Mathematische Grundlagen der QM

(N. Straumann)

Einleitung

Bei der Entstehung der QM kümmerte man sich zunächst nicht um Strenge in der mathematischen Formulierung. Die neue Physik mit ihren fundamentalen Interpretationsfragen und den unerhörten Anwendungsmöglichkeiten stand mit Recht im Vordergrund. Die Physiker lernten auch schnell mit dem Dirac'schen Formalismus umzugehen. Dieser führte in der Praxis, trotz seines formalen Charakters, nicht auf Widersprüche.

Schon sehr früh bemühte sich aber von Neumann um eine strenge Hilbertraum Formulierung der QM. (Siehe sein Buch, neu aufgelegt in Springer, 1981.) Diese hat sich, wenn auch nur langsam, schliesslich bei den Physikern durchgesetzt und bildet den Gegenstand dieser Vorlesung. Im Zentrum steht die Spektraltheorie von unitären Gruppen und von beschränkten und unbeschränkten selbstadjungierten Operatoren. Grund:

- selbstadjungierte Operatoren entsprechen den Observablen;
- die Dynamik wird durch eine unitäre Gruppe beschrieben.

"Leider" entsprechen den meisten Observablen unbeschränkte Operatoren. Dies sieht man schon aus den kanonischen VR

$$[q,p] = i$$

Zentralstelle der Studentenschaft, Zürich
unveränderter Nachdruck November 1995

Es gilt nämlich der folgende

Satz. Sei A eine Banach-Algebra mit einem Einselement e. Für Elemente $x, y \in A$ ist $xy - yx \neq e$.

Beweis: (Wir benutzen nicht einmal die Vollständigkeit von A.) Angenommen es sei $xy - yx = e$. Dann machen wir die Induktionsvoraussetzung

$$x^n y - y x^n = n x^{n-1} \neq 0 \qquad (*)$$

welche nach Annahme für $n = 1$ erfüllt ist. Falls $(*)$ für eine positive ganze Zahl gilt ist $x^n \neq 0$ und

$$x^{n+1} y - y x^{n+1} = x^n (xy - yx) + (x^n y - y x^n) x = x^n e + n x^{n-1} \cdot x$$
$$= (n+1) x^n$$

sodass $(*)$ auch für $n+1$ gültig ist. Daraus folgt

$$n \| x^{n-1} \| = \| x^n y - y x^n \| \leq 2 \| x^n \| \| y \| \leq 2 \| x^{n-1} \| \| x \| \| y \|$$

oder $n \leq 2 \| x \| \| y \|$, für jedes positive ganze n. Dies ist natürlich unmöglich. □

Inhaltsverzeichnis

Literatur

Voraussetzungen: "Mass und Integral"

z.B.

- Hewitt & Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer, 1965
- W. Rudin, Real and Complex Analysis, Mc Graw-Hill, 1966
- H. Bauer, Wahrsch. Theorie und Grundzüge der Masstheorie, de Gruyter, 197?
  → 4. Auflage (1992)

Vertiefung:

- Reed & Simon I, Academic Press, 2. Auflage, 1981
- W. Rudin, Functional Analysis, Mc Graw-Hill 1973
- Hirzebruch & Scharlau, Einführung in die Funktionalanalysis, B.I 296 a*, 1971.

Kapitel I. Hilbert-Räume

Verallgemeinerung des Begriffs des euklidischen Raumes und seiner geometrischen Struktur. (Dieses Kapitel enthält keine tiefliegenden Ergebnisse.)

§1. Hilbert-Räume und ihre Geometrie

Definition 1.1. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektor-Raum ($\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$). Eine hermitesche Form auf X ist eine Abbildung

$$(\, , \,) : X \times X \longrightarrow \mathbb{K} ,$$

so dass für alle $x, x', y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$ gilt

(i) $(y, x+x') = (y,x) + (y,x')$

(ii) $(y, \alpha x) = \alpha (y,x)$

(iii) $(y,x) = \overline{(x,y)}$

Aus diesen Eigenschaften folgt sofort

$$(y+y', x) = (y,x) + (y',x)$$

$$(\alpha y, x) = \bar{\alpha} (y,x)$$

(x,x) ist reell

Für $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ist also eine hermitesche Form eine symmetrische Bilinearform.

$(\cdot,\cdot)$ heisst positiv semi-definit bzw. positiv definit, wenn $(x,x) \geq 0$ bzw. $(x,x) > 0$ für alle $x \in X, x \neq 0$.

Eine positiv definite hermitesche Form heisst auch inneres Produkt oder Skalarprodukt.

<u>Beispiele</u>

1. $\mathbb{C}^n$, $(x,y) = \sum \overline{x_i}\, y_i$ ist Skalarprodukt

2. $L^2(\Omega,\mu)$, $(f,g) = \int_\Omega \overline{f} g \, d\mu$ ist Skalarprodukt

<u>Satz 1.2</u> (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $(\cdot,\cdot)$ positiv semi-definite hermitesche Form auf X. Dann gilt für alle $x,y \in X$

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)\,(y,y) \tag{1.1}$$

<u>Beweis</u>: Für $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$0 \leq (x+\lambda y, x+\lambda y) = (x,x) + \overline{\lambda}(y,x) + \lambda(x,y) + \lambda\overline{\lambda}(y,y) \tag{1.2}$$

Ist $(y,y) \neq 0$, so setze man $\lambda = -\dfrac{\overline{(x,y)}}{(y,y)}$ und erhält

$$(x,x) - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \geq 0$$

d.h. (1.1). Ist $(x,x) \neq 0$ vertausche man die Rollen von x und y. Ist schliesslich $(x,x) = (y,y) = 0$, so setze man $\lambda = -\overline{(x,y)}$ und erhält aus (1.2) $(x,y) = 0$. $\square$

<u>Satz 1.3.</u> Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(\,,\,)$ ein Skalarprodukt auf X. Dann wird durch

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}\,, \quad x \in X \tag{1.3}$$

eine <u>Norm</u> definiert, d.h. es gilt

(i) $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in X$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in X$;

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

<u>Beweis:</u> Die beiden ersten Eigenschaften folgen unmittelbar aus (1.3). Für die Dreiecksungleichung betrachten wir

$$(x+y,x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y)$$

$$\leq (x,x) + |(x,y)| + |(y,x)| + (y,y)$$

$$\leq (x,x) + 2\,\|x\|\,\|y\| + (y,y) = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Dies zeigt $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. $\square$

Mittels der Norm schreibt sich die Cauchy-Schwarzsche Ungl. in der Form

$$|(x,y)| \leq \|x\|\,\|y\| \tag{1.4}$$

<u>Definition 1.4.</u> Ein Paar $(X, \|\cdot\|)$, bestehend aus einem $\mathbb{K}$-Vektorraum und einer Norm, heisst <u>normierter Raum</u> (über $\mathbb{K}$).

In einem normierten Raum lässt sich folgende Abstandsfunktion bilden

$$d(x,y) = \|x-y\| \tag{1.5}$$

Die Abstandsfunktion (1.5) eines normierten Raumes ist eine <u>Metrik</u>, d.h. es gilt

(i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$;

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$;

(iii) $d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x)$ (Dreiecksungl.)

Dies ergibt sich unmittelbar aus den Eigenschaften einer Norm.

Das Paar (X,d) (X als Menge aufgefasst) ist dann ein <u>metrischer Raum</u>. Die Metrik d definiert eine Topologie für X*). Die durch die Metrik definierte Topologie macht X zu einem topologischen Vektorraum im Sinne der folgenden

<u>Definition 1.5</u>. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und ausserdem ein topologischer Raum. Dann heisst X <u>topologischer $\mathbb{K}$-Vektorraum</u>, wenn Addition und Multiplikation mit Skalaren stetig sind, d.h., die Abbildungen

$$X \times X \longrightarrow X \,, \quad (x,y) \mapsto x+y$$

$$\mathbb{K} \times X \longmapsto X \,, \quad (\alpha,x) \mapsto \alpha x$$

sind stetig. ($X \times X$ und $\mathbb{K} \times X$ sind wieder topologische Räume.)

Wir beweisen die obige Behauptung. Die Addition ist gleichmässig stetig, wie aus der Ungleichung

$$\|(x+y)-(x'+y')\| \leq \|x'-x\| + \|y'-y\|$$

folgt. Die Stetigkeit der Multiplikation folgt aus der Abschätzung

$$\|\alpha' x' - \alpha x\| = \|\alpha'(x'-x) + (\alpha'-\alpha)x\| \leq |\alpha'| \, \|x'-x\| + |\alpha'-\alpha| \, \|x\|$$

<u>Lemma 1.5</u>. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(\, , \,)$ ein inneres Produkt. Die Abbildung

---

*) Zur Erinnerung: Für $x \in X$, $\varepsilon > 0$ heisst

$$U(x,\varepsilon) = \{ y \mid y \in X,\ d(x,y) < \varepsilon \}$$

eine ε-Umgebung von x (offene Kugel). Eine Teilmenge V von X heisst <u>offen</u>, falls es für alle $x \in V$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U(x,\varepsilon) \subset V$. Die Menge der offenen Mengen von X ist eine Topologie für X, d.h. es gilt:

- Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen
- Der Durchschnitt von zwei offenen Mengen ist offen.

$$(,) : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$$

ist stetig.

<u>Beweis</u>: Die Behauptung ergibt sich aus der folgenden Abschätzung:

$$|(x,y)-(x',y')| = |(x-x',y)-(x',y'-y)| \leq |(x-x',y)| + |(x',y'-y)|$$

$$\leq \|y\| \, \|x-x'\| + \|x'\| \, \|y'-y\|$$

<u>Definition 1.6.</u> Ein metrischer Raum (X,d) heisst <u>vollständig</u>, wenn jede Cauchy Folge (d.h. jede Folge $\{a_n\}$, für die es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 gibt, sodass für alle $n, m > n_0$ gilt $d(a_n, a_m) < \varepsilon$) konvergiert. Ein normierter Raum ist vollständig, wenn er als metrischer Raum aufgefasst, vollständig ist.

<u>Definition 1.7.</u> Ein vollständiger normierter Raum heisst <u>Banach-Raum</u>.

<u>Bsp.</u>

1. $L^p(\Omega,\mu)$, $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p}$

   ist ein Banach-Raum (Riesz-Fischer-Theorem)

2. $C(\Omega, \mathbb{R})$, Ω kompakt,

$$\|f\| = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \tag{1.6}$$

   ist ein Banach-Raum. (Beweis später)

<u>Definition 1.8.</u> Ein <u>Hilbert-Raum</u> ist ein Paar $(\mathcal{H}, (,))$, bestehend aus einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathcal{H}$ und einem Skalarprodukt $(,)$ auf $\mathcal{H}$, sodass der zugehörige

normierte Raum $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ vollständig (d.h. ein Banach-Raum) ist.
Verlangt man die Vollständigkeit nicht, so spricht man von einem <u>Prä-Hilbert-Raum.</u>

<u>Beispiele.</u>

1. $L^2(\Omega,\mu)$, $(f,g) = \int_\Omega \bar{f} g \, d\mu$

2. l_2-Raum: Menge der Folgen $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ von komplexen Zahlen mit $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty$; inneres Produkt

$$(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=1}^\infty \bar{x}_n y_n$$

<u>Definition 1.9.</u> Zwei Vektoren x und y eines (Prä-) Hilbert-Raumes sind <u>orthogonal</u> falls $(x,y) = 0$ ist. Eine Kollektion $\{x_i\}$ von Vektoren ist eine <u>orthonormierte</u> Menge falls für alle i $(x_i, x_i) = 1$ und $(x_i, x_j) = 0$ für $i \neq j$.

<u>Lemma 1.10</u> (Satz von Pythagoras). Es seien x und y orthogonale Elemente des Hilbert-Raumes $\mathcal{H}$. Dann gilt

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2 \tag{1.7}$$

<u>Beweis:</u> Trivial.

<u>Übung.</u> Für einen Prä-Hilbert-Raum gilt das Parallelogramm-Gesetz:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{1.8}$$

<u>Definition 1.11.</u> Zwei Hilbert-Räume $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ sind <u>isomorph</u> falls ein linearer Operator U von $\mathcal{H}_1$ auf $\mathcal{H}_2$ existiert, so dass

$$(Ux, Uy)_{\mathcal{H}_2} = (x,y)_{\mathcal{H}_1} \quad \text{für alle} \quad x,y \in \mathcal{H}_1$$

Ein solcher Operator heisst <u>unitär</u>.

<u>Satz 1.12.</u> Zu jedem Prä-Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ existiert eine Vervollständigung, d.h. ein Hilbertraum $\hat{\mathcal{H}}$ und eine unitäre Transformation $U: \mathcal{H} \to \hat{\mathcal{H}}$ auf eine dichte Menge von $\hat{\mathcal{H}}$ (d.h. $\overline{U(\mathcal{H})} = \hat{\mathcal{H}}$).

<u>Beweis</u>: Konsultiere ein Buch, z.B. Weidmann, Satz 4.11.

<u>Bsp.</u> $L^2([a,b])$ ist die Vervollständigung von $C[a,b]$, mit Skalarprodukt

$$(f,g) = \int_a^b \overline{f(x)} g(x)\, dx$$

Unter der <u>direkten Summe</u> $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ von zwei Hilbert-Räumen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ versteht man die Menge der Paare $\langle x,y \rangle$, $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$ mit der natürlichen Vektorraum Struktur und dem Skalarprodukt

$$(\langle x_1,y_1\rangle, \langle x_2,y_2\rangle) = (x_1,x_2)_{\mathcal{H}_1} + (y_1,y_2)_{\mathcal{H}_2}$$

$\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ ist wieder ein Hilbert-Raum.

§2. Das Lemma von Riesz

Ein abgeschlossener Unterraum $\mathcal{M}$ eines Hilbert-Raumes $\mathcal{H}$ (mit geerbtem Skalarprodukt) ist wieder ein Hilbert-Raum. Sei $\mathcal{M}^\perp = \{x \in \mathcal{H} \mid (x,y) = 0$ für alle $y \in \mathcal{M}\}$ das <u>orthogonale Komplement</u> von $\mathcal{M}$.

$\mathcal{M}^\perp$ ist sicher ein linearer Unterraum von $\mathcal{H}$. Ausserdem ist $\mathcal{M}^\perp$ abgeschlossen, da das Skalarprodukt stetig ist (Lemma 1.5). Damit ist auch $\mathcal{M}^\perp$ ein Hilbertraum und es ist $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$. Wir zeigen im folgenden, dass $\mathcal{H} = \mathcal{M} + \mathcal{M}^\perp = \{x+y \mid x \in \mathcal{M}, y \in \mathcal{M}^\perp\}$.

<u>Lemma 2.1.</u> Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{M}$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$ und $x \in \mathcal{H}$. Dann existiert in $\mathcal{M}$ ein eindeutiges Element z, welches x am nächsten ist.

<u>Beweis</u>: Es sei $d = \inf\limits_{y \in \mathcal{M}} \|x-y\|$. Man wähle eine Folge $\{y_n\}$, $y_n \in \mathcal{M}$, so dass $\|x-y_n\| \longrightarrow d$. Dies ist eine Cauchy-Folge, denn (benutze das Parallelogramm-Gesetz):

$$\|y_n-y_m\|^2 = \|(y_n-x)-(y_m-x)\|^2 = 2\|y_n-x\|^2 + 2\|y_m-x\|^2 -$$

$$- \|-2x+y_n+y_m\|^2 = 2\|y_n-x\|^2 + 2\|y_m-x\|^2 - 4\underbrace{\|x-\tfrac{1}{2}\overbrace{(y_n+y_m)}^{\in \mathcal{M}}\|^2}_{\geq d^2}$$

$$\leq 2\|y_n-x\|^2 + 2\|y_m-x\|^2 - 4d^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 2d^2+2d^2-4d^2 = 0.$$

Da $\mathcal{M}$ abgeschlossen ist, konvergiert $\{y_n\}$ gegen ein z in $\mathcal{M}$ und es ist $\|x-z\| = d$. Die Eindeutigkeit von z ergibt sich wie folgt. Falls z und z' in $\mathcal{M}$ existieren mit $\|x-z\| = \|x-z'\| = d$, dann ist für die Folge

$\{y_n\} = (z, z', z, z', \dots)$ natürlich $\|y_n - x\| = d$ und deshalb ist $\{y_n\}$ nach dem obigen Argument eine Cauchy-Folge, also $z = z'$. $\square$

<u>Satz 2.2</u> (Projektionssatz). Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum, $\mathcal{M}$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann kann jedes $x \in \mathcal{H}$ eindeutig in der Form $x = z + w$, $z \in \mathcal{M}$, $w \in \mathcal{M}^\perp$ dargestellt werden.

<u>Beweis</u>: Nach dem obigen Lemma existiert ein eindeutiges $z \in \mathcal{M}$, welches x am nächsten ist. Wir setzen $w = x - z$ und haben natürlich $x = z + w$. Nun müssen wir zeigen, dass $w \in \mathcal{M}^\perp$ ist. Dazu sei $y \in \mathcal{M}$, $t \in \mathbb{R}$. Für $d = \|x - z\|$ gilt

$$d^2 \leq \|x - (z + ty)\|^2 = \|w - ty\|^2 = d^2 - 2t\,\mathrm{Re}\,(w, y) + t^2 \|y\|^2$$

Also ist $-2t\,\mathrm{Re}\,(w,y) + t^2\|y\|^2 \geq 0$ für alle t. Dies verlangt $\mathrm{Re}\,(w,y) = 0$. Wählen wir statt t imaginäre Zahlen it, so zeigt ein ähnliches Argument, dass $\mathrm{Im}\,(w,y) = 0$ ist. Also ist tatsächlich $w \in \mathcal{M}^\perp$.

Eindeutigkeit: Sei $x = z + w = z' + w'$, $z, z' \in \mathcal{M}$, $w, w' \in \mathcal{M}^\perp$, dann ist $z - z' \in \mathcal{M}$, $w' - w \in \mathcal{M}^\perp$ und folglich

$$z - z' = w' - w \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$$

d.h. $z = z'$, $w = w'$. $\square$

<u>Bemerkung</u>. Der Projektionssatz liefert einen natürlichen Isomorphismus zwischen $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ und $\mathcal{H}$: $\langle z, w \rangle \mapsto z + w$. Wir schreiben deshalb auch $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$.

<u>Übung</u>. Sei A eine Teilmenge eines Hilbert-Raumes $\mathcal{H}$, $L(A)$ die abgeschlossene lineare Spanne. Dann gilt $\overline{L(A)} = A^{\perp\perp}$.

<u>Definition 2.3.</u> Eine <u>beschränkte lineare Transformation</u> (beschränkter Operator) von einem HR*) $\mathcal{H}$ in einen HR $\mathcal{H}'$ ist eine Abbildung $T: \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$, so dass gilt

(i) $T(\alpha x+\beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ für alle ....

(ii) Für ein $C \geq 0$ ist $\|Tx\|_{\mathcal{H}'} \leq C\|x\|_{\mathcal{H}}$ für alle $x \in \mathcal{H}$.

Das kleinste C in (ii) ist die <u>Norm</u> von T

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_{\mathcal{H}}=1} \|Tx\|_{\mathcal{H}'}$$

<u>Lemma 2.4.</u> Eine lineare Transformation $T: \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ ist genau dann stetig, wenn sie beschränkt ist.

<u>Beweis:</u> Aus der Beschränktheit folgt natürlich die Stetigkeit. Umkehrung: Zu $\varepsilon = 1$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $\|x\| < \delta \Rightarrow \|T(x)\| < 1$. Für $x \neq 0$ gilt dann $\|T(\frac{1}{2}\delta \frac{1}{\|x\|} x)\| < 1$, also $\frac{1}{2\|x\|}\delta\|T(x)\| < 1$, d.h. $\|T(x)\| \leq \frac{2}{\delta} \cdot \|x\|$. Da diese Abschätzung auch für $x=0$ gilt ist T beschränkt. $\square$

Beachte: T ist genau dann stetig, wenn T im Nullpunkt stetig ist.

Die Menge der beschränkten linearen Transformationen bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$. Mit der obigen Norm wird $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ zu einem Banach-Raum (Theorem III.2 in Reed & Simon).

---

*) oder Banach-Raum.

<u>Definition 2.5.</u> Der Raum $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ ist der <u>duale Raum</u> von $\mathcal{H}$ und wird mit $\mathcal{H}^*$ bezeichnet. Die Elemente von $\mathcal{H}^*$ werden <u>stetige lineare Funktionale</u> genannt.

Das folgende Resultat von Riesz und Fréchet ist sehr wichtig.

<u>Satz 2.6</u> (Lemma von Riesz). Für jedes $T \in \mathcal{H}^*$ existiert ein eindeutiges $y_T \in \mathcal{H}$, so dass $T(x) = (y_T, x)$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Weiter gilt $\|y_T\|_{\mathcal{H}} = \|T\|_{\mathcal{H}^*}$

<u>Beweis:</u> Es sei $\mathcal{N} = \{x \in \mathcal{H} \mid T(x) = 0\}$. Da T stetig ist, ist $\mathcal{N}$ ein abgeschlossener Unterraum. Für den Spezialfall $\mathcal{N} = \mathcal{H}$ ist $T(x) = 0 = (0, x)$ für alle x. Deshalb dürfen wir annehmen, dass $\mathcal{N}$ ein echter Unterraum von $\mathcal{H}$ ist. Nach dem Projektionssatz 2.2 gibt es dann ein $x_0 \neq 0$ in $\mathcal{N}^\perp$. Wir setzen $y_T = \frac{\overline{T(x_0)}}{\|x_0\|^2} x_0$ und zeigen, dass y_T die gewünschten Eigenschaften hat.
Zunächst sei $x \in \mathcal{N}$; dann ist $T(x) = 0 = (y_T, x)$. Als nächstes nehmen wir x proportional zu x_0, $x = \alpha x_0$. Dann ist

$$T(x) = T(\alpha x_0) = \alpha T(x_0) = \left(\frac{\overline{T(x_0)}}{\|x_0\|^2} x_0, \alpha x_0 \right) = (y_T, \alpha x_0)$$

Aus dem schon Bewiesenen folgt durch Linearität, dass $T(\cdot)$ und $(y_T, \cdot)$ auf der linearen Spanne von $\mathcal{N}$ und x_0 übereinstimmen. Diese ist aber gleich $\mathcal{H}$, denn jedes Element $y \in \mathcal{H}$ kann so geschrieben werden

$$y = \left(y - \frac{T(y)}{T(x_0)} x_0 \right) + \frac{T(y)}{T(x_0)} x_0$$

Dies beweist $T(x) = (y_T, x)$ für alle $x \in \mathcal{H}$. y_T ist natürlich eindeutig.

Um $\|T\|_{\mathcal{H}^*} = \|y_T\|_{\mathcal{H}}$ zu beweisen, beachten wir

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\le 1} |T(x)| = \sup_{\|x\|\le 1} |(y_T, x)| \le \sup_{\|x\|\le 1} \|y_T\| \, \|x\| = \|y_T\|$$

und

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\le 1} |T(x)| \geqslant \left| T\left(\frac{y_T}{\|y_T\|}\right)\right| = \left(y_T, \frac{y_T}{\|y_T\|}\right) = \|y_T\|$$

$\square$

Nach der Schwarzschen Ungleichung definiert auch umgekehrt jedes $y \in \mathcal{H}$ ein stetiges lineares Funktional durch $T_y(x) := (y, x)$. Die Abbildung $y \longmapsto T_y$ ist also eine Bijektion von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{H}^*$ ($\mathcal{H}$ ist reflexiv).

