Kapitel IV. Die frühe Phase $0.1\,\mathrm{MeV} < T < 10\,\mathrm{MeV}$

" The numerical results show that (...) the n-p ratio at the beginning of the element formation is nearly 1:4 almost irrespective of its initial values as long as initial temperatures are so high ($T \gtrsim 2 \times 10^{10}$K) that equilibrium has once been attained. "

C. Hayashi (1950)

1. Einleitung

In diesem Kapitel besprechen wir die Evolutionsphase, welche zum Zeitpunkt beginnt, als sich das Universum auf etwa 10 MeV abgekühlt hatte. Wir befinden uns dann in einem Bereich, für welchen die physikalischen Grundgesetze im wesentlichen bekannt sind. Die vorherrschenden Dichten sind ausserdem gering[1]. Wir nehmen im folgenden an, dass das Universum auch in diesem frühen Stadium homogen und isotrop war. Indirekte Evidenz dafür wird sich aus dem Vergleich der erwarteten Nukleosynthese der leichten Elemente mit den Beobachtungen ergeben.

Da oberhalb von ~ 10 MeV alle Teilchen (Strahlung, Leptonen, Hadronen) im thermodynamischen Gleichgewicht sind, müssen wir nur wenige Anfangsbedingungen stellen.

---

1) Deutlich unterhalb 100 MeV ist $\rho_B = \rho_{B0}(T/3K)^3$, $\rho_{B0} \overset{(\mathrm{II}.1.6)}{=}$ $= 1.9 \times 10^{-29} (g/cm^3)\, \Omega_B \cdot h_0^2$; also

$$\rho_B = 0.7\, (T/10^{10}\,K)^3\, \Omega_B \cdot h_0^2 \; (g\,cm^{-3}) \qquad (1.1)$$

(10^{10}K $\simeq$ 1 MeV).

Die Massendichte und die Temperatur der Hintergrundstrahlung des gegenwärtigen Universums bestimmen die thermische und materielle Geschichte des vergangenen Universums, wenn kein stark entarteter (Anti-) Neutrinosee, oder gar exotische Formen von Materie vorhanden sind. Insbesondere können wir mit den heutigen Kenntnissen der Schwachen Wechselwirkungen und der Kernphysik die Nukleosynthese im Urknall durchrechnen.

Die Kernfusion findet bei $\sim 10^9$ K statt. Diese Temperatur wird durch die kleine Bindungsenergie des Deuterons bestimmt. Bei höheren Temperaturen wird ein ^2H-Kern durch Photospaltung sofort wieder aufgebrochen. Die Kernreaktionen erzeugen vorallem ^4He, da dieser Kern eine hohe Bindungsenergie hat und weil keine stabilen Kerne mit Massenzahl 5 und 8 existieren. Als Ergebnis erhält man eine Massenhäufigkeit von ^4He von etwa 25%. Dieser Wert hängt nur relativ schwach von der heutigen mittleren Baryondichte ab.

Historisch wurde die Nukleosynthese im Urknall zuerst von Gamow und seinen Mitarbeitern in den späten vierziger Jahre untersucht (siehe auch § III.1). Gamow nahm allerdings ursprünglich irrtümlicherweise an, dass bei hohen Dichten anfänglich alle Nukleonen Neutronen sind. Etwas später (1950) bemerkte aber Hayashi[2], dass oberhalb von etwa 2 MeV ($\simeq 2 \times 10^{10}$ K) zwischen Elektronen, Positronen, Neutrinos und Nukleonen aufgrund von Reaktionen wie $e^+ + n \rightleftarrows p + \bar{\nu}$, $\nu + n \rightleftarrows p + e^-$ ein thermodynamisches Gleichgewicht besteht. Nach 1965 – dem Entdeckungsjahr der 3K-

Strahlung – wurde die Big-Bang-Nukleosynthese von verschiedenen Autoren wiederholt verbessert durchgerechnet.[3]

2. Das Standardmodell (Übersicht)

In diesem Abschnitt geben wir zuerst eine Übersicht im Rahmen des Standardmodells und gehen erst anschliessend ins Detail.

Deutlich unterhalb von 100 MeV $\simeq 10^{12}$ K haben sich die Nukleonen und Antinukleonen weitgehend annihiliert, wobei allerdings ein sehr kleiner Nukleonenüberschuss übrig blieb. (Im Moment müssen wir diese Asymmetrie als unerklärte Anfangsbedingung hinnehmen. In Kap. VII werden wir aber sehen, dass diese auf natürliche Weise entstehen konnte.) Die π-Mesonen, K-Mesonen und andere Hadronen sind zerfallen. Die Energiedichte wird fast vollständig durch die vorhandenen Leptonen und die Wärmestrahlung dominiert. Die übriggebliebenen Nukleonen bilden lediglich eine unbedeutende "Verunreinigung", welche allerdings für unsere Existenz ausschlaggebend ist.

Alle Teilchen sind zunächst im thermodynamischen Gleichgewicht und deshalb müssen wir fast keine künstlichen Anfangsbedingungen stellen. Da die Masse der Myonen etwas über 100 MeV ist, verschwinden auch diese

---

2) Die Arbeit von C. Hayashi wurde auf S. 144 zitiert. Einen Nachdruck findet man in: Prog. Theor. Phys., Suppl. 49, 248 (1971).

3) Referenzen und den gegenwärtigen Stand findet man in J. Yang et al., Ap. J. 281, 493 (1984), ... S. Sarkar, Rep. Prog. Phys. 59, 1493–1609 (1996).

sehr bald. In etwa einer Sekunde fällt die Temperatur um einen Faktor hundert (vgl. Fig. 1). Gleichzeitig wird durch die Expansion das Universum so stark verdünnt, dass die sehr schwach wechselwirkenden Neutrinos von der übrigen Materie abkoppeln. Die Reaktionsgeschwindigkeiten für die Prozesse $e^+ + e^- \leftrightarrow \nu + \bar{\nu}$, $e^\pm + \nu \longrightarrow e^\pm + \nu$ werden dann nämlich langsamer als die Expansionsgeschwindigkeit des Universums (siehe Abschnitt 3). Bis zu einer

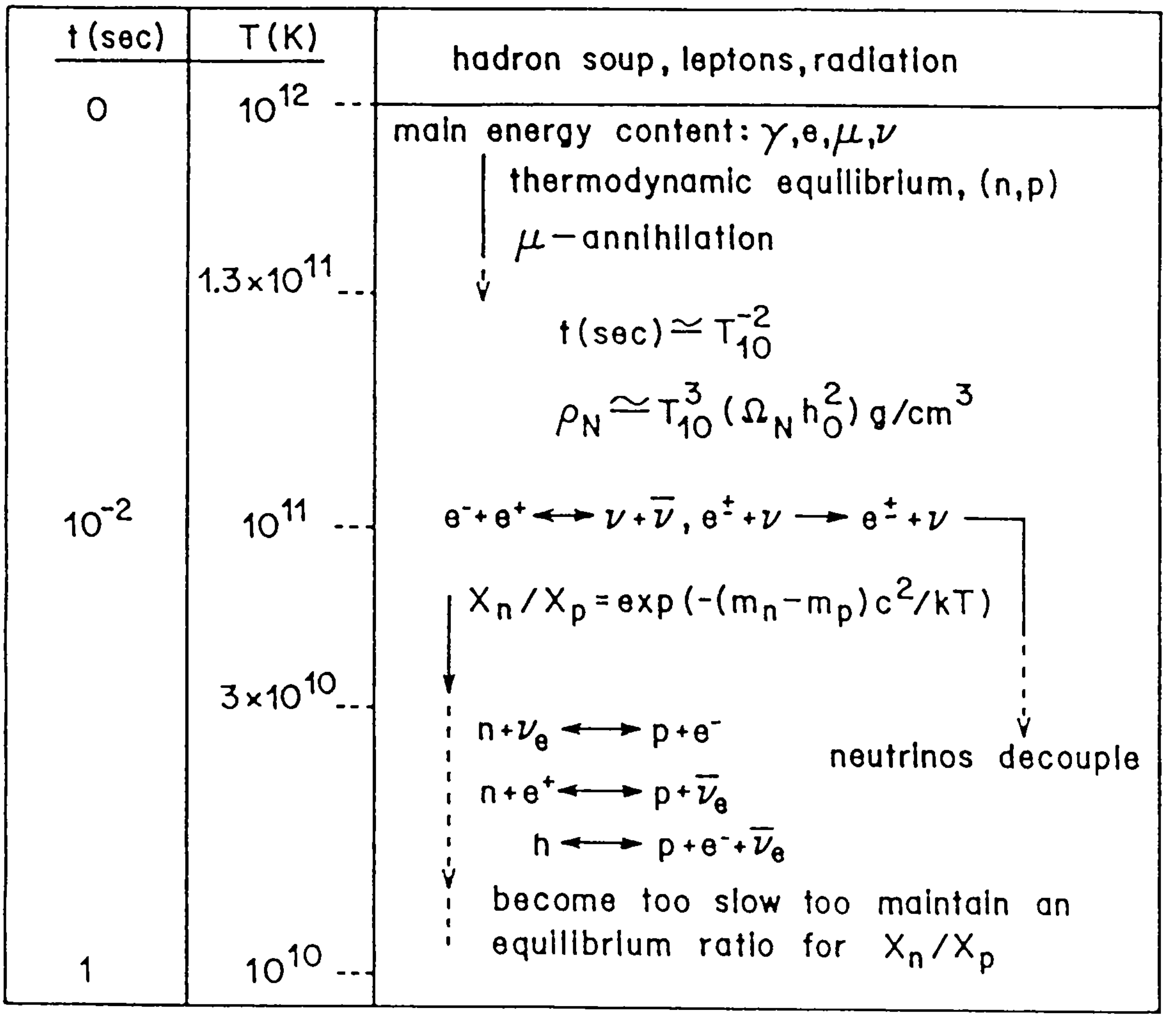


Fig. 4.1. Thermische Geschichte des Universums unterhalb T = 100 MeV. Notation: $T_{10} = T/10^{10}\,\mathrm{K}$, ρ_N = Nukleondichte, Ω_N ist der gegenwärtige Nukleon-Dichteparameter.

Temperaturen von etwa 3 MeV sind aber die Neutrinoreaktionen noch schnell genug, um für das Häufigkeitsverhältnis von Protonen und Neutronen thermodynamisches Gleichgewicht aufrechtzuerhalten. Nach der Entkopplung ändert sich dieses Verhältnis hauptsächlich dadurch, dass ein Teil der Neutronen zerfällt. Das Neutrinogas kühlt sich in der Folge bis zum heutigen Zeitpunkt adiabatisch ab.

Unterhalb von etwa 5×10^9 K beginnen sich die Elektronen und Positronen zu annihilieren, wodurch die Wärmestrahlung aufgeheizt wird. Deshalb ist anschliessend die Strahlungstemperatur etwas höher als die Neutrinotemperatur (vgl. Abschnitt 3). Beide fallen in der Folge proportional zum inversen Skalenfaktor $a^{-1}(t)$.

Nach etwas weniger als drei Minuten ist die Temperatur unter 10^9 K gesunken. Dann werden die relativ schwach gebundenen Deuteronen durch die Reaktion $n + p \leftrightarrow d + \gamma$ in thermodynamischer Häufigkeit in interessanten Mengen produziert. Damit setzen aber sofort verschiedene Kernreaktionen ein (Fig. 2). Dabei wird vorallem ^4He gebildet, da dieser Kern eine hohe Bindungsenergie hat und weil keine stabilen Kerne mit Massenzahl 5 und 8 existieren. Mehrkörperreaktionen sind nicht möglich, da das Nukleonengas zu stark verdünnt ist. Aus demselben Grund muss die Nukleosynthese über die Bildung von Deuteronen laufen. Als Folge ist die Massenhäufigkeit, Y, von ^4He nach der Big-Bang-Nukleosynthese etwa doppelt so gross wie die Neutronenhäufigkeit zu Beginn dieser Synthese. (Quantitative Ergebnisse werden in Abschnitt 4 diskutiert.)

t(sec)	T(K)	
1	10^{10}	particles in thermodynamic equilibrium:
		$e^{\pm}, \gamma, (n,p)$: low density
		$\nu_e, \nu_\mu, \ldots$ decoupled
		2-and 3-body reactions between n and p become unimportant
		n-decay: $X_n \simeq 0.16 e^{-t/\tau}$
		$e^- - e^+ -$ annihilation
	10^9	$T_\nu / T_\gamma = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} \simeq 0.7$
	0.9×10^9	d formed ($n + p \longleftrightarrow d + \gamma$)
		synthesis: $\left\{ \begin{array}{l} d + d \longleftrightarrow {}^3He + n \longleftrightarrow {}^3H \\ {}^3H + d \longleftrightarrow {}^4He + n, \text{ etc.} \\ X_n / X_p \text{ freezes in, mostly } {}^4He \text{ formed} \end{array} \right.$
		$\boxed{Y \simeq 0.25}$:depends weakly on Ω_N
10^4	10^8	

Fig. 4.2. Fortsetzung von Fig. 1. T_ν und T_γ bezeichnen die Neutrino-, bzw. die Photontemperatur.

Da die Neutrinos einen wesentlichen Teil zum Energieinhalt des frühen Universums beisteuern, hängt die Expansionsrate relativ stark von der Zahl der verschiedenen Neutrinosorten ab. Deshalb hängt auch das Neutron/Proton-Verhältnis zu Beginn der Nukleosynthese von dieser Zahl ab. Es ist deshalb verständlich, dass auch die resultierende Heliumhäufigkeit auf die Zahl der Neutrinosorten empfindlich ist (vgl. §4 E).

3. Einzelheiten zur thermischen Geschichte

A. Chemische Potentiale der Leptonen

Die Gleichgewichtsreaktionen zwischen den Teilchen unterhalb von 10^{12}K (γ, Leptonen, Nukleonen) erhalten die folgenden additiven Quantenzahlen*):

Q: elektrische Ladung,

B: Baryonzahl,

L_e: Elektron-Leptonzahl,

L_μ: Muon-Leptonzahl, L_τ, etc?

Entsprechend gibt es ~~vier~~ fünf unabhängige chemische Potentiale. Da sich Teilchen und Antiteilchen in Photonen vernichten können, sind die chemischen Potentiale von Teilchen und Antiteilchen entgegengesetzt gleich: $\mu_{e^-} = -\mu_{e^+}$, etc. Aus den folgenden Reaktionen

$$e^- + \mu^+ \longrightarrow \nu_e + \bar{\nu}_\mu \,, \quad e^- + p \longrightarrow \nu_e + n \,, \quad \mu^- + p \longrightarrow \nu_\mu + n$$

entnehmen wir ferner die Gleichgewichtsbedingungen

$$\mu_{e^-} - \mu_{\nu_e} = \mu_{\mu^-} - \mu_{\nu_\mu} = \mu_n - \mu_p \,. \tag{3.1}$$

Als unabhängige chemische Potentiale können wir also

$$\boxed{\mu_p, \mu_{e^-}, \mu_{\nu_e}, \mu_{\nu_\mu}, \mu_{\nu_\tau}} \tag{3.2}$$

wählen.

Wir benutzen die Bezeichnungen $n_Q, n_B, n_{L_e}, n_{L_\mu}, \ldots$ für die Dichten der verschiedenen Quantenzahlen. Es ist

$$n_Q \simeq 0 \quad \text{(lokale Ladungsneutralität)}, \tag{3.3}$$

$$n_B \ll \text{Entropiedichte } (\sim n_\gamma), \tag{3.4}$$

$$n_{L_e} = n_{e^-} + n_{\nu_e} - n_{e^+} - n_{\bar\nu_e}, \tag{3.5}$$

$$n_{L_\mu} = n_{\mu^-} + n_{\nu_\mu} - n_{\mu^+} - n_{\bar\nu_\mu}, \text{ etc.} \tag{3.6}$$

Das Verhältnis n_B/Entropiedichte ist bei adiabatischer Expansion konstant.

