötigen wir aber noch zwei Vorbereitungen.

Es sei M eine messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ und $t : M \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion auf M. Der

<u>maximale Operator der Multiplikation</u> mit t auf $L^2(M)$ ist definiert durch

$$\mathcal{D}(T) = \{ f \in L^2(M) : tf \in L^2(M) \},$$
$$Tf = tf \text{ für } f \in \mathcal{D}(T). \tag{2}$$

Das folgende Argument zeigt, dass $\mathcal{D}(T)$ dicht ist. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $M_n = \{x \in M : |t(x)| \le n\}$ und χ_{M_n} die charakteristische Funktion von M_n. Für jedes $f \in L^2(M)$ ist $f_n := \chi_{M_n} f$ in $\mathcal{D}(T)$. Wegen $M_n \subset M_{n+1}$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = M$ haben wir $f_n \to f$.

Nun gilt:

> T^* ist der maximale Operator der Multiplikation mit $\overline{t}$; speziell gilt $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T)$.

<u>Beweis</u>: Trivialerweise ist $\mathcal{D}(T)$ auch der Bereich des maximalen Multiplikationsoperators mit t^*. Da für alle $f, g \in \mathcal{D}(T)$

$$(g, Tf) = \int_M \overline{g(x)}\, t(x) f(x)\, dx = \int_M \overline{\overline{t(x)} g(x)}\, f(x)\, dx$$
$$= (\overline{t} g, f)$$

sind die maximalen Multiplikationsoperatoren mit t und $\overline{t}$ zueinander formal adjungiert. Es bleibt zu zeigen, dass für ein $g \in \mathcal{D}(T^*)$ die Funktion $\overline{t} g$ in $L^2(M)$ ist. Sei also $g \in \mathcal{D}(T^*)$; dann gilt

$$(T^* g, f) = (g, Tf) = \int_M \overline{g(x)}\, t(x) f(x)\, dx$$

und also

$$\int_M \overline{(T^*g(x) - g(x)\overline{t}(x))}\, f(x)\, dx = 0 \quad \text{für alle } f \in \mathcal{D}(T).$$

Mit den gleichen Bezeichnungen wie oben gilt insbesondere

$$\int_M \overline{(T^*g(x) - g(x)\overline{t}(x))}\, \chi_{M_n}(x)\, f(x)\, dx = 0 \quad \text{für alle } f \in L^2(M).$$

Da $\chi_{M_n}(T^*g - g\overline{t}) \in L^2(M)$ folgt $T^*g = \overline{t}g$ für fast alle Punkte in M_n. Da dies für jedes n wahr ist, haben wir $T^*g = t^*g$, also $t^*g \in L^2(M)$. $\square$

Nun studieren wir $-\Delta$ als Operator auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Die folgenden beiden Definitionsbereiche drängen sich auf:

$$\mathcal{D}_{max} = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n) : \Delta\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ im Sinne der Distributionen}\}, \tag{3}$$

$$\mathcal{D}_{min} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (C^\infty\text{-Funktionen mit kompaktem Träger}). \tag{4}$$

Es sei im folgenden $T_{max} = -\Delta|\mathcal{D}_{max}$, $T_{min} = -\Delta|\mathcal{D}_{min}$. Nun gilt der

<u>Satz:</u> Es gelten die Aussagen:

(a) $\varphi \in \mathcal{D}_{max} \iff \underbrace{|\lambda|^2\hat{\varphi}(\lambda)} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und in diesem Fall ist $T_{max}\varphi = \overline{|\lambda|^2\hat{\varphi}(\lambda)}$;

(b) T_{max} ist selbstadjungiert;

(c) T_{min} ist wesentlich selbstadjungiert und $\overline{T_{min}} = T_{max}$.

Beweis: (a) folgt aus $-\widehat{\Delta T} = |\lambda|^2 \hat{T}$ für jede temperierte Distribution T. Wie oben gezeigt wurde, ist der maximale Multiplikationsoperator mit einer reellen Funktion selbstadjungiert. Nun ist aber die Fourier-Transformation $\mathcal{F}$ auf $L^2(\mathbb{R}^4)$ unitär (Plancherel-Theorem) und offensichtlich ist $T_{max} = \mathcal{F}^{-1}$ (Multipl. Op. $|\lambda|^2$) $\mathcal{F}$, also ist T_{max} selbstadjungiert.