<u>Korollar 2.7.</u> Die Abbildung $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ erfülle

(i) $B(x, \alpha y + \beta z) = \alpha B(x,y) + \beta B(x,z)$

(ii) $B(\alpha x + \beta y, z) = \bar{\alpha} B(x,z) + \bar{\beta} B(y,z)$

(iii) $|B(x,y)| \le C \, \|x\| \, \|y\|$

für alle $x, y, z \in \mathcal{H}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann existiert ein eindeutiger beschränkter linearer Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, so dass

$$B(x,y) = (Ax, y) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathcal{H}$$

Die Norm von A ist gleich der kleinsten Konstanten C in (iii).

<u>Beweis:</u> Für festes x ist $B(x, \cdot)$ nach (ii) und (iii) in $\mathcal{H}^*$. Nach dem Lemma von Riesz existiert deshalb ein eindeutiges $x' \in \mathcal{H}$ mit $B(x,y) = (x', y)$. Man definiere $Ax = x'$. Es ist leicht zu zeigen*, dass $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ ist (Übung).

* * *

---

*) siehe den Beweis von Lemma 6.1

§3. Orthonormierte Basen

Wir treffen zunächst einige Vorbereitungen.

Definition 3.1. Eine Familie $\{x_i\}_{i\in I}$ von Elementen eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$ heisst summierbar zu $x \in \mathcal{H}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge J_ε von I gibt, so dass für alle endlichen J mit $I \supset J \supset J_\varepsilon$ gilt:

$$\| x - \sum_{i\in J} x_i \| < \varepsilon$$

Offenbar ist dann x eindeutig bestimmt. Wir schreiben

$$x = \sum_{i\in I} x_i$$

Die Definition 3.1 verwenden wir insbesondere, wenn der Hilbertraum der Körper $\mathbb{K}$ ist.
Im folgenden seien $J, J_0, J_1, \ldots, J_n, J_\varepsilon$ usw. immer endliche Teilmengen der Indexmenge I, ohne dass dies ausdrücklich wiederholt wird.

Lemma 3.2. (i) Eine Familie $\{x_i\}_{i\in I}$ ist genau dann summierbar, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein J_0 gibt, so dass

$$\| \sum_{i\in J} x_i \| < \varepsilon \text{ für alle } J \text{ mit } J \cap J_0 = \emptyset .$$

(ii) $\{x_i\}_{i\in I}$ ist summierbar zu x genau dann, wenn höchstens abzählbar viele $x_i \neq 0$ sind und wenn für jede Abzählung $x_1, x_2, \ldots$ dieser x_i gilt

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j .$$

Beweis: (i) „$\Rightarrow$" Sei $\{x_i\}$ summierbar und $x = \sum x_i$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es J_0 mit

$$\| \sum_{i\in J'} x_i - x \| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } J' \supset J_0$$

Dann gilt für eine beliebige Menge J mit $J \cap J_0 = \emptyset$

$$\|\sum_{i\in J} x_i\| = \|\sum_{i\in J\cup J_0} x_i - \sum_{i\in J_0} x_i\| \leq \|\sum_{i\in J\cup J_0} x_i - x\| +$$

$$+ \|x - \sum_{i\in J_0} x_i\| < \varepsilon$$

„$\Leftarrow$" Es gibt eine Menge J_n, sodass aus $J \cap J_n = \emptyset$ folgt

$$\|\sum_{i\in J} x_i\| < \frac{1}{n}.$$

Deswegen ist $\{\sum_{i\in J_1\cup\ldots\cup J_n} x_i\}_{n=1,2,\ldots}$ eine Cauchy-Folge. Ihr Limes sei x. Offenbar gilt

$$x = \sum_{i\in I} x_i.$$

(ii) Ist $\{x_i\}_{i\in I}$ summierbar und haben die J_n dieselbe Bedeutung wie eben, so ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ abzählbar. Sei $i \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$. Dann gilt $\|x_i\| < 1/n$ für alle n, also $x_i = 0$. Der Rest ist jetzt offensichtlich, ebenso die andere Richtung der Behauptung. □

Lemma 3.3. Es seien $\{x_i\}_{i\in I}$, $\{y_i\}_{i\in I}$ summierbare Familien, $\alpha \in \mathbb{K}$, $z \in \mathcal{H}$. Dann gilt

(i) $\alpha \sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} \alpha x_i$

(ii) $\sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i = \sum_{i\in I} (x_i + y_i)$

(iii) $(z, \sum_{i\in I} x_i) = \sum_{i\in I} (z, x_i)$

Beweis: (i) und (ii) sind klar. (iii) Sei nach dem letzten Lemma

$$x = \sum_{i\in I} x_i = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$$

Dann ergibt sich der Beweis aus folgender Ungleichung:

$$|(z,x) - \sum_{j=1}^{n} (z, x_j)| = |(z, \sum_{j=n+1}^{\infty} x_j)| \leq \|z\| \, \|\sum_{j=n+1}^{\infty} x_j\| \leq \varepsilon \|z\|$$

für genügend grosses n. $\square$

<u>Lemma 3.4.</u> Sei $\{x_i\}_{i\in I}$ eine Familie paarweise orthogonaler Elemente aus $\mathcal{H}$. Dann gilt: $\{x_i\}_{i\in I}$ ist summierbar genau dann, wenn $\{\|x_i\|^2\}_{i\in I}$ in dem Hilbert-Raum $\mathbb{R}$ summierbar ist. In diesem Fall gilt ferner:

$$\|\sum x_i\|^2 = \sum \|x_i\|^2.$$

<u>Beweis:</u> Mit den Bezeichnungen in Lemma 3.2.(i) gilt nach dem Satz von Pythagoras

$$\sum_{i\in J} \|x_i\|^2 = \|\sum_{i\in J} x_i\|^2 < \varepsilon^2 \Longleftrightarrow \{\|x_i\|^2\}_{i\in I} \text{ summierbar.}$$

Das ist die behauptete Äquivalenz.

Sei $x = \sum_{i\in I} x_i$. Dann ist nach Lemma 3.3

$$(x,x) = (x, \sum_i x_i) = \sum_i (x,x_i) = \sum_i (\sum_j x_j, x_i)$$
$$= \sum_i (\sum_j (x_i,x_j)) = \sum_i (x_i,x_i). \qquad \square$$

<u>Satz 3.5.</u> Sei $\{x_i\}_{i\in I}$ orthonormierte Untermenge des Hilbert-Raumes $\mathcal{H}$. Dann gilt:

(i) $\sum_{i\in I} |(x_i,x)|^2 \leq \|x\|^2$ für alle $x\in\mathcal{H}$ (Bessel'sche Ungleichung);

(ii) $\sum_{i\in I} |(x_i,x)|^2 = \|x\|^2$ (Parsevalsche Gleichung) genau dann wenn

$$x = \sum_{i\in I} (x_i,x)\, x_i.$$

<u>Beweis:</u> Für alle endlichen Untermengen J von I gilt:

$$0 \leq \|x - \sum_{j\in J} (x_j,x)x_j\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j\in J} |(x_j,x)|^2.$$

Also existiert $\sum_{i\in I} |(x_i,x)|^2$, und die Bessel'sche Ungleichung ist erfüllt. ($\overbrace{\text{existiert}}$ nach (i) und Lemma 8.4)

$$\text{(ii)} \quad \| x - \sum_{i\in I} (x_i,x)\, x_i \|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i\in I} |(x_i,x)|^2 = 0$$

$$\iff \quad x = \sum_{i\in I} (x_i,x)\, x_i \qquad \square$$

Ist eine Familie $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ von Hilberträumen $\mathcal{H}_i$ gegeben, so wird ihre <u>direkte Summe</u> $\bigoplus_i \mathcal{H}_i$ definiert als die folgende Teilmenge des cartesischen Produktes der $\mathcal{H}_i$

$$\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i = \left\{ \{x_i\}_{i\in I} \mid x_i \in \mathcal{H}_i;\ \sum_{i\in I} \|x_i\|^2_{\mathcal{H}_i} < \infty \right\}$$

Für zwei Elemente dieser Teilmenge, $\{x_i\}$ und $\{y_i\}$, ist mit $\{\|x_i\|^2\}$, $\{\|y_i\|^2\}$ auch $\{\|x_i\|\ \|y_i\|\}$ summierbar. Nach der Schwarzschen Ungleichung $|(x_i,y_i)| \leq \|x_i\|\ \|y_i\|$ ist dann auch $\{(x_i,y_i)\}$ summierbar.
Damit folgt leicht, dass die direkte Summe $\bigoplus_i \mathcal{H}_i$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist. Mit dem inneren Produkt

$$(\{x_i\},\{y_i\}) = \sum_{i\in I} (x_i,y_i)$$

wird dieser Raum zu einem Hilbert-Raum. Es ist tatsächlich ziemlich klar, dass dieses $(\cdot,\cdot)$ alle Eigenschaften eines Skalarproduktes hat. Haben wir eine Cauchy-Folge in $\bigoplus_i \mathcal{H}_i$, so ist leicht zu sehen, dass die Folge der i-ten Koordinaten eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}_i$ ist. Diese konvergiert also in $\mathcal{H}_i$. Die Folge dieser Grenzwerte liegt in $\bigoplus_i \mathcal{H}_i$ und ist Grenzwert der Cauchy-Folge von der wir ausgegangen sind.

Identifiziert man $\mathcal{H}_i$ mit seinem Bild in $\bigoplus_i \mathcal{H}_i$, so ist für $\{x_i\} \in \bigoplus_i \mathcal{H}_i$

$$\{x_i\}_{i\in I} = \sum_{i\in I} x_i$$

<u>Satz 3.6.</u> Sei $\{x_i\}_{i\in I}$ ein orthonormales System von Vektoren aus dem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\{x_i\}_{i\in I}$ ist maximal (oder vollständig), d.h. ist $\{y_i\}$ ein orthonormales System, das alle x_i enthält, so sind $\{x_i\}$ und $\{y_i\}$ als Mengen gleich.

(ii) Gilt $x \perp x_i$ für alle i, so folgt $x = 0$.

(iii) Sei $\mathcal{H}_i = \{\alpha x_i \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$. Dann existiert ein isometrischer Isomorphismus

$$\mathcal{H} \cong \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$$

(iv) Für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt:

$$x = \sum_{i\in I} (x_i, x)\, x_i \qquad \text{(Fourier-Entwicklung)}$$

(v) Für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt

$$(x,y) = \sum_{i\in I} (x, x_i)(x_i, y)$$

(vi) Für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt

$$\|x\|^2 = \sum |(x_i, x)|^2 \qquad \text{(Parsevalsche Gleichung)}$$

<u>**Beweis**</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) Wäre $x \neq 0$ und $x \perp x_i$, so wäre

$$\{x_i\}_{i\in I} \cup \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}$$

orthonormales System, d.h. $\{x_i\}$ wäre nicht maximal.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Die kanonische Abbildung

$$i : \bigoplus \mathcal{H}_i \longrightarrow \mathcal{H}, \quad i(x_j) = x_j$$

ist eine lineare Isometrie, die das Skalarprodukt erhält. Wäre i nicht surjektiv, so gäbe es wegen der Abgeschlossenheit von $i(\bigoplus \mathcal{H}_i)$ ein $x \neq 0$ mit $x \perp i(\bigoplus \mathcal{H}_i)$, also $x \perp x_i$. Dies widerspricht (ii).

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Jedes Element $x \in \bigoplus_i \mathcal{H}_i$ schreibt sich in der Form

$$x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i .$$

Aus $(x_j, \sum \alpha_i x_i) = \alpha_j$ folgt die Fourier-Entwicklung

$$x = \sum_{i\in I} (x_i, x)\, x_i .$$

(iv) $\Longrightarrow$ (v) Triviale Rechnung

(v) $\Longrightarrow$ (vi) Setze $y = x$

(vi) $\Longrightarrow$ (i) Gäbe es ein x mit $\|x\| = 1$ und $x \perp x_i$ für alle i, so wäre nach der Parsevalschen Gleichung

$$\|x\|^2 = \sum |(x_i, x)|^2 = 0$$

also $x = 0$, Widerspruch! $\square$

<u>Definition 3.7.</u> Ein orthonormiertes System $\{x_i\}_{i\in I}$, das die Bedingungen des letzten Satzes erfüllt, heisst <u>Hilbert-Basis</u> oder ~~[illegible]~~ <u>orthonormierte Basis</u> (ONB) von $\mathcal{H}$.

Aus (iii) folgt, dass $\mathcal{H}$ durch die Mächtigkeit der Basis bis auf Isomorphie bestimmt ist.

<u>Satz 3.8.</u> Ein Hilbert-Raum besitzt eine orthonormierte Basis.

<u>Beweis:</u> Dieser erfolgt mit Hilfe des Zornschen Lemmas. Sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller orthonormierten Systeme. $\mathfrak{M}$ ist bezüglich der Inklusion „$\subset$" halbgeordnet (d.h., es gilt $M \subset M$ für alle $M \in \mathfrak{M}$; aus $M_1 \subset M_2$, $M_2 \subset M_3$ folgt $M_1 \subset M_3$; aus $M_1 \subset M_2$, $M_2 \subset M_1$ folgt $M_1 = M_2$). Ist $\mathfrak{N}$ eine total geordnete Teilmenge von $\mathfrak{M}$ (d.h., für $M_1, M_2 \in \mathfrak{N}$ gilt $M_1 \subset M_2$ oder $M_2 \subset M_1$), so hat $\mathfrak{N}$ eine obere Schranke $M \in \mathfrak{M}$ (d.h. für jedes $M' \in \mathfrak{N}$ gilt $M' \subset M$); als obere Schranke M von $\mathfrak{N}$ können wir die Vereinigung aller $N \in \mathfrak{N}$ wählen.

Dieses M ist ein orthonormales System: Sind $x_1, x_2 \in M$, so existieren $M_1, M_2 \in \mathfrak{N}$ mit $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$; da $M_1 \subset M_2$ oder $M_2 \subset M_1$ gilt, ist $x_1, x_2 \in M_2$ oder $x_1, x_2 \in M_1$, also gilt $x_1 \perp x_2$.

Da M alle $N \in \mathfrak{N}$ enthält, ist M obere Schranke von $\mathfrak{N}$. Nach dem Lemma von Zorn folgt hieraus die Existenz von mindestens einem maximalen Element $M_{max} \in \mathfrak{M}$ (d.h., für jedes $M \in \mathfrak{M}$ mit $M_{max} \subset M$ gilt $M_{max} = M$).

Dieses M_{max} ist eine ONB (nach (i) von Satz 3.6). $\square$

<u>Bemerkung.</u> Eine geringfügige Änderung des Beweises zeigt: Ist M_0 ein orthonormiertes System, so gibt es eine ONB M in $\mathcal{H}$ mit $M \supset M_0$.

<u>Definition 3.9.</u> Ein topologischer Raum X heisst <u>separabel</u>, falls eine abzählbare Teilmenge M von X existiert mit $\overline{M} = X$, d.h., M ist dicht in X.

In der Praxis sind die meisten Hilbert-Räume separabel.

<u>Satz 3.10.</u> Ein Hilbert-Raum ist genau dann separabel, wenn er eine abzählbare ONB hat.

<u>Beweis:</u> Der HR $\mathcal{H}$ sei separabel und $\{x_n\}$ sei eine abzählbare dichte Menge. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass alle endlichen Teilmengen von $\{x_n\}$ linear unabhängig sind. (Sonst werfen wir gewisse Elemente weg.) Mit dem Orthonormalisierungsverfahren von E. Schmidt*) erhalten wir aus $\{x_n\}$ eine abzählbare ONB. Ist umgekehrt eine abzählbare ONB gegeben, dann sind die endlichen Linearkombinationen der Basiselemente mit rationalen Koeffizienten nach Satz 3.6 (iii) dicht in $\mathcal{H}$, d.h. $\mathcal{H}$ ist separabel. $\square$

<u>Bemerkung.</u> Aus Satz 3.10 und Satz 3.6 (iii) ist ein separabler HR entweder isomorph zu $\mathbb{K}^N$ oder isomorph zu l_2.

<u>Beispiel.</u> Die Funktionen $x_n : t \mapsto e^{int}$ $(n \in \mathbb{Z})$ bilden eine ONB von $L^2([-\pi,\pi])$. (Für einen Beweis siehe z.B. das zitierte Buch von Hewitt & Stromberg, Theorem 16.32)

§4. Tensorprodukt von Hilberträumen

In der QM benötigt man das Tensorprodukt für die Beschreibung der Vereinigung von zwei physikalischen Systemen (z.B. Atomkern und Elektronen) zu einem Gesamtsystem.
Zunächst definieren wir das algebraische Tensorprodukt von zwei Vektorräumen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$.
Mit $\mathcal{F}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ bezeichnen wir den Vektorraum der

---

*) Konsultiere ein Buch, z.B. Hewitt & Stromberg, § 16.22.

formalen Linearkombinationen von Paaren $\langle x,y\rangle$, $x\in\mathcal{H}_1$, $y\in\mathcal{H}_2$:

$$F(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)=\left\{\sum_{j=1}^{n}c_j\langle x_j,y_j\rangle \,\middle|\, c_j\in\mathbb{K},\ x_j\in\mathcal{H}_1,\ y_j\in\mathcal{H}_2,\ n\in\mathbb{N}\right\} \tag{4.1}$$

(F ist also der <u>freie Vektorraum</u> über den Paaren.) Sei $\mathcal{N}$ der Teilraum von F, der von den Elementen der Form

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_j b_k\langle x_j,y_k\rangle-1.\left\langle\sum_{j=1}^{n}a_j x_j,\sum_{k=1}^{m}b_k y_k\right\rangle \tag{4.2}$$

aufgespannt wird. Der Quotientenraum $F(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)/\mathcal{N}$ heisst das <u>algebraische Tensorprodukt</u> von $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ und wird mit $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ bezeichnet.

Das cartesische Produkt $\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2$ kann als Teilmenge von F aufgefasst werden, dabei identifiziert man $\langle x,y\rangle\in\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2$ mit $1.\langle x,y\rangle\in F$. Die durch $\langle x,y\rangle$ erzeugte Äquivalenzklasse aus $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ wird mit $x\otimes y$ bezeichnet; diese Elemente heissen <u>einfache Tensoren</u>. Jedes Element von $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ ist als endliche Linearkombination von einfachen Tensoren darstellbar. Nach Konstruktion ist eine solche Linearkombination einfacher Tensoren genau dann gleich Null, wenn sie endliche Linearkombination von Elementen der Gestalt (s. (4.2))

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_j b_k\, x_j\otimes y_k-\Big(\sum_{j=1}^{n}a_j x_j\Big)\otimes\Big(\sum_{k=1}^{m}b_k y_k\Big)$$

ist. Insbesondere gilt also

$$\Big(\sum_{j=1}^{n}a_j x_j\Big)\otimes\Big(\sum_{k=1}^{m}b_k y_k\Big)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_j b_k\, x_j\otimes y_k \tag{4.3}$$

Nun nehmen wir an, $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ seien zwei Hilberträume mit Skalarprodukten $(\cdot,\cdot)_1$ und $(\cdot,\cdot)_2$. Wir wollen auch auf $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$

ein Skalarprodukt definieren. Zunächst wird durch die folgende Formel eine Sesquilinearform auf $\mathcal{F}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ definiert:

$$s\Big(\sum_{j=1}^{n} c_j \langle x_j,y_j\rangle, \sum_{k=1}^{m} c_k' \langle x_k',y_k'\rangle\Big)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\bar{c}_j c_k' \cdot (x_j,x_k')_1 (y_j,y_k')_2 \qquad (4.4)$$

Für beliebige $z\in\mathcal{N}$ und $w\in\mathcal{F}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ ist $s(z,w)=s(w,z)=0$, wie man durch Ausrechnen leicht bestätigt. Deshalb wird durch

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j\otimes y_j, \sum_{k=1}^{m} c_k'\, x_k'\otimes y_k'\Big)=s\Big(\sum_{j=1}^{n} c_j\langle x_j,y_j\rangle, \sum_{k=1}^{m} c_k'\langle x_k',y_k'\rangle\Big) \qquad (4.5)$$

eine Sesquilinearform auf $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ definiert. Diese ist ein Skalarprodukt. Ist nämlich $z=\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j\otimes y_j\neq 0$, so können wir z wie folgt darstellen. Sind $\{e_k\}$ bzw. $\{e_k'\}$ Orthonormalbasen von $L\{x_1,\dots,x_n\}$ bzw. $L\{y_1,\dots,y_n\}$, so ist

$$z=\sum_{k,l} c_{kl}\, e_k\otimes e_l', \quad c_{kl}=\sum_j c_j (e_k,x_j)(e_k',y_j)$$

und somit

$$(z,z)=\sum_{k,l}|c_{kl}|^2>0. \qquad (4.6)$$

Es ist also $(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2,(\cdot,\cdot))$ ein Prä-Hilbertraum. Die Vervollständigung dieses Raumes wird das <u>(vollständige) Tensorprodukt</u> genannt und mit $\mathcal{H}_1\hat{\otimes}\mathcal{H}_2$ bezeichnet.

<u>Beispiel</u>. Es seien $(\Omega_1,\mu_1),(\Omega_2,\mu_2)$ zwei Maßräume und $\mathcal{H}_i=L^2(\Omega_i,\mu_i)$, $i=1,2$. Dann ist $\mathcal{H}_1\hat{\otimes}\mathcal{H}_2$ isomorph zu $L^2(\Omega_1\times\Omega_2,\mu_1\times\mu_2)$. Dies sieht man so. Zunächst überzeugt man sich leicht davon, dass ein Element $\sum_{j=1}^{n} c_j\langle f_j,g_j\rangle\in\mathcal{F}$ genau dann in $\mathcal{N}$ ist (vgl. (4.2)), wenn die Funktion

$$\langle\omega_1,\omega_2\rangle\mapsto\sum c_j f_j(\omega_1) g_j(\omega_2), \quad \omega_i\in\Omega_i$$

fast überall bezüglich des Produktmasses $\mu_1 \times \mu_2$ verschwindet. Das algebraische Tensorprodukt $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ besteht also aus gewissen Äquivalenzklassen von bezüglich $\mu_1 \times \mu_2$ quadratisch integrierbaren Funktionen auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ und für $f, g \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ ist

$$(f,g) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \overline{f}\, g \; d(\mu_1 \times \mu_2)$$

Es dürfte klar sein, dass $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ in $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \times \mu_2)$ dicht ist. (Es genügt darauf hinzuweisen, dass $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ die Treppenfunktionen enthält.)

Wichtig ist noch der

<u>Satz 4.1.</u> Sind $\{e_i\}_{i \in I}$ und $\{f_j\}_{j \in J}$ Orthonormalbasen von $\mathcal{H}_1$ bzw. $\mathcal{H}_2$, so ist $\{e_i \otimes f_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$.

<u>Beweis:</u> Übungsaufgabe.