Da im gegenwärtigen Universum die Anzahl der Elektronen gleich der Anzahl der Protonen ist, war nach dem Verschwinden der Muonen $n_{e^-} \simeq n_{e^+}$ [beachte (3.4)!], d.h. $\mu_{e^-} (= -\mu_{e^+}) \simeq 0$. Möglicherweise waren aber die chemischen Potentiale der Neutrinos und Antineutrinos wesentlich von Null verschieden. In Analogie zu (3.4) machen wir die <u>Annahme</u>, dass auch die Leptonzahldichten viel kleiner als die Entropiedichte sind. (Gibt es dafür überzeugende Gründe vom sehr frühen Universum?) Dann sind auch die chemischen Potentiale der Neutrinos praktisch gleich Null ($|\mu_\nu|/kT \ll 1$). Aus (3.3), (3.4) und der obigen Annahme folgt, dass die ~~vier~~ fünf unabhängigen chemischen Potentiale (3.2) gleich Null gesetzt werden dürfen, denn die Dichten

---

*) Auch wenn B, Le und L_μ nicht strikte erhalten sein sollten, wird dies für Zeiten $\sim H_0^{-1}$ doch praktisch der Fall sein.

n_Q, n_B, n_{L_e} und n_{L_μ} sind <u>ungerade</u> in den unabhängigen Potentialen (3.2). (Die Baryonen kommen bei der Diskussion der Nukleosynthese wieder ins Spiel.)

B. Konstanz der Entropie

Mit ρ_{eq}, p_{eq} bezeichnen wir im folgenden die totale Energiedichte und den Gesamtdruck aller Teilchen im thermodynamischen Gleichgewicht. Da die chemischen Potentiale der Leptonen verschwinden, sind ρ_{eq} und p_{eq} nur Funktionen von T. Nach dem 2. Hauptsatz ist das Differential der Entropie

$$dS(V,T) = \frac{1}{T}\left[d(\rho_{eq}(T)V) + p_{eq}(T)\,dV \right]. \qquad (3.7)$$

Daraus folgt

$$d\,(dS) = 0 = d\left(\frac{1}{T}\right)\wedge d(\rho_{eq}(T)V) + d\left(\frac{p_{eq}(T)}{T}\right)\wedge dV$$

$$= -\frac{\rho_{eq}}{T^2}\,dT\wedge dV + \frac{d}{dT}\left(\frac{p_{eq}(T)}{T}\right) dT\wedge dV,$$

d.h.

$$\frac{d}{dT}\left(p_{eq}(T)/T\right) = \rho_{eq}(T)/T^2,$$

oder

$$\boxed{\frac{dp_{eq}(T)}{dT} = \frac{1}{T}\left(p_{eq}(T) + \rho_{eq}(T)\right).} \qquad (3.8)$$

Benutzen wir diese Beziehung in (3.7), so folgt

$$dS = \frac{1}{T}\, d\left[(\rho_{eq}+p_{eq})V\right] - \frac{V}{T^2}(\rho_{eq}+p_{eq})\,dT,$$

also

$$S = \frac{V}{T}(\rho_{eq}+p_{eq}) + \text{const}. \qquad (3.9)$$

Die Entropiedichte s der Teilchen im Gleichgewicht ist also

$$\boxed{s = \frac{1}{T}(\rho_{eq} + p_{eq})} . \qquad (3.10)$$

Bei adiabatischer Expansion bleibt die Entropie für ein mitbewegtes Volumen, also

$$\mathcal{S} = a^3 s , \qquad (3.11)$$

erhalten. Die Konstanz von $\mathcal{S}$ ist äquivalent zu Gl. (I.4.16) für die Gleichgewichtsanteile. Tatsächlich ist

$$p_{eq} = -\frac{d}{dt}(\rho_{eq} a^3) \Big/ \frac{d}{dt} a^3 , \qquad (3.12)$$

oder

$$a^3 \frac{dp_{eq}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[a^3(\rho_{eq} + p_{eq})\right], \qquad (3.12')$$

nach (3.8) äquivalent zu $d\mathcal{S}/dt = 0$.

Speziell für masselose Teilchen ($p = \frac{1}{3}\rho$) folgt aus (3.8) wieder $\rho \propto T^4$ und damit aus $\mathcal{S} = \text{const}$, nach (3.10), $T \propto a^{-1}$.

C. Reaktionsraten versus Expansionsrate

Wir müssen nun nachsehen, welche Teilchen im Laufe der Zeit im thermodynamischen Gleichgewicht sind. Da die chemischen Potentiale nach Abschnitt A verschwinden, können bei der Temperatur T nur Teilchen in interessanten Mengen beteiligt sein für die $m < T$ ist. Unterhalb 10^{12} K ($\simeq 100$ MeV) sind dies nur $\mu^\pm$, $e^\pm$, $\nu_\mu, \bar\nu_\mu, \nu_e, \bar\nu_e$, γ und weitere Neutrinosorten (wie das τ-Neutrino). Die Nukleonen bilden lediglich eine "unwichtige" Verunreinigung.

Die elektromagnetischen Reaktionsraten zwischen Photonen und geladenen Teilchen sind sehr schnell, sodass für diese Gleichgewichtsverteilungen

$$n_l(q)\,dq = \frac{1}{\pi^2}\,\frac{1}{e^{\sqrt{q^2+m_l^2}/T}+1}\,q^2 dq \qquad (l = e^\pm, \mu^\pm), \tag{3.13}$$

$$n_\gamma(q)\,dq = \frac{1}{\pi^2}\,\frac{1}{e^{q/T}-1}\,q^2 dq \tag{3.14}$$

etabliert werden. Die Neutrinos und Antineutrinos sind in folgenden Reaktionen beteiligt ($\nu = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$):

$$\underline{e^- + e^+ \rightleftarrows \nu + \bar\nu\,,\quad e^\pm + \nu \longrightarrow e^\pm + \nu\,,\quad e^\pm + \bar\nu \longrightarrow e^\pm + \bar\nu}\,,$$

$$\begin{aligned}
&e^- + \mu^+ \rightleftarrows \nu_e + \bar\nu_\mu\,, \quad e^- + \mu^- \rightleftarrows \bar\nu_e + \nu_\mu\,,\\
&\nu_e + \mu^- \rightleftarrows \nu_\mu + e^-\,, \quad \bar\nu_e + \mu^+ \rightleftarrows \bar\nu_\mu + e^+\,,\\
&\nu_\mu + \mu^+ \rightleftarrows \nu_e + e^+\,, \quad \bar\nu_\mu + \mu^- \rightleftarrows \bar\nu_e + e^-\,.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Wir wissen, dass das elektroschwache Standardmodell von Glashow, Salam, Weinberg u.a. diese Reaktionen richtig beschreibt. Da die Myonen früh verschwinden, wird die Kopplung der Neutrinos an die Materie vorallem durch die Reaktionen der ersten Zeile von (3.15) aufrechterhalten. Die Wirkungsquerschnitte sind aus Dimensionsgründen alle von der Grösse ($\hbar = c = k = 1$):

$$\sigma \simeq G_F^2 T^2, \tag{3.16}$$

wobei G_F die Fermikonstante ist. Numerisch ist

$$G_F m_p^2 \simeq 10^{-5} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{G_F}} \simeq 236\,\mathrm{GeV}\right). \tag{3.17}$$

Andererseits ist

$$n_e \simeq T^3. \tag{3.18}$$

[Für $T \gg m_e$ ist $n_e = \frac{3}{4}\frac{2\zeta(3)}{\pi^2}T^3 = 0.18\,T^3$.] Deshalb sind die Reaktionsraten für die ν-Streuung und die ν-Produktion pro $e^\pm$ in der ersten Zeile von (3.15) alle von der Grösse

$$v \cdot \sigma \cdot n_e \simeq G_F^2 T^5. \tag{3.19}$$

Dies vergleichen wir nun mit der Expansionsrate

$$H = \frac{\dot a}{a} \simeq (G\rho)^{1/2}.$$

Da

$$\rho \simeq T^4$$

ist diese

$$H \simeq G^{1/2} T^2 \tag{3.20}$$

und damit

$$\frac{\text{Reaktionsraten}}{\text{Expansionsrate}} \simeq \underbrace{G^{-1/2} G_F^2}\, T^3 \simeq T_{10}^3. \tag{3.21}$$

Dieses Verhältnis ist also grösser als 1 für $T \gtrsim 10^{10}\,\mathrm{K}$. Das thermodynamische Gleichgewicht wird demnach mit den Neutrinos bis fast zu $T = 10^{10}\,\mathrm{K}$ ($\simeq 1\,\mathrm{MeV}$) aufrechterhalten. Die Neutrinos bleiben aber auch nach der Entkopplung Fermi-verteilt (falls $m_\nu = 0$ ist):

$$n_\nu(q)\,dq = \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{e^{q/T_\nu}+1}\,q^2\,dq\,, \tag{3.22}$$

da die Anzahl jeder Sorte pro Volumeneinheit mit a^{-3} abnimmt und die Impulse mit a^{-1} nach rot verschoben werden. Gleichzeitig ergibt sich aus diesen Bemerkungen, dass die Neutrinotemperatur nach der Entkopplung mit a^{-1} fällt.

D. Neutrinotemperatur

Nachdem die Myonen zerfallen sind, besteht das Universum hauptsächlich aus hochrelativistischen Teilchen ($e^{\pm}, \gamma, \nu, \bar{\nu}$). Einfacher war es vorher nie und wird es auch nachher nie mehr sein! Zunächst waren diese Teilchen alle im thermodynamischen Gleichgewicht und deshalb nahm die Temperatur mit a^{-1} ab (siehe S. 204). Nach Abschnitt C blieb dies für die Neutrinotemperatur auch nach der Entkopplung so. Für die Photonentemperatur ist dies jedoch nicht immer so einfach. Unterhalb $T = m_e$ ($\simeq 5 \times 10^9$ K) beginnen sich die Elektronen und Positronen zu annihilieren, weshalb $T(a)$ einen komplizierteren Verlauf hat. Diesen werden wir in Abschnitt E untersuchen. An dieser Stelle wollen wir das Verhältnis T/T_ν <u>nach</u> der $e^{\pm}$-Annihilation bestimmen. Dazu benutzen wir die Konstanz der Entropie für die Teilchen im Gleichgewicht (siehe Abschnitt B).

Nach (3.10) ist für relativistische Teilchen

$$S = \frac{4}{3} \frac{\rho_{eq}}{T} a^3. \tag{3.23}$$

Nun ist

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15} T^4 \tag{3.24}$$

und für jede Neutrinosorte*)

$$\rho_\nu = \rho_{\bar{\nu}} = \frac{7}{16} \rho_\gamma . \tag{3.25}$$

Für $T \gg m_e$ ist

$$\rho_{e^-} = \rho_{e^+} = 2\rho_\nu = \frac{7}{8}\rho_\gamma . \tag{3.26}$$

Damit erhalten wir durch Vergleich der Entropien des e-γ-Subsystems für $T \gg m_e$ und $T \ll m_e$:

$$(T_\gamma \cdot a)^3_{\text{vorher}} \Big[\overbrace{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Photonen}}}{1} + 2 \times \underset{\substack{\uparrow \\ e^-,\, e^+}}{\tfrac{7}{8}}}^{11/4} \Big] = (T_\gamma \cdot a)^3_{\text{nachher}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Photonen}}}{1}$$

(Die Neutrinoentropie bleibt konstant!). Es gilt also

$$\frac{(T_\gamma a)_{\text{nachher}}}{(T_\gamma a)_{\text{vorher}}} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} . \tag{3.27}$$

Nun ist aber

$$(T_\nu a)_{\text{nachher}} = (T_\nu a)_{\text{vorher}} = (T_\gamma a)_{\text{vorher}}$$

und folglich gilt

$$\boxed{\left(\frac{T_\gamma}{T_\nu}\right)_{\text{nachher}} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} = 1.401 .} \tag{3.28}$$

---

*) Dazu notieren wir

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x - 1}\,dx - \int_0^\infty \frac{x^n}{e^x + 1}\,dx = 2\int_0^\infty \frac{x^n}{e^{2x} - 1}\,dx = \frac{1}{2^n}\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x - 1}\,dx ,$$

weshalb

$$\int_0^\infty \frac{x^n\,dx}{e^x + 1} \Big/ \int_0^\infty \frac{x^n\,dx}{e^x - 1} = 1 - 2^{-n} .$$

Für $n = 2$ $(2n_\nu / n_\gamma)$ ist dieses Verhältnis gleich $\frac{3}{4}$ und für $n = 3$ $(2\rho_\nu / \rho_\gamma)$ gleich $7/8$.

Wir erwarten also im gegenwärtigen Universum eine thermische Neutrinostrahlung mit der Temperatur

$$\boxed{T_{\nu 0} = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_{\gamma 0} \simeq 1.9\ \mathrm{K} \Rightarrow \frac{n_\nu + n_{\bar\nu}}{n_\gamma} = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{11} = \frac{3}{11}.} \quad (3.29)$$

für jede Sorte

Leider zeichnet sich keine Möglichkeit ab, diese nachzuweisen.

E. Expansion und Temperatur als Funktion der Zeit

Nun bestimmen wir $a(t)$ und $T(t)$. Die Friedmann-Gleichung lautet für das frühe Universum (siehe S. 165)

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G \rho}{3}\,, \qquad (3.30)$$

da der Krümmungsterm vernachlässigbar ist. Für $T \gg m_e$, aber nach der $\mu^\pm$-Annihilation, ist die Energiedichte nach (3.24–26) für 3 Neutrinosorten

$$\rho = \rho_\gamma + \rho_{e^-} + \rho_{e^+} + 3\times 2\,\rho_\nu = \frac{\pi^2}{30} T^4 \cdot g_{eff}$$

$$= (g_{eff}/2)\,\rho_\gamma\,, \qquad (3.31)$$

mit

$$g_{eff} = \underset{\gamma}{\underset{\uparrow}{2}} + \underset{e^-,e^+}{\underset{\uparrow}{2\times 2\times \tfrac{7}{8}}} + \underset{3(\nu+\bar\nu)}{\underset{\uparrow}{3\times 2\times\tfrac{7}{8}}} = \frac{43}{4}. \qquad (3.32)$$

Benutzen wir $\rho \propto a^{-4}$ in (3.30), so folgt

$$\dot\rho/\rho = -4\left(\frac{8\pi G}{3}\rho\right)^{1/2}$$

mit der Lösung (siehe (III.5.7)):

$$t = \left(\frac{3}{32\pi G \varrho}\right)^{1/2} \tag{3.33}$$

[$t=0$ für $\varrho = \infty$]. Setzen wir hier (3.31) ein, so ergibt sich

$$t = g_{eff}^{-1/2} \left(\frac{45}{16\pi^3 G}\right)^{1/2} \frac{1}{T^2} \tag{3.34}$$

$$= 2.4\; g_{eff}^{-1/2}\; T_{MeV}^{-2}\,. \tag{3.35}$$

Sollte es mehr als drei Neutrinosorten geben, so ist

$$g_{eff} = \frac{43}{4}\left[1 + \frac{7}{43}(N_\nu - 3)\right] \tag{3.36}$$

(N_ν = Zahl der ν-Sorten) und das Universum expandiert entsprechend schneller. Die Zeitabhängigkeit von a ergibt sich aus $a \cdot T = \text{const}$.