Um zu beweisen, dass T_{min} wesentlich selbstadjungiert ist, genügt es zu zeigen, dass $T_{min}^* = T_{max}$, da dann $\overline{T_{min}} = T_{min}^{**} = T_{max}$. Sei also $\psi \in \mathcal{D}(T_{min}^*)$. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}_{min}$: $(-\Delta\varphi, \psi) = (T_{min}\varphi, \psi) = (\varphi, T_{min}^*\psi)$. Also ist im Sinne der Distributionen $-\Delta\psi \in L^2(\mathbb{R}^4)$ und $T_{min}^*\psi = -\Delta\psi = T_{max}\psi$. Ist umgekehrt $\psi \in \mathcal{D}_{max}$, so ist $-\Delta\psi \in L^2(\mathbb{R}^4)$ und somit gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$: $(-\Delta\varphi, \psi) = (\varphi, -\Delta\psi)$. Dies besagt $\psi \in \mathcal{D}(T_{min}^*)$ $T_{min}^*\psi = -\Delta\psi$. $\square$

Im folgenden bezeichnen wir T_{max} mit H_0 = <u>freier Hamiltonoperator</u>. Für die Anwendung des Kato-Rellich-Theorems benötigen wir den

<u>Satz</u>: Es sei $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^4)$ aus dem Definitionsbereich von H_0. Dann gilt für $n \leq 3$: φ ist eine beschränkte stetige Funktion und für jedes $a > 0$ existiert ein b, unabhängig von φ, mit

$$\|\varphi\|_\infty \leq a\,\|H_0\varphi\| + b\,\|\varphi\|. \qquad (5)$$

<u>Beweis</u>: Aufgrund des Riemann-Lebesque-Lemmas und des Plancherel-Theorems genügt es zu zeigen, dass $\hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist und dass

$$\|\hat{\varphi}\|_1 \leq a\,\|\lambda^2\hat{\varphi}\|_2 + b\,\|\hat{\varphi}\|_2 . \qquad (6)$$

Dies zeigen wir für den wichtigen Fall $n=3$. Sei also $\varphi \in \mathcal{D}(H_0)$. Dann sind $(1+\lambda^2)\hat{\varphi}$ [nach (3)] und natürlich $(1+\lambda^2)^{-1}$ in $L^2(\mathbb{R}^3)$ und somit $\hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Ferner gibt die Schwarzsche Ungleichung

$$\|\hat{\varphi}\|_1 \leq c\,\|(\lambda^2+1)\hat{\varphi}\|_2 \leq c\left(\|\lambda^2\hat{\varphi}\|_2 + \|\hat{\varphi}\|^2\right), \qquad (7)$$

mit

$$c = \int (1+\lambda^2)^{-2} d\lambda .$$

Für $t>0$ sei $\hat{\varphi}_t(\lambda) = t^3\,\hat{\varphi}(t\lambda)$. Dann gilt $\|\hat{\varphi}_t\|_1 = \|\hat{\varphi}\|_1$, $\|\hat{\varphi}_t\|_2 = t^{3/2}\|\hat{\varphi}\|_2$ und $\|\lambda^2\hat{\varphi}_t\|_2 = t^{-1/2}\|\lambda^2\hat{\varphi}\|_2$. Benutzen wir also (7) für $\hat{\varphi}_t$, so kommt

$$\|\hat{\varphi}\|_1 \leq c\,t^{-1/2}\,\|\lambda^2\hat{\varphi}\|_2 + c\,t^{3/2}\,\|\hat{\varphi}\|_2$$

für jedes $t>0$. Für genügend grosse t ergibt sich daraus (6). $\square$

Nun haben wir alle Hilfsmittel für einen einfachen Beweis der für die Physik wichtigen Aussage:

<u>Satz</u>: Sei $V \in L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$ reell. Dann ist

$H_0 + V(x)$ auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ wesentlich selbstadjungiert und selbstadjungiert auf $\mathcal{D}(H_0)$.