* * *

Kapitel II. Beschränkte lineare Operatoren

§5. Der Satz von Banach-Steinhaus, starke und schwache Konvergenz

Wir beweisen zunächst den Satz von der gleichmässigen Beschränktheit (uniform boundedness principle) und ziehen daraus einige wichtige Folgerungen.

Satz 5.1 (Banach-Steinhaus). Seien X und Y Banachräume, $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge von $\mathcal{L}(X,Y)$. Ist $\mathfrak{M}$ punktweise beschränkt (d.h., zu jedem $x\in X$ existiert ein $C_x\geq 0$ mit $\|Tx\|\leq C_x$ für alle $T\in\mathfrak{M}$), so ist $\mathfrak{M}$ beschränkt (d.h. es gibt ein $C\geq 0$ mit $\|T\|\leq C$ für alle $T\in\mathfrak{M}$).

Beweis: 1. Schritt. Es genügt zu zeigen, dass ein $x_0\in X$, ein $\rho>0$ und ein $C'\geq 0$ existieren mit $\|Tx\|\leq C'$ für alle $x\in U(x_0,\rho)$ und alle $T\in\mathfrak{M}$. Dann gilt nämlich für alle $y\in U(0,\rho)$ und alle $T\in\mathfrak{M}$

$$\|Ty\| = \|T(x_0+y-x_0)\|\leq \|T(x_0+y)\|+\|Tx_0\|\leq C'+C_{x_0}\equiv C'',$$

denn es ist $x_0+y\in U(x_0,\rho)$. Also gilt für alle $y\in U(0,1)$ und $T\in\mathfrak{M}$

$$\|Ty\|\leq\rho^{-1}C''=C$$

d.h., es ist $\|T\|\leq C$ für alle $T\in\mathfrak{M}$.

2. Schritt. Wir müssen nun die Existenz von x_0, ρ und C' mit den obigen Eigenschaften beweisen. Dazu nehmen wir an, dass keine derartigen Elemente existieren, d.h. für jedes $x_0\in X$ und jedes $\rho>0$ ist die Menge $\{\|Tx\|\,|\,T\in\mathfrak{M}, x\in U(x_0,\rho)\}$

unbeschränkt. Insbesondere ist die Menge $\{\|Tx\| \mid T\in\mathfrak{M}, x\in U(0,1)\}$ unbeschränkt; es gibt also ein $x_1 \in U(0,1)$ und ein $T_1\in\mathfrak{M}$ mit $\|T_1x_1\|>1$. Da T_1 stetig ist, existiert ein ρ_1 mit $0<\rho_1<2^{-1}$ so, dass gilt

$$\bar U(x_1,\rho_1)\subset U(0,1) \quad \text{und } \|T_1x\|>1 \text{ für alle } x\in\bar U(x_1,\rho_1)$$

Da aber auch $\{\|Tx\| \mid T\in\mathfrak{M}, x\in U(x_1,\rho_1)\}$ unbeschränkt ist, gibt es ein $x_2\in U(x_1,\rho_1)$ und ein $T_2\in\mathfrak{M}$ mit $\|T_2x_2\|>2$. Da T_2 stetig ist, existiert ein ρ_2 mit $0<\rho_2<2^{-2}$ so, dass gilt

$$\bar U(x_2,\rho_2)\subset U(x_1,\rho_1) \quad \text{und } \|T_2x\|>2 \text{ für alle } x\in\bar U(x_2,\rho_2).$$

Induktiv erhält man auf diese Weise Folgen $\{x_n\}$ aus X, $\{T_n\}$ aus $\mathfrak{M}$ und $\{\rho_n\}$ aus $(0,1)$ mit

$$\bar U(x_{n+1},\rho_{n+1})\subset U(x_n,\rho_n),\ \rho_n<2^{-n} \text{ und } \|T_nx\|>n \text{ für alle } x\in\bar U(x_n,\rho_n).$$

Insbesondere gilt $\|x_n-x_m\|<\rho_{n_0}$ für $n,m\geq n_0$ und deshalb ist $\{x_n\}$ eine Cauchyfolge; es existiert also ein $x\in X$ mit $x_n\to x$. Da für $n\geq m$ gilt $x_n\in U(x_m,\rho_m)$, folgt $x\in\bar U(x_m,\rho_m)$ für alle $m\in\mathbb{N}$. Also gilt $\|T_mx\|>m$ für alle $m\in\mathbb{N}$, im Widerspruch zu $\|T_mx\|\leq C_x$. $\square$

Es seien X und Y normierte Räume. Eine Folge $\{T_n\}$ aus $\mathcal{L}(X,Y)$ heisst <u>stark konvergent</u> gegen $T\in\mathcal{L}(X,Y)$, wenn für alle $x\in X$ gilt $Tx=\lim T_nx$; wir schreiben auch $T=s\text{-}\lim T_n$ oder $T_n\xrightarrow{s}T$; T heisst <u>starker Grenzwert</u> der Folge $\{T_n\}$. Offensichtlich hat jede Folge $\{T_n\}$ in $\mathcal{L}(X,Y)$ höchstens einen starken Grenzwert.

Eine Folge $\{T_n\}$ aus $\mathcal{L}(X,Y)$ heisst eine <u>starke Cauchyfolge</u>, wenn für jedes $x\in X$ die Folge $T_n x$ eine Cauchyfolge in Y ist. Jede stark konvergente Folge ist eine starke Cauchyfolge.

<u>Satz 5.2</u>. Seien X und Y Banach-Räume. Dann gilt:

a) Jede starke Cauchyfolge ist in $\mathcal{L}(X,Y)$ beschränkt.

b) Ist $\{T_n\}$ eine starke Cauchyfolge in $\mathcal{L}(X,Y)$, so existiert ein $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ mit $T_n \xrightarrow{s} T$.

<u>Beweis</u>: a) Für jedes $x\in X$ ist $\{T_n x\}$ eine Cauchyfolge und somit beschränkt. Nach Satz 5.1 gibt es also ein C mit $\|T_n\|\le C$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

b) Für jedes $x\in X$ ist $\{T_n x\}$ eine Cauchyfolge, also konvergent in Y. Wir definieren T durch $Tx=\lim T_n x$. T ist linear, denn es gilt für alle $x_1,x_2\in X$, $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{K}$

$$T(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)=\lim T_n(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)=\alpha_1 \lim T_n x_1+\alpha_2 \lim T_n x_2$$
$$=\alpha_1 T x_1+\alpha_2 T x_2 .$$

Nach a) gibt es ein $C\geq 0$ mit $\|T_n\|\le C$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Also gilt*)

$$\|Tx\|=\lim \|T_n x\| \le C\|x\|$$

d.h., es gilt $T\in\mathcal{L}(X,Y)$. Nach Konstruktion gilt $T_n\xrightarrow{s}T$. □

---

*) Wir bemerken folgendes: Ist $\{x_n\}$ eine konvergente Folge in einem normierten Raum, $x_n\to x$, dann folgt $\|x_n\|\to\|x\|$. In der Tat gilt allgemein $\|x\pm y\|\geq \big|\|x\|-\|y\|\big|$ (Übungsaufgabe), also ist $\big|\|x_n\|-\|x\|\big|\le\|x_n-x\|$; daraus folgt die Behauptung.
Wir notieren auch: Ist $\{x_n\}$ eine Cauchyfolge, so ist die Folge $\{\|x_n\|\}$ konvergent (also auch beschränkt). Dies folgt aus $\big|\|x_n\|-\|x_m\|\big|\le\|x_n-x_m\|$.

Beispiel. Die Operatoren $T_n \in \mathcal{L}(l_2)$ seien erklärt durch

$$T_n(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$$

Dann gilt offenbar für alle $x \in l_2$ $T_n x \to 0$, d.h. $T_n \xrightarrow{s} 0$. Für alle $x \in l_2$ gilt $\|T_n x\| \leq \|x\|$, also $\|T_n\| \leq 1$. Für $e_j = \{\delta_{jn}\}$ gilt ausserdem $T_j e_{j+1} = e_1$, also ist $\|T_n\| = 1$. Dies zeigt, dass die starke Konvergenz nicht die Konvergenz bezüglich der Norm von $\mathcal{L}(X,Y)$ impliziert.

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum. Eine Folge $\{x_n\}$ aus $\mathcal{H}$ heisst schwach konvergent gegen $x \in \mathcal{H}$, wenn für alle $y \in \mathcal{H}$ gilt $(x_n, y) \to (x, y)$; wir schreiben auch $x = w\text{-}\lim x_n$ oder $x_n \xrightarrow{w} x$; x heisst schwacher Grenzwert der Folge $\{x_n\}$ (w von "weak"). Eine Folge $\{x_n\}$ aus $\mathcal{H}$ heisst eine schwache Cauchyfolge, wenn für jedes $y \in \mathcal{H}$ die Folge $\{(x_n, y)\}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ ist. Jede schwach konvergente Folge ist natürlich eine schwache Cauchyfolge.

Satz 5.3. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum. Dann gilt:

a) Jede schwache Cauchyfolge ist beschränkt.

b) Ist $\{x_n\}$ eine schwache Cauchyfolge in $\mathcal{H}$, so existiert ein $x \in \mathcal{H}$ mit $x_n \xrightarrow{w} x$.

Beweis: Dieser ergibt sich unmittelbar aus Satz 5.2, wenn man beachtet, dass die schwache Konvergenz von $\{x_n\}$ gleichbedeutend mit der starken Konvergenz*) der Folge T_{x_n} der durch x_n erzeugten Funktionale. In Teil b) ist der Satz von Riesz zu benutzen. □

---

*) in $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{K}) = \mathcal{H}^*$

Satz 5.4. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum. Jede beschränkte Folge Folge $\{x_n\}$ in $\mathcal{H}$ enthält eine schwach konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}$. (Diesen Satz soll man sich merken!)

Beweis: Es sei $\mathcal{M} = L\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, dann ist $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ dicht in $\mathcal{H}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge $\{(x_n, x_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, da $|(x_n, x_k)| \leq \|x_n\| \, \|x_k\|$. Deshalb gibt es nach Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge.
Sei $\{x_{n_{1,l}}\}_{l\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge für die $\{(x_{n_{1,l}}, x_1)\}$ konvergiert. Davon betrachten wir eine Teilfolge $\{x_{n_{2,l}}\}$ für die $\{(x_{n_{2,l}}, x_2)\}$ konvergiert; etc.. Induktiv erhalten wir so Teilfolgen $\{x_{n_{j,l}}\}_{l\in\mathbb{N}}$ von $\{x_n\}$ mit: $\{x_{n_{j+1,l}}\}_{l\in\mathbb{N}}$ ist Teilfolge von $\{x_{n_{j,l}}\}_{l\in\mathbb{N}}$ und $\{(x_{n_{j,l}}, x_j)\}$ ist konvergent. Für die Diagonalfolge $\{x_{n_l}\} := \{x_{n_{l,l}}\}$ ist dann $\{(x_{n_l}, x_j)\}_{l\in\mathbb{N}}$ konvergent für alle $j \in \mathbb{N}$.
Da für alle $x \in \mathcal{M}^\perp$ gilt $(x_{n_l}, x) = 0$ für alle $l \in \mathbb{N}$, ist also $\{(x_{n_l}, x)\}$ konvergent für alle x aus dem dichten Teilraum $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$. Nach dem anschliessenden Lemma 5.5 ist deshalb $\{x_{n_l}\}$ eine schwache Cauchyfolge und damit konvergiert sie nach Satz 5.3 b schwach gegen ein Element $x \in \mathcal{H}$. $\square$

Lemma 5.5. a) Seien X und Y normierte Räume. Ist die Folge $\{T_n\}$ aus $\mathcal{L}(X,Y)$ beschränkt und ist $\{T_n y\}$ eine Cauchyfolge für jedes y aus einer dichten Teilmenge M von X, so ist $\{T_n\}$ eine starke Cauchyfolge.
b) Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum. Ist die Folge $\{x_n\}$ in $\mathcal{H}$ beschränkt und ist $\{(x_n, y)\}$ eine Cauchyfolge für alle y aus einer dichten Teilmenge M von $\mathcal{H}$, so ist $\{x_n\}$ eine schwache Cauchyfolge.

Beweis: a) Sei $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Es ist zu zeigen, dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $\|T_n x - T_m x\| \leq \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Da M dicht ist, gibt es ein $y \in M$ mit $\|x - y\| \leq \frac{\varepsilon}{3C}$ (mit $C = \sup\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\}$). Wählt man nun n_0 so, dass $\|T_n y - T_m y\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n, m \geq n_0$ gilt, so ist

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n(x-y)\| + \|T_n y - T_m y\| + \|T_m(y-x)\| \leq \varepsilon$$

für $n, m \geq n_0$

Dies beweist a) (typisches "$\frac{\varepsilon}{3}$-Argument"). Die Aussage b) folgt aus a) mit derselben Bemerkung wie beim Beweis von Satz 5.3. □

Beispiel. Jede orthonormierte Folge $\{x_n\}$ konvergiert schwach gegen Null. Dies folgt aus der Bessel'schen Ungleichung $\|x\|^2 \geq \sum |\langle x_n, x\rangle|^2$. Insbesondere ist die Folge der Einheitsvektoren $\{e_j = (\delta_{jn})\}$ in l_2 schwach konvergent gegen Null. Dieses Beispiel zeigt, dass i. allg. die schwache Konvergenz nicht die Normkonvergenz impliziert!

Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ Prähilberträume. Eine Folge $\{T_n\}$ aus $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ heisst <u>schwach konvergent</u> gegen $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, wenn für alle $x \in \mathcal{H}_1$ die Folge $\{T_n x\}$ in $\mathcal{H}_2$ schwach gegen Tx konvergiert, d.h. $(T_n x, y) \to (Tx, y)$ für alle $x \in \mathcal{H}_1$ und $y \in \mathcal{H}_2$; wir schreiben $T = w\text{-}\lim T_n$ oder $T_n \xrightarrow{w} T$. T heisst <u>schwacher Grenzwert</u> der Folge $\{T_n\}$. Eine Folge $\{T_n\}$ aus $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ heisst eine <u>schwache Cauchyfolge</u>, wenn $\{T_n x\}$ für jedes $x \in \mathcal{H}_1$ eine schwache Cauchyfolge in $\mathcal{H}_2$ ist.

<u>Satz 5.6.</u> Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ Hilberträume. Dann gilt:
a) Jede schwache Cauchyfolge $\{T_n\}$ aus $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ist beschränkt.

b) Ist $\{T_n\}$ eine schwache Cauchyfolge in $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$, so existiert ein $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ mit $T_n \xrightarrow{w} T$.

<u>Beweis</u>: a) Für jedes $x \in \mathcal{H}_1$ ist $\{T_n x\}$ eine schwache Cauchyfolge in $\mathcal{H}_2$. Diese ist nach Satz 5.3 a beschränkt. Mit dem Satz von Banach-Steinhaus folgt hieraus die Beschränktheit der Folge $\{\|T_n\|\}$.

b) Für jedes $x \in \mathcal{H}_1$ ist $\{T_n x\}$ eine schwache Cauchyfolge, also nach Satz 5.3b schwach konvergent in $\mathcal{H}_2$. Wir definieren $Tx = w\text{-}\lim T_n x$ für alle $x \in \mathcal{H}_1$. Wie im Beweis von Satz 5.2b beweist man die Linearität von T. Nach Teil a) gibt es ein $C \geq 0$ mit $\|T_n\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$|(Tx,y)| = \lim |(T_n x, y)| \leq C\|x\|\,\|y\| \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H}_1,\ y \in \mathcal{H}_2$$

Also ist T beschränkt. Nach Konstruktion gilt offenbar $T_n \xrightarrow{w} T$.

<u>Bemerkung</u>. Aus $T_n \longrightarrow T$ folgt $T_n \xrightarrow{s} T$; aus $T_n \xrightarrow{s} T$ folgt $T_n \xrightarrow{w} T$.

<u>Satz 5.7.</u> Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ Hilberträume, $T: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ein linearer Operator. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) T ist beschränkt

(ii) Aus $x_n \xrightarrow{w} x$ folgt $Tx_n \xrightarrow{w} Tx$

(iii) Aus $x_n \to x$ folgt $Tx_n \xrightarrow{w} Tx$.

<u>Beweis</u>: Aus (i) folgt (ii): Es gelte $x_n \xrightarrow{w} x$. Zu T existiert der adjungierte Operator T^* in $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ (Dies wird im nächsten Abschnitt besprochen), für den gilt:

$$(y, Tx_n) = (T^* y, x_n) \longrightarrow (T^* y, x) = (y, Tx)$$

d.h., es gilt $Tx_n \xrightarrow{w} Tx$.

Aus (ii) folgt (iii): Dies ist trivial, da aus $x_n \to x$ folgt $x_n \xrightarrow{w} x$.

Aus (iii) folgt (i): Wir nehmen an, dass T nicht beschränkt ist, d.h., es gibt eine Folge $\{x_n\}$ aus $\mathcal{H}_1$ mit $\|x_n\| \leq 1$ und $\|Tx_n\| \geq n^2$. Dann gilt $\frac{1}{n} x_n \to 0$; aus (iii) folgt also $\frac{1}{n} Tx_n \xrightarrow{w} 0$. Nach Satz 5.3 a ist also die Folge $\{\frac{1}{n} Tx_n\}$ beschränkt. Das ist ein Widerspruch zu $\|\frac{1}{n}Tx_n\| = \frac{1}{n}\|Tx_n\| \geq n$. $\square$

§6. Hermitesche Operatoren

Es sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum. Dann ist (y, Tx) eine beschränkte Sesquilinearform. Nach Korollar 2.7 existiert ein eindeutiger Operator $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ für den gilt:

$$(y, Tx) = (T^* y, x) \quad \text{für alle } x, y \in \mathcal{H} \tag{6.1}$$

und

$$\|T^*\| = \operatorname{Inf}\{C \mid |(y,Tx)| \leq C \|x\| \|y\|\}$$

Nach dem folgenden Lemma ist deshalb

$$\|T^*\| = \|T\| \tag{6.2}$$

Lemma 6.1. Es sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum. Gilt für alle $x, y \in \mathcal{H}$

$$|(y, Tx)| \leq C \|x\| \|y\|$$

so folgt

$$\|T\| \leq C$$

Ferner gilt

$$\|T\| = \operatorname{Inf}\{C \in \mathbb{R} \mid |(y,Tx)| \le C\|x\|\,\|y\| \text{ für alle } x,y\}$$

$$= \operatorname{Sup}\{|(y,Tx)| \mid \|x\| = \|y\| = 1\}$$

<u>Beweis</u>: Zunächst ist

$$|(y,Tx)| \le \|y\|\,\|Tx\| \le \|T\|\,\|x\|\,\|y\|$$

d.h. <u>$\|T\| \ge \operatorname{Inf}\{\dots\}$</u>. Andererseits ist wegen

$$|(Tx,Tx)| \le C\|x\|\,\|Tx\| \le C\|x\|^2\,\|T\|$$

$\|Tx\| \le \sqrt{C\|T\|}\,\|x\| \implies \|T\| \le \sqrt{C\|T\|}$, d.h. <u>$\|T\| \le C$</u>.
Die beiden unterstrichenen Ungleichungen implizieren $\|T\| = \operatorname{Inf}\{\dots\}$.
Dass $\|T\|$ auch gleich dem angegebenen Supremum ist, sieht man so: Zunächst ist

$$\|T\| = \operatorname{Sup}\{\|Tx\| \mid \|x\| = 1\}$$

Aber

$$\|Tx\| = \operatorname{Sup}\{|(y,Tx)| \mid \|y\| = 1\} \qquad (*)$$

Für $Tx = 0$ ist dies offensichtlich; ist $Tx \neq 0$, so gilt $\|Tx\| \ge |(y,Tx)|$ für alle y mit $\|y\| = 1$. Für $y = \frac{Tx}{\|Tx\|}$ ist jedoch $|(y,Tx)| = \|Tx\|$, womit $(*)$ bewiesen ist.
Damit ist alles gezeigt. $\square$

Wir behaupten, dass $T \to T^*$ eine Involution auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist, d.h. es gelten die folgenden vier Eigenschaften:

$$(T+S)^* = T^* + S^* \qquad (6.3)$$

$$(\alpha T)^* = \bar{\alpha}\,T^* \qquad (6.4)$$

$$(ST)^* = T^* S^* \qquad (6.5)$$

$$T^{**} = T \qquad (6.6)$$

Die Beweise sind ganz einfach; z.B. ist

$$(y, STx) = (S^*y, Tx) = (T^*S^*y, x)$$

Deshalb ist nach (6.1) $(ST)^* = T^*S^*$.
Wir zeigen noch

$$\|T^*T\| = \|T\|^2 \qquad (6.7)$$

Da

$$\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (x, T^*Tx) \leq \|T^*T\|^2 \|x\|^2$$

für jedes $x \in \mathcal{H}$, haben wir $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$. Auf der andern Seite ist nach (6.2) $\|T^*T\|^2 \leq \|T^*\| \, \|T\| = \|T\|^2$.

T^* nennt man den <u>adjungierten Operator</u>. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heisst <u>selbstadjungiert</u> oder <u>hermitesch</u> falls $T^* = T$, d.h. wenn gilt

$$(y, Tx) = (Ty, x) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathcal{H} \quad (6.8)$$

<u>Lemma 6.2.</u> In einem komplexen Hilbert-Raum ist $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ genau dann hermitesch, wenn (x, Tx) reell ist für alle $x \in \mathcal{H}$.

<u>Beweis:</u> $\Longrightarrow$ $\quad (x, Tx) = (Tx, x) = \overline{(x, Tx)}$.

$\Longleftarrow$ $\quad (x, Tx) = \overline{(x, Tx)} = (Tx, x) = (x, T^*x)$

Also gilt $(x, (T - T^*)x) = 0$ für alle x. Aus dem folgenden Lemma ergibt sich deshalb die Behauptung. □

<u>Lemma 6.3.</u> Gilt für $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ $(x, Tx) = 0$ für alle x und ist $\mathcal{H}$ ein <u>komplexer</u> Hilbertraum, so ist $T = 0$.

<u>Beweis:</u> Da $(x+y, T(x+y)) = 0$ ist

$$(y, Tx) + (x, Ty) = 0 \qquad (x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{H}) \qquad (6.8)$$

Ersetzen wir darin y durch iy, so kommt

$$-i(y,Tx)+i(x,Ty)=0 \qquad (6.9)$$

Diese Gleichung multiplizieren wir mit (i) und addieren sie zu (6.8), mit dem Resultat $(y,Tx)=0$ für alle $x,y\in\mathcal{H}$. Speziell für $y=Tx$ folgt $\|Tx\|^2=0$, d.h. $Tx=0$. $\square$

<u>Satz 6.4.</u> Für ein $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ bezeichne $\mathcal{N}(T)$ den Kern von T und $\mathcal{R}(T)$ das Bild von T. Es ist

$$\mathcal{N}(T^*)=\mathcal{R}(T)^\perp, \quad \mathcal{N}(T)=\mathcal{R}(T^*)^\perp$$

<u>Beweis</u>: Die erste Gleichheit folgt aus:

$T^*y=0 \iff (T^*y,x)=0$ für alle $x\in\mathcal{H} \iff (y,Tx)=0$ für alle $x\in\mathcal{H} \iff y\in\mathcal{R}(T)^\perp$. Da $T^{**}=T$ ist, folgt die zweite Behauptung aus der ersten wenn T durch T^* ersetzt wird.