Nach der $e^\pm$-Annihilation ($T < m_e$) haben wir nach (3.28) für drei ν-Sorten

$$\varrho = \varrho_\gamma(T_\gamma) + 3 \times 2\, \varrho_\nu(T_\nu) = \tilde{g}_{eff} \frac{\pi^2}{30} T_\gamma^4\,, \tag{3.37}$$

mit

$$\tilde{g}_{eff} = 2\left[1 + 3 \times \frac{7}{8}\left(\frac{4}{11}\right)^{4/3}\right] = 3.4\,. \tag{3.38}$$

Wie in (3.35) erhalten wir

$$t = 2.4\; \tilde{g}_{eff}^{-1/2}\, (T_\gamma)_{MeV}^{-2}\; s$$

$$= 1.3\, (T_\gamma)_{MeV}^{-2}\; s\,. \tag{3.39}$$

Für die Periode der $e^\pm$-Annihilation ist die Rechnung etwas komplizierter. Die Entropie im mitbewegten Volumen ist nach (3.10) (ohne die Neutrinos)

$$S = \frac{a^3}{T}(\rho_{e^-} + \rho_{e^+} + \rho_\gamma + p_{e^-} + p_{e^+} + p_\gamma)$$

$$= \frac{4\pi^2}{45}(aT)^3 \mathcal{S}\left(\frac{m_e}{kT}\right) , \qquad (3.40)$$

wobei

$$\mathcal{S}(x) = 1 + \frac{45}{2\pi^4}\int_0^\infty dy \frac{y^2}{e^{\sqrt{x^2+y^2}}+1}\left[\sqrt{x^2+y^2} + \frac{1}{3}\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]. \qquad (3.41)$$

Aufgrund der Konstanz der Entropie ist S auch gleich $(4\pi^2/45)(aT_\gamma)_0^3$, oder nach (3.28) gleich $(4\pi^2/45)(11/4)\underbrace{(aT_\nu)^3}_{\text{const}}$.
Deshalb gilt

$$\boxed{T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T \left[\mathcal{S}\left(\frac{m_e}{kT}\right)\right]^{1/3}} . \qquad (3.42)$$

Die Energiedichte ist

$$\rho = \rho_\gamma + 3\times 2\, \rho_\nu(T_\nu) + \rho_{e^-} + \rho_{e^+}$$

$$= \rho_\gamma(T)\left[1 + 3\times 2\times \frac{7}{16}\left(\frac{T_\nu}{T}\right)^4\right] + 2\cdot\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sqrt{q^2+m_e^2}\, q^2 dq}{e^{\sqrt{q^2+m_e^2}/T}+1}$$

oder mit (3.42)

$$\rho = \frac{\pi^2}{15} T^4\, \mathcal{E}\left(\frac{m_e}{kT}\right) , \qquad (3.43)$$

wobei

$$\mathcal{E}(x) = 1 + 3\times 2\times \frac{7}{16}\times\left(\frac{4}{11}\right)^{4/3}\mathcal{S}^{4/3}(x) +$$

$$+ \frac{30}{\pi^4}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^2+y^2}\, y^2 dy}{e^{\sqrt{x^2+y^2}}+1} . \qquad (3.44)$$

Da die Entropie (3.40) auch gleich $(4\pi^2/45)(a_0 T_{\gamma 0})^3$ ist, gilt

$$a/a_0 = (T/T_{\gamma 0})^{-1} \mathcal{S}^{-1/3}\left(\frac{m_e}{kT}\right). \tag{3.45}$$

Die dynamische Gleichung (3.30) gibt

$$dt = \left(\frac{8\pi G\rho}{3}\right)^{-1/2} \frac{da}{a}.$$

Darin benutzen wir (3.43) und (3.45). Letztere Gleichung gibt

$$\frac{da}{a} = -\left(\frac{dT}{T} + \frac{d\mathcal{S}}{3\mathcal{S}}\right),$$

weshalb

$$dt = -\left[\frac{8\pi^3 G}{45} T^4 \mathcal{E}\left(\frac{m_e}{kT}\right)\right]^{-1/2}\left(\frac{dT}{T} + \frac{d\mathcal{S}}{3\mathcal{S}}\right). \tag{3.46}$$

Diese Gleichung bestimmt $T(t)$. Die Neutrinotemperatur $T_\nu(t)$ und damit $a(t)$ (wegen $T_\nu \cdot a = \text{const}$) ist dann durch (3.42) festgelegt. Resultate sind in der nächsten Figur gezeigt.

4. Nukleosynthese der leichten Elemente

Die beobachtete Heliumhäufigkeit $Y \simeq 0.25$ kann nicht allein durch Fusion in den Sternen erklärt werden. Dazu eine einfache Abschätzung: Das Verhältnis von Leuchtkraft und Masse unserer Galaxie ist ungefähr $0.1\, L_\odot/M_\odot \simeq 0.2\, \text{erg}\, g^{-1}\text{sec}^{-1}$. Falls die Luminosität während der letzten 10^{10} Jahren in etwa konstant war, so wurden in dieser Zeit $\simeq 0.06$ MeV/Nukleon produziert. Anderseits

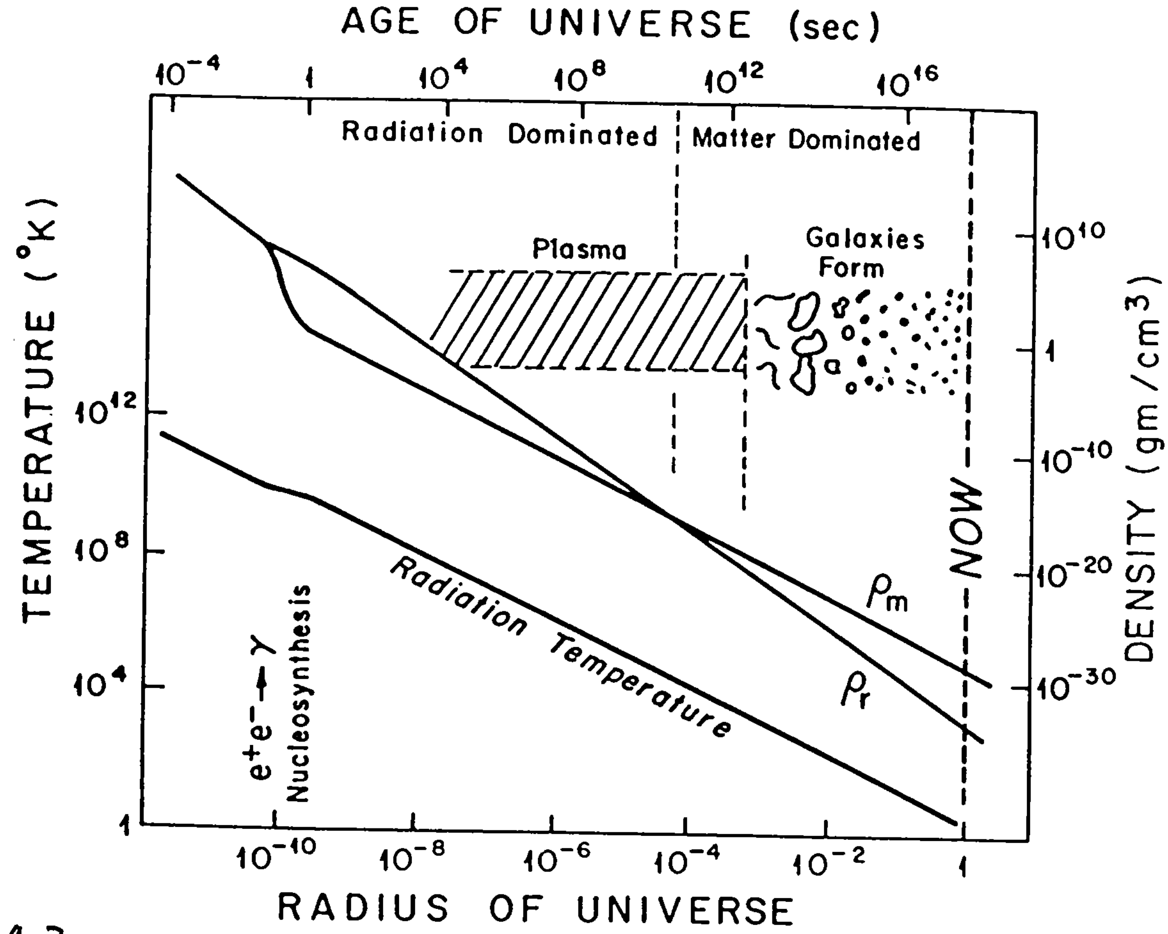


Fig. 4.3

werden bei der Fusion von H zu He etwa 6 MeV pro Nukleon freigesetzt. Deshalb konnten nicht mehr als etwa 1% aller Nukleonen in unserer Galaxis in Helium (oder schwerere Elemente) fusioniert werden. Die beobachtete universelle Heliumhäufigkeit ist aber etwa eine Grössenordnung höher. Während also die Häufigkeiten der "schweren" Elemente ($A \geq 12$) mit unseren Vorstellungen über die Elementensynthese in Sternen verträglich sind, ist dies für He (und andere leichte Elemente) nicht der Fall.

Es ist allerdings denkbar, dass das Helium in einer frühen helleren Phase unserer Galaxis gebildet wurde, etwa beim Kollaps von sehr massiven Sternen. (Diese Hypothese von Population III-Sternen wird in der Literatur nach wie vor diskutiert.) Nur ist dann nicht so recht einzusehen, warum die schwereren Elemente nicht ebenfalls mit grösseren Häufigkeiten auftreten sollten. Für einen kosmologischen Ursprung von ^4He spricht ausserdem die bemerkenswerte Universalität der beobachteten Häufigkeiten (siehe unten). Wir werden im folgenden sehen, dass das Standardmodell – weitgehend unabhängig von Ω_B – den hohen Wert $Y \simeq 0.25$ voraussagt.

A. Das Neutron-Proton-Verhältnis

Wir berechnen nun das n-p-Verhältnis als Funktion der Zeit, wobei wir die folgenden Neutrinoreaktionen in Rechnung stellen:

$$\nu_e + n \rightleftarrows e^- + p\,, \quad e^+ + n \rightleftarrows \bar{\nu}_e + p\,, \quad n \rightleftarrows p + e^- + \bar{\nu}_e\,. \tag{4.1}$$

In diesen Prozessen tragen nur die geladenen Ströme bei. Die effektive 4-Fermi-Wechselwirkung ist ($G_V = G_F \cos\theta_C \simeq G_F$)

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{G_V}{\sqrt{2}} \bar{N} \gamma^\alpha (1 - \lambda\gamma_5) \tau_+ N\, l_\alpha + h.c.\,,$$

$$l_\alpha = \bar{e}\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\nu_e\,, \quad \lambda = \frac{G_A}{G_V} \simeq 1.2\,. \tag{4.2}$$

Wir dürfen die Nukleonen nichtrelativistisch behandeln. Bezeichnet jetzt N das nichtrelativistische Nukleonfeld,

$$N = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix},$$

so ist der effektive Nukleonstrom in (4.2) gleich

$$(N^* \tau_+ N\,,\ \lambda N^* \vec{\sigma} \tau_+ N)\,. \tag{4.3}$$

Den Leptonenstrom können wir durch linkshändige Weylspinoren (χ) ausdrücken:

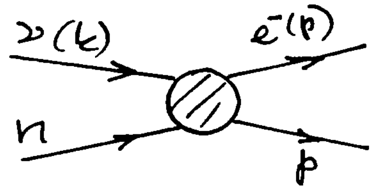
$$l_\alpha = 2\,\chi^*_{(e)}\,\sigma_\alpha\,\chi_{(\nu_e)} . \qquad (4.4)$$

Dabei ist $\sigma_\alpha = (1, \underline{\sigma})$. Die effektive Wechselwirkung lautet also

$$\mathcal{L}_{eff} = \sqrt{2}\,G_V \left[\chi^*_{(e)}\chi_{(\nu)}\, N^* \tau_+ N - \lambda\, \chi^*_{(e)}\, \underline{\sigma}\, \chi_{(\nu)}\, N^* \underline{\sigma}\, \tau_+ N \right] + h.c. \qquad (4.5)$$

Nun betrachten wir als Beispiel den Prozess:

$$\nu_e + n \longrightarrow p + e^-$$



Das T-Matrixelement lautet nach (4.5)

$$T = \sqrt{2}\,G_V \left[v^*(p)\,v(k)\,\langle 1 \rangle - \lambda \,\langle \underline{\sigma} \rangle\, v^*(p)\,\underline{\sigma}\, v(k) \right] .$$

Dabei sind $v(k)$, $v(p)$ die linkshändigen Weylspinoren im Impulsraum für ν und e^- (mit den in der Fig. angedeuteten Impulsen).

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist ($p := |\underline{p}|$, $k := |\underline{k}|$, $Q := m_n - m_p$):

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} (\sqrt{2}\,G_V)^2\, d\Omega_e \int_0^\infty \frac{dp\, p^2}{2E_e(p)\, 2E_\nu(k)}\, \delta\big(E_\nu(k) - Q - E_e(p)\big) \cdot$$

$$\left| \langle 1 \rangle\, v^*(p)\, v(k) - \lambda \langle \underline{\sigma} \rangle\, v^*(p)\, \underline{\sigma}\, v(k) \right|^2$$

$$= \frac{2 G_V^2}{(2\pi)^2}\, p\, E_e(p)\, X\, d\Omega_e , \qquad (4.6)$$

wobei

$$X = \frac{1}{2E_e(p)\, 2E_\nu(k)} \left| \langle 1 \rangle\, v^*(p)\, v(k) - \lambda \langle \underline{\sigma} \rangle\, v^*(p)\, \underline{\sigma}\, v(k) \right|^2 .$$

Nun ist

$$v_{\dot\alpha}(k)\, v^*_\beta(k) = k_{\dot\alpha\beta} \,,$$

$$\sum_{\text{spins}} v_{\dot\alpha}(p)\, v^*_\beta(p) = p_{\dot\alpha\beta} \,.$$

Wir benutzen die Bezeichnungen

$$p = p^\mu \sigma_\mu \,, \quad \hat{A} = \varepsilon \bar{A} \varepsilon^{-1} \,, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \,,$$

wenn A eine 2x2 Matrix ist. Dann wird aus X, nach Summation über die e-Spins (Nukleonen unpolarisiert)

$$X = \frac{1}{2E_e(p)\, 2E_\nu(k)} \left\{ \underbrace{Sp(\hat{p}\, \hat{\underset{\sim}{k}})}_{2(E_e(p)E_\nu(k) + \underline{p}\cdot\underline{k})} + \lambda^2 \underbrace{Sp(\sigma_i\, \hat{\underset{\sim}{k}}\, \sigma_i\, \hat{p})}_{2(3E_e(p)E_\nu(k) - \underline{p}\cdot\underline{k})} \right\}$$

oder, wenn ϑ den Winkel zwischen $\underline{p}$ und $\underline{k}$ bezeichnet,

$$X = \frac{1}{2} \left\{ (1 + v_e \cos\vartheta) + \lambda^2 (3 - v_e \cos\vartheta) \right\} . \tag{4.7}$$

Damit lautet der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G_V^2}{(2\pi)^2}\, v_e\, E_e^2(p) \left[(1 + v_e\cos\vartheta) + \lambda^2 (3 - v_e \cos\vartheta) \right] . \tag{4.8}$$

Nach der Winkelintegration erhalten wir daraus

$$\boxed{\sigma(\nu_e + n \to e^- + p) = \frac{G_V^2 + 3G_A^2}{\pi}\, v_e\, E_e^2} \,. \tag{4.9}$$

Damit ist die Reaktionsrate pro Nukleon, unter Berücksichtigung des Pauliprinzips,

$$\lambda(\nu_e + n \to e^- + p) = \int \underbrace{\left(1 - \frac{1}{e^{E_e(p)/T} + 1}\right)}_{1 - f_e} \overset{1}{\overset{\shortparallel}{v_\nu}}\, \sigma(\nu_e + n \to e^- + p) \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{k^2\, dk}{e^{E_\nu/T_\nu} + 1} \,,$$

d.h.

$$\lambda(\nu_e + n \to \bar{e} + p) = \frac{G_V^2 + 3G_A^2}{2\pi^3} \int v_e E_e^2 p_\nu^2 dp_\nu \left(1 + e^{E_\nu/T_\nu}\right)^{-1} \left(1 + e^{-E_e/T}\right)^{-1}.$$

Dabei ist (4.10)

$$E_e - E_\nu = Q = m_n - m_p = 1.293 \text{ keV}. \tag{4.11}$$

Entsprechend erhält man die anderen Reaktionsraten. Die totalen $n \to p$ und $p \to n$ Raten lassen sich wie folgt schreiben (Übung; siehe auch [SW, p. 547-548]):

$$\lambda(n \to p) = \frac{G_V^2 + 3G_A^2}{2\pi^3} \int \left(1 - \frac{m_e^2}{(Q+q)^2}\right)^{1/2} (Q+q)^2 q^2 \left(1 + e^{q/T_\nu}\right)^{-1} \left(1 + e^{-(Q+q)/T}\right)^{-1} dq, \tag{4.12a}$$

$$\lambda(p \to n) = \frac{G_V^2 + 3G_A^2}{2\pi^3} \int \left(1 - \frac{m_e^2}{(Q+q)^2}\right)^{1/2} (Q+q)^2 q^2 \left(1 + e^{-q/T_\nu}\right)^{-1} \left(1 + e^{(Q+q)/T}\right)^{-1} dq. \tag{4.12b}$$

Die Integrale erstrecken sich über $\mathbb{R} \setminus (-Q - m_e, -Q + m_e)$.

Für das Verhältnis X_n der Neutronen zu allen Nukleonen haben wir die Differentialgleichung

$$-\dot{X}_n = \lambda(n \to p) X_n - \lambda(p \to n)(1 - X_n). \tag{4.13}$$

Diese Ratengleichung muss man (numerisch) lösen. (Dabei muss man in den Ausdrücken (4.12) die Zeitabhängigkeit von $T(t)$ und $T_\nu(t)$ gemäss Abschnitt 3D einsetzen.) Bevor wir die (numerischen) Resultate diskutieren, machen wir einige qualitative Beobachtungen.