Beweis: Da V reell ist, ist der maximale Multiplikationsoperator selbstadjungiert. Sein Bereich ist

$$\mathcal{D}(V) = \{\varphi \mid \varphi \in L^2(\mathbb{R}^3), V\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)\}.$$

Sei $V = V_1 + V_2$, $V_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $V_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Dann gilt

$$\|V\varphi\|_2 \leq \|V_1\|_2 \|\varphi\|_\infty + \|V_2\|_\infty \|\varphi\|_2 \qquad (8)$$

d.h. $\mathcal{D}(V) \supset C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Nun gibt es nach dem letzten Satz zu jedem $a > 0$ ein $b > 0$, so dass die Ungleichung (5) gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Benutzen wir darin noch (8), so kommt

$$\|V\varphi\|_2 \leq a\|V_1\|_2 \|H_0\varphi\|_2 + (b\|V_1\|_2 + \|V_2\|_\infty)\|\varphi\|_2$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Deshalb ist V H_0-beschränkt mit beliebig kleiner relativer Schranke. Ferner wissen wir, dass H_0 auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ wesentlich selbstadjungiert ist. Das Kato-Rellich-Theorem zeigt damit, dass auch $H_0 + V$ auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ wesentlich selbstadjungiert ist. □

Beispiel: Das Coulombpotential $V(x) = -e^2/|x|$ ist sicher aus $L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Somit ist der Operator $-\Delta + e^2/r$ auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ wesentlich selbstadjungiert.

Wir betrachten auch noch Vielteilchensysteme.

Satz (Kato): Es seien $\{V_k\}_{k=1}^m$ reelle messbare Funktionen in $L^2(\mathbb{R}^3)+L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Mit $V(\underline{y}_k)$ bezeichnen wir die (maximalen) Multiplikationsoperatoren auf $L^2(\mathbb{R}^{3n})$. Dann ist $-\Delta+\sum_{k=1}^m V_k(\underline{y}_k)$ wesentlich selbstadjungiert auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^{3n})$, wobei $-\Delta$ den Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^{3n}$ bezeichnet.

Beweis: Zunächst eine allgemeine Bemerkung. Die Bedingung (1) ist äquivalent zu: Für gewisse $\tilde{a},\tilde{b}\in\mathbb{R}$ und alle $\varphi\in\mathcal{D}(A)$ gilt

$$\|B\varphi\|^2\leq\tilde{a}^2\|A\varphi\|^2+\tilde{b}\|\varphi\|^2. \qquad (9)$$

Dies sieht man so: Aus (9) folgt (1) mit $a=\tilde{a}$ und $b=\tilde{b}$. Gilt umgekehrt (1), so ergibt sich (9) für $\tilde{a}^2=(1+\varepsilon)a^2$, $\tilde{b}^2=(1+\varepsilon^{-1})b^2$ für jedes $\varepsilon>0$. Das Infimum aller a in (1) ist damit gleich dem Infimum aller $\tilde{a}$ in (9).

Nun betrachten wir ein einzelnes V_k. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass V_k von (x_1,x_2,x_3) in $x=(x_1,\dots,x_{3n})$ abhängt. Wieder haben wir eine Abschätzung der Form (5), oder dazu äquivalent eine Abschätzung der Form (vgl. die obige Bemerkung)

$$\|V_k\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{3n})}\leq a^2\int|-\Delta_1\varphi(x_1,\dots,x_{3n})|^2\,dx_1\dots dx_{3n}$$
$$+\,b^2\int|\varphi(x_1,\dots,x_{3n})|^2\,dx_1\dots dx_{3n}$$

$$= a^2 \int \Big| \sum_{i=1}^{3} p_i^2 \hat{\varphi}(p_1, \dots, p_{3n}) \Big|^2 d^{3n}p + b^2 \|\varphi\|^2$$

$$\leq a^2 \int \Big| \sum_{i=1}^{3n} p_i^2 \hat{\varphi}(p_1, \dots, p_{3n}) \Big|^2 d^{3n}p + b^2 \|\varphi\|^2$$

$$= a^2 \|-\Delta\varphi\|^2 + b^2 \|\varphi\|^2 .$$

Mit der Schwarzschen Ungleichung folgt daraus

$$\Big\| \sum_{k=1}^{m} V_k(\underline{y}_k)\varphi \Big\|^2 \leq m^2 a^2 \|-\Delta\varphi\|^2 + m^2 b^2 \|\varphi\|^2$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{3n})$. Da wir a so klein wählen können wie wir wollen (vorletzter Satz), folgt nach dem Kato-Rellich-Theorem die Behauptung des Satzes.

$\square$

Beispiel: In $\mathbb{R}^{3n}$ ist

$$- \sum_{i=1}^{n} \Delta_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{ne^2}{|\underline{x}_i|} + \sum_{i<j} \frac{e^2}{|\underline{x}_i - \underline{x}_j|} \tag{10}$$

wesentlich selbstadjungiert auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^{3n})$.

* * *