Es seien $T,S\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ hermitesche Operatoren. Wir definieren

$$T\geq 0 \iff (x,Tx)\geq 0 \quad \text{für alle } x\in\mathcal{H}$$

$$T\geq S \iff T-S\geq 0$$

Offensichtlich sind sämtliche Eigenschaften einer Ordnungsrelation erfüllt.

<u>Lemma 6.5.</u> Ist T hermitesch und $T\geq 0$, so gilt für alle $x,y\in\mathcal{H}$

$$|(y,Tx)|^2\leq (x,Tx)(y,Ty) \qquad (6.10)$$

Ist insbesondere $(x,Tx)=0$, so ist auch $Tx=0$.

<u>Beweis</u>: $\langle y,x\rangle \mapsto (y,Tx)$ ist eine positiv semidefinite hermitesche Form. Deshalb folgt (6.10) aus der Schwarzschen Ungleichung. $\square$

Schliesslich benötigen wir den folgenden

Satz 6.6. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\{T_n\}$ eine beschränkte Folge selbstadjungierter Operatoren.

a) Gilt $T_n \to T$ für ein $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, so ist T selbstadjungiert.

b) Ist die Folge $\{T_n\}$ nichtfallend (nichtwachsend), so existiert ein $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $T_n \xrightarrow{s} T$.

Beweis: a) Für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt

$$(x, Ty) = \lim (x, T_n y) = \lim (T_n x, y) = (Tx, y),$$

also ist T symmetrisch.

b) Für jedes $x \in \mathcal{H}$ ist die Folge $\{(x, T_n x)\}$ monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Ist $C = 2\sup\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ so gilt $\|T_n - T_m\| \le C$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Die Schwarzsche Ungleichung für die nichtnegative Sesquilinearform $s(y,x) = (y, (T_n - T_m)x)$ für $m \le n$ liefert dann für alle $x \in \mathcal{H}$

$$\|(T_n - T_m)x\| = ((T_n - T_m)x, (T_n - T_m)x)^{1/2} = \{s((T_n - T_m)x, x)\}^{1/2}$$

$$\le \{s((T_n - T_m)x, (T_n - T_m)x)\, s(x,x)\}^{1/4}$$

$$= \{((T_n - T_m)x, (T_n - T_m)^2 x)\,(x, (T_n - T_m)x)\}^{1/4}$$

$$\le \|(T_n - T_m)x\|^{1/4}\, \|(T_n - T_m)^2 x\|^{1/4}\, (x, (T_n - T_m)x)^{1/4}$$

$$\le C^{3/4} \|x\|^{1/2} (x, (T_n - T_m)x)^{1/4} \longrightarrow 0 \text{ für } n, m \to \infty$$

Somit ist $\{T_n x\}$ für jedes $x \in \mathcal{H}$ eine Cauchyfolge, d.h., $\{T_n\}$ ist stark konvergent. □

* * *

§7. Orthogonale Projektionen, isometrische und unitäre Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, M ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$. Nach dem Projektionssatz lässt sich jedes $x \in \mathcal{H}$ eindeutig darstellen in der Form $x = y + z$ mit $y \in M$ und $z \in M^\perp$; y heisst orthogonale Projektion von x auf M. Die Abbildung $x \longmapsto$ orthog. Proj. von x ist linear. Wir bezeichnen sie mit P_M. Da $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$ gilt $\|P_M x\| = \|y\| \leq \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{H}$, d.h., es gilt $\|P_M\| \leq 1$. Ist $M = \{0\}$, so ist offenbar $P_M = 0$. Für $M \neq \{0\}$ gibt es ein $x \in M$, $x \neq 0$; da $P_M x = x$ ist deshalb $\underline{\|P_M\| = 1}$.

Wegen $P_M x \in M$ für alle $x \in \mathcal{H}$ ist $P_M^2 = P_M$, d.h., P_M ist <u>idempotent</u>.

Ein Operator P heisst eine <u>orthogonale Projektion</u>, wenn ein abgeschlossener Teilraum M existiert mit $P = P_M$.

<u>Satz 7.1.</u> Für einen Operator $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) P ist eine orthogonale Projektion,

(ii) $1 - P$ ist eine orthogonale Projektion,

(iii) P ist idempotent, und es gilt $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(P)^\perp$,

(iv) P ist idempotent und selbstadjungiert.

Es gilt $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(1-P)$ und $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(1-P)$.

<u>Beweis:</u> (i)$\Longleftrightarrow$(ii): Aus der Definition der orthogonalen Projektion folgt unmittelbar, dass P genau dann die orthogonale Projektion auf M ist, wenn $1-P$ die orthogonale Projektion auf $M^\perp$ ist. Daraus folgt auch $\mathcal{R}(P) = M = \underline{\underline{M^{\perp\perp}}}$

$= \mathcal{N}(1-P)$, $\mathcal{N}(P) = \mathcal{M}^\perp = \mathcal{R}(1-P)$.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Für eine orthogonale Projektion auf $\mathcal{M}$ ist (iii) offensichtlich erfüllt. Umgekehrt folgt aus $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(P)^\perp$, dass $\mathcal{R}(P)$ ein abgeschlossener Teilraum ist. Für alle $y \in \mathcal{R}(P)$ gilt, da P idempotent ist, $Py = y$. Schreiben wir $x \in \mathcal{H}$ in der Form $x = y + z$ mit $y \in \mathcal{R}(P)$ und $z \in \mathcal{R}(P)^\perp = \mathcal{N}(P)$, so gilt also $Px = Py + Pz = y$, d.h., P ist die orthogonale Projektion auf $\mathcal{R}(P)$.

(i) $\Rightarrow$ (iv): P ist idempotent, wie wir schon wissen. Für alle $x_1 = y_1 + z_1$, $x_2 = y_2 + z_2$ mit $y_j \in \mathcal{R}(P)$, $z_j \in \mathcal{R}(P)^\perp$ gilt

$$(Px_1, x_2) = (y_1, y_2 + z_2) = (y_1, y_2) = (y_1 + z_1, y_2) = (x_1, Px_2),$$

d.h., P ist selbstadjungiert.

(iv) $\Rightarrow$ (iii): Es ist nur $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(P)^\perp$ zu beweisen. Ist $x \in \mathcal{R}(P)$, $x = Py$, so gilt $(1-P)x = 0$, also $x \in \mathcal{N}(1-P)$. Ist $x \in \mathcal{N}(1-P)$, so gilt $x - Px = 0$, also $x \in \mathcal{R}(P)$. Es gilt also $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(1-P)$ und somit ist $\mathcal{R}(P)$ abgeschlossen. Daraus folgt $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(P)^{\perp\perp} = \mathcal{N}(P^*)^\perp = \mathcal{N}(P)^\perp$. $\square$

<u>Satz 7.2.</u> Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ abgeschlossene Teilräume eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$, $P_\mathcal{M}$ und $P_\mathcal{N}$ die orthogonalen Projektionen auf $\mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{N}$.

a) $P := P_\mathcal{M} \cdot P_\mathcal{N}$ ist genau dann eine orthogonale Projektion, wenn $P_\mathcal{M}$ mit $P_\mathcal{N}$ vertauscht ($P_\mathcal{M} P_\mathcal{N} = P_\mathcal{N} P_\mathcal{M}$); dann gilt $P = P_{\mathcal{M} \cap \mathcal{N}}$. Es ist $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$ genau dann, wenn $P_\mathcal{M} P_\mathcal{N} = 0$ ist.

b) $Q := P_\mathcal{M} + P_\mathcal{N}$ ist genau dann eine orthogonale Projektion, wenn $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$ ist; dann ist $Q = P_{\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}}$.

c) $R := P_\mathcal{M} - P_\mathcal{N}$ ist genau dann eine orthogonale Projektion, wenn $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ ist; dann ist $R = P_{\mathcal{M} \ominus \mathcal{N}}$. (Dabei bezeichnet

$\mathcal{M} \ominus \mathcal{N}$ das orthogonale Komplement von $\mathcal{N}$ in $\mathcal{M}$.)

__Beweis:__ a) Ist $P = P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}}$ eine orthogonale Projektion, so ist P selbstadjungiert, also $P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}} = P = P^* = (P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}})^* = P_{\mathcal{N}}^* P_{\mathcal{M}}^* = P_{\mathcal{N}} P_{\mathcal{M}}$. Wenn umgekehrt die beiden Projektoren $P_{\mathcal{M}}$ und $P_{\mathcal{N}}$ vertauschen, so folgt $P^2 = (P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}})^2 = P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}} P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}} = = P_{\mathcal{M}}^2 P_{\mathcal{N}}^2 = P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}} = P$ und $P^* = (P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}})^* = P_{\mathcal{N}}^* P_{\mathcal{M}}^* = P_{\mathcal{N}} P_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}} = P$. Nach Satz 7.1 ist deshalb P eine orthogonale Projektion. Wegen $P = P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}} = P_{\mathcal{N}} P_{\mathcal{M}}$ gilt $\mathcal{R}(P) \subset \mathcal{R}(P_{\mathcal{M}}) \cap \mathcal{R}(P_{\mathcal{N}}) = = \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$; ist $x \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$, so gilt $Px = P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}} x = P_{\mathcal{M}} x = x$, also $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{R}(P)$ und somit $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \mathcal{R}(P)$.

Es gilt offenbar $P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}} = 0$ genau dann, wenn $y \in \mathcal{R}(P_{\mathcal{M}})^{\perp} = \mathcal{M}^{\perp}$ gilt für alle $y \in \mathcal{R}(P_{\mathcal{N}}) = \mathcal{N}$, d.h., wenn $\mathcal{N} \perp \mathcal{M}$ gilt.

b) Ist $Q = P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}}$ eine orthogonale Projektion, so ist $\|x\|^2 \geq \|Qx\|^2 = (Qx, x) = (P_{\mathcal{M}} x, x) + (P_{\mathcal{N}} x, x) = \|P_{\mathcal{M}} x\|^2 + \|P_{\mathcal{N}} x\|^2$, für $x = P_{\mathcal{M}} y$ folgt $\|P_{\mathcal{M}} y\|^2 \geq \|P_{\mathcal{M}} y\|^2 + \|P_{\mathcal{N}} P_{\mathcal{M}} x\|^2$, also $P_{\mathcal{N}} P_{\mathcal{M}} y = 0$ für alle $y \in \mathcal{H}$, d.h. $P_{\mathcal{N}} P_{\mathcal{M}} = 0$. Analog folgt $P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}} = 0$. Nach Teil a) gilt also $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$. Offenbar gilt $\mathcal{R}(Q) \subset \mathcal{R}(P_{\mathcal{M}}) + \mathcal{R}(P_{\mathcal{N}}) = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$; ist $x = y + z \in \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ mit $y \in \mathcal{M}$, $z \in \mathcal{N}$, so gilt $Qx = Qy + Qz = P_{\mathcal{M}} y + P_{\mathcal{N}} z = y + z = x$, also $\mathcal{R}(Q) = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$. Ist umgekehrt $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$, so gilt nach Teil a) $P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}} = P_{\mathcal{N}} P_{\mathcal{M}}$, also $Q^2 = (P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}})^2 = P_{\mathcal{M}}^2 + P_{\mathcal{N}}^2 = P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}} = Q$. Da die Operatoren $P_{\mathcal{M}}$ und $P_{\mathcal{N}}$ selbstadjungiert sind, ist auch Q selbstadjungiert, also eine orthogonale Projektion.

c) Ist $R = P_{\mathcal{M}} - P_{\mathcal{N}}$ die orthogonale Projektion auf den Teilraum $\mathcal{L}$, so gilt wegen $P_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{L}} + P_{\mathcal{N}}$ nach Teil b) $\mathcal{L} \perp \mathcal{N}$ und $\mathcal{M} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{N} \supset \mathcal{N}$, also $\mathcal{L} = \mathcal{M} \ominus \mathcal{N}$, d.h., R ist die orthogonale Projektion auf $\mathcal{M} \ominus \mathcal{N}$. Ist umgekehrt $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ und $\mathcal{L} = \mathcal{M} \ominus \mathcal{N}$, so gilt nach Teil b) $P_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{L}} + P_{\mathcal{N}}$, also ist $R = P_{\mathcal{M}} - P_{\mathcal{N}} = P_{\mathcal{L}}$ eine orthog. Projektion. ∎

Satz 7.3. Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ abgeschlossene Teilräume des Hilbertraumes $\mathcal{H}$, $P_{\mathcal{M}}$ und $P_{\mathcal{N}}$ die orthogonalen Projektionen auf $\mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{N}$.

a) Es gilt $0 \le P_{\mathcal{M}} \le 1$.

b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $P_{\mathcal{M}} \le P_{\mathcal{N}}$, (ii) $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, (iii) $P_{\mathcal{N}} P_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}}$, (iv) $P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}} = P_{\mathcal{M}}$

Beweis: a) Für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt $(0 \cdot x, x) = 0 \le \|P_{\mathcal{M}} x\|^2 = (P_{\mathcal{M}} x, x) \le \|x\|^2 = (1 x, x)$.

b) (i) $\Rightarrow$ (ii): Ist $P_{\mathcal{M}} \le P_{\mathcal{N}}$, so gilt $\|P_{\mathcal{M}} x\|^2 = (P_{\mathcal{M}} x, x) \le (P_{\mathcal{N}} x, x) = \|P_{\mathcal{N}} x\|^2$ für alle $x \in \mathcal{H}$, also $N(P_{\mathcal{N}}) \subset N(P_{\mathcal{M}})$ und somit $\mathcal{M} = R(P_{\mathcal{M}}) = N(P_{\mathcal{M}})^{\perp} \subset N(P_{\mathcal{N}})^{\perp} = R(P_{\mathcal{N}}) = \mathcal{N}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Mit $\mathcal{L} := \mathcal{N} \ominus \mathcal{M}$ gilt nach Satz 7.2 a und b $P_{\mathcal{N}} P_{\mathcal{M}} = (P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{L}}) P_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}}^2 = P_{\mathcal{M}}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Da $P_{\mathcal{N}} P_{\mathcal{M}}$ eine orthogonale Projektion ist (nämlich $P_{\mathcal{M}}$), gilt nach Satz 7.2 a $P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}} = P_{\mathcal{N}} P_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}}$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Wegen $P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}} = P_{\mathcal{M}}$ gilt für alle $x \in \mathcal{H}$

$$(P_{\mathcal{M}} x, x) = \|P_{\mathcal{M}} x\|^2 = \|P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}} x\|^2 \le \|P_{\mathcal{N}} x\|^2 = (P_{\mathcal{N}} x, x). \square$$

Satz 7.4. a) Ist $\{P_n\}$ eine monotone Folge orthogonaler Projektionen im Hilbertraum $\mathcal{H}$, so existiert eine orthogonale Projektion P in $\mathcal{H}$ mit $P_n \xrightarrow{s} P$.

b) Ist $\{P_n\}$ nichtfallend (d.h. $P_n \le P_{n+1}$), so ist P die orthogonale Projektion auf $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R(P_n)}$.

c) Ist $\{P_n\}$ nichtwachsend (d.h. $P_n \ge P_{n+1}$), so ist P die orthogonale Projektion auf $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} R(P_n)$.

Beweis: a) Nach Satz 6.6 gibt es einen selbstadjungierten Operator $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $P_n \xrightarrow{s} P$. Wegen $(P^2x,y) = (Px,Py) = \lim_{n\to\infty}(P_nx,P_ny) = \lim_{n\to\infty}(P_nx,y) = (Px,y)$ für alle $x,y \in \mathcal{H}$ ist P idempotent, also eine orthogonale Projektion.

b) Ist $x \perp \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(P_n)}$, so gilt $P_nx = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $Px = \lim P_nx = 0$. Sei jetzt $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(P_n)$, so ist $x \in R(P_{n_0})$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$. Wegen $R(P_{n_0}) \subset R(P_n)$ für alle $n \geq n_0$ gilt also $P_nx = P_{n_0}x = x$ für alle $n \geq n_0$ und somit $Px = x$, d.h. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(P_n) \subset R(P)$. Da $R(P)$ abgeschlossen ist, folgt die Behauptung b).

c) Die Folge $\{Q_n\}$ mit $Q_n = 1 - P_n$ ist nichtfallend; $Q = \lim Q_n$ ist also die orthogonale Projektion auf $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R(Q_n)} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N(P_n)}$. Dann ist aber $P = 1 - Q$ die orthogonale Projektion auf
$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N(P_n)}^{\perp} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N(P_n)^{\perp} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R(P_n). \qquad \square$$

Definitionen 7.5. Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ Hilberträume. Ein linearer Operator $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ heisst eine Isometrie, wenn $\|Ux\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{H}_1$ gilt. Ist U eine Isometrie und $R(U) = \mathcal{H}_2$, so ist U ein Isomorphismus von $\mathcal{H}_1$ auf $\mathcal{H}_2$, man nennt U dann einen unitären Operator. Ein Operator $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ heisst eine partielle Isometrie, wenn ein abgeschlossener Teilraum M von $\mathcal{H}_1$ existiert mit
$$\|Ux\| = \|x\| \text{ für alle } x \in M, \quad Ux = 0 \text{ für } x \in M^{\perp}.$$

Satz 7.6. Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ Hilberträume, U ein Operator von $\mathcal{H}_1$ in $\mathcal{H}_2$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) U ist unitär,

(ii) $\mathcal{R}(U) = \mathcal{H}_2$ und $(Ux, Uy) = (x,y)$ für alle $x, y \in \mathcal{H}_1$,

(iii) $U^*U = 1_{\mathcal{H}_1}$ und $UU^* = 1_{\mathcal{H}_2}$, d.h. $U^* = U^{-1}$;

(iv) U^* ist unitär.

<u>Beweis</u>: (i) $\Longleftrightarrow$ (ii): Dies folgt aus den folgenden Identitäten zwischen einer Sesquilinearform $s(x,y)$ und der zugehörigen quadratischen Form $q(x) := s(x,x)$:

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}: \quad s(x,y) = \tfrac{1}{4}\{q(x+y) - q(x-y)\}$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}: \quad s(x,y) = \tfrac{1}{4}\{q(x+y) - q(x-y) + iq(x-iy) - iq(x+iy)\}$$

(Polarisierungsidentität)

(i) $\Longrightarrow$ (iv): Es ist $\mathcal{N}(U^*) = \mathcal{R}(U)^\perp = \mathcal{H}_2^\perp = \{0\}$ und (da mit (i) auch (ii) gilt) $\|U^*Ux\| = \|x\| = \|Ux\|$ für alle $x \in \mathcal{H}_1$, also $\|U^*y\| = \|y\|$ für alle $y \in \mathcal{R}(U) = \mathcal{H}_2$. $U^*: \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ ist also eine Isometrie. Da $\mathcal{R}(U^*) = \mathcal{N}(U)^\perp = \{0\}^\perp = \mathcal{H}_1$ ist U^* unitär.

(iv) $\Longrightarrow$ (i): mit dergleichen Argumentation ($U^{**} = U$).

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Da mit (i) auch (ii) gilt, folgt $U^*U = 1_{\mathcal{H}_1}$; da mit (i) auch (iv) gilt, folgt entsprechend $UU^* = 1_{\mathcal{H}_2}$.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): Es gilt $\mathcal{R}(U) \supset \mathcal{R}(UU^*) = \mathcal{R}(1_{\mathcal{H}_2}) = \mathcal{H}_2$. Ausserdem gilt $(Ux, Uy) = (U^*Ux, y) = (x,y)$ für alle $x, y \in \mathcal{H}_1$. $\square$

Das Produkt zweier unitären Operatoren aus $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist offensichtlich wieder unitär. Da auch der Einsoperator unitär ist, bilden die unitären Operatoren eine Gruppe [beachte Satz 7.6, speziell (iii)).

<u>Beispiel</u>. Die Fourier-Transformation liefert ein wichtiges

Beispiel einer unitären Transformation. Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist diese definiert durch

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-i\langle k,x\rangle}\, d^n x$$

Nun gilt der wichtige

<u>Satz 7.7 (Plancherel)</u>. Es gibt eine eindeutige unitäre Transformation $U: L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, so dass $Tf = \hat{f}$ für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ ist.

<u>**Beweis**</u>: siehe z.B. Hewitt & Stromberg, (21.53); oder Rudin, real and complex analysis, p.187.

* * *

§ 8. Kompakte Operatoren

Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ Hilberträume. Ein Operator $T: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ heisst endlichdimensional (m-dimensional), wenn $R(T)$ endlichdimensional (m-dimensional) ist.

Satz 8.1. Sei T ein Operator von $\mathcal{H}_1$ nach $\mathcal{H}_2$. T ist genau dann ein beschränkter m-dimensionaler Operator, wenn linear unabhängige Elemente $x_1, \ldots, x_m$ aus $\mathcal{H}_1$ und linear unabhängige Elemente $y_1, \ldots, y_m$ aus $\mathcal{H}_2$ existieren mit

$$Tx = \sum_{j=1}^{m} \langle x_j, x \rangle y_j \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H}_1. \tag{8.1}$$

Es gilt dann

$$T^* y = \sum_{j=1}^{m} \langle y_j, y \rangle x_j \quad \text{für alle } y \in \mathcal{H}_2. \tag{8.2}$$

und $\|T\| \leq \sum_{j=1}^{m} \|x_j\| \|y_j\|$. T ist genau dann m-dimensional, wenn T^* m-dimensional ist.

Beweis: Hat T die Form (8.1), so gilt $R(T) \subset L\{y_1, \ldots, y_m\}$. Es gilt aber sogar das Gleichheitszeichen. Für jedes $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$ gibt es nämlich ein $z_{j_0} \in L\{x_1, \ldots, x_m\}$ mit $z_{j_0} \neq 0$, $z_{j_0} \perp x_j$ für $j \neq j_0$, also $\langle x_{j_0}, z_{j_0} \rangle \neq 0$. Damit folgt $Tz_{j_0} = \langle x_{j_0}, z_{j_0} \rangle y_{j_0}$, d.h., alle y_j sind in $R(T)$ enthalten. Dies zeigt $R(T) = L\{y_1, \ldots, y_m\}$. $R(T)$ ist also m-dimensional. Wegen

$$\|Tx\| \leq \sum_{j=1}^{m} |\langle x_j, x \rangle| \, \|y_j\| \leq \|x\| \sum_{j=1}^{m} \|x_j\| \|y_j\|$$

ist T beschränkt mit $\|T\| \leq \sum_{j=1}^{m} \|x_j\| \|y_j\|$.