Für $T \gg Q$ können wir $T_\nu = T$ setzen und Q sowie m_e in (4.12) vernachlässigen. Dann lauten diese Raten

$$\lambda(n \to p) \simeq \lambda(p \to n) \simeq \frac{G_V^2 + 3G_A^2}{2\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} q^4 \left(1 + e^{-q/T}\right)^{-1} \left(1 + e^{q/T}\right)^{-1} dq,$$

d.h. (Übung)

$$\lambda(n\to p) \simeq \lambda(p\to n) \simeq \frac{7}{15}\pi^4 \frac{G_V^2+3G_A^2}{2\pi^3} T^5 = 0.36\,\mathrm{sec}^{-1}\, T_{10}^5 . \tag{4.14}$$

Wir vergleichen nun (4.14) mit der Expansionsrate H,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho\,, \quad \rho = g_{eff}\frac{\pi^2}{30}T^4\,, \quad g_{eff} = \frac{43}{4}\,; \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} H &= \left(\frac{4\pi^3 G}{45} g_{eff}\right)^{1/2} T^2 \\ &= \left(\frac{4\pi^3}{45}g_{eff}\right)^{1/2} \frac{m_e}{m_{Pl}} \left(\frac{T}{m_e}\right)^2 m_e \\ &= 0.5\, T_{10}^2\, \mathrm{sec}^{-1}; \quad \lambda/H = 0.7\, T_{10}^3 . \end{aligned} \tag{4.16}$$

Also ist $\lambda/H > 10$ für $T > 3\times 10^{10}$ K und deshalb liegt dann thermodynamisches Gleichgewicht vor.

Solange $T_\nu = T$ ist (d.h. für $T > 10^{10}$ K) ist das Verhältnis der beiden Raten (12)

$$\frac{\lambda(p\to n)}{\lambda(n\to p)} = e^{-Q/T} \quad (\text{"detailed balance"}). \tag{4.17}$$

Dies muss so sein, denn (4.13) muss die Gleichgewichtslösung

$$X_n = \frac{1}{1+e^{Q/T}} \qquad \left(\frac{X_n}{X_p} = e^{-Q/T}\right) \tag{4.18}$$

haben, welche für $T \gtrsim 3\times 10^{10}$ K gültig ist. Wenn T weiter fällt, kann das Gleichgewicht nicht mehr aufrechterhalten werden. Schliesslich ist für $T \lesssim 10^9$ K von den Reaktionen (4.1) nur noch der n-Zerfall wichtig; X_n ändert sich dann proportional zu $\exp(-t/\tau_n)$. Eine grobe Näherung für X_n für diesen Bereich ist

$$X_n(t) \simeq X_{n*}\, e^{-t/\tau_n} \,, \tag{4.19}$$

wobei X_{n*} gleich dem Ausdruck (4.18) für die Temperatur T_* ist, bei welcher die Rate (4.14) gleich der Expansionsrate (4.16) ist. Unterhalb von T_* werden nämlich die Reaktionen (4.1) — ausser dem n-Zerfall — unwirksam. Nun ist $T_* \simeq 1.1 \times 10^{10}\,K \simeq 1\,MeV$, also $e^{-Q/T_*} \simeq e^{-1.3} = 0.27$ und folglich (für 3 Neutrinosorten):

$$X_{n*} \simeq 0.21. \qquad X_n(t) = 0.150\, e^{-t/\tau_n} \tag{4.20}$$

(Im Anhang zu Kap. IV gebe ich eine verbesserte Rechnung.)

Die Entkopplungstemperatur T_* hängt nach (4.14) und (4.16) wie folgt von g_{eff} und τ_n ab:

$$T_* \propto \left(g_{eff}^{1/2}\, \tau_n\right)^{1/3}. \tag{4.21}$$

<u>Übungsaufgabe</u>. Berechne die folgenden Grössen:

$n_\gamma = 10^{-7.5}\, T_{MeV}^3\ (f^{-3})$ $\qquad$ ($1f = 1\,\text{Fermi} = 10^{-13}\,cm$),

$d_H \simeq ct \simeq 10^{23.5}\, T_{MeV}^{-2}\ (f)$,

mittlerer Abstand der Photonen / Kausalitätslänge

$= 10^{-21}\, T_{MeV}$,

mittlere freie Weglänge / Horizontlänge $\leq 10^{-16}\, T_{MeV}^{-1}$,

Masse der Nukleonen im Horizontvolumen $\simeq 10^{3}\, T_{MeV}^{-3}\, M_\odot$.

B. Kernreaktionen

Während die elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkungen ablaufen, gibt es gelegentlich auch Kernreaktionen wie $n+p \leftrightarrow D+\gamma$. Das Deuteron ist aber nur schwach gebunden und hat einen grossen Querschnitt für Photodissoziation. Da die Nukleonen nur Spurenelemente im heissen Strahlungsfeuerball sind, bleibt die Häufigkeit der Deuteronen zunächst sehr klein. Gleichzeitig muss die Nukleosynthese über die Bildung von Deuteronen laufen, da Mehrkörperreaktionen zu unwahrscheinlich sind.

Die Deuteronen kommen die ganze Zeit in thermodynamischer Gleichgewichtshäufigkeit vor, solange $T \gtrsim 10^9\,K$ ist. Die Gleichgewichtsbedingung für

$$n+p \rightleftarrows D+\gamma$$

lautet

$$\mu_n+\mu_p = \mu_D \qquad (\mu_i\text{: chemische Potentiale}). \tag{4.22}$$

Wir dürfen n, p und D als ideale Boltzmann Gase behandeln. Die Anzahldichten sind dann

$$n_i = \frac{g_i\, 4\pi}{(2\pi)^3}\, e^{(\mu_i-m_i)/T} \int_0^\infty dq\, q^2\, e^{-q^2/2m_iT}$$

$$= g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{+(\mu_i-m_i)/T}\,. \tag{4.23}$$

Dabei ist g_i das statistische Gewicht des Grundzustandes ($g_p=g_n=2$, $g_D=3$). Bilden wir deshalb $n_D/n_p n_n$, so folgt aus (4.22) und (4.23)

$$\frac{n_D}{n_p n_n} = \frac{3}{\sqrt{2}} \left(\frac{m_N T}{2\pi}\right)^{-3/2} e^{B_D/T} \quad \text{(Saha-Gl.)}, \qquad (4.24)$$

wobei B_D die Bindungsenergie des Deuterons ist:

$$B_D = m_p + m_n - m_D \,, \quad B_D/T = 25.8/T_9 \,. \qquad (4.25)$$

Setzen wir (n_N = Nukleonenzahldichte)

$$X_p = n_p/n_N \,, \quad X_n = n_n/n_N \,, \quad X_D = 2n_D/n_N \,,$$

so erhalten wir aus (4.24)

$$X_D = 3\sqrt{2}\, n_N \left(\frac{m_N T}{2\pi}\right)^{-3/2} e^{B_D/T} X_n X_p \,. \qquad (4.26)$$

Dies schreiben wir noch etwas anders. Es sei wie früher

$$\eta := n_N/n_\gamma = 2.68 \times 10^{-8} (\Omega_B h_0^2) \,.$$

$$n_\gamma = 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_\gamma^3$$

Damit kommt

$$X_D = \underbrace{\frac{24\,\zeta(3)}{\pi^{1/2}}}_{16.3} \cdot \eta \left(\frac{T_\gamma}{m_p}\right)^{3/2} e^{B_D/T} X_n X_p \qquad (4.27)$$

Für einen typischen Wert $\eta = 5 \times 10^{-10}$ (s.u.) wird danach $X_D/X_n X_p = O(1)$, wenn $\underline{T \simeq B_D/34}$ (!), d.h. nach (4.25) für $T_9 \simeq 0.8$. Nach (3.35) ist dies zur Zeit $\underline{t_{NS} \simeq 180\,\text{s}}$ der Fall. Die Nukleosynthese beginnt somit 3 Minuten nach dem Urknall.

* * *

Zu diesem Zeitpunkt ist, wie im Anhang gezeigt wird,

$$X_n(t_{NS}) \simeq 0.150\, e^{-t_{NS}/\tau_n} \simeq 0.122 \,. \qquad (4.28)$$

In den danach einsetzenden Kernreaktionen (s.u.) wird vor allem ^4He gebildet, da dieser Kern eine hohe Bindungsenergie hat und weil keine stabilen Kerne mit $A = 5, 8$ existieren. Als recht gute Näherung erhalten wir (da jedes α-Teilchen zwei Neutronen enthält

$$\underline{\underline{Y_{prim}(^4He) \simeq 2 X_n(t_{NS}) \simeq 0.245.}} \qquad (4.29)$$

C. Die primordialen Häufigkeiten der leichten Elemente

Einige der wichtigsten Kernreaktionen, welche für $T < T_{NS} \simeq 10^9\,K$ einsetzen, sind:

$$\begin{aligned} & d(n,\gamma)^3H, \quad d(d,p)^3H, \quad d(p,\gamma)^3He, \quad d(d,n)^3He, \\ & ^3He(n,p)^3H, \quad ^3H \longrightarrow {}^3He + e^- + \bar{\nu}_e, \\ & ^3H(p,\gamma)^4He, \quad ^3H(d,n)^4He, \\ & ^3He(n,\gamma)^4He, \quad ^3He(d,p)^4He, \quad ^3He(^3He,2p)^4He. \end{aligned} \qquad (4.30)$$

Gewisse Spurenelemente von ^7Li und ^7Be werden durch die Reaktionen

$$^4He(^3H,\gamma)^7Li, \quad ^4He(^3He,\gamma)^7Be \qquad (4.31)$$

gebildet.

Die Häufigkeiten der leichten Elemente D, ^3He und ^7Li lassen sich natürlich numerisch berechnen, ähnlich wie für ^4He können sie aber auch "von Hand" recht genau bestimmt werden. Siehe dazu:

R. Esmailzadeh, G.D. Starkman & S. Dimopoulos, Ap. J. 378, 504 (1991).

Der Vergleich von numerischen und approximativen Rechnungen ist in Fig. 4 gezeigt. Die resultierenden primordialen Häufigkeiten sind in Fig. 5 als Funktion von $\eta = n_B/n_\gamma$ dargestellt. Die numerischen Resultate beruhen auf einem komplizierten Netzwerk von Kernreaktionen (s. Fig. 6).

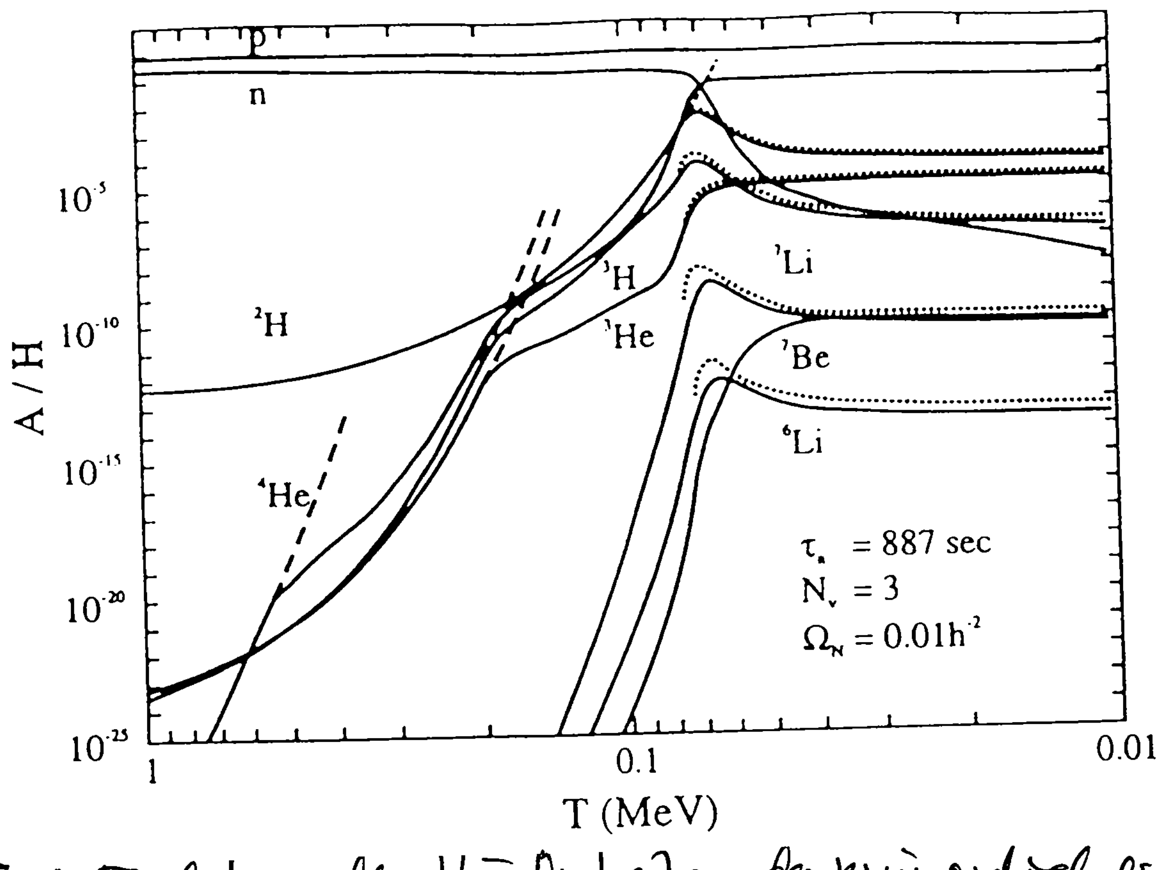


Fig. 4 Evolution der Häufigkeiten der primordial erzeugten leichten Elemente. Die ausgezogenen Kurven zeigen numerische Resultate (L. Kawano, 1992 (öffentlich zugänglicher Code)) und die punktierten analytische Näherungen (Esmailzadeh et al, 1991).

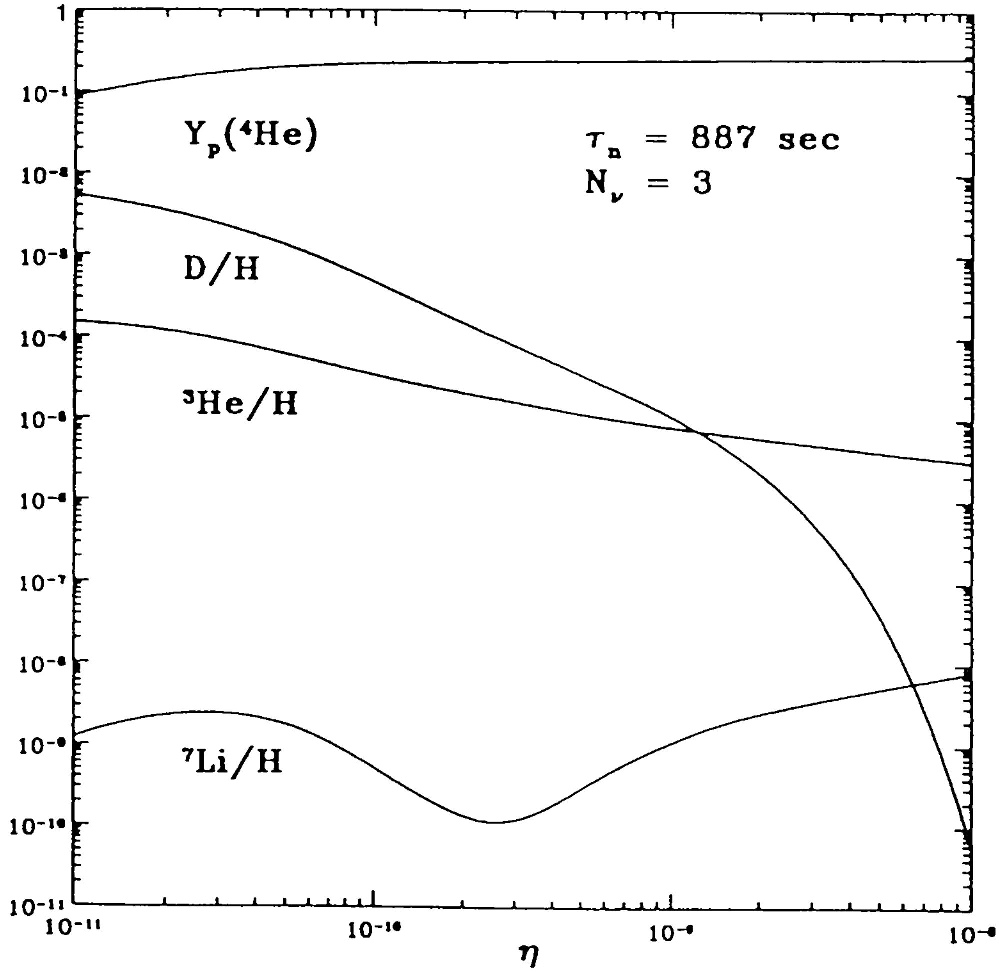


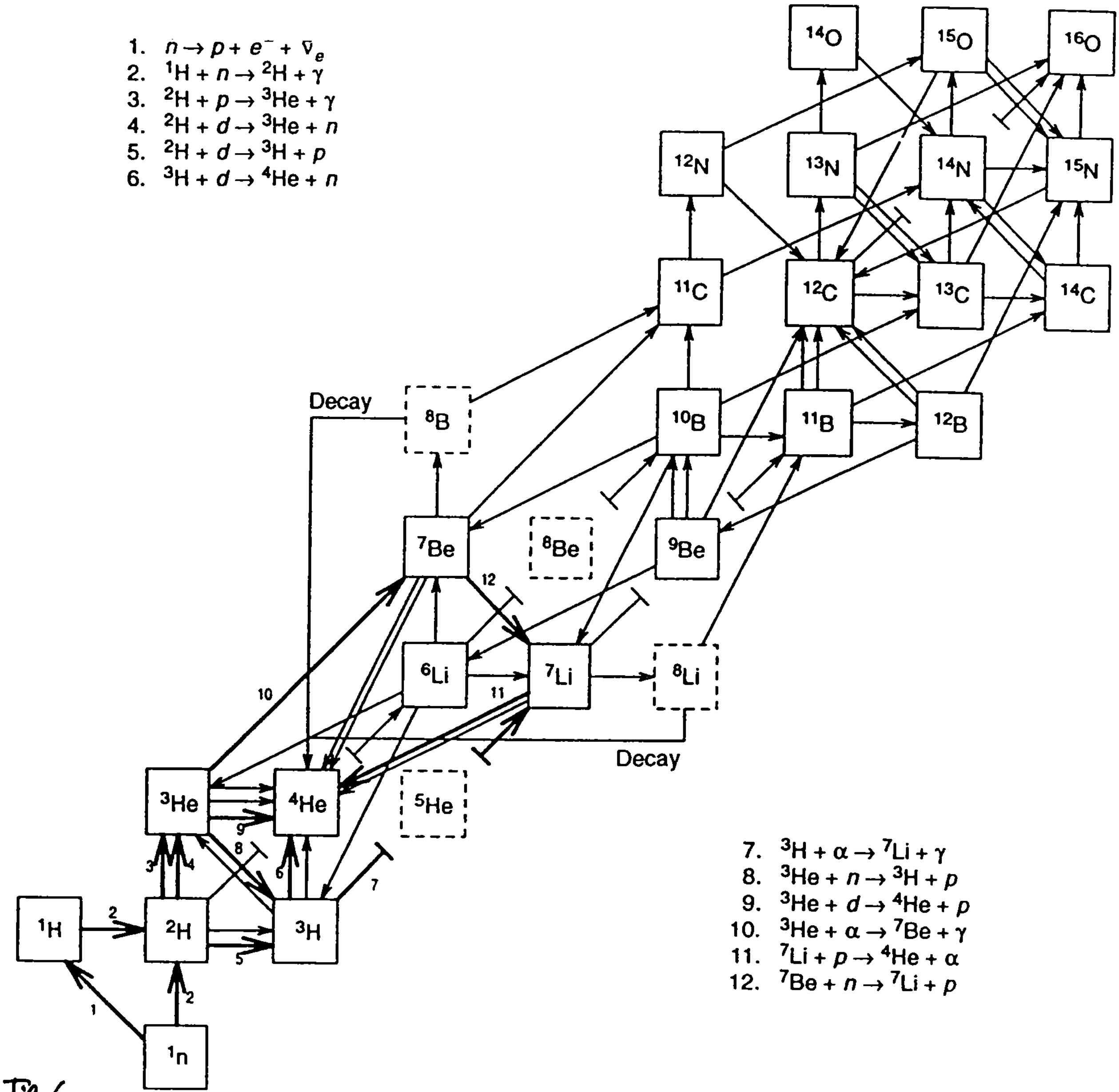
Fig. 5. Abhängigkeit der primordial synthetisierten Häufigkeiten der leichten Elemente als Funktion des Nukleon/Photon-Verhältnisses $\eta = n_N/n_\gamma$ (für 3 Neutrinosorten).

Die Ergebnisse in Fig. 5 sind in Fig. 7 für ^{4}He, D und ^{7}Li nochmals gezeigt. Dabei wird für ^{4}He eine lineare Skala verwendet.

Wir bemerken noch die nützliche Faustformel

$$\Omega_B h_0^2 = \eta_{10}/273 \qquad (\eta_{10} := 10^{10}\eta). \tag{4.32}$$

1. $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$
2. ${}^1H + n \to {}^2H + \gamma$
3. ${}^2H + p \to {}^3He + \gamma$
4. ${}^2H + d \to {}^3He + n$
5. ${}^2H + d \to {}^3H + p$
6. ${}^3H + d \to {}^4He + n$



7. ${}^3H + \alpha \to {}^7Li + \gamma$
8. ${}^3He + n \to {}^3H + p$
9. ${}^3He + d \to {}^4He + p$
10. ${}^3He + \alpha \to {}^7Be + \gamma$
11. ${}^7Li + p \to {}^4He + \alpha$
12. ${}^7Be + n \to {}^7Li + p$

Fig. 6.
The nuclear reaction network used for big-bang nucleosynthesis; the most important reactions are numbered and have bold arrows. The broken boxes for mass 5 and 8 indicate that all nuclides of this mass are very unstable.

Die schraffierten Gebiete in Fig. 7 zeigen den Stand der Beobachtungen um 1995 und signalisieren eine mögliche Krise der Standard-Big-Bang-Nukleosynthese (SBBN). Inzwischen hat sich Einiges ereignet. Auf die derzeitige, etwas verwirrende Situation werden wir im nächsten Abschnitt eingehen. Hier noch ein paar Bemerkungen zu den theoretischen Ergebnissen.

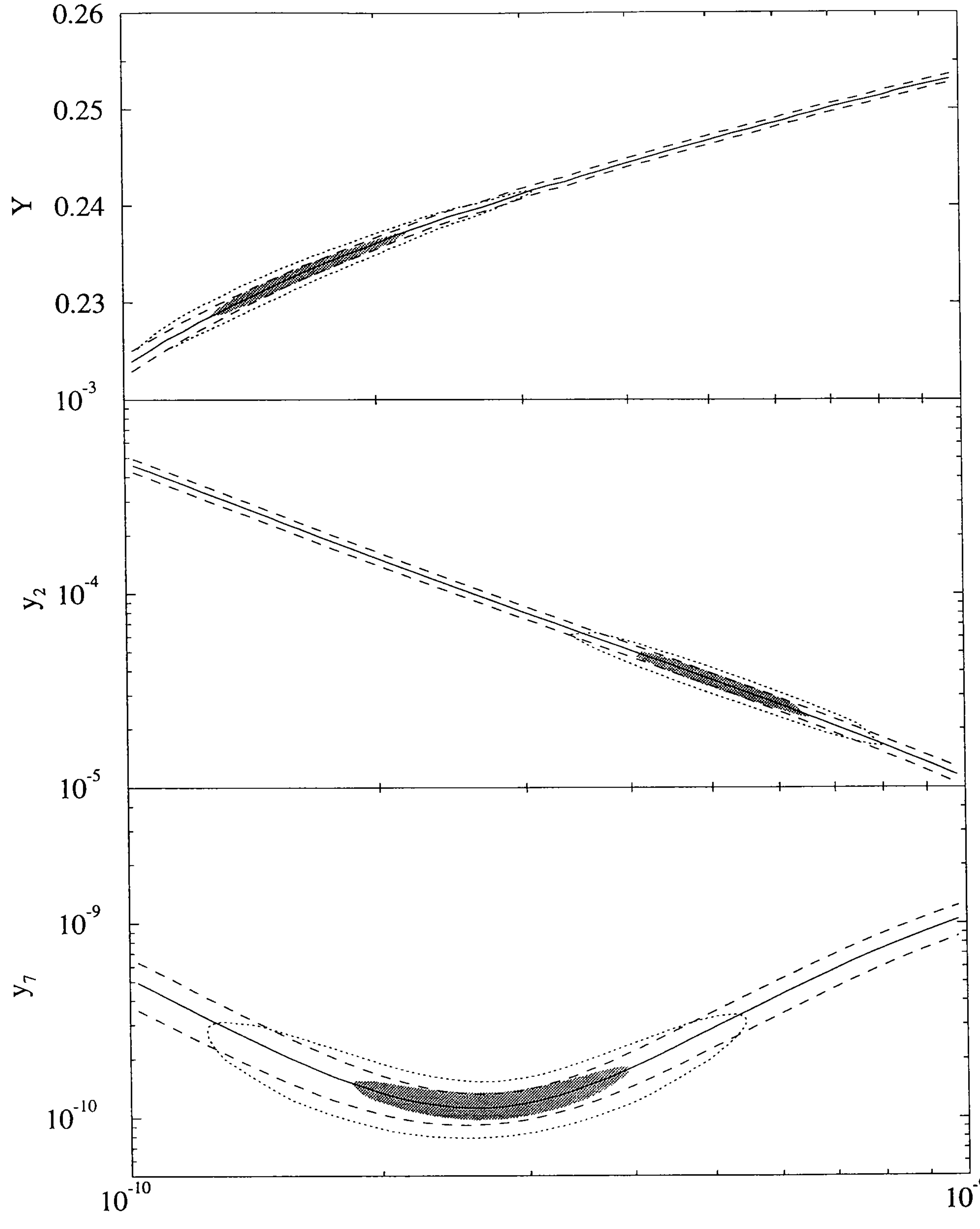


Figure 7. SBBN predictions (solid lines) for ^{4}He (Y), D (y_2), and ^{7}Li (y_7) with the theoretical uncertainties (1σ) estimated by the Monte Carlo method (dashed lines). Also shown are the regions constrained by the observations at 68% and 95% C.L. (shaded regions and dotted lines, respectively). This figure is from Hata *et al* (1995).

Diskussion

Wir diskutieren nun die Abhängigkeiten der verschiedenen Häufigkeiten von η, N_ν (Zahl der Neutrinosorten) und τ_n (Stärke der schwachen Wechselwirkungen).

a) D und ^3He

Diese Elemente werden nach (4.30) in ^4He verbrannt. Mit wachsendem $\eta = n_b/n_\gamma$ wird diese Umwandlung zunehmend vollständig sein, also:

$$D, {}^3He \searrow \quad \text{mit } \eta \nearrow .$$

Da ^3He stärker als das Deuteron gebunden ist, und vorallem weil das Deuteron eine kleinere Coulombbarriere entgegenstellt, fällt D/H mit wachsendem η schneller als $^3He/H$. Eine Zunahme der Expansionsrate (mit wachsendem N_ν) ist im wesentlichen gleichbedeutend mit einer Abnahme von η, weil es auf die Konkurrenz zwischen Zweikörper-Reaktionsraten ($\propto \eta$) und der Expansionsrate ankommt.

b) ^7Li

Die merkwürdige Abhängigkeit der ^7Li-Häufigkeit von η beruht darauf, dass für verschiedene Bereiche von η zwei verschiedene Wege zur Synthese von ^7Li führen, nämlich:

(i) für $\eta \lesssim 3\times10^{-10}$: Produktion $^4He(^3H,\gamma)^7Li$,
Zerstörung $^7Li(p,\alpha)^4He$;

(ii) für $\eta \gtrsim 3\times10^{-10}$: $^7Be(e^-,\nu_e)^7Li$, wobei ^7Be von $^4He(^3He,\gamma)^7Be$ stammt.

Damit resultiert für ^7Li im interessanten Bereich $1/2 \lesssim \eta_{10} \lesssim 10$ eine verhältnismässig kleine Variation: $^7Li/H = (0.8-10)\times 10^{-10}$.

c) ^4He

Die analytische Diskussion im Anhang wird zeigen, dass der primordiale Massenanteil von ^4He wie folgt von der Zahl der Neutrinosorten und der Lebensdauer des Neutrons abhängt:

$$Y_p(^4He) = 0.245 + 0.014\,(N_\nu - 3) + 0.0002\,\Delta\tau_n + 0.009\ln\left(\frac{\eta}{5\times 10^{-10}}\right) \qquad (\Delta\tau_n := \tau_n - 887\ s). \tag{4.33}$$

Dies stimmt sehr gut mit dem folgenden numerischen Fit überein:

$$Y_p(^4He) = 0.2459 + 0.013\,(N_\nu - 3) + 0.0002\,\Delta\tau_n + 0.01\ln\left(\eta/5\times 10^{-10}\right). \tag{4.34}$$

Ein noch besserer Fit (innerhalb $\pm 0.1\%$) gibt die Formel

$$Y_p(^4He) = 0.2462 + 0.01\ln\left(\eta/5\times 10^{-10}\right)\left(\eta/5\times 10^{-10}\right)^{-0.2} \pm 0.0012 \tag{4.35}$$

für $N_\nu = 3$.

d) Genauigkeiten der vorausgesagten Häufigkeiten

Die theoretischen 1σ-Unsicherheiten (verursacht durch Reaktionsquerschnitte, etc) sind durch die gestrichelten Linien in Fig. 7 gezeigt.

D. Vergleich mit den Beobachtungen

Im Verlaufe der galaktischen und stellaren Evolution wurde die chemische Zusammensetzung teilweise stark verändert und es ist deshalb schwierig, aus den beobachteten Häufigkeiten auf die primordiale Zusammensetzung der Materie zu schliessen.

Zur Zeit (1998) sind die Daten in grober Überein-stimmung mit den theoretischen Voraussagen des Standard-modells ($N_\nu = 3$) für $\eta_{10} \approx 5$. Zwischen den bestehenden Deuterium- und Helium-Daten zeigt sich aber eine gewisse Spannung und es ist noch nicht klar, wie die Sache aus-gehen wird.

Zunächst ist zu sagen, dass die Vergangenheit von ^3He zu kompliziert ist, um kosmologische Schlüsse zu ermöglichen. Damit sind auch früher gemachte Einschränkungen an $D + {}^3He$ nicht mehr aufrecht zu erhalten. Am wichtigsten sind Deuterium und ^4He. Für beide gibt es aber zur Zeit widersprüchliche Resultate von Beobachtungen. Je nach dem welchen man mehr traut, ergeben sich relativ tiefe Werte für η_{10} ($\simeq 1 \div 2$) oder hohe ($4 \div 9$). Leider können die Beobachtungen von ^7Li nicht helfen, um zwischen den beiden Möglichkeiten zu entscheiden. Es sieht so aus, dass die systematischen Unsicherheiten doch grösser sind, als in der Vergangenheit manche Leute meinten.

a) Bestimmungen der Deuterium-Häufigkeit

Die wichtigste Methode wurde bereits bei den Ultraviolett-

Beobachtungen vom Satelliten COPERNICUS benutzt. Diese beruht darauf, dass aufgrund der unterschiedlichen reduzierten Massen von H und ^2H Atomen die Frequenzen von entsprechenden Linien im Verhältnis 1.00027 ($\simeq 1 + m_e/2m_N$) zueinander stehen. Diese Isotopenverschiebung wurde damals benutzt, um aus den Beobachtungen von Lyman-Absorptionslinien β, $\gamma, \delta, \varepsilon$ in Richtung heisser Sterne (z.B. β-Centauri) die Häufigkeit von Deuterium im Verhältnis zu Wasserstoff im interstellaren Raum zu bestimmen.

Verschiedene Schwierigkeiten limitieren aber die Genauigkeit dieser Methode. So hat sich z.B. gezeigt, dass stellare Beiträge — etwa HI-Winde — die Absorptionsprofile verfälschen, wie aus zeitlichen Schwankungen klar hervorgeht. Ferner können multiple interstellare Wolken in der Beobachtungsrichtung die Analyse erschweren. Die gewonnenen Resultate schwanken in einem grossen Bereich: $D/H \approx (0.8-2) \times 10^{-5}$. Eine sorgfältige Analyse der COPERNICUS- und IUE-Daten ergab (McCullough, 1992)

$$(D/H)_{ISM} = (1.5 \pm 0.2) \times 10^{-5}. \tag{4.36}$$

Später wurden solche Messungen mit dem Hubble-Space-Teleskop wiederholt, mit dem Resultat:

$$(D/H)_{ISM} = 1.60 \pm 0.09\,(\text{stat})\,^{+0.05}_{-0.10}\,(\text{syst.}) \times 10^{-5}. \tag{4.37}$$

Es wurde bereits 1976 von Adams vorgeschlagen, nach Lyman-Absorptionslinien von Deuterium in den Spektren von entfernten Quasaren zu suchen, welche durch intergalaktische Vordergrundwolken von unprozessiertem primordialem Material verursacht werden. Dank dem Keck-Teleskop ist dies nun möglich geworden. Ähnlich wie früher ist dies aber mit Schwierigkeiten verbunden, da z.B. unterschiedliche Geschwindigkeiten in den Wolken zu Konfusion mit Wasserstofflinien führen können ("interloping hydrogen"). Darauf beruhen wohl auch die sich widersprechenden Ergebnisse verschiedener Gruppen. Für eine kürzliche Diskussion verweise ich auf:

S. Burles & D. Tytler, astro-ph/9803071.

Aus dieser Arbeit ist auch Fig. 8 entnommen, die das Prinzip der Methode sehr schön zeigt. Diese Autoren kommen zum Schluss, dass ihre Messungen alle verträglich sind mit dem folgenden primordialen Verhältnis

$$(D/H)_{prim} = (3.4 \pm 0.3) \times 10^{-5}, \qquad (4.38)$$

was $\eta_{10} = 5.1 \pm 0.3$ oder $\Omega_B h_0^2 = 0.019 \pm 0.001$ entspricht. In Fig. 9 sind diese Werte als "Low DQSO" bezeichnet.