Sei jetzt T beschränkt und $\dim R(T) = m$, $\{y_1, \ldots, y_m\}$ eine ONB von $R(T)$, $x_j = T^* y_j$ $(j = 1, \ldots, m)$. Dann gilt für alle $x \in \mathcal{H}_1$

$$Tx = \sum_{j=1}^{m} (y_j, Tx) y_j = \sum_{j=1}^{m} (x_j, x) y_j$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Elemente $x_1, \dots, x_m$ linear unabhängig sind. Wir nehmen an, dass dies nicht gilt, d.h. (o.E.) $x_1 = \sum_{j=2}^{m} \alpha_j x_j$, also

$$Tx = \sum_{i=1}^{m} (x_j, x) g_j = \sum_{j=2}^{m} (x_j, x)(\alpha_j^* y_1 + y_j), \quad x \in \mathcal{H}_1.$$

Hieraus würde folgen, dass $\mathcal{R}(T)$ höchstens $(m-1)$ dimensional ist, im Widerspruch zur Voraussetzung.
Hat T die Form (8.1), so gilt für alle $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$

$$(y, Tx) = \sum (x_j, x)(y, y_j) = \left(\sum_j (y_j, y) x_j, x \right),$$

also gilt (8.2) für T^*. Die Gleichheit der Dimensionalität von T und T^* ist damit auch klar. □

Definition 8.2. Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ Hilberträume. Ein Operator $T: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ heisst kompakt, wenn jede beschränkte Folge $\{x_n\}$ eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ enthält, für die $\{T x_{n_k}\}$ konvergiert. (Dies ist gleichbedeutend mit: T bildet beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen ab.)

Lemma 8.3. Jeder kompakte Operator ist beschränkt.

Beweis: Sei T nicht beschränkt; dann existiert eine Folge $\{x_n\}$ mit $\|x_n\| \le 1$ und $\|Tx_n\| \ge n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Keine Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ hat also die Eigenschaft, dass $\{T x_{n_k}\}$ konvergiert, d.h. T ist nicht kompakt. □

Der folgende Satz gibt eine andere Charakterisierung von kompakten Operatoren.

<u>Satz 8.4.</u> Ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ist genau dann kompakt, wenn für jede schwache Nullfolge $\{x_n\}$ aus $\mathcal{H}_1$ gilt $Tx_n \to 0$.

<u>Beweis:</u> Sei T kompakt und $\{x_n\}$ eine schwache Nullfolge. Nach Satz 5.3a ist diese beschränkt. Ferner gilt nach Satz 5.7 (ii) $Tx_n \xrightarrow{w} 0$. Angenommen, Tx_n konvergiert nicht gegen Null (in der Norm). Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $\{Tx_{n_k}\}$, so dass $\|Tx_{n_k}\| \geq \varepsilon$. Da aber die Folge $\{x_{n_k}\}$ beschränkt ist und T kompakt ist, so gibt es eine Teilfolge von $\{Tx_{n_k}\}$ welche gegen ein Element $y \neq 0$ konvergiert. Diese müsste aber auch schwach gegen y konvergieren. Widerspruch!

T habe nun die Eigenschaft, dass jede schwache Nullfolge aus $\mathcal{H}_1$ auf eine Nullfolge abgebildet wird; $\{x_n\}$ sei eine beschränkte Folge von $\mathcal{H}_1$. Nach Satz 5.4 gibt es eine schwach konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$. Es gilt also $x_{n_k} - x \xrightarrow{w} 0$ und somit nach ~~nach~~ Voraussetzung $T(x_{n_k} - x) \to 0$, d.h., $\{Tx_{n_k}\}$ ist konvergent. Somit ist T kompakt. □

<u>Satz 8.5</u>. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $T, S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

a) Ist S oder T kompakt, so ist ST kompakt.

b) Sind S und T kompakt, so ist $\alpha S + \beta T$ kompakt ($\alpha, \beta \in \mathbb{K}$).

c) T ist genau dann kompakt, wenn T^*T kompakt ist.

d) T ist genau dann kompakt, wenn T^* kompakt ist.

e) Ist T_n eine Folge von kompakten Operatoren aus $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ und gilt $\|T_n - T\| \to 0$ für ein $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, so ist T kompakt.

<u>Beweis</u>: a) Sei zunächst S kompakt. Ist $\{x_n\}$ eine schwache Nullfolge, so ist nach Satz 5.7(ii) auch $\{Tx_n\}$ eine schwache Nullfolge. Da S kompakt ist, gilt $STx_n \to 0$, d.h. ST kompakt. — Sei nun T kompakt, dann gilt $Tx_n \to 0$ für jede schwache Nullfolge $\{x_n\}$. Da S stetig ist, gilt dann auch $STx_n \to 0$, d.h., ST ist auch in diesem Fall kompakt.

b) Gilt $x_n \xrightarrow{w} 0$, so gilt $Sx_n \to 0$ und $Tx_n \to 0$, also $(\alpha S + \beta T)x_n \to 0$.

c) Ist T kompakt, so ist nach a) auch T^*T kompakt. Sei jetzt T^*T kompakt. Ist $\{x_n\}$ eine schwache Nullfolge, so gilt $T^*Tx_n \to 0$, also

$$\|Tx_n\|^2 = (Tx_n, Tx_n) = (T^*Tx_n, x_n) \to 0$$

d.h. T ist kompakt.

d) Ist T kompakt, so ist nach a) auch $(T^*)^*T^* = TT^*$ kompakt; also ist nach c) auch T^* kompakt. Wegen $T = (T^*)^*$ ist mit T^* auch T kompakt.

e) Sei $\{x_n\}$ eine schwache Nullfolge. Nach Satz 5.3a ist diese beschränkt, $\|x_n\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen $Tx_n \to 0$, d.h., zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|Tx_n\| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\|T_n - T\| \to 0$ existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|T_{m_0} - T\| < \frac{1}{2}\varepsilon C^{-1}$. Da T_{m_0} kompakt ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|T_{m_0}x_n\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Daraus folgt für alle $n \geq n_0$

$$\|Tx_n\| \leq \|(T - T_{m_0})x_n\| + \|T_{m_0}x_n\| \leq \varepsilon. \qquad \square$$

<u>Bemerkung</u>. Satz 8.5 zeigt, dass die Menge $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{H})$ der kompakten Operatoren ein abgeschlossenes zweiseitiges *-Ideal in der Banach-Algebra $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ bilden.

Jeder eindimensionale beschränkte Operator von $\mathcal{H}$ ist kompakt (denn T hat die Form $Tx = (y,x)\,z$; für jede schwache Nullfolge $\{x_n\}$ gilt also $Tx_n = (y,x_n)z \to 0$). Nach Satz 8.5b ist dann auch jeder endlichdimensionale Operator kompakt, und nach Satz 8.5e ist jeder Operator kompakt, der bezüglich der Norm von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ Grenzwert einer Folge von endlichdimensionalen Operatoren ist. Tatsächlich sind dies alle kompakten Operatoren.

Satz 8.6. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist genau dann kompakt, wenn eine Folge $\{T_n\}$ von endlichdimensionalen Operatoren aus $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ existiert mit $\|T_n - T\| \to 0$. Für jeden kompakten Operator sind $N(T)^\perp$ und $R(T)$ separabel.

<u>Beweis:</u> Eine Richtung ist bereits bewiesen. Sei nun T kompakt. Wir zeigen zuerst, dass $N(T)^\perp$ separabel ist. Sei $\{e_i\}_{i\in I}$ eine ONB von $N(T)^\perp$. Da T kompakt ist, gilt $Te_{i_n} \to 0$ für jede Folge $\{i_n\}$ aus I mit $i_n \neq i_m$ für $n \neq m$ (siehe das Beispiel auf S. 32). Daraus folgt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ nur endlich viele $i \in I$ existieren mit $\|Te_i\| \geq \varepsilon$; also ist die Menge I abzählbar, d.h., $N(T)^\perp$ ist separabel.

Sei jetzt $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine ONB von $N(T)^\perp$, P_m die orthogonale Projektion auf $L(e_1,\dots,e_m)$. Dann gilt $P_m \xrightarrow{s} P$, wobei P die orthogonale Projektion auf $N(T)^\perp$ ist. Die Operatoren $T_m = TP_m$ sind höchstens m-dimensional ($T_m x = \sum_{n=1}^{m} (e_n,x)Te_n$), also kompakt. Für jedes m gibt es ein $x_m \in \mathcal{H}$ mit $\|x_m\| = 1$ und $\|(T-T_m)x_m\| \geq \|T-T_m\|/2$. Wegen $((P-P_m)x_m, y) = (x_m, (P-P_m)y) \to 0$ folgt $(P-P_m)x_m \xrightarrow{w} 0$ und somit $(T-T_m)x_m = T(P-P_m)x_m \to 0$, da T kompakt ist. Also gilt $\|T-T_m\| \leq 2\|(T-T_m)x_m\| \to 0$, d.h. $T_m \to T$.

Ist $\{y_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von $N(T)^\perp$, so ist $\{Ty_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicht in $R(T)$, also ist auch $R(T)$ separabel. $\square$

Beispiel. Es sei μ ein endliches (oder σ-endliches) Mass auf einem Massraum Ω; $\mu \times \mu$ bezeichne das Produktmass auf $\Omega \times \Omega$ und K sei aus $L^2(\Omega\times\Omega, \mu\times\mu)$. Wir definieren

$$(Tf)(s) = \int_\Omega K(s,t)\, f(t) \quad , \quad f \in L^2(\Omega,\mu) \tag{8.3}$$

und behaupten, dass dadurch eine beschränkte lineare Transformation von $L^2(\Omega,\mu)$ definiert wird, welche ausserdem kompakt ist.

Nach dem Satz von Fubini ist $K(s,\cdot) \in L^2(\Omega,\mu)$ fast immer. Deshalb ist (8.3) für fast alle s definiert und es gilt

$$|(Tf)(s)| \leq \|f\| \left(\int_\Omega |K(s,t)|^2 dt \right)^{1/2} \tag{8.4}$$

Für jedes $g \in L^2(\Omega,\mu)$ ist die Funktion $h(s,t) = g(s)K(s,t)f(t)$ integrierbar. Also ist nach dem Satz von Fubini auch

$$g(s)(Tf)(s) = g(s) \int_\Omega K(s,t) f(t)\,dt = \int_\Omega h(s,t)\,dt$$

integrierbar. Für ein endliches Mass können wir $g(s) \equiv 1$ wählen. Deshalb ist Tf integrierbar (insbesondere messbar) und wegen (8.4) gilt sogar $Tf \in L^2(\Omega,\mu)$. (Für ein σ-endliches Mass wähle man eine Folge von Indikatorfunktionen $g_n = \chi_{M_n}$, $\mu(M_n) < \infty$, $g_n \nearrow 1$.)

Nach (8.4) ist

$$\|Tf\| \leq \left\{ \int_{\Omega\times\Omega} |K(s,t)|^2 d(\mu\times\mu) \right\}^{1/2} \|f\|$$

Durch $f \mapsto Tf$ wird also ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definiert. Ist speziell K von der Form $K(s,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(s)\, b_i(t)$, so ist

$$T_1 f = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b_i(t) f(t) dt \cdot a_i(s)$$

d.h., $\dim \mathcal{R}(T) \leq n$. T_1 ist in diesem Falle also ein endlichdimensionaler Operator. Die endlichdim. Kerne der betrachteten Form liegen aber dicht in $L^2(\Omega\times\Omega, \mu\times\mu)$. Nach Satz 8.5e ist deshalb T kompakt.

Nun beweisen wir den Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren.

Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ heisst <u>Eigenwert</u> von $T: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, falls

$$\mathrm{Kern}(T - \lambda 1) \neq 0$$

$\mathrm{Kern}(T-\lambda 1)$ heisst <u>Eigenraum</u> zum Eigenwert λ.

Die Eigenwerte von einem selbstadjungierten $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sind reell, denn aus $Tx = \lambda x$ folgt $(x \neq 0)$

$$\lambda = \frac{(x, Tx)}{(x,x)} \tag{8.5}$$

Aber $(x, Tx) = (Tx, x) = \overline{(x, Tx)}$.

Verschiedene Eigenräume stehen (für $T^* = T$) senkrecht aufeinander (Übung).

<u>Satz 8.7</u> (Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren).

a) Ist T ein kompakter Operator, dann ist die Dimension jedes Eigenraumes zu $\lambda \neq 0$ endlich, und die Anzahl aller Eigenwerte ist entweder endlich oder abzählbar. Im letzteren Falle häufen sich die Eigenwerte bei Null. Sind $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ die von Null verschiedenen Eigenwerte von T, $\{P_1, P_2, \dots\}$ die orthogonalen (endlichdimensionalen) Projektionen auf die entsprechenden Eigenräume so gilt

$$T = \sum \lambda_j P_j\,; \tag{8.6}$$

diese Reihe konvergiert im Sinne der Norm von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

b) Ist $\{\lambda_j\}$ eine Nullfolge (oder endliche Folge) aus $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

mit $\lambda_j \neq \lambda_k$ für $j \neq k$ und sind $P_j \neq 0$ endlichdimensionale orthogonale Projektionen mit $P_j P_k = 0$ für $j \neq k$, so ist die Reihe (8.6) in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ konvergent, $T = \sum \lambda_j P_j$ ist kompakt und selbstadjungiert; $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ ist die Menge der von Null verschiedenen Eigenwerte von T und $\mathcal{R}(P_j)$ sind die dazugehörigen Eigenräume. Die Darstellung (8.6) ist also in diesem Sinn eindeutig.

Beweis: Wir beweisen zunächst den einfacheren Teil b). Die endlichen Summen $S_N = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j P_j$ sind endlichdimensional, also kompakt. Sie bilden ausserdem eine Cauchyfolge, denn für jedes $x \in \mathcal{H}$ gilt

$$\|(S_{N+k} - S_N)x\|^2 = \sum_{j=N+1}^{N+k} \lambda_j^2 \|P_j x\|^2 \leq \sup\{\lambda_j^2 \mid N+1 \leq j \leq N+k\} \|x\|^2$$

Da die Folge $\{\lambda_j\}$ eine Nullfolge ist, folgt die Behauptung und damit die Normkonvergenz von S_N. Mit Satz 8.5 e folgt die Kompaktheit von T. Offensichtlich ist S_N und damit T selbstadjungiert. Offenbar sind alle λ_j Eigenwerte von T, und jedes $x \in \mathcal{R}(P_j)$ ist Eigenelement von T zum Eigenwert λ_j. Ist $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von T und $x \neq 0$ ein zugehöriger Eigenvektor, so gilt

$$0 = \|(\lambda - T)x\|^2 = \sum_j (\lambda - \lambda_j)^2 \|P_j x\|^2 + \lambda^2 \|x - \sum_j P_j x\|^2$$

d.h., es ist $|\lambda - \lambda_j| \, \|P_j x\| = 0$ für alle j und $x = \sum P_j x$. Wegen $x \neq 0$ gibt es j_0 mit $P_{j_0} x \neq 0$, also $\lambda = \lambda_{j_0}$. Damit ist $\lambda \neq \lambda_j$ für alle $j \neq j_0$ und somit $P_j x = 0$ für $j \neq j_0$. Daraus folgt $x \in \mathcal{R}(P_{j_0})$.

a) Wir konstruieren zunächst einen speziellen von Null verschiedenen Eigenwert. Im anschliessenden Lemma 8.8 wird gezeigt, dass für einen selbstadjungierten Operator gilt:

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathcal{H}} \frac{|(x, Tx)|}{(x, x)}. \qquad (8.7)$$

Es ist also

$$\sup_{\|x\|=1} |(x,Tx)| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \|T\| \tag{8.8}$$

Deshalb gibt es eine Folge $\{x_n\}$ mit $\|x_n\|=1$, $|(x_n,Tx_n)| \to \|T\|$. Diese sei bereits derart gewählt, dass die Folge (x_n,Tx_n) selber konvergiert:

$$(x_n,Tx_n) \longrightarrow \lambda_1 \neq 0$$

Dann ist λ_1 entweder gleich $\|T\|$ oder gleich $-\|T\|$. Es ist

$$0 \leq \|Tx_n - \lambda_1 x_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2\lambda_1(x_n,Tx_n) + \lambda_1^2 \|x_n\|^2$$

Die rechte Seite der Gleichung wird für unbegrenzt wachsendes n kleiner als jede beliebige positive Zahl, denn es ist

$$\|Tx_n\|^2 \leq \|T\|^2 = \lambda_1^2, \quad (x_n,Tx_n) \to \lambda_1, \quad \|x_n\|=1.$$

Für $n \to \infty$ gilt also

$$Tx_n - \lambda_1 x_n \longrightarrow 0 \tag{8.9}$$

Wegen der Kompaktheit von T gibt es nach den Sätzen 5.4 und 8.4 eine schwach konvergente Teilfolge $\{x_{n_j}\}$, so dass $\{Tx_{n_j}\}$ konvergiert.

Nach (8.9) ist die Folge $\{x_{n_j}\}$ selbst konvergent. Bezeichnet man deren Grenzwert mit x, so ist

$$Tx = \lim Tx_n , \qquad \|x\| = \lim \|x_{n_j}\| = 1$$

und nach (8.9)

$$Tx = \lambda_1 x \, ; \tag{8.10}$$

ferner ist

$$\underline{|(x,Tx)|} = |(x,\lambda_1 x)| = |\lambda_1| = \underline{\|T\|},$$

und
$$\underline{\|Tx\|} = \|\lambda_1 x\| = |\lambda_1| = \underline{\|T\|}$$

Wir haben also einen Eigenvektor von T zum Eigenwert λ_1 mit $|\lambda_1| = \|T\|$ gefunden. Dieser löst das Variationsproblem:

$$\text{"} |(x,Tx)| = \text{Maximum unter der Nebenbed. } \|x\|=1 \text{"} \qquad (8.11)$$

und λ_1 ist dem Betrage nach gleich diesem Maximum. Deshalb ist (beachte (8.5)) λ_1 der dem Betrag nach grösste Eigenwert von T.
Ist umgekehrt $x = f$ eine Lösung des Variationsproblems (8.11), so ist f ein (normierter) Eigenvektor von T mit dem Eigenwert $\lambda_1 = (f, Tf)$, denn für f ist nach (8.8) $|(f,Tf)| = \|Tf\|$ und folglich

$$\|Tf - (f,Tf)f\|^2 = \|Tf\|^2 - (f,Tf)^2 = 0$$

Wir halten eine der Lösungen von (8.11), etwa f_1, fest, und versuchen, neue zu f_1 orthogonale Eigenvektoren zu konstruieren. Zu diesem Zweck betrachten wir den Raum $\mathcal{H}_1 = L(f_1)^\perp$ und den auf $\mathcal{H}_1$ restringierten Operator $T_1 = T \restriction \mathcal{H}_1$. Dieser lässt $\mathcal{H}_1$ invariant, denn aus $x \in \mathcal{H}_1$ folgt

$$(T_1 x, f_1) = (Tx, f_1) = (x, Tf_1) = \lambda_1 (x, f_1) = 0.$$

T_1 ist in $\mathcal{H}_1$ kompakt und selbstadjungiert. Es existiert also in $\mathcal{H}_1$ ein Element f_2, $\|f_2\| = 1$, mit

$$Tf_2 = \lambda_2 f_2, \quad \lambda_2 = \operatorname*{Max}_{\substack{x \in \mathcal{H}_1 \\ \|x\|=1}} |(x,Tx)|$$

Natürlich gilt

$$\lambda_2 = \operatorname*{Max}_{\substack{x \in \mathcal{H} \\ \|x\|=1, (x,f_1)=0}} |(x,Tx)| \qquad (8.12)$$

Dieses Verfahren kann fortgesetzt werden. Man erhält so den Eigenvektor f_n, wenn die Eigenvektoren $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ schon bestimmt sind, als Lösung des Variationsproblems:

$$\text{"}(x, Ax) = \text{Maximum unter den Nebenbedingungen } \|x\| = 1,\ (x, f_i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n-1\text{"} \tag{8.13}$$

und der entsprechende Eigenwert λ_n ist dem Betrage nach gleich diesem Maximum (oder auch gleich dem Maximum von $\|Ax\|$ unter denselben Nebenbedingungen).

Abgesehen von dem einfachen Fall, dass $\mathcal{H}$ von endlicher Dimension ist, liefert dieses Verfahren eine unendliche Folge von Eigenvektoren $\{f_n\}$, die ein Orthonormalsystem bilden. Für die zugehörigen Eigenwerte gilt offenbar $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots\cdots$.

Wir behaupten, dass λ_n gegen Null strebt. Andernfalls wäre die Folge $\{\lambda_n^{-1} f_n\}$ beschränkt, und ihre mit T transformierte Folge, also $\{f_n\}$, enthielte eine konvergente Teilfolge. Das ist nicht möglich, denn es ist $\|f_i - f_k\|^2 = 2$ für $i \neq k$. Daraus folgt insbesondere, dass die Eigenräume zu $\lambda \neq 0$ endlichdimensional sind.

Um die Darstellung (8.6) zu beweisen, wählen wir ein beliebiges Element $x \in \mathcal{H}$. Wir setzen

$$g_n = x - \sum_{j=1}^{n} (f_j, x) f_j$$

Offensichtlich ist $g_n \in \mathcal{H}_n := L(f_1, \ldots, f_n)^{\perp}$. Deshalb ist

$$\|Tg_n\| \leq \|T\|_{\mathcal{H}_n} \|g_n\| = |\lambda_{n+1}| \, \|g_n\|$$

Da weiter

$$\|g_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |(f_j, x)|^2 \leq \|x\|^2$$

und $\mu_{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$, ergibt sich

$$T g_n = Tx - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (f_j, x) f_j \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

Also ist

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (f_j, x) f_j \tag{8.14}$$

Dies ist äquivalent zu (8.6). $\square$

Wir müssen noch den Beweis des folgenden Lemmas nachholen.

<u>Lemma 8.8.</u> Die Norm eines selbstadjungierten Operators $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |(x, Tx)|$$

<u>Beweis:</u> Nach Lemma 6.1 ist

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(x, Ty)|$$

Deshalb ist sicher (setze $x=y$):

$$\|T\| \geq \sup_{\|x\|=1} |(x, Tx)| =: C$$

Andererseits ist für $x \neq 0$, $\lambda > 0$

$$\|Tx\|^2 = (T^2 x, x) = \frac{1}{4} \Big[\Big(T\big(\lambda x + \tfrac{1}{\lambda} Tx\big), \lambda x + \tfrac{1}{\lambda} Tx\Big)$$

$$- \Big(T\big(\lambda x - \tfrac{1}{\lambda} Tx\big), \lambda x - \tfrac{1}{\lambda} Tx\Big)\Big]$$

Wegen $|(x, Tx)| \leq C\|x\|^2$ folgt

$$\|Tx\|^2 \leq \frac{1}{4} \Big[C \|\lambda x + \tfrac{1}{\lambda} Tx\|^2 + C \|\lambda x - \tfrac{1}{\lambda} Tx\|^2 \Big]$$

$$= \frac{C}{2} \Big[\lambda^2 \|x\|^2 + \frac{1}{\lambda^2} \|Tx\|^2 \Big]$$

Wählt man speziell $\lambda^2 = \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$, so ergibt sich

$$\|Tx\|^2 \leq C\|Tx\|\|x\|, \text{ d.h. } \|T\| \leq C. \quad \square$$

Ist T ein (beliebiger) kompakter Operator, so ist T^*T nach Satz 8.5c ebenfalls kompakt. Ausserdem ist T^*T selbstadjungiert und positiv. Deshalb hat T^*T nach Satz 8.7a eine Darstellung der Form

$$T^*T = \sum_j \lambda_j P_j \quad , \lambda_j > 0$$

Wir erklären den Betrag von T durch

$$|T| = (T^*T)^{1/2} := \sum_j \sqrt{\lambda_j}\, P_j \tag{8.15}$$

Nach Satz 8.7b ist dies wieder ein selbstadjungierter kompakter Operator.