Andere Gruppen haben wesentlich höhere Werte für D/H publiziert ("High DQSO" in Fig. 9), welche freilich teilweise zurückgezogen wurden. Man muss wohl abwarten bis sich die direkt Beteiligten geeinigt haben.

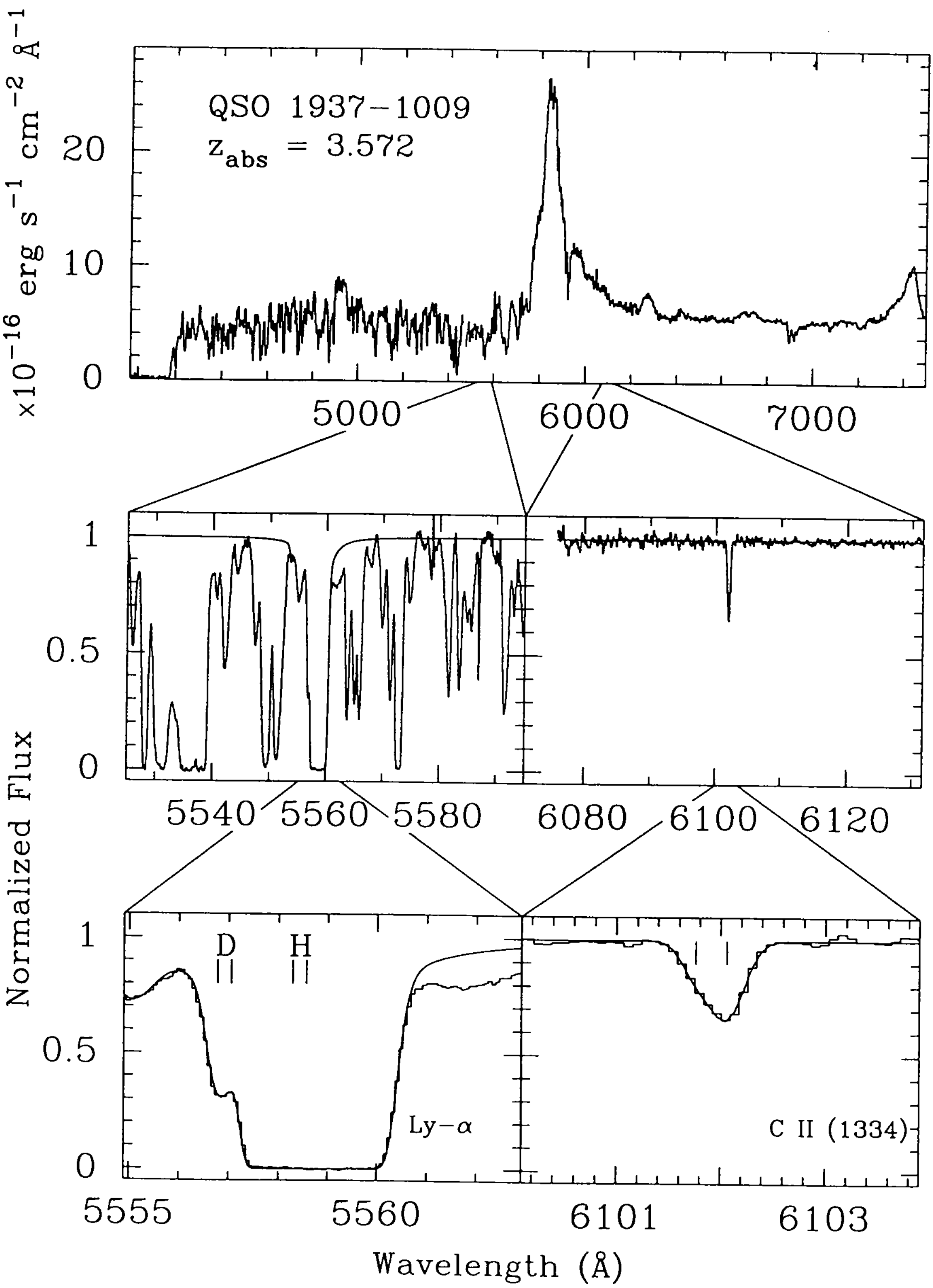


Figure 8. QSO 1937-1009: See text for more details
Top: Lick spectrum (FWHM = 4 Å)
Middle and Bottom: Keck+HIRES spectrum of the Lyα region (left) and C II region (right) at $z = 3.5722$

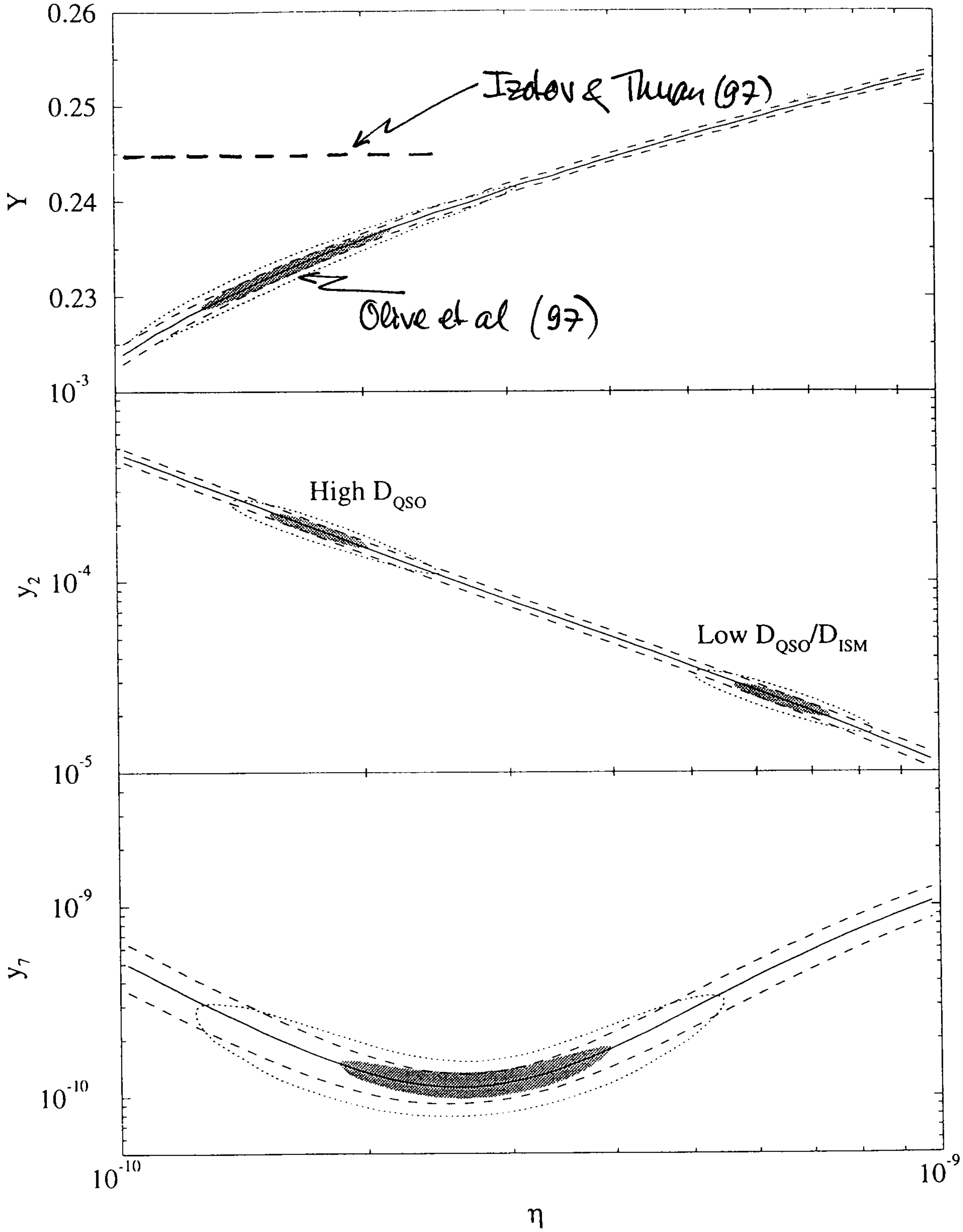


Fig. 9. As in Figure 7 with the high deuterium-abundance QSO measurements from Rugers & Hogan (1996) and the low deuterium-abundance QSO data from Tytler, Fan, & Burles (1996). This figure is from Hata *et al* (1997).

b) Gegenwärtiger Stand für ^4He

^4He ist das zweithäufigste Element im Universum und spielt eine Schlüsselrolle in der BBN.

Um den stellaren Anteil von ^4He tief zu halten, ist es günstig extragalaktische HII-Regionen (heisse Gebiete aus ionisiertem Wasserstoff) zu untersuchen. Zum Nachweis von ^4He dienen dabei Rekombinationslinien. Unter Benutzung der Daten von 62 HII-Regionen kamen Olive, Skillman & Steigman (Ap.J. 483, 788 (1997)) zum Schluss, dass diese sowie frühere Daten mit dem folgenden primordialen Wert für die Massenhäufigkeit (Y_P) verträglich sind

$$Y_p = 0.234 \pm 0.002 \quad (\text{Olive et al}). \tag{4.39}$$

Im Unterschied dazu schätzen Izotov & Thuan (Ap.J. (1997)) aufgrund ihrer Daten deutlich höher ab:

$$Y_P = 0.244 \pm 0.002 \quad (\text{Izotov \& Thuan}). \tag{4.40}$$

(Dies ist 4-5 σ höher.)

Wie aus Fig. 9 ersichtlich ist, ist der tiefere Wert von Y_p mit dem hohen Wert für D/H verträglich, während der höhere Wert für Y_P mit dem tiefen Wert von D/H zusammenpasst.

Es ist mir nicht möglich, zu dieser verwirrenden Situation Stellung zu nehmen.

E. Neutrinozählung

Im Abschnitt C.c) haben wir die theoretische Abhängigkeit der primordialen Heliumhäufigkeit von der Zahl der Neutrinosorten angegeben (Herleitung im Anhang):

$$\Delta Y_p = 0.013 \, (N_\nu - 3) .$$

Für $N_\nu = 3$ hatten wir die theoretische Vorhersage (als Funktion von η)

$$Y_p = 0.2459 + 0.01 \ln\left(\eta / 5 \times 10^{-10}\right) .$$

Vergleicht man dies mit dem aus den Beobachtungen extrahierten Wert (4.39) von Olive et al, so müsste $N_\nu < 3$ sein (!), was nur möglich ist, wenn das τ-Neutrino massiver ist als einige MeV wäre. Dann würde es nämlich während der ~~Nukle~~ relevanten Epoche $T \lesssim 1\,\text{MeV}$ bereits nichtrelativistisch sein. Wir kommen auf diese Möglichkeit zurück.

Hingegen ist die theoretische Voraussage für $N_\nu = 3$ vollständig mit dem Resultat (4.40) von Izotov & Thuan (und auch mit den kleinen Werten von D/H) verträglich.

Nach den LEP-Resultaten ist die Zahl der Neutrinosorten (mit Standardkopplung an das Z-Boson) sehr nahe bei 3:

$$N_\nu = 2.987 \pm 0.016 . \tag{4.41}$$

Hoffentlich werden wir eines Tages diese Zahl 3 verstehen.

Hier muss betont werden, dass die Neutrinozählungen über die BBN und via die Breite des Z-Bosons einander in wichtiger Weise ergänzen. Im ersten Fall ist N_ν ein Mass von allem was zur Energie-Massendichte (und damit zur Expansionsrate) beiträgt. Mögliche Beispiele sind: leichte Skalarteilchen, sterile Neutrinos, entartete Neutrinos, etc. Am LEP werden hingegen nur Teilchen gezählt, welche mit der üblichen Stärke an das Z-Boson koppeln (und deren Masse kleiner als $m_Z/2$ sind).

Der Unterschied der Information kann am Beispiel eines möglicherweise massiven τ-Neutrinos illustriert werden. Die theoretischen Häufigkeiten, als Funktion von η und m_ν, sind in Fig. 10 dargestellt. (Für die Bedeutung der Symbole siehe die untenstehende Tabelle.) Die verschiedenen Bänder entsprechen Häufigkeiten, die zur Zeit mit den Beobachtungen verträglich sind (siehe die Tabelle).

Der Vergleich mit den Beobachtungen zeigt u.a., dass eine ν_τ-Masse zwischen 1 MeV und der experimentellen Schranke von 18 MeV (ALEPH-Kollaboration am LEP) ausgeschlossen ist. Die unterste Zeile von Fig. 10 illustriert, dass eine zukünftige "BBN-Krise" nicht ausgeschlossen ist. (Ich bin hier aber auf der Seite der Konservativen; warten wir ab.)

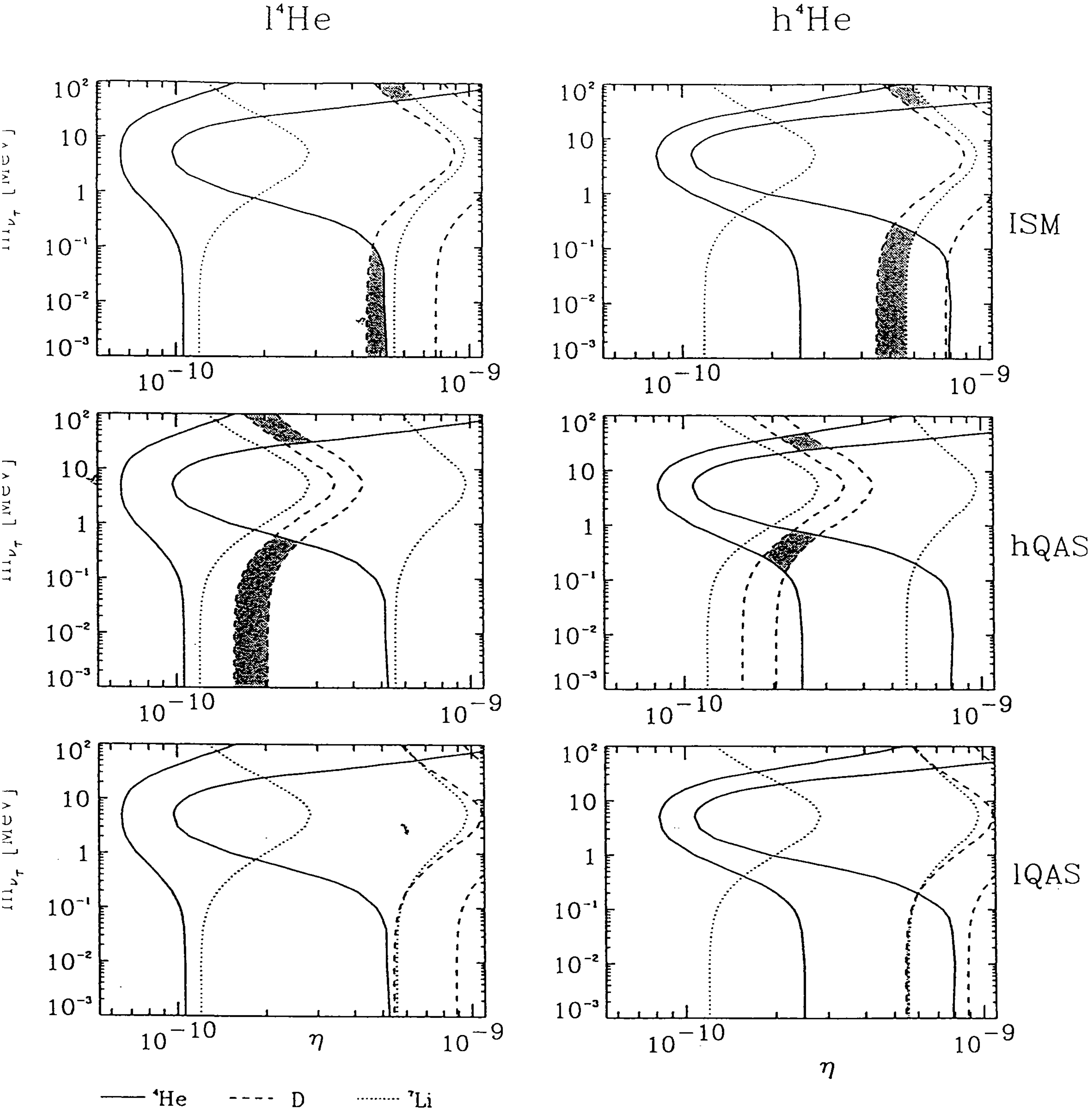


Fig. 16. Isohäufigkeitskurven der leichten Elemente ^{4}He, D und ^{7}Li (für Majorana Neutrinos). In jeder Teilfigur entsprechen die gezeigten Kurven den Werten in der Tabelle der folgenden Seite. (Nach J.B. Rehm, G.G. Raffelt und A. Weiss, A&A 327, 443 (1997)).