Satz 8.9 (Polarzerlegung). Sei T kompakt. Dann gilt $\||T|f\| = \|Tf\|$ für alle $f \in \mathcal{H}$. Es gibt einen isometrischen Operator U von $\overline{\mathcal{R}(|T|)}$ auf $\overline{\mathcal{R}(T)}$ und $T = U|T|$, $|T| = U^{-1}T$. Die Darstellung $T = U|T|$ heisst die polare Zerlegung von T.

Beweis: Für alle $f \in \mathcal{H}$ gilt

$$\||T|f\|^2 = (|T|f, |T|f) = (|T|^2 f, f) = (T^*Tf, f)$$
$$= (Tf, Tf) = \|Tf\|^2.$$

Definieren wir für jedes $f \in \mathcal{H}$ $V(|T|f) = Tf$, so ist V offenbar eine lineare isometrische Abbildung von $\mathcal{R}(|T|)$ auf $\mathcal{R}(T)$. Dann ist der Abschluss $U = \overline{V}$ eine Isometrie von $\overline{\mathcal{R}(|T|)}$ auf $\overline{\mathcal{R}(T)}$ und es gilt $T = U|T|$. $\square$

Benutzen wir (8.15), so ergibt sich folgendes

Korollar 8.10. Ein kompakter Operator T hat die Darstellung

$$T = \sum_j \lambda_j (f_j, \cdot) g_j \tag{8.16}$$

Dabei sind $\{f_j\}$, $\{g_j\}$ orthonormale Systeme und die λ_j positive Zahlen, welche sich im abzählbaren Fall bei Null häufen.

Aus der Herleitung folgt, dass die λ_j die Eigenwerte $(\neq 0)$ von $|T|$ sind. Diese nennt man die singulären Werte von T.

Im folgenden sei $\{s_j(T)\}$ die (eventuell endliche) nicht-wachsend angeordnete Folge der singulären Werte von T; jeder Wert kommt so oft vor, wie es seine Vielfachheit als Eigenwert von $|T|$ angibt. Für $0 < p < \infty$ bezeichnen wir mit $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ die Menge der kompakten Operatoren aus $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit

$$\sum_j [s_j(T)]^p < \infty. \tag{8.17}$$

Speziell wichtig sind:

$\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$: Hilbert-Schmidt-Operatoren;

$\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$: nukleare Operatoren (Spurklasse).

Im folgenden Abschnitt werden wir dafür handlichere Definitionen finden.

* * *

§9. Die Spurklasse und Hilbert-Schmidt-Operatoren

Satz 9.1. Es sei $\{e_j\}$ eine ONB, T ein beschränkter Operator mit $\sum_j \|Te_j\|^2 < \infty$. Dann gilt für jede andere ONB $\{f_j\}$

$$\sum_j \|Tf_j\|^2 = \sum_j \|Te_j\|^2.$$

Beweis: Nach der Parsevalschen Gleichung ist

$$\|Te_j\|^2 = \sum_k |(f_k, Te_j)|^2 = \sum_k |(T^* f_k, e_j)|^2$$

Diese Gleichung summieren wir über j. Da absolute Konvergenz vorliegt, dürfen wir rechts zuerst über j und dann über k summieren und erhalten

$$\sum_j \|Te_j\|^2 = \sum_k \|T^* f_k\|^2 \qquad (9.1)$$

Die rechte Seite ist unabhängig von $\{e_j\}$, also auch die linke. $\square$

Satz 9.2. T ist genau dann ein Hilbert-Schmidt-Operator, wenn für eine beliebige ONB $\{e_j\}$ $\sum_j \|Te_j\|^2 < \infty$ ist. Diese Summe ist unabhängig von $\{e_j\}$ und wird HS-Norm, $\|T\|_{HS}$, genannt. Es gilt

$$\|T\| \leq \|T\|_{HS}.$$

Beweis: Für $T \in \mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ gilt nach (8.16) und (8.17)

$$T = \sum_j s_j (e_j, \cdot) f_j \quad , \quad \sum_j s_j^2 < \infty$$

Folglich ist $\|Te_j\| = s_j$ und daher

$$\sum_j \|Te_j\|^2 = \sum_j s_j^2 < \infty.$$

Nach Satz 9.1 konvergiert daher $\sum_j \|Te_j\|^2$ für eine beliebige

ONB. Ist umgekehrt $\sum \|Te_j\|^2 < \infty$ so ist T sicher beschränkt, wie die folgende Abschätzung zeigt:

$$\|Tx\|^2 = \sum_j |(e_j, Tx)|^2 = \sum_j |(T^* e_j, x)|^2 \le \|x\|^2 \sum_j \|T^* e_j\|^2 =$$
$$\overset{(9.1)}{=} \|x\|^2 \sum_j \|Te_j\|^2 = \|x\|^2 \|T\|_{HS}^2$$

Daraus folgt auch $\|T\| \le \|T\|_{HS}$.

Um die Kompaktheit von T zu zeigen führen wir eine Folge von endlichdimensionalen Operatoren ein:

$$T_n = \begin{cases} T & \text{auf } L(e_1, \dots, e_n) \\ 0 & \text{auf } L(e_1, \dots, e_n)^\perp \end{cases}$$

Dann gilt $\|T - T_n\| \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$, denn

$$\|T - T_n\|^2 \le \|T - T_n\|_{HS}^2 = \sum_j \|(T - T_n) e_j\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \|Te_j\|^2 \longrightarrow 0$$

für $n \to \infty$. Nach Satz 8.5e ist deshalb T kompakt. Nach dem Korollar 8.10 hat deshalb T die Darstellung

$$T = \sum s_j (f_j, \cdot) g_j$$

Nach Satz 9.1 ist damit

$$\infty > \sum_j \|Te_j\|^2 = \sum_j \|Tf_j\|^2 = \sum s_j^2$$

und folglich ist T ein HS-Operator. $\square$

<u>Korollar 9.3.</u> Wenn T ein HS-Operator ist, dann ist auch T^* ein HS-Operator.

<u>Beweis:</u> Dies folgt aus Satz 9.2 und (siehe (9.1))

$$\sum_j \|T^* e_j\|^2 = \sum_j \|Te_j\|^2. \quad \square$$

Korollar 9.4. Sei A ein HS-Operator und B ein beschränkter Operator. Dann sind AB und BA wieder HS-Operatoren.

Beweis: Dies ist eine offensichtliche Folge von Satz 9.2. $\square$

Bemerkung. Die beiden letzten Korollare zeigen, dass $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$ ein zweiseitiges $*$-Ideal in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist.

Nun betrachten wir auch nukleare Operatoren. Zunächst zeigen wir:

Satz 9.5. Es seien A_1 und A_2 HS-Operatoren. Dann ist $B := A_1 A_2$ nuklear. Umgekehrt ist jeder nukleare Operator das Produkt von zwei HS-Operatoren.

Beweis: $\Rightarrow$: Wenn A_1, A_2 HS-Operatoren sind, so ist $B = A_1 A_2$ sicher kompakt. Deshalb existiert nach Satz 8.9 eine polare Zerlegung $B = U|B|$, wobei

$$|B| = \sum_j s_j(B)(e_j, \cdot)\, e_j \quad , \quad (s_j > 0).$$

Für die s_j gilt

$$s_j = (e_j, |B| e_j) = (\underbrace{U e_j}_{\equiv f_j}, U|B| e_j) = (f_j, A_1 A_2 e_j)$$

$$= (A_1^* f_j, A_2 e_j) \le \| A_1^* f_j \| \| A_2 e_j \| \le \tfrac{1}{2}\left(\| A_1^* f_j \|^2 + \| A_2 e_j \|^2\right)$$

Aus dieser Ungleichung folgt, dass $\sum_j s_j$ konvergiert; d.h. B ist nuklear.

$\Leftarrow$: Ist umgekehrt B nuklear, so existiert die Polarzerlegung $B = U|B|$ mit

$$B = \sum s_j (e_j, \cdot)\, e_j \ , \ \sum_j s_j < \infty$$

Wir definieren

$$|B|^{1/2} = \sum \sqrt{s_j}\, (e_j, \cdot)\, e_j). \text{ Wegen } \sum_j (\sqrt{s_j})^2 < \infty$$

ist $|B|^{1/2}$ ein HS-Operator. Da $B = (U|T|^{1/2})|T|^{1/2}$, so haben wir eine Darstellung von B als Produkt von zwei HS-Operatoren gefunden. $\square$

<u>Korollar 9.6.</u> Ist A nuklear, dann ist auch A^* nuklear.

<u>Beweis</u>: Aus $A = U|A| = U|A|^{1/2} \cdot |A|^{1/2}$ folgt $A^* = |A|^{1/2}(U|A|^{1/2})^*$ und deshalb ist nach Satz 9.5 mit A auch A^* nuklear. $\square$

<u>Korollar 9.7.</u> Ist A nuklear, B beschränkt, dann sind AB und BA nuklear.

<u>Beweis</u>: Aus $A = U|A|$ folgt $AB = (U|A|^{1/2})(|A|^{1/2}B)$; d.h. AB ist das Produkt von zwei HS-Operatoren und deshalb nach Satz 9.5 nuklear. Ähnlich beweist man, dass auch BA nuklear ist. $\square$

<u>Bemerkung</u>. Die beiden letzten Korollare zeigen, dass $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ ein zweiseitiges $*$-Ideal in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist.

<u>Satz 9.8.</u> Sei B ein beschränkter und A ein nuklearer Operator. Dann gilt für eine ONB $\{e_j\}$:

$$\sum_j (e_j, AB e_j) = \sum_j (e_j, BA e_j) \tag{9.2}$$

und beide Reihen sind absolut konvergent.

<u>Beweis</u>: Es ist

$$\sum_j (e_j, AB e_j) = \sum_j \sum_k (e_j, Ae_k)(e_k, Be_j)$$

und analog

$$\sum_j (e_j, BA e_j) = \sum_j \sum_k (e_j, Be_k)(e_k, Ae_j)$$

Die rechten Seiten sind gleich, wenn wir die Summen über j und k vertauschen dürfen. Dies ist aber der Fall, da die Konvergenz absolut ist, wie wir gleich zeigen. Aus $(e_k, A e_j) = (e_k, U|A| e_k) = s_j(A)\,(e_k, Ue_j)$ folgt

$$\sum_j \sum_k |(e_j, Be_k)||(e_k, Ae_j)| = \sum_j s_j(A) \sum_k |(e_j, Be_k)| \cdot$$

$$\cdot |(e_k, Ue_j)| \leq \frac{1}{2} \sum_j s_j(A) \sum_k \left[|(e_j, Be_k)|^2 + |(e_k, Ue_j)|^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_j s_j(A) \left[\|B^* e_j\|^2 + \|Ue_j\|^2 \right] \leq \frac{1}{2} \left(\|B^*\|^2 + 1 \right) \sum_j s_j(A) < \infty .$$

□

<u>Korollar 9.9.</u> Für einen nuklearen Operator existiert die Summe

$$\sum_j (e_j, Ae_j) \qquad (*)$$

für jede ONB und diese ist unabhängig von der ONB.

<u>Beweis:</u> Im Satz 9.8 wählen wir $B = U$: unitär und erhalten

$$\sum_j (e_j, \overbrace{(U^{-1}A)}^{\text{nuklear}} Ue_j) = \sum_j (e_j, UU^{-1}A e_j) = \sum_j (e_j, Ae_j)$$

$$= \sum_j (Ue_j, AUe_j) = \sum_j (f_j, Af_j) \quad , \quad f_j = Ue_j \; ;$$

d.h. die Summe $(*)$ ist unabhängig von der ONB $\{e_j\}$. □

Wir definieren deshalb die <u>Spur</u> eines nuklearen Operators durch

$$\mathrm{Sp}\, A = \sum_j (e_j, Ae_j) \qquad (9.3)$$

Nach dem Korollar 9.9 existiert diese Spur für $A \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$ und sie ist nur von A abhängig. Für $\mathrm{Sp} : \mathcal{B}_1(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{C}$ gelten folgende Eigenschaften (vgl. Satz 9.8):

$$\mathrm{Sp}(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = \alpha_1 \mathrm{Sp} A_1 + \alpha_2 \mathrm{Sp} A_2 \; , \; \underline{\mathrm{Sp}\, AB = \mathrm{Sp}\, BA} \; ; \; A \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H}), B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \qquad (9.4)$$

§10. Funktionen vom positiven Typ und der Satz von Bochner

Sei μ ein endliches Borel-Mass auf $\mathbb{R}^4$. Mit $\hat\mu$ bezeichnen wir die Fourier-Transformierte

$$\hat\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^4} e^{i(x,y)}\, d\mu(y) \tag{10.1}$$

(Für ein Wahrscheinlichkeits-Mass μ nennt man $\hat\mu$ die charakteristische Funktion zu μ.) Man zeigt leicht, dass $\hat\mu$ gleichmässig stetig auf $\mathbb{R}^4$ ist. Offensichtlich gilt

$$|\hat\mu(x)| \leq |\mu|(\mathbb{R}^4) =: \|\mu\| \;(= \hat\mu(0) \text{ für positives } \mu) \tag{10.2}$$

Besonders wichtig ist, dass $\hat\mu$, für ein positives Mass, vom positiven Typ ist. Dies bedeutet: Für je endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^4$ und komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_N$ gilt

$$\sum_{j,k=1}^{N} \hat\mu(x_j - x_k)\, z_j \bar z_k \geq 0 \tag{10.3}$$

d.h. die Matrix $(\hat\mu(x_j - x_k))_{j,k=1,\ldots,N}$ ist positiv. Tatsächlich ist die linke Seite von (10.3) nach (10.1) gleich dem μ-Integral mit dem Integranden

$$f(y) = \sum z_j \bar z_k\, e^{i(x_j - x_k, y)} = \Big|\sum_{j=1}^{N} z_j\, e^{i(x_j, y)}\Big|^2 \geq 0$$

<u>Satz 10.1 (Eindeutigkeitssatz).</u> Die Abbildung $\mu \mapsto \hat\mu$, μ ein endliches Borel-Mass, ist injektiv.

<u>Beweis:</u> Für zwei endliche Borelmasse μ, ν sei $\hat\mu = \hat\nu$. Für ein $f \in L^1(\mathbb{R}^4, d^4x)$ gilt nach dem Satz von Fubini

$$\int \hat f\, d\mu = \iint e^{i(x,y)} f(y)\, d^4y\, d\mu(x) = \iint e^{i(x,y)} f(y)\, d\mu(x)\, d^4y$$
$$= \int f(y)\hat\mu(y)\, d^4y$$

also

$$\int \hat{f}\, d\mu = \int f\, \hat{\mu}\, d^4x \tag{10.4}$$

Aus $\hat{\mu} = \hat{\nu}$ folgt deshalb

$$\int \hat{f}\, d\mu = \int \hat{f}\, d\nu \quad \text{für alle } \hat{f} \text{ mit } f \in L^1(\mathbb{R}^4, d^4x) \tag{10.5}$$

Diese Menge von Funktionen $\hat{f}$ liegt aber dicht im Raum $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^4)$ der stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktionen auf $\mathbb{R}^4$ (vgl., z.B., Bauer, Abschnitt 48.3). Deshalb gilt (10.5) auch für alle $\hat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^4)$. Das ist aber nach dem Satz von Riesz nur möglich, wenn $\mu = \nu$ ist. □
(siehe, z.B., Hewitt & Stromberg, (20.48).)

Nun betrachten wir umgekehrt eine Funktion f, welche im Sinne von (10.3) positiv ist.

<u>Satz 10.2.</u> Für jede Funktion $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^4)$ vom positiven Typ gilt

$$f(0) \geq 0\,, \quad f(-x) = \overline{f(x)}\,, \quad \|f\|_\infty \leq f(0) \tag{10.5}$$

<u>Beweis:</u> Wählt man in (10.3) (mit f an Stelle von $\hat{\mu}$) $N=1$, $x_1 = 0$ und $z_1 = 1$, so folgt $f(0) \geq 0$. Wählt man $N=2$, $x_1 = 0$, $x_2 = x$, so gibt (10.3)

$$f(0)\,\bar{z}_1 z_1 + f(-x)\,\bar{z}_1 z_2 + f(x)\,\bar{z}_2 z_1 + f(0)\,\bar{z}_2 z_2 \geq 0$$

Für $z_1 = z_2 = 1$ liefert diese Beziehung $f(x) + f(-x) \in \mathbb{R}$. Ist $f = f_1 + i f_2$ die Zerlegung von f in Real- und Imaginärteil, so muss demnach $f_2(-x) = -f_2(x)$ gelten. Wählt man $z_1 = 1$ und $z_2 = i$, so folgt $i f(-x) - i f(x) \in \mathbb{R}$, was $f_1(-x) = f_1(x)$ impliziert. Damit ist $f(-x) = \overline{f(x)}$ bewiesen. Wählt man schliesslich $z_1 = -|f(x)|$ und $z_2 = f(x)$, so ergibt sich

$$f(0)\,|f(x)|^2 - 2\,|f(x)|^3 + f(0)\,|f(x)|^2 \geq 0$$

und damit $|f(x)|^3 \leq f(0)|f(x)|^2$. Für alle $x \in \mathbb{R}^4$ mit $f(x) \neq 0$ gilt somit $|f(x)| \leq f(0)$. Wegen $f(0) \geq 0$ ist der Beweis vollständig. $\square$

Wir betrachten nun eine unitäre Darstellung von $\mathbb{R}^4$ in einem komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Jedem $x \in \mathbb{R}^4$ sei also ein unitärer Operator $U_x \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ zugeordnet und es gelte

(i) $$U_{x_1} U_{x_2} = U_{x_1+x_2} \, ; \qquad (10.6)$$

(ii) die Abbildung $\mathbb{R}^4 \ni x \longmapsto U_x \psi \in \mathcal{H}$ für jedes $\psi \in \mathcal{H}$ sei stetig.

Damit wird jedem $\psi \in \mathcal{H}$ die stetige Funktion

$$f(x) = (\psi, U_x \psi) \qquad (10.7)$$

zugeordnet. Diese ist vom positiven Typ, denn

$$\sum_{j,k=1}^{N} f(x_j - x_k) z_j \bar{z}_k = \sum (\psi, \underbrace{U_{x_j - x_k}}_{U_{x_j} U_{x_k}^{-1} = U_{x_j} U_{x_k}^{*} = U_{x_k}^{*} U_{x_j}} \psi) z_j \bar{z}_k$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^{N} z_j U_{x_j} \psi \right\|^2 \geq 0 \qquad (10.8)$$

Umgekehrt lässt sich zu jeder Funktion $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^4)$ vom positivem Typ eine unitäre Darstellung U_x von $\mathbb{R}^4$ in einem komplexen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ derart konstruieren, dass für ein $\psi \in \mathcal{H}$ die Gl. (10.7) gilt. Dies sieht man folgendermassen ein: Es sei $\mathcal{H}_f$ der von der Menge $\{\rho(y)f \mid y \in \mathbb{R}^4\}$ aufgespannte Unterraum von $\mathbb{C}^{\mathbb{R}^4}$, wobei $\rho(y)f$ die Funktion $\mathbb{R}^4 \ni x \longmapsto f(x+y) \in \mathbb{C}$ bezeichnet. Für je zwei Elemente

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \rho(x_j) f \, , \quad \psi = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \rho(y_k) f \qquad (10.9)$$

aus $\mathcal{H}_f$ sei

$$(\psi, \varphi) := \sum f(x_j - y_k)\, \alpha_j \overline{\beta_k} \qquad (10.10)$$

Den Beziehungen

$$(\psi, \varphi) = \sum_{k=1}^{m} \overline{\beta_k}\, \psi(-y_k) = \sum_{j,k} \alpha_j \overline{\beta_k}\, \overline{f}(-x_j + y_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{\varphi}(-x_j) \qquad (10.11)$$

entnimmt man, dass (ψ, φ) von den in (10.9) gewählten Ausdrücken für φ und ψ unabhängig ist. Es ist klar, dass (ψ, φ) eine positive hermitesche Sesquilinearform ist. Demnach wird durch $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ eine Prä-Norm auf $\mathcal{H}_f$ definiert.
Aus

$$(\rho(-x) f, \varphi) = \varphi(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \qquad (10.11)$$

und der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$|\varphi(x)| \leq \| \rho(-x) f \| \, \|\varphi\| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

Mithin ist $\|\cdot\|$ eine Norm und $\mathcal{H}_f$ ein komplexer Prä-Hilbert-Raum. Offenbar gilt

$$(\rho(x)\psi, \rho(x)\varphi) = (\psi, \varphi) \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \qquad (10.12)$$

für jedes Paar $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_f$. Wählt man für $\mathcal{H}$ die vollständige Hülle von $\mathcal{H}_f$ und für U_x die (eindeutig bestimmte) unitäre Erweiterung von $\rho(x)$, so ist $x \mapsto U_x$ eine unitäre Darstellung von $\mathbb{R}^n$ in $\mathcal{H}$ mit $f(x) = (f, U_x f)$.

<u>Bemerkung</u>. Der Zusammenhang zwischen Funktionen von positivem Typ und unitären Darstellungen lässt sich wörtlich auf beliebige topologische Gruppen übertragen. Dies gilt auch für den Beweis des nächsten Satzes.

<u>Satz 10.3</u>. Sind f_1, f_2 zwei stetige Funktionen vom positiven Typ, dann ist auch $f_1 \cdot f_2$ eine stetige Funktion vom positiven Typ.

Beweis: Es existieren unitäre Darstellungen U^j von $\mathbb{R}^4$ in komplexen Hilbert-Räumen $\mathcal{H}_j$ und Vektoren $\Omega_j \in \mathcal{H}_j$ mit

$$f_j(x) = (\Omega_j, U^j_x \Omega_j) \quad , \quad j = 1,2. \tag{10.13}$$

Im (vollständigen) Tensorprodukt $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$ (siehe §3) betrachten wir die Tensorprodukt-Darstellung*) $U_x = U^1_x \otimes U^2_x$. Für diese ist

$$U_x(\varphi \otimes \psi) = U^1_x \varphi \otimes U^2_x \psi$$

und deshalb ist nach (4.5) auch U_x unitär in $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$. Setzt man $\Omega = \Omega_1 \otimes \Omega_2$, so ist

$$f_1(x) f_2(x) = (\Omega_1, U^1_x \Omega_1)(\Omega_1, U^2_x \Omega_2) = (\Omega_1 \otimes \Omega_2, (U^1_x \otimes U^2_x) \Omega_1 \otimes \Omega_2)$$

$$= (\Omega, U_x \Omega)$$

Daraus folgt, dass $f_1 \cdot f_2$ von positivem Typ ist. $\square$

---

*) Sind $T_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i)$, $i = 1,2$, so definiert man den Operator $T_1 \otimes T_2$ in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ durch

$$(T_1 \otimes T_2)\Big(\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \otimes y_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} c_j T_1 x_j \otimes T_2 y_j$$

Damit diese Definition sinnvoll ist, müssen wir zeigen, dass aus $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \otimes y_j = 0$ folgt $\sum_j c_j T_1 x_j \otimes T_2 y_j = 0$. Nach (4.3) gilt $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \otimes y_j = 0$ genau dann, wenn diese Summe als eine endliche Linearkombination von Elementen der Gestalt

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j b_k \varphi_j \otimes \psi_k - \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j\Big)\Big(\sum_{k=1}^{m} b_k \psi_k\Big)$$

geschrieben werden kann. Dann ist aber auch $\sum_{j=1}^{n} c_j T_1 x_j \otimes T_2 y_j$ eine Linearkombination von Elementen der gleichen Gestalt und somit gleich Null.

$T_1 \otimes T_2$ ist natürlich beschränkt und lässt sich auf ganz $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$ ausdehnen. (Zeige, dass $\| T_1 \otimes T_2 \| = \| T_1 \| \, \| T_2 \|$ ist.)

Der folgende Satz von Bochner gibt eine sehr wichtige Charakterisierung der Funktionen vom positiven Typ.

Satz 10.4 (Bochner). Die Abbildung $\mu \mapsto \hat{\mu}$ ist eine Bijektion von der Menge der endlichen positiven Borel-Masse auf die Menge der stetigen Funktionen vom positiven Typ.

Beweis: Weil die Fourier-Transformation (10.1) eine injektive Abbildung in die stetigen Funktionen vom positiven Typ ist (Satz 10.1), müssen wir nur noch zeigen, dass zu einer stetigen Funktion f von positivem Typ ein endliches positives Mass μ existiert mit $f=\hat{\mu}$. (Dies ist der schwierige Teil des Satzes.) Nach (10.5) ist $f(0)\geq 0$ und aus $f(0)=0$ folgt $f\equiv 0$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir deshalb $f(0)=1$ setzen.

Nun multiplizieren wir f mit dem Gauss'schen Kern *)

$$w_t(x)=\frac{1}{(2\pi t)^{n/2}}e^{-|x|^2/2t}\quad,\ t>0 \qquad (10.14)$$

($w_t(x)d^nx$ ist ein W-Mass) und untersuchen

$$f_m := (2m)^{n/2}\, w_m\cdot f \quad ,\ m=1,2,\dots \qquad (10.15)$$

Die Beweisidee ist die folgende. Wir zeigen zunächst, dass $f_m=\hat{\mu}_m$ für ein W-Mass μ_m ist. Im Limes $m\to\infty$ werden wir dann das gewünschte Resultat erhalten.

Zunächst zeigen wir, dass $\hat{f}_m\geq 0$ ist. Da f stetig und beschränkt ist und $w_m\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ folgt $f_m\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Wegen $\overline{f(x)}=f(-x)$ ((10.5)) und $\overline{w_m(x)}=w_m(-x)$ ist $\hat{f}_m$

---

*) Die Familie

$$\mu_t := \begin{cases}\delta(x)\,, & t=0\\ w_t(x)d^nx & \end{cases}$$

ist eine stetige Faltungshalbgruppe (Brown'sche Faltungshalbgruppe) und spielt eine zentrale Rolle in der Theorie der Brown'schen Bewegung.

sicher reell. Für die Positivität von $\hat{f}_m$ genügt es zu zeigen, dass

$$\int_{\mathbb{R}^4} \hat{f}_m\, g\, d^4x \geq 0 \qquad (10.16)$$

für jede Funktion $g \geq 0$ aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. Nun ist $\hat{g}$ von positivem Typ und deshalb auch $f \cdot \hat{g}$ (Satz 10.3). Nach dem Lemma 10.5 (siehe unten) ist damit

$$\int f_m\, \hat{g}\, d^4x \geq 0 \qquad (10.17)$$

Dies ist aber gleichbedeutend mit (10.16).

Nun zeigen wir, dass $f_m = \hat{\mu}_m$ für ein W-Mass μ_m. Da $\hat{w}_t(\xi) = e^{-t|\xi|^2/2}$, gilt nach der Parseval Identität

$$\int \hat{f}_m(\xi)\, e^{-|\xi|^2/2k}\, d^4\xi = \int f_m(x)\, w_{1/k}(x)\, d^4x = (w_{1/k} * f_m)(0)$$

Die linke Seite strebt für $k \to \infty$ nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gegen $\int \hat{f}_m(\xi)\, d^4\xi$, während die rechte Seite gegen $f_m(0)$ konvergiert. Es ist also

$$\int \hat{f}_m(\xi)\, d^4\xi = f_m(0) = 1$$

Man entnimmt daraus, dass $\hat{f}_m$ in $L^1(\mathbb{R}^4) \cap L^2(\mathbb{R}^4)$ ist. Damit ist

$$\mu_m := \hat{f}_m(-\xi)\, d^4\xi$$

ein W-Mass und es gilt $f_m = \hat{\mu}_m$.

Die Folge f_m konvergiert punktweise und monoton wachsend auf $\mathbb{R}^4$ gegen f. Deshalb konvergiert sie nach dem Satz von Dini (siehe z.B. Dieudonné, Bd. 1, Seite 135) auch gleichmässig auf den kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^4$. Nach dem Satz 10.7 (siehe unten) existiert deshalb ein W-Mass μ mit $f = \hat{\mu}$. ■

Wir müssen noch die Hilfsmittel herleiten, die im obigen Beweis verwendet wurden.

Lemma 10.5. Sei $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion von positivem Typ und $(w_t)_{t>0}$ der Gauss-Kern (10.14) auf $\mathbb{R}^4$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^4} f(x)\, w_t(x)\, d^4x \geqslant 0 \qquad (10.18)$$

Beweis: Für positive Zahlen t und s gilt $w_t * w_s = w_{t+s}$, da $\hat{w}_t \cdot \hat{w}_s = \hat{w}_{t+s}$ ist ($\hat{w}_t(\xi) = e^{-t|\xi|^2}$). Fixiert man $t>0$ und setzt $\mu := w_{t/2} d^4x$, so ist μ ein W-Mass auf dem $\mathbb{R}^4$. Es ist

$$\int_{\mathbb{R}^4} f(x) w_t(x) d^4x = \langle f, \mu * \mu \rangle \qquad (10.19)$$

Sei jetzt eine unitäre Darstellung U des $\mathbb{R}^4$ im komplexen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ und ein Vektor $\psi \in \mathcal{H}$ so gewählt, dass $f(x) = (\psi, U_x \psi)$ gilt, dann ist (mit $d\mu(-x) = d\bar{\mu}(x)$)

$$\langle f, \mu * \mu \rangle = \int_{\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^4} f(x+y)\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} (\psi, U_{x+y}\psi)\, d\mu(x)\, d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} (U_y \psi, U_x \psi)\, d\mu(x)\, d\mu(-y)$$

$$= \| U(\mu)\psi \|^2 \geqslant 0,$$

wobei

$$U(\mu)\psi = \int_{\mathbb{R}^4} U_x \psi\, d\mu(x)$$

ist. Dabei ist das Integral rechts definiert als derjenige Vektor $U(\mu)\psi$, für den $(\varphi, U(\mu)\psi) = \int (\varphi, U_x\psi)\, d\mu(x)$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ ist. $\square$

Satz 10.6. Es bezeichne $\{\mu_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von ~~positiven~~ endlichen Massen auf $\mathbb{R}^4$ mit der Eigenschaft, dass $M = \sup_{m\in\mathbb{N}} \|\mu_m\| < \infty$ und die Folge $\{\hat{\mu}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ punktweise auf $\mathbb{R}^4$ gegen eine Funktion $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^4)$ konvergiert. Dann existiert ein endliches Mass μ mit $\varphi = \hat{\mu}$ und $\|\mu\| \leq M$.

<u>Beweis:</u> Nach (10.2) ist $\sup_m |\hat{\mu}_m(x)| \leq \sup_m \|\mu_m\| = M$ und damit für jedes $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nach (10.4)

$$\left| \int \hat{\mu}_m(x) f(x) d^n x \right| = \left| \int \hat{f} d\mu_m \right| \leq M \|\hat{f}\|_\infty \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

Da auch $|\varphi(x)| \leq M$ folgt aus dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz, dass auch

$$\left| \int \varphi(x) f(x) d^n x \right| \leq M \|\hat{f}\|_\infty$$

Die Zuordnung

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni \hat{f} \longmapsto \int \varphi(x) f(x) d^n x$$

definiert eine Linearform auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, die bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ stetig ist. Da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ dicht ist, lässt sich diese auf genau eine Weise zu einer stetigen Linearform auf $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen. Nach dem Satz von Riesz gibt es ein Mass mit $\|\mu\| \leq M$ und

$$\int \varphi(x) f(x) d^n x = \int \hat{f} d\mu$$

Mit Hilfe von (10.4) ist deshalb

$$\int \varphi(x) f(x) d^n x = \int \hat{\mu}(x) f(x) d^n x \quad \text{für alle } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Da $\varphi(x)$ und $\hat{\mu}$ stetig sind, folgt daraus $\varphi = \hat{\mu}$. □

Der folgende Satz wurde in entscheidender Weise im Beweis des Bochner'schen Satzes verwendet.

<u>Satz 10.7.</u> Sei $\{\mu_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Borel'schen Wahrscheinlichkeitsmassen auf dem $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass $\{\hat{\mu}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ gleichmässig auf den kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ gegen eine Funktion φ konvergiert. Dann ist φ eine stetige Funktion von positivem Typ und

es existiert ein Borelsches W-Mass auf dem $\mathbb{R}^4$ mit $\varphi = \hat{\mu}$.

<u>Beweis</u>: Es ist klar, dass φ eine stetige Funktion ist. Nach der Bemerkung auf S. 65 erfüllt auch φ die Bedingung (10.3), d.h. φ ist von positivem Typ. Nach dem letzten Satz existiert ein endliches ~~positives~~ Mass μ mit $\varphi = \hat{\mu}$. Es gilt $\mu(\mathbb{R}^4) = \varphi(0) = \lim_{m\to\infty} \hat{\mu}_m(0) = \lim_{m\to\infty} \mu_m(\mathbb{R}^4) = 1$. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass $\mu \geq 0$ ist. Für jede Funktion $\hat{f} \geq 0$ aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ gilt nach (10.4)

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^4} \hat{f}(x)\, d\mu_m(x) = \int f\, \hat{\mu}_m\, d^4x$$

Der Grenzübergang $m \to \infty$ gibt mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue und (10.4)

$$0 \leq \int f\, \hat{\mu}\, d^4x = \int_{\mathbb{R}^4} \hat{f}\, d\mu\,,$$

d.h. $\mu \geq 0$. □

Damit ist auch der Satz von Bochner vollständig bewiesen.

* * *

§11. Spektralzerlegung von unitären Gruppen

In diesem Abschnitt leiten wir die Spektralzerlegung einer stetigen unitären Darstellung $x \mapsto U_x$ von $\mathbb{R}^n$ in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ her.

Zur Motivierung sei zunächst an den endlichdimensionalen Fall erinnert. Sei also U_t eine stetige Darstellung von $\mathbb{R}$ in einem endlichdimensionalen unitären Raum, so ist U_t automatisch differenzierbar *). Differenzieren wir die Gleichung

$$U_{s+t} = U_s U_t \tag{11.1}$$

bei $s = 0$, so ergibt sich

$$\dot{U}_t = iAU_t \quad , \quad iA := \dot{U}_0 \ . \tag{11.2}$$

Die eindeutige Lösung dieser Differentialgleichung für $U_0 = 1$ ist

$$U_t = e^{iAt} \ . \tag{11.3}$$

---

*) Man betrachte dazu $V_t := \int_0^t U_s ds$. V_t erfüllt

$$\dot{V}_t = U_t$$

$$U_s V_t = \int_0^t U_s U_\tau d\tau = \int_0^t U_{s+\tau} d\tau = \int_s^{s+t} U_\tau d\tau$$

$$= V_{s+t} - V_s \tag{$*$}$$

Aus $U_0 = 1$, $V_0 = 0$ folgt $\lim_{t\to 0} \frac{V_t}{t} = 1$; für hinreichend kleines $t \neq 0$ hat V_t deshalb eine Inverse. Daher ist nach $(*)$ für hinreichend kleines t

$$U_s = [V_{s+t} - V_s] V_t^{-1}$$

d.h., U_s ist differenzierbar.

Aus $(U_t\varphi, U_t\psi) = (\varphi,\psi)$ folgt durch Differentiation nach t bei $t=0$, dass A selbstadjungiert ist. Deshalb ist A von der Form

$$A = \sum_j \lambda_j P_j \quad , \lambda_j \in \mathbb{R} \ , \tag{11.4}$$

wobei die P_j die Projektionsoperatoren auf die Eigenräume von A sind. Damit lässt sich (11.3) auch in folgender Form schreiben

$$U_t = \sum_j e^{i\lambda_j t} P_j \ . \tag{11.5}$$

Diese Spektralzerlegung wollen wir im folgenden auf den unendlich-dimensionalen Fall verallgemeinern.

A. Spektralmasse

Wir schreiben zunächst (11.4) und (11.5) in einer Form, welche verallgemeinerungsfähig ist. Für die P_j gilt

$$P_j P_k = \delta_{jk} P_j \ ,$$
$$\sum P_j = 1 \ .$$

Sei jetzt für eine Borelmenge $\Delta \subset \mathbb{R}$

$$E(\Delta) = \sum_{\{k \mid \lambda_k \in \Delta\}} P_k \ .$$

Die Zuordnung $\Delta \mapsto E(\Delta)$ ist ein projektionswertiges Mass im Sinne der folgenden

<u>Definition 11.1.</u> Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Massraum und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Ein <u>projektionswertiges Mass</u> (<u>Spektralmass</u>, <u>Auflösung der Eins</u>) auf $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung

$$E : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $E(\emptyset)=0$, $E(\Omega)=1$,

(ii) Jedes $E(\Delta)$ ist eine orthogonale Projektion,

(iii) $E(\Delta_1\cap\Delta_2)=E(\Delta_1)E(\Delta_2)$,

(iv) Für $\Delta_1\cap\Delta_2=\emptyset$ ist $E(\Delta_1\cup\Delta_2)=E(\Delta_1)+E(\Delta_2)$,

(v) Für alle $\varphi,\psi\in\mathcal{H}$ ist die Mengenfunktion $E_{\varphi,\psi}$, definiert durch

$$E_{\varphi,\psi}(\Delta)=(\varphi,E(\Delta)\psi)$$

ein komplexes Mass auf $\mathcal{A}$.

Die Gl. (11.4) und (11.5) können nun wie folgt geschrieben werden:

$$A=\int_{\mathbb{R}}\lambda\, dE(\lambda) \tag{11.6}$$

$$U_t=\int_{\mathbb{R}}e^{i\lambda t}\, dE(\lambda) \tag{11.7}$$

Dabei ist (z.B. für eine stetige Funktion f) $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)dE(\lambda)$ definiert durch

$$(\varphi,\int f\, dE\,\psi)=\int f\, dE_{\varphi,\psi} \tag{11.8}$$

Es wird sich zeigen, dass die Darstellungen (11.6) und (11.7) allgemein gültig sind.
Bevor wir die Definition (11.8) für ein allgemeines projektionswertiges Mass E studieren, wollen wir noch ein paar unmittelbare Konsequenzen aus der Definition 11.1 ziehen.

Da $E(\Delta)$ eine orthogonale Projektion ist, gilt

$$E_{\varphi,\varphi}(\Delta)=(\varphi,E(\Delta)\varphi)=\|E(\Delta)\varphi\|^2, \tag{11.9}$$

weshalb jedes $E_{\varphi,\varphi}$ ein positives Mass ist. Das Gesamtgewicht ist

$$\|E_{\varphi,\varphi}\|=E_{\varphi,\varphi}(\Omega)=\|\varphi\|^2 \tag{11.10}$$

Für ein normiertes φ ist deshalb $E_{\varphi,\varphi}$ ein Wahrscheinlichkeitsmass. (Dies ist für die Wahrscheinlichkeitsinterpretation der QM wichtig.)

Nach (iii) kommutieren zwei Projektoren $E(\Delta_1), E(\Delta_2)$ miteinander. Falls $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, so sind die Wertebereiche von $E(\Delta_1)$ und $E(\Delta_2)$ nach (i) und (iii) senkrecht aufeinander (vgl. Satz 7.2a).

Nach (iv) ist E endlich additiv. Es stellt sich die Frage, ob E auch σ-additiv ist. Ist Δ die Vereinigung von disjunkten Mengen $\Delta_n \in \mathcal{A}$, so kann $\sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)$ i.a. nicht in der Norm gegen $E(\Delta)$ konvergieren, da $\|E(\Delta_n)\| = 0,1$ für alle Δ_n. Es gilt aber

$$\lim \sum_{n=1}^{N} E(\Delta_n)\varphi = E(\Delta)\varphi \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{H} \tag{11.11}$$

d.h., die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} E(\Delta_n)$ konvergiert stark gegen $E(\Delta)$. Um dies zu sehen, beachte man zunächst, dass $E(\Delta_n)\varphi$ und $E(\Delta_m)\varphi$ für $n \neq m$ zueinander orthogonal sind: $(E(\Delta_n)\varphi, E(\Delta_m)\varphi) = (\varphi, E(\Delta_n)E(\Delta_m)\varphi) = (\varphi, E(\Delta_n \cap \Delta_m)\varphi) = 0$. Ferner ist nach (v)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, E(\Delta_n)\psi) = (\varphi, E(\Delta)\psi) \tag{11.12}$$

Die Behauptung ergibt sich deshalb aus dem folgenden

<u>Lemma 11.2.</u> Ist $\{x_n\}$ eine Folge von paarweise orthogonalen Vektoren in $\mathcal{H}$, dann sind die drei folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert stark,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (y, x_n)$ konvergiert für jedes $y \in \mathcal{H}$.

Starke und schwache Konvergenz für Summen von orthogonalen Vektoren sind also äquivalent.

Beweis: Da $(x_i, x_j) = 0$ für $i \neq j$, gilt der Satz von Pythagoras

$$\|x_n + \cdots + x_m\|^2 = \|x_n\|^2 + \cdots + \|x_m\|^2$$

für $n \leq m$. Deshalb impliziert (b), dass die Partialsummen von $\sum x_n$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{H}$ bilden, d.h. (b) $\Rightarrow$ (a). Die Schwarz-Ungleichung zeigt (a) $\Rightarrow$ (c). Schliesslich gelte (c). Es sei $T_n \in \mathcal{H}^*$ definiert durch

$$T_n y = \sum_{i=1}^{n} (x_i, y) \qquad (y \in \mathcal{H}, n = 1, 2, \ldots)$$

Nach (c) konvergiert die Folge $\{T_n y\}$ für jedes $y \in \mathcal{H}$; deshalb ist $\{\|T_n\|\}$ nach dem Satz von Banach-Steinhaus (Satz 5.1) beschränkt. Aber

$$\|T_n\| = \|x_1 + \cdots + x_n\| = [\|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2]^{1/2}$$

Deshalb gilt (c) $\Rightarrow$ (b). $\square$

Wir haben damit folgendes bewiesen:

Proposition 11.3. Ist E ein projektionswertiges Mass, dann ist, für jedes $\varphi \in \mathcal{H}$, $\Delta \mapsto E(\Delta)\varphi$ ein σ-additives $\mathcal{H}$-wertiges Mass auf $\mathcal{A}$.

Beispiel. Wir geben ein weiteres einfaches Beispiel für ein projektionswertiges Mass. Sei wieder $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Massraum und μ ein Mass auf $\mathcal{A}$. Jedem $\Delta \in \mathcal{A}$ ordnen wir im Hilbertraum $L^2(\Omega, \mu)$ den Multiplikationsoperator zur Indikatorfunktion 1_Δ zu. Man verifiziert leicht, dass $E(\Delta)$ alle Eigenschaften eines projektionswertigen Masses erfüllt (Übung; für die Eigenschaft (v) muss man den Satz von der monotonen Konvergenz benutzen).
Satz 15.10 wird zeigen, dass dieses Beispiel nicht sehr speziell ist!

Es ist auch wichtig zu bemerken, dass Mengen vom Mass Null in üblicher Weise zu handhaben sind:

Proposition 11.4. Sei E ein projektionswertiges Mass auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Falls für $\Delta_n \in \mathcal{A}$, $E(\Delta_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, dann ist $E(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n) = 0$.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $E_{\varphi,\varphi}(\Delta_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, und jedes $\varphi \in \mathcal{H}$. Da aber $E_{\varphi,\varphi}$ σ-additiv ist, gilt $E_{\varphi,\varphi}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n) = 0$. Die Behauptung folgt damit aus (11.9). $\square$

Wir wollen jetzt Spektralintegrale $\int f\, dE$ bilden, welche zu beschränkten Operatoren führen.

B. Die Algebra $L^\infty(E)$

Sei wie bisher E ein projektionswertiges Mass auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und $f: \Omega \to \mathbb{C}$ eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion auf Ω. Der wesentliche Wertebereich von f ist das Komplement der folgenden offenen Menge V. Sei $\{D_i\}$ eine abzählbare Familie von offenen Kreisscheiben von $\mathbb{C}$, welche eine Basis der Topologie von $\mathbb{C}$ bilden; dann ist V die Vereinigung derjenigen D_i für welche $E(f^{-1}(D_i)) = 0$ ist. Nach der Proposition 11.4 ist $E(f^{-1}(V)) = 0$ und V ist die grösste offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ mit dieser Eigenschaft. Deshalb ist der wesentliche Wertebereich von f die kleinste abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$, welche $f(p)$ für fast alle $p \in \Omega$ (d.h. alle, bis auf eine Menge Δ mit $E(\Delta) = 0$) enthält.

Wir sagen, f sei wesentlich beschränkt, falls der wesentliche Wertebereich beschränkt und damit kompakt ist. Der grösste Wert von $|\lambda|$, wenn λ den wesentlichen Wertebereich durchläuft, nennt man das wesentliche Supremum $\|f\|_\infty$ von f.

Es sei B die Algebra aller beschränkten $\mathcal{A}$-messbaren

Funktionen auf Ω. Mit der Norm

$$\|f\| = \sup\{|f(p)| : p \in \Omega\}$$

wird B eine Banach-Algebra. Darin ist

$$N = \{f \in B : \|f\|_\infty = 0\}$$

ein Ideal, welches nach Proposition 11.4 abgeschlossen ist. Deshalb ist auch B/N eine Banach-Algebra, welche wir mit $L^\infty(E)$ bezeichnen. (Wir werden aber im folgenden zwischen $f \in B$ und den Äquivalenzklassen $[f] \in L^\infty(E)$ nicht immer scharf unterscheiden.)

Der folgende Satz ist zentral.

Satz 11.5. Mit den obigen Bezeichnungen wird durch

$$(\varphi, \hat{E}(f)\psi) = \int_\Omega f \, dE_{\varphi,\psi} \qquad (\varphi, \psi \in \mathcal{H}) \tag{11.13}$$

ein isometrischer Isomorphismus von der Banach-Algebra $L^\infty(E)$ auf eine abgeschlossene normale Unteralgebra $\mathfrak{A}$ von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ definiert (normal: $\mathfrak{A}$ ist kommutativ und enthält mit T auch T^*).