Abundance	Measurement	Adopted Range	Label	Reference
Y_p	$0.234 \pm 0.003^{stat} \pm 0.005$	0.223–0.245	l^4He	Olive & Scully (1996)
	0.243 ± 0.003^{stat}	0.237–0.249	h^4He	Izotov et al. (1997)
$D/H \times 10^5$	1.6 ± 0.2	1.8–4.4	ISM	Linsky et al. (1993), Dearborn et a
	19 ± 4	15–23	hQAS	Rugers & Hogan (1996)
	$2.3 \pm 0.3^{stat} \pm 0.3$	1.4–3.2	lQAS	Tytler et al. (1996)
$^7Li/H \times 10^{10}$	$1.6 \pm 0.07^{stat}{}^{+0.4+1.6}_{-0.3-0.3}$	0.9–3.7	^7Li	Fields et al. (1996)

Tabelle. Mögliche Wertebereiche der primordialen Häufigkeiten von ^4He, D und ^7Li, welche mit den derzeitigen Beobachtungen verträglich sind.

Anhang zu Kap. IV: Neutron-Proton-Verhältnis im expandierenden Universum (s. Rev. Mod. Phys. 61, 25 (89))

Für $X \equiv X_n$ gilt nach (4.13) die Ratengleichung

$$\dot{X}(t) = \lambda_{pn}(t)\,[1 - X(t)] - \lambda_{np}(t)\,X(t)\,, \qquad (A.1)$$

wobei die Raten $\lambda_{pn} \equiv \lambda(p \to n)$, $\lambda_{np} \equiv \lambda(n \to p)$ durch (4.12) gegeben sind.

Für unsere analytischen Rechnungen machen wir nun die folgenden Vereinfachungen, die im Endresultat einen Fehler $\leq 15\%$ produzieren werden:

(i) Wir vernachlässigen den Unterschied zwischen T_ν und T_γ: $T_\nu = T_\gamma \equiv T$. Dann haben wir nach (4.17) immer

$$\frac{\lambda_{pn}}{\lambda_{np}} = e^{-Q/T}\,. \qquad (A.2)$$

Während der Periode in der das n/p-Verhältnis ausfriert unterscheiden sich die beiden Temperaturen um weniger als 10%.

(ii) Wir ersetzen in (4.12) die Fermi-Dirac-Verteilungen durch Boltzmann-Verteilungen, z.B.

$$(1 + e^{q/T})^{-1} \longrightarrow e^{-q/T}\,, \qquad (A.3)$$

Dies ist deshalb eine gute Näherung weil die typischen Energien, die in den Übergangsratenintegralen beitragen im Vergleich zur Ausgefriertemperatur gross sind. Dann ist nach (4.10)

$$\lambda(\nu+n \to e^- + p) = A \int_0^\infty dp_\nu\, p_\nu^2\, p_e E_e\, e^{-E_\nu/T},$$

$$A \equiv \frac{G_V^2 + 3G_A^2}{2\pi^3}; \qquad (A.4)$$

ebenso

$$\lambda(e^+ + n \to p + \bar\nu) = A \int_0^\infty dp_e\, p_e^2\, p_\nu E_\nu\, e^{-E_e/T} \qquad (A.5)$$

und

$$\lambda(n \to p + \bar\nu + e^-) = A \int_0^{p_0} dp_e\, p_e^2\, p_\nu E_\nu . \qquad (A.6)$$

(iii) Schliesslich vernachlässigen wir in (A.4) und (A.5) die Elektronenmasse. Die Hauptbeiträge zu den Integralen stammen von Energien E_ν, E_e die wesentlich grösser als m_e sind.

Setzen wir in (A.4,5) $p_e = E_e = E_\nu \pm Q$ (und $p_\nu = E_\nu$), so lassen sich alle Integrale elementar ausführen und wir erhalten

$$\lambda(\nu+n \to p+e^+) = \lambda(e^+ + n \to p + \bar\nu)$$

$$= AT^3\left[4!\,T^2 + 2\times 3!\,TQ + 2!\,Q^2\right]. \qquad (A.7)$$

Diese Näherung ist zwar nicht mehr gut für $T \lesssim m_e$, aber dies spielt keine grosse Rolle, da dann die Raten (A.4) und (A.5) sehr klein werden und nur noch der Neutronzerfall (A.6) wichtig ist. Für letzteren dürfen wir m_e nicht vernachlässigen. Setzen wir in (A.6) $E_\nu = Q - E_e$ und $p_0 = (Q^2 - m_e^2)^{1/2}$, so kommt nach elementarer Integration

$$\frac{1}{\tau} = \lambda(n \to p + e^- + \bar\nu) = \frac{A}{5}\left(Q^2 - m_e^2\right)^{1/2}\left(\frac{1}{6}Q^4 - \frac{3}{4}Q^2 m_e^2 - \frac{2}{3}m_e^4\right)$$

$$+ \frac{A}{4} m_e^4 Q \cosh^{-1}\left(\frac{Q}{m_e}\right). \qquad (A.8)$$

$$= 0.0157\, A\, Q^5 \qquad (A.9)$$

$[Q = 1.29\ \mathrm{MeV},\ m_e = 0.511\ \mathrm{MeV}]$. Dies benutzen wir, um A durch die mittlere Lebensdauer des Neutrons auszudrücken

$$4A = \frac{a}{\tau} Q^{-5}, \quad a = 255. \qquad (A.10)$$

Unten werden wir in einem ersten Schritt zunächst in $\lambda_{np}(t)$ den Neutronenzerfall weglassen. Dann ist $\lambda_{np}(t)$ gerade das Doppelte von (A.7), oder mit

$$y := Q/T, \qquad (A.11)$$

$$\lambda_{np}(t) = \frac{a}{\tau y^5}\left(12 + 6y + y^2\right). \qquad (A.12)$$

Solange $y < 5$ wird dieser Ausdruck durch den n-Zerfall nur geringfügig modifiziert. (Für $y < 1$, d.h. $T > 1\ \mathrm{MeV}$, ist die Rate (A.12) drei Grössenordnungen grösser als die n-Zerfallsrate. Die beiden werden erst für $y \simeq 10$ vergleichbar.)

Nun lösen wir die Ratengleichung (A.1). Die Lösung ist mit den Abkürzungen

$$\Lambda(t) = \lambda_{pn}(t) + \lambda_{np}(t) \tag{A.13}$$

$$I(t,t') = \exp\left(-\int_{t'}^{t} dt'' \, \Lambda(t'')\right) \tag{A.14}$$

gegeben durch (Variation der Konstanten!)

$$X(t) = I(t,t_0)\, X(t_0) + \int_{t_0}^{t} dt' \, \lambda_{pn}(t')\, I(t,t') . \tag{A.15}$$

Für t_0 wählen wir eine sehr frühe Zeit als die Temperatur nicht wesentlich unter 100 MeV lag. Zu diesem Zeitpunkt waren die Raten λ_{pn} und λ_{np} sehr gross und damit fällt $I(t,t_0)$ mit t rasch ab (in $t \sim 1/\Lambda(t_0)$). Deshalb dürfen wir in (A.15) den ersten Term weglassen und erhalten, wenn wir t_0 durch 0 ersetzen, in genügender Näherung

$$X(t) = \int_{0}^{t} dt' \, \lambda_{pn}(t')\, I(t,t') . \tag{A.16}$$

Dies formen wir noch etwas um: Mit

$$I(t,t') = \frac{1}{\Lambda(t')} \frac{d}{dt'} I(t,t') \tag{A.17}$$

ergibt sich nach einer partiellen Integration

$$X(t) = \frac{\lambda_{pu}(t)}{\Lambda(t)} - \int_0^t dt' \, I(t,t') \, \frac{d}{dt'} \left(\frac{\lambda_{pu}(t')}{\Lambda(t')} \right). \qquad (A.18)$$

Dies transformieren wir noch auf die Variable y:

$$X(y) = \frac{\lambda_{pu}(y)}{\Lambda(y)} - \int_0^y dy' \, I(y,y') \, \frac{d}{dy'} \left(\frac{\lambda_{pu}(y')}{\Lambda(y')} \right). \qquad (A.19)$$

Nach (A.2) haben wir

$$\lambda_{pu}(y) = e^{-y} \lambda_{up}(y) \qquad (A.20)$$

und somit

$$\Lambda(y) = (1 + e^{-y}) \lambda_{up}(y), \qquad (A.21)$$

während $I(y,y')$ zunächst durch folgenden Ausdruck gegeben ist

$$I(y,y') = \exp\left[- \int_{y'}^{y} dy'' \, \frac{dt''}{dy''} \, \Lambda(y'') \right].$$

Für dt/dy verwenden wir (3.34)

$$\frac{dT}{dt} = - \left(\frac{4\pi^3 G}{45} g_{eff} \right)^{1/2} T^3, \quad g_{eff} \overset{(3.36)}{=} \frac{43}{4}. \qquad (A.22)$$

Benutzen wir dies und die Gl. (A.12), (A.21), so kommt

$$I(y,y') = \exp\left[K(y) - K(y') \right], \qquad (A.23)$$

mit

$$K(y) = -b \int dy' \left[\frac{12}{y'^4} + \frac{6}{y'^3} + \frac{1}{y'^2} \right] (1 + e^{-y'}), \qquad (A.24)$$

wo b die folgende reine Zahl ist

$$b = a \left(\frac{45}{4\pi^3 g_{eff}} \right)^{1/2} \frac{M_{Pl}}{\pi Q^2} . \qquad (A.25)$$

Das Integral für K lässt sich bemerkenswerterweise ausführen, mit dem Resultat

$$K(y) = b \left\{ \left(\frac{4}{y^3} + \frac{3}{y^2} + \frac{1}{y} \right) + \left(\frac{4}{y^3} + \frac{1}{y^2} \right) e^{-y} \right\} , \qquad (A.26)$$

wie man durch Differentiation leicht verifiziert.

Setzen wir noch

$$X_{eq}(y) = \frac{\lambda_{pn}(y)}{\Lambda(y)} = \frac{1}{1 + e^{y}} \qquad (A.27)$$

(Gleichgewichtshäufigkeit), so wird aus (A.19)

$$X(y) = X_{eq}(y) + \int_0^y e^{y'} X_{eq}(y')^2 \exp\left[K(y) - K(y')\right] dy' . \qquad (A.28)$$

Hier ist nun alles bestimmt; nach (A.26) und (A.25) ist

$\tau = 896$ sec → 887 ± 2

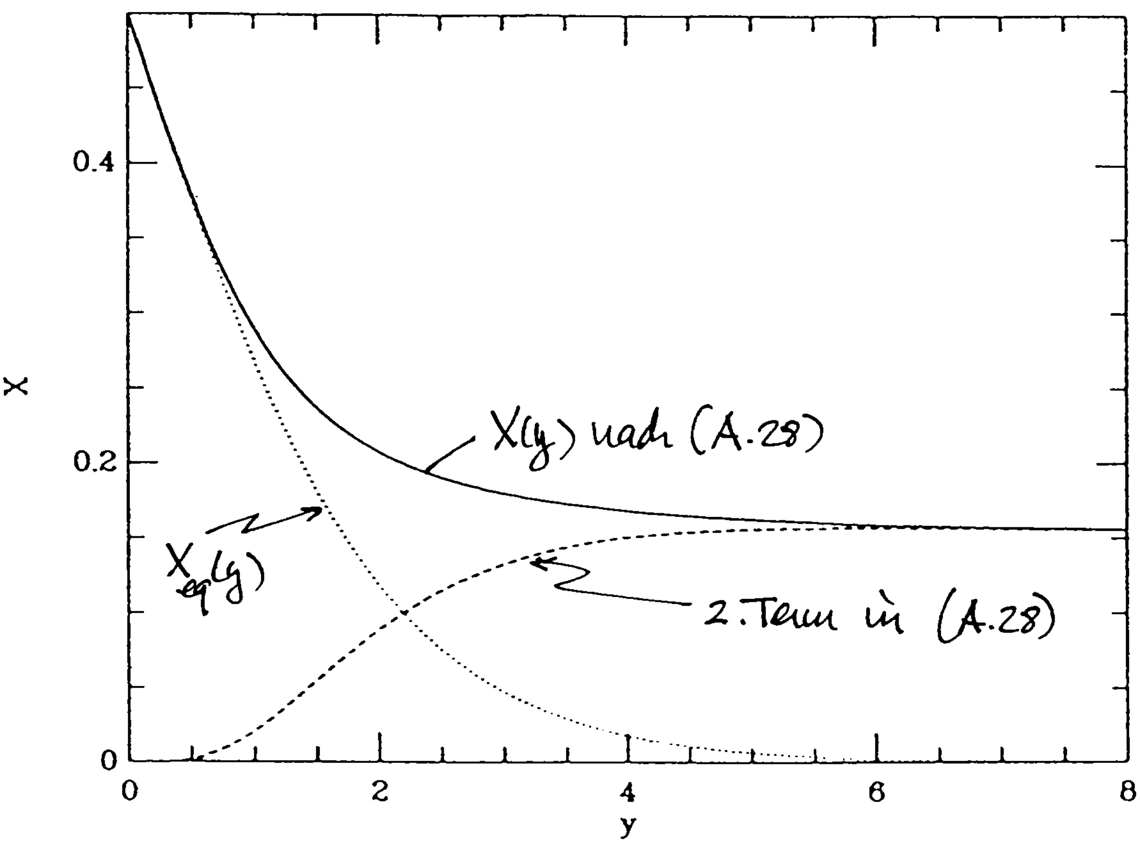
$$b = \frac{0.823}{\sqrt{g_{eff}}} = 0.251 . \qquad (A.29)$$

→ 0.252

Es verbleibt eine einzige numerische Integration, deren Resultat in der nächsten Figur gezeigt ist. Der asymptotische Wert für X ist (und dieser wird praktisch schon früh erreicht)

$$\underline{X(y = \infty) = 0.151 .} \qquad (A.30)$$

→ 0



An dieser Stelle wollen wir im Hinblick auf die Abhängigkeit der Helium-Häufigkeit auf die Zahl der Neutrinosorten noch die entsprechende Abhängigkeit von $X(y\to\infty)$ bestimmen. Nach (A.25) ist

$$\frac{\delta b}{b} = -\frac{1}{2}\,\frac{\delta g_{eff}}{g_{eff}} \underset{(3.36)}{=} -\frac{1}{2}\,\frac{7}{43}\,\delta N_\nu \; . \qquad \overset{31}{(A.25)}$$

Eine Änderung von b zieht eine Änderung der Skala von $K(y)$ in (A.26) nach sich und dies führt gemäss (A.28) zur Variation

$$\frac{\delta X(y=\infty)}{X(y=\infty)} = -\,C\,\frac{\delta b}{b} \; , \qquad \overset{32}{(A.26)}$$

ek

wobei

$$C = X(y=\infty)^{-1} \int_0^\infty dy' \, e^{y'} X_{eq}(y')^2 \, K(y') \, e^{-K(y')} . \qquad (A.27)$$

Das Integral lässt sich leicht numerisch auswerten, mit dem Ergebnis

$$C = 0.52 . \qquad (A.28)$$

Setzen wir dies und (A.25) in (A.26) ein, so ergibt sich

$$\boxed{\frac{\delta X(y=\infty)}{X(y=\infty)} = 0.042 \, \delta N_\nu .} \qquad (A.29)$$

Korrekturen durch Neutronzerfall

Wir bezeichnen von nun an das bisher berechnete $X(y)$ mit $\bar{X}(y)$. Berücksichtigen wir jetzt den n-Zerfall in der Ratengleichung (A.1), so ergibt sich für das tatsächliche $X(t)$:

$$X(t) = e^{-t/\tau} \, \bar{X}(y(t)) , \qquad (A.30)$$

da $\bar{X}(y)$ sich während der Periode des Neutronzerfalls nicht wesentlich ändert (s. Fig. auf S. 7).