Ferner gilt

$$\hat{E}(\bar{f}) = \hat{E}(f)^* \qquad (f \in L^\infty(E)) \tag{11.14}$$

und

$$\|\hat{E}(f)\psi\|^2 = \int_\Omega |f|^2 dE_{\psi,\psi} \qquad (\psi \in \mathcal{H},\ f \in L^\infty(E)) \tag{11.15}$$

Zudem vertauscht ein Operator $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit jedem $E(\Delta)$ genau dann, wenn Q mit jedem $\hat{E}(f)$ vertauscht.

Beweis: Wir betrachten zunächst Stufenfunktionen. Sei $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ eine (endliche) Partition von Ω mit $\Delta_i \in A$

und s eine Stufenfunktion, so dass $s=\alpha_i$ auf Δ_i. Wir setzen

$$\hat{E}(s)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\, E(\Delta_i) \tag{11.16}$$

Offensichtlich ist

$$\hat{E}(s)^*=\hat{E}(\bar{s}) \tag{11.17}$$

Sei t eine zweite Stufenfunktion zur Partition $\{\Delta_1',\dots\dots\Delta_m'\}$ und $t=\beta_j$ auf Δ_j', dann gilt

$$\hat{E}(s)\hat{E}(t)=\sum\alpha_i\beta_j\, E(\Delta_i)E(\Delta_j')=\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j\, E(\Delta_i\cap\Delta_j')$$

Da auch st eine Stufenfunktion ist, mit dem Wert $\alpha_i\beta_j$ auf $\Delta_i\cap\Delta_j'$, so gilt

$$\hat{E}(s)\hat{E}(t)=\hat{E}(st) \tag{11.18}$$

Ganz analog findet man

$$\hat{E}(\alpha s+\beta t)=\alpha\,\hat{E}(s)+\beta\,\hat{E}(t) \tag{11.19}$$

Für $\varphi,\psi\in\mathcal{H}$ liefert (11.16)

$$(\varphi,\hat{E}(s)\psi)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\, E_{\varphi,\psi}(\Delta_i)=\int_\Omega s\, dE_{\varphi,\psi} \tag{11.20}$$

Aus (11.17) und (11.18) folgt ferner

$$\hat{E}(s)^*\hat{E}(s)=\hat{E}(\bar{s})\hat{E}(s)=\hat{E}(\bar{s}s)=\hat{E}(|s|^2) \tag{11.21}$$

Deshalb ergibt sich aus (11.20)

$$\|\hat{E}(s)\psi\|^2=(\psi,\hat{E}(s)^*\hat{E}(s)\psi)=(\psi,\hat{E}(|s|^2)\psi)=\int_\Omega |s|^2 dE_{\psi,\psi} \tag{11.22}$$

Dies zeigt (vgl. (11.10))

$$\|\hat{E}(s)\psi\|\le\|s\|_\infty\|\psi\|$$

Ist andererseits $\psi\in\mathcal{R}(E(\Delta_j))$, so gilt

$$\hat{E}(s)\psi = \alpha_j\, E(\Delta_j)\psi = \alpha_j \psi$$

Wir können j so wählen, dass $|\alpha_j| = \|s\|_\infty$, d.h. es ist

$$\|\hat{E}(s)\| = \|s\|_\infty \tag{11.23}$$

Sei jetzt $f \in L^\infty(E)$. Es gibt dann eine Folge $\{s_k\}$ von Stufenfunktionen, die in der Norm von $L^\infty(E)$ gegen f konvergieren. Nach (11.23) ist dann $\hat{E}(s_k)$ eine Cauchyfolge und konvergiert deshalb gegen einen Operator $\hat{E}(f)$; dieser hängt nicht von der Wahl der Folge $\{s_k\}$ ab. Gl. (11.23) zeigt

$$\|\hat{E}(f)\| = \|f\|_\infty \qquad (f \in L^\infty(E)) \tag{11.24}$$

Da jedes $E_{\varphi,\psi}$ ein endliches Mass ist, folgt (11.13) aus (11.20), (11.14) und (11.15) ergeben sich aus (11.17) und (11.22). Analog dürfen wir in (11.18) und (11.19) die Stufenfunktionen s und t durch $f, g \in L^\infty(E)$ ersetzen.

Damit ist gezeigt, dass $\hat{E} : L^\infty(E) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein isometrischer Isomorphismus ist. Da $L^\infty(E)$ vollständig ist, folgt aus (11.24), dass das Bild $\mathfrak{A}$ von $\hat{E}$ in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ abgeschlossen ist.

Vertauscht schliesslich Q mit jedem $E(\Delta)$, dann vertauscht Q auch mit jedem $\hat{E}(s)$, s eine Stufenfunktion und damit (Approximations-Prozess) mit jedem $\mathfrak{A}$. ∎

Notation: An Stelle von (11.13) schreiben wir oft

$$\hat{E}(f) = \int_\Omega f\, dE \tag{11.25}$$

C. Spektraldarstellung einer unitären Gruppe

Satz 11.6. Sei E ein projektionswertiges Mass auf $(\mathbb{R}^4, \mathcal{B})$. Dann ist $x \longmapsto U_x$, $\quad U_x = \int_{\mathbb{R}^4} e^{i(p,x)}\, dE(p)$

eine stark stetige unitäre Darstellung von $\mathbb{R}^4$.

Beweis: Nach Satz 11.5 ist $U_x \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $U_x^* = U_{-x} = U_x^{-1}$, d.h., U_x ist unitär für alle $x \in \mathbb{R}^4$. Ebenfalls aus Satz 11.5 (und $e^{i(p,x)} \cdot e^{i(p,y)} = e^{ip(x+y)}$) folgt $U_x U_y = U_{x+y}$. Es bleibt zu zeigen, dass $x \longmapsto U_x$ stark stetig ist. Wegen

$$\|(U_x - U_y)\psi\|^2 = \|U_y(U_{x-y} - 1)\psi\|^2 = \|(U_{x-y} - 1)\psi\|^2$$

genügt es, die Stetigkeit bei $x = 0$ zu beweisen. Nach (11.5) ist

$$\|(U_x - 1)\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^4} |e^{i(p,x)} - 1|^2 \, dE_{\psi,\psi}(p)$$

Darin ist der Integrand durch die integrierbare Funktion $g(p) = 2$ dominiert. Da ferner $|e^{i(p,x)} - 1| \xrightarrow[(x\to 0)]{} 0$ für jedes p, folgt aus dem majorisierten Konvergenzsatz, dass $\|U_x\psi - \psi\| \xrightarrow[(x\to 0)]{} 0$.

$\square$

Bemerkenswerterweise erhält man auf die in Satz 11.6 beschriebene Weise alle stark stetigen unitären Darstellungen von $\mathbb{R}^4$! Es gilt nämlich der wichtige

Satz 11.7 (Stone). Sei $x \longmapsto U_x$ eine stark stetige unitäre Darstellung von $\mathbb{R}^4$ in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, so gibt es ein eindeutiges projektionswertiges Mass E auf $(\mathbb{R}^4, \mathcal{B})$ ($\mathcal{B}$: Borel σ-Algebra auf $\mathbb{R}^4$), so dass

$$U_x = \int_{\mathbb{R}^4} e^{i(p,x)} \, dE(p) \tag{11.26}$$

Ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ kommutiert genau dann mit allen U_x, wenn er mit E kommutiert (d.h. mit allen $E(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{B}$).

Beweis: Mit dem Satz von Bochner konstruieren wir zunächst ein projektionswertiges Mass. Dazu notieren wir, dass für jedes

$\psi \in \mathcal{H}$ die Funktion $f(x) = (\psi, U_x \psi)$ stetig und von positivem Typ ist. Nach dem Satz von Bodmer ist deshalb $f = \hat{\mu}_\psi$ für ein positives endliches Mass μ_ψ; dieses ist ausserdem eindeutig und $\|\mu_\psi\| = f(0) = \|\psi\|^2$.

Auf Grund der Polarisationsgleichung

$$
\begin{aligned}
4(\varphi, U_x \psi) = {} & (\varphi+\psi, U_x(\varphi+\psi)) - (\varphi-\psi, U_x(\varphi-\psi)) + \\
& + i(\varphi+i\psi, U_x(\varphi+i\psi)) - i(\varphi-i\psi, U_x(\varphi-i\psi))
\end{aligned}
\qquad (11.27)
$$

definieren wir durch Polarisierung endliche komplexe Masse $\mu_{\varphi,\psi}$ durch

$$\mu_{\varphi,\psi} = \frac{1}{4}\left[\mu_{\varphi+\psi} - \mu_{\varphi-\psi} + i\,\mu_{\varphi+i\psi} - i\,\mu_{\varphi-i\psi}\right] \qquad (11.28)$$

Offenbar ist

$$(\varphi, U_x \psi) = \hat{\mu}_{\varphi,\psi}(x) \qquad (11.29)$$

und das Mass $\mu_{\varphi,\psi}$ ist durch diese Gl. eindeutig definiert (vgl. Satz 10.1).

Aus (11.28) folgt

$$\mu_{\psi,\varphi} = \overline{\mu_{\varphi,\psi}} \qquad (11.30)$$

und ferner, dass für ein $\Delta \in \mathcal{B}$ $\mu_{\varphi,\psi}(\Delta)$ eine Sesquilinearform ist. Diese ist beschränkt, denn nach der Schwarz-Ungleichung gilt

$$|\mu_{\varphi,\psi}(\Delta)|^2 \leq |\mu_{\varphi,\varphi}(\Delta)|^2\, |\mu_{\psi,\psi}(\Delta)|^2 \leq \|\mu_\varphi\|^2 \|\mu_\psi\|^2 = \|\varphi\|^2 \|\psi\|^2$$

Dies zeigt $\|\mu_{\varphi,\psi}\| \leq \|\varphi\|\,\|\psi\|$ und deshalb wird durch $\int_{\mathbb{R}^4} f\, d\mu_{\varphi,\psi}$ für jede beschränkte Borel Funktion auf $\mathbb{R}^4$ eine beschränkte Sesquilinearform definiert. Nach dem Korollar 2.7 entspricht deshalb jedem solchen f ein beschränkter Operator $\hat{E}(f)$ so, dass gilt

$$(\varphi, \hat{E}(f)\psi) = \int_{\mathbb{R}^4} f\, d\mu_{\varphi,\psi} \qquad (\varphi,\psi \in \mathcal{H}) \qquad (11.31)$$

Ist speziell f gleich χ_x, $\chi_x(p) := e^{i(p,x)}$ $(x \in \mathbb{R}^4)$, so gilt nach (11.29)

$$(\varphi, U_x \psi) = \int e^{i(p,x)} d\mu_{\varphi,\psi}(p) = (\varphi, \hat{E}(\chi_x)\psi)$$

d.h.

$$\hat{E}(\chi_x) = U_x \tag{11.32}$$

Für ein <u>reelles</u> f folgt aus (11.30) und (11.31), dass $\hat{E}(f)$ <u>selbstadjungiert</u> ist.

Als nächstes zeigen wir

$$\hat{E}(fg) = \hat{E}(f)\,\hat{E}(g) \tag{11.33}$$

für beschränkte Borelfunktionen f, g. Für χ_x und χ_y ergibt sich aus (11.32) und (11.31)

$$\int \chi_x \chi_y \, d\mu_{\varphi,\psi} = \int \chi_{x+y} \, d\mu_{\varphi,\psi} = (\varphi, U_{x+y}\psi) = (\varphi, U_x U_y \psi) =$$
$$= \int \chi_x \, d\mu_{\varphi, U_y\psi} \tag{11.34}$$

Aus dem Eindeutigkeitssatz 10.1 folgt

$$\chi_y \, d\mu_{\varphi,\psi} = d\mu_{\varphi, U_y \psi} \tag{11.35}$$

für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$. Deshalb dürfen wir in (10.34) χ_x durch f ersetzen:

$$\int f \chi_y \, d\mu_{\varphi,\psi} = \int f \, d\mu_{\varphi, U_y\psi} = (\varphi, \hat{E}(f) U_y \psi)$$
$$= (\tilde{\varphi}, U_y \psi) \quad ; \quad \tilde{\varphi} := \hat{E}(f)^* \varphi$$
$$= \int \chi_y \, d\mu_{\tilde{\varphi},\psi} \tag{11.36}$$

Wiederum folgt aus dem Eindeutigkeitssatz 10.1, dass $f\,d\mu_{\varphi,\psi} = d\mu_{\tilde{\varphi},\psi}$ ist und damit können wir in (11.36) χ_y durch g ersetzen:

$$\int fg \, d\mu_{\varphi,\psi} = \int g \, d\mu_{\tilde{\varphi},\psi} \, ,$$

d.h.,
$$(\varphi, \hat{E}(fg)\psi) = (\tilde{\varphi}, \hat{E}(g)\psi) = (\varphi, \hat{E}(f)\hat{E}(g)\psi)$$
Dies beweist die Behauptung (11.33).

Nun konstruieren wir unser projektionswertiges Mass. Für eine Borelmenge $\Delta \subset \mathbb{R}^4$ mit Indikatorfunktion 1_Δ setzen wir
$$E(\Delta) := \hat{E}(1_\Delta) \tag{11.37}$$
Nach (11.33) ist $E(\Delta_1)E(\Delta_2) = E(\Delta_1 \cap \Delta_2)$. Speziell ist $E^2(\Delta) = E(\Delta)$. Ausserdem ist $E(\Delta)$ selbstadjungiert und deshalb ein Projektor. Offenbar ist $E(\emptyset) = 0$ und nach (11.32) $E(\mathbb{R}^4) = \hat{E}(\chi_0) = U_0 = 1$. Die endliche Additivität von E folgt aus (11.31). Aus dieser Gl. ergibt sich auch
$$(\varphi, E(\Delta)\psi) = \mu_{\varphi,\psi}(\Delta) \tag{11.38}$$
Damit ist gezeigt, dass E ein projektionswertiges Mass ist (alle Eigenschaften in Definition 11.1 sind erfüllt). Wegen (11.38) können wir (11.31) und (11.32) auch so schreiben:
$$(\varphi, \hat{E}(f)\psi) = \int_{\mathbb{R}^4} f\, dE_{\varphi,\psi} \qquad \left(\hat{E}(f) = \int_{\mathbb{R}^4} f\, dE\right) \tag{11.39}$$
$$U_x = \int_{\mathbb{R}^4} \chi_x\, dE \tag{11.40}$$
womit (11.26) bewiesen ist. Die Eindeutigkeit von E ergibt sich wieder aus Satz 10.1.

Für einen Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist
$$(\varphi, T U_x \psi) = (T^*\varphi, U_x\psi) = \int \chi_x\, dE_{T^*\varphi,\psi} \tag{11.41}$$
$$(\varphi, U_x T\psi) = \int \chi_x\, dE_{\varphi,T\psi} \tag{11.42}$$
$$(\varphi, T E(\Delta)\psi) = (T^*\varphi, E(\Delta)\psi) = E_{T^*\varphi,\psi}(\Delta) \tag{11.43}$$
$$(\varphi, E(\Delta)T\psi) = E_{\varphi,T\psi} \tag{11.44}$$
Falls $TU_x = U_xT$ für alle $x \in \mathbb{R}^4$, so sind die Masse in

(11.41) und (11.42) gleich und folglich gilt nach (11.43) und (11.44) $TE(\Delta)=E(\Delta)T$. Ebenso ergibt sich die Umkehrung. ∎

* * *

Wir zeigen nun, dass $x \mapsto U_x$ schon unter sehr schwachen Voraussetzungen stark stetig ist.

Zunächst folgt aus der schwachen bereits die starke Stetigkeit: Aus der schwachen Stetigkeit folgt nämlich

$$\|U_x\varphi-\varphi\|^2 = \|U_x\varphi\|^2-(U_x\varphi,\varphi)-(\varphi,U_x\varphi)+\|\varphi\|^2$$

$$= 2\|\varphi\|^2-(U_x\varphi,\varphi)-(\varphi,U_x\varphi) \xrightarrow[x\to 0]{} 2\|\varphi\|^2-2\|\varphi\|^2=0,$$

d.h. die starke Stetigkeit.

Es genügt aber, viel weniger anzunehmen, wie der folgende bemerkenswerte Satz zeigt.

<u>Satz 11.8</u> (von Neumann). Sei $x \mapsto U_x$ eine Darstellung von $\mathbb{R}^n$ durch unitäre Operatoren in einem <u>separablen</u> Hilbertraum $\mathcal{H}$. Für alle $\varphi,\psi\in\mathcal{H}$ sei $(U_x\varphi,\psi)$ messbar. Dann ist U_x stark stetig.

<u>**Beweis**</u>: Es genügt, den Satz für eine 1-parametrige unitäre Gruppe U_t zu beweisen. Sei $\psi\in\mathcal{H}$; dann ist $(U_t\psi,\varphi)$ für alle $\varphi\in\mathcal{H}$ eine beschränkte messbare Funktion und

$$\varphi \longmapsto \int_0^a (U_t\varphi,\psi)\,dt$$

ist ein lineares Funktional auf $\mathcal{H}$ mit Norm $\leq a\|\psi\|$. Nach dem Lemma von Riesz existiert also ein $\psi_a\in\mathcal{H}$ so, dass

$$(\psi_a,\varphi) = \int_0^a (U_t\psi,\varphi)\,dt$$

Nun gilt

$$(U_s\psi_a,\varphi) = (\psi_a,U_{-s}\varphi) = \int_0^a (U_t\psi,U_{-s}\varphi)\,dt$$

$$= \int_0^a (U_{t+s}\psi,\varphi)\,dt = \int_a^{a+s}(U_t\psi,\varphi)\,dt$$

Also

$$|(U_b\psi_a,\varphi) - (\psi_a,\varphi)| \le \left|\int_0^b (U_t\psi,\varphi)\,dt\right| + \left|\int_a^{a+b}(U_t\psi,\varphi)\,dt\right|$$

$$\le 2b\,\|\varphi\|\,\|\psi\|$$

Deshalb gilt

$$\lim_{b\to 0}(U_b\psi_a,\varphi) = (\psi_a,\varphi)$$

d.h., U_b ist schwach und damit stark stetig auf der Menge der Vektoren $\{\psi_a \mid \psi\in\mathcal{H}\}$. Wenn wir zeigen können, dass dies eine dichte Menge ist, so folgt mit einem $\varepsilon/3$-Argument dass $t \longmapsto U_t$ stark stetig auf ganz $\mathcal{H}$ ist.

Sei also $\varphi\in\{\psi_a \mid \psi\in\mathcal{H}, a\in\mathbb{R}\}^\perp$ und $\{\psi^{(n)}\}$ sei eine orthonormierte Basis von $\mathcal{H}$. (Hier benutzen wir, dass $\mathcal{H}$ separabel ist.) Dann gilt für jedes n,

$$0 = (\psi_a^{(n)},\varphi) = \int_0^a (U_t\psi^{(n)},\varphi)\,dt$$

für alle a, weshalb $(U_t\psi^{(n)},\varphi)=0$ ist, ausser auf einer Menge S_n vom Mass Null. Sei $t_0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Dann ist $(U_{t_0}\psi^{(n)},\varphi)=0$ für alle n und dies impliziert $\varphi=0$, da U_{t_0} unitär ist. Deshalb ist in der Tat die Menge $\{\psi_a \mid \psi\in\mathcal{H}, a\in\mathbb{R}\}$ in $\mathcal{H}$ dicht.

□

D. Spektraldarstellung eines beschränkten selbstadjungierten Operators

Ist $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert, so können wir mit der überall konvergenten Exponentialreihe die unitäre Gruppe

$$U_t = e^{itA} \tag{11.45}$$

bilden. Sei

$$U_t = \int e^{it\lambda}\,dE(\lambda) \tag{11.46}$$

die zugehörige Spektraldarstellung.

Wir zeigen zuerst, dass der <u>Träger</u> von E (d.h. das Komplement

der grössten offenen Menge B mit $E(B)=0$) kompakt ist.
Dazu nehmen wir das Gegenteil an und konstruieren einen Widerspruch zur Beschränktheit von A.
Wenn für ein $\psi \in \mathcal{H}$ das erste Moment von $E_{\psi,\psi}$ existiert, so dürfen wir in

$$i(\psi, A\psi) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int e^{i\lambda t} dE_{\psi,\psi}(\lambda) \tag{11.47}$$

unter dem Integral differenzieren (Satz von der majorisierten Konvergenz) und erhalten

$$(\psi, A\psi) = \int \lambda \, dE_{\psi,\psi}(\lambda) \tag{11.48}$$

Dies ist insbesondere der Fall für $\psi \in \mathcal{R}(E(\Delta'))$ für eine beschränkte Borelmenge Δ', denn aus

$$E(\Delta)\psi = E(\Delta)E(\Delta')\psi = E(\Delta \cap \Delta')\psi$$

folgt

$$E_{\psi,\psi}(\Delta) = E_{\psi,\psi}(\Delta \cap \Delta')$$

und damit

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_{\psi,\psi} = \int_{\Delta'} \lambda \, dE_{\psi,\psi} \leq C \int dE_{\psi,\psi} = C\|\psi\|^2$$

Wäre der Träger von E unbeschränkt, so gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein beschränktes $\Delta_n \in \mathcal{B}$ rechts von n, bzw. links von $-n$ mit $E(\Delta_n) \neq 0$. Für $\psi \in \mathcal{R}(E(\Delta_n))$ wäre nach dem Gesagten

$$|(\psi, A\psi)| = \Big| \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_{\psi,\psi} \Big| = \Big| \int_{\Delta_n} \lambda \, dE_{\psi,\psi} \Big| \geq n \int_{\Delta_n} dE_{\psi,\psi} =$$

$$= n \int_{\mathbb{R}} dE_{\psi,\psi} = n\|\psi\|^2$$

d.h., A wäre unbeschränkt. $\square$

Da der Träger von E kompakt ist, dürfen wir in (11.47) für alle $\psi \in \mathcal{H}$ unter dem Integral differenzieren und erhalten damit einen Teil des folgenden Satzes.

<u>Satz 11.9.</u> Es sei A ein beschränkter selbstadjungierter Operator. Dann gibt es ein eindeutiges projektionswertiges Mass E auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, so dass gilt:

$$A = \hat{E}(\mathrm{id}) = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE(\lambda) \qquad (11.49)$$

Der Träger von E ist kompakt. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ vertauscht genau dann mit A, wenn er mit E vertauscht.

<u>Beweis:</u> Die Existenz von E und supp T kompakt wurde bereits bewiesen. Wir zeigen jetzt die Eindeutigkeit von E. Nach Satz 11.5 ist für jedes Polynom p in zwei Variablen

$$p(A, A^*) = \int p(\lambda, \bar{\lambda}) \, dE(\lambda) \qquad (11.50)$$

Nach dem Satz von Stone-Weierstrass sind diese Polynome dicht in C(supp E). Aus der Eindeutigkeit des Rieszschen Darstellungssatzes sind deshalb die Borel-Masse $E_{\varphi,\psi}$ eindeutig und damit ist auch E eindeutig.

Vertauscht $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit A, so auch mit U_t und nach Satz 11.6 ist dies genau dann der Fall, wenn T mit E kommutiert. Vertauscht umgekehrt T mit E so folgt aus (11.43) und (11.44)

$$(\varphi, TA\psi) = (T^*\varphi, A\psi) = \int \lambda \, dE_{T^*\varphi,\psi} = \int \lambda \, dE_{\varphi,T\psi} =$$
$$= (\varphi, AT\psi). \qquad \square$$

* * *