Nun müssen wir die Zeit t_c bestimmen, bei der die Neutronen praktisch alle in ^4He verpackt werden. Da nach (4.27) die Deuteriumhäufigkeit ~ 1 bei $T_\gamma \simeq 0.07\,\mathrm{MeV}$ wird, erwarten wir nach (3.39) für t_c eine Zeit in der Gegend von drei Minuten. Für eine genauere

Bestimmung müssen wir die Ratengleichungen diskutieren. Die wichtigsten Reaktionen sind

$$n + p \to D + \gamma \quad , \tag{A.30a}$$

$$D + D \to T + p \quad , \tag{A.30b}$$

$$D + T \to {}^4He + n \quad . \tag{A.30c}$$

Im folgenden bezeichne $X_D, X_T, \dots$ die Anzahlhäufigkeiten bezogen auf die gesamte Baryonzahldichte n_B,

$$X_D = n_D/n_B, \dots \quad .$$

Beachte $\quad X_p + X_n + 2X_D + 3X_T + 4X_{4He} + \dots = 1 .$

Wir erinnern nochmals an die Saha-Formel für die Gleichgewichtshäufigkeit von X_D

$$\frac{X_n X_p}{X_D} = G_{np} \quad , \tag{A.31}$$

wo

$$G_{np} = \frac{\pi^{1/2}}{12\zeta(3)} \frac{1}{\eta} \left(\frac{m_p}{T}\right)^{3/2} e^{-B_D/T} \quad , \tag{A.32}$$

$$\eta = n_B/n_\gamma \quad . \tag{A.33}$$

An Stelle der Zeit benutzen wir in den Ratengleichungen die Grösse

$$z = \frac{B_D}{T_\gamma} = \frac{25.8}{T_9} \tag{A.34}$$

und für die verschiedenen Raten die Ratenparameter

$$R \equiv \frac{dt}{dz} \langle \sigma v \rangle_T \, n_B \, , \qquad \text{(A.35)}$$

wo $\langle \sigma v \rangle_T$ die thermisch gemittelten Raten sind. Nach (3.34,37) ~~bzw~~ und (A.33) und $n_\gamma = 2\zeta(3) T_\gamma^3/\pi^2$:

$$R = \frac{\eta}{z^2} \left(\frac{45}{\pi^7 \tilde{g}_{eff}} \right)^{1/2} \zeta(3) B_D M_{Pl} \langle \sigma v \rangle_T \, . \qquad \text{(A.36)}$$

Zunächst betrachten wir die Änderungen der Neutron- und Proton Populationen:

$$\frac{dX_n}{dz} = - R_{np} \left(X_p X_n - G_{np} X_D \right) + \cdots \, , \qquad \text{(A.37a)}$$

$$\frac{dX_p}{dz} = - R_{np} \left(X_p X_n - G_{np} X_D \right) + \cdots \, . \qquad \text{(A.37b)}$$

Den Beitrag von der umgekehrten Reaktion zu (A.30a) proportional zum Saha-Faktor G_{np} erhält man am schnellsten aus der Forderung, dass im stationären Fall $(dX_n/dz = 0)$ die Saha-Gl. (A.31) herauskommen muss.*) Die Pünktchen in (A.37) bedeuten Beiträge von Prozessen [wie z.B. (A.30c)], welche die (p,n)-Populationen ändern, aber für unsere Diskussion nicht wichtig sind.

---

*) Diese Bedingung des "detaillierten Gleichgewichts" könnte man natürlich auch aus der T-Invarianz ableiten.

Da der Neutron-Proton-Einfangsprozess (A.30a) exotherm ist, wird $\sigma_{np} \cdot v$ bei tiefen Energien konstant. Experimentell ist *)

$$\sigma_{np} v = 4.55 \times 10^{-20} \ \mathrm{cm}^3/\mathrm{sec} \ .$$

In (A.36) eingesetzt gibt dies

$$R_{np} \simeq 5 \left(\frac{29}{z}\right)^2 \frac{\eta}{\eta_0} \ , \quad \eta_0 \equiv 5 \times 10^{-10} \ . \qquad (A.38)$$

Es wird sich zeigen, dass vor dem Neutroneneinfang $z < 29$ ist und folglich ist dann $R_{np} \gtrsim 5$. Diese Werte sind genügend gross, um gemäss (A.37) thermodynamisches Gleichgewicht für n, p und D zu etablieren [$X_p + X_n + 2X_D = 1$, $X_D = G_{np}^{-1} X_n X_p$]. Da G_{np}^{-1} sehr klein ist (siehe (A.32)), gibt es fast keine Deuteronen und wir haben in 1. Näherung

$$X_D^{(1)} = G_{np}^{-1} X_p^{(0)} X_n^{(0)} \ , \qquad (A.39)$$

wobei $X_{p,n}^{(0)}$ die ungestörten Populationen mit $X_p^{(0)} + X_n^{(0)} = 1$ bezeichnen. In dieser ersten Ordnung haben wir

$$X_p + X_n \simeq 1 - 2 G_{np}^{-1} X_p^{(0)} X_n^{(0)} \ . \qquad (A.40)$$

---

*) Für eine theoretisch Berechnung dieses Querschnitts siehe z.B. Blatt & Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics, Neudruck in Springer 1979, § XII.4.

Im relevanten z-Bereich, entsprechend $T_9 \simeq 1$, ist $z \sim 30$ und dort ist nach (A.32) G_{np}^{-1} hauptsächlich durch den Faktor e^{z} bestimmt. Somit finden wir in erster Ordnung aus (A.40)

$$\frac{d}{dz}(X_p + X_n) \simeq -z\, G_{np}^{-1} X_p^{(0)} X_n^{(0)} . \qquad (A.41)$$

Nun addieren wir die beiden Ratengleichungen (A.37) und benutzen (A.39,41), mit dem Resultat

$$R_{np}(X_p X_n - G_{np} X_D) \simeq X_D^{(1)} . \qquad (A.42)$$

Soweit haben wir die Situation beschrieben solange die D-Population nicht durch andere Reaktionen, wie (A.30b), abnimmt. Für die erste in der Kette ($D+D \to T+p$) haben wir die Ratengleichung

$$\begin{aligned} \frac{dX_D}{dz} &= +R_{np}(X_p X_n - G_{np} X_D) \\ &\quad - R_{DD}\left[2X_D^2 - G_{DD} X_T X_p\right] + \dots \end{aligned} \qquad (A.43)$$

Dabei ist R_{DD} die skalierte Rate für die Reaktion (A.30b) und G_{DD} ist der Saha-Faktor für den Gleichgewichtswert von $X_D^2 / X_T X_p$. Dafür findet man leicht

$$G_{DD} = \frac{9}{4}\left(\frac{m_D^2}{m_T m_p}\right)^{3/2} e^{-B/T_\gamma} , \qquad (A.44)$$

$$B := 2m_D - m_p - m_T \simeq 4.02 \text{ MeV} .$$

Im Unterschied zu G_{np} ist G_{DD} immer eine kleine Zahl.

Nun müssen wir den thermonuklearen Querschnitt σ_{DD} geeignet parametrisieren und an das Experiment anpassen. Der Prozess $D+D \to T+p$ ist durch die Coulombbarriere unterdrückt. Der Coulomb-Durchdringungsfaktor ist*) $(2\pi\alpha/v)\exp[-2\pi\alpha/v]$, wo v die Relativgeschwindigkeit ist. Die Skala für den Querschnitt ist grob gleich dem Deuteronradius(+) $\sim (m_p B_D)^{-1/2}$. Die Reaktion ist überdies exotherm, sodass der Querschnitt einen zusätzlichen Faktor $1/v$ enthält, welchen wir als dimensionslosen Faktor $(B_D/m_p v^2)^{1/2}$ in die folgende Parametrisierung einschliessen

$$\sigma_{DD} = \frac{0.87}{m_p B_D} \left(\frac{B_D}{m_p v^2}\right)^{1/2} \frac{2\pi\alpha}{v} \exp\left(-\frac{2\pi\alpha}{v}\right). \tag{A.45}$$

Der numerische Vorfaktor kommt durch einen Fit an die Daten zustande.

Nun benötigen wir den thermischen Mittelwert von $\sigma_{DD} \cdot v$. Dies ist ein wichtiges Problem der Astrophysik und deshalb führen wir die Einzelheiten in der folgenden Fussnote durch. Als Resultat werden wir erhalten:

$$\langle \sigma_{DD} v \rangle_T = 0.87 \frac{4\pi\alpha v_S}{(3 B_D m_p T^2)^{1/2}} e^{-3\pi\alpha/v_S}, \tag{A.46}$$

---

*) Siehe z.B. [NS 2, Kap. IV], oder Blatt & Weisskopf, loc. cit.

(+) Setze die D-Wellenfunktion ausserhalb des Kernpotentials $\propto e^{-\gamma r}$ und benutze dort die freie Schrödingergl..

wobei

$$v_S = \left(\frac{2\pi\alpha T}{m_p}\right)^{1/3}. \qquad (A.47)$$

Fussnote: Thermische Mittelung $\langle\sigma v\rangle_T$.

Bei der Bildung des Mittelwertes von $\langle\sigma(v)v\rangle_T$ für die Reaktion von zwei Teilchen transformieren wir zunächst auf Relativ- und Schwerpunktsgeschwindigkeiten: $\underline{v} = \underline{v}_1 - \underline{v}_2$, $\underline{V} = \frac{1}{2}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)$ und finden allgemein sofort

$$\langle\sigma v\rangle_T = \left(\frac{\mu}{2\pi T}\right)^{3/2} \int_0^\infty 4\pi v^2 dv \; \sigma \cdot v \; e^{-\frac{1}{2}\mu v^2/T},$$

wo μ die reduzierte Masse ist. In unserem Fall ist $\mu \simeq m_p$ und somit

$$\langle\sigma_{DD} v\rangle_T = \left(\frac{m_p}{2\pi T}\right)^{3/2} 4\pi \int_0^\infty v^2 dv \; \sigma \cdot v \; e^{-m_p v^2/2T}. \qquad (A.48)$$

Hier setzen wir den Ausdruck (A.45) ein und werten das Integral in (A.48) in Sattelpunktsnäherung aus. Dabei ist zu beachten, dass die beiden auftretenden Exponentialfaktoren $\exp(-m_p v^2/2T)$ und $\exp(-2\pi\alpha/v)$ zu einem scharfen Maximum des Integranden — dem sog. Gamow-Peak — führen. Die Stelle des Sattelpunktes **liegt beim Wert** v_S in (A.47). Nach einer kurzen Rechnung findet man das Ergebnis (A.46).

Dieses Resultat setzen wir in (A.36) ein und erhalten nach Auswertung der Zahlen

$$R_{DD} = 2.4 \times 10^{7} \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right) z^{-4/3} \, e^{-1.44 \, z^{1/3}} \quad . \qquad (A.49)$$

Sobald nun X_D abzunehmen beginnt, wird die Neutronenzahl nicht mehr durch Photodesintegration des Deuterons aufrechterhalten und die Kette von Reaktionen setzt unmittelbar ein, welche die Neutronen fast vollständig in ^4He überführt. Die gesuchte Einfangtemperatur $T_{\gamma,c}$ ist also durch

$$\left. \frac{dX_D}{dz} \right|_{z=z_c} \simeq 0 \quad , \quad z_c = B_D / T_{\gamma,c} \qquad (A.50)$$

bestimmt. Da, wie wir gleich sehen werden, $z_c \approx 30$ ist, ist bei z_c der Faktor $G_{DD} \sim 10^{-60}$ und ist also völlig vernachlässigbar. (A.50) verlangt nach (A.43)

$$\underbrace{R_{np} \left(X_p X_n - G_{np} X_D \right)}_{\overset{(A.42)}{\simeq} \; X_D^{(1)}} - R_{DD} \, 2 X_D^2 \simeq 0$$

oder für $X_D \simeq X_D^{(1)}$:

$$2 X_D^{(1)} R_{DD} \simeq 1 \quad . \qquad (A.51)$$

Für $X_n^{(0)}$ hatten wir in (A.30) den Wert 0.15 und somit ist $X_n^{(0)} X_p^{(0)} \simeq 0.13$. Dies benutzen wir in (A.39) für $X_D^{(1)}$, zusammen mit (A.32) für G_{np}. Zusammen mit dem Ausdruck (A.49) für R_{DD} liefert dann (A.51) numerisch die Bedingung

$$2.9 \times 10^{-6} \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^2 z_c^{-17/6} \, e^{-1.44 z_c^{1/3}} \, e^{z_c} \simeq 1 . \qquad (A.52)$$

Für $\eta = \eta_0$ finden wir $\underline{z_c = 26}$ und folglich

$$\boxed{T_{\gamma,c} = B_D/26 = 0.086 \text{ MeV} .} \qquad (A.53)$$

Aufgrund des e-Faktors e^{z_c} in (A.52) hängt dieses Ergebnis nur schwach von den gemachten Näherungen ab!

Schliesslich übersetzen wir $T_{\gamma,c}$ gemäss (3.39) noch in die Zeit t_c, mit dem gesuchten Ergebnis

$$\underline{\underline{t_c \simeq 180 \text{ sec}}} . \qquad (A.54)$$

Damit haben wir unser Hauptziel erreicht: Nach (A.30) ist

$$X(180 \text{sec}) = \exp\left(-\frac{180}{896}\right) \overline{X}(y=\infty)$$

$$= 0.818 \times 0.151 = 0.123 . \qquad (A.55)$$

Die Massenhäufigkeit von ^4He ist demnach

$$\boxed{Y_4 = 2 X(180 \text{ sec}) = 0.247 .} \qquad (A.56)$$

Dies stimmt bis auf wenige Prozent mit Computerrechnungen überein.

Abhängigkeit von $N_\nu - 3$ und η

Wir leiten unten das folgende Ergebnis her*)

$$\Delta Y_4 = 0.014\, \Delta N_\nu + 0.009 \ln\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right) + 0.18\, \frac{\Delta\tau}{\tau} . \qquad (A.57)$$

5×10^{-10}

Zunächst betrachten wir die Abhängigkeit von $\Delta N_\nu \equiv N_\nu - 3$. Diese hat zwei Quellen: (1) die Änderung von $\delta\bar{X}(y=\infty)$ die wir in (A.29) bestimmt haben:

$$\frac{\delta\bar{X}(y=\infty)}{\bar{X}(y=\infty)} = 0.042\, \Delta N_\nu \; ; \qquad (A.58)$$

(2) eine Änderung der Einfangzeit t_c (bei gleichem $T_{\gamma,c}$!) gemäss (3.39):

$$\frac{\Delta t_c}{t_c} = -\frac{1}{2}\, \frac{\Delta \tilde{g}_{eff}}{g_{eff}} . \qquad (A.59)$$

Ein Blick auf (3.38) zeigt, dass pro ν-Sorte sich $\tilde{g}_{eff}$ um $2 \times \frac{7}{8} \times \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} = 0.454$ ändert. Folglich ist

---

*) In Bernstein et al wird auch die Abhängigkeit von einem allfälligen chemischen Potential der Neutrinos bestimmt.

mit dem Nominalwert $g_{eff} = 3.4$ (für $N_\nu = 3$) die Änderung (A.59)

$$\frac{\Delta t_c}{t_c} \simeq -0.067 \quad \Delta N_\nu \ . \tag{A.60}$$

Dies gibt die folgende Änderung von $\exp(-t_c/\tau)$ von dessen Wert bei $t_c/\tau = 180/896 \simeq 0.20$ in (A.55):
$\Delta(\exp(-t_c/\tau))/\exp(-t_c/\tau) \simeq -\Delta t_c/\tau = -\frac{\Delta t_c}{t_c}\frac{t_c}{\tau}$
$\simeq 0.014\ \Delta N_\nu$.

Insgesamt haben wir also

$$\Delta Y_4 = Y_4\,(0.042 + 0.014)\ \Delta N_\nu$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ Y_4 = 0.25}}{=} 0.014\ \Delta N_\nu \ . \tag{A.61}$$

Hier ist noch zu betonen, dass die Änderung von $T_{\gamma,c}$ tatsächlich vernachlässigbar ist, da diese Temperatur hauptsächlich durch den grossen und schnell variierenden Faktor e^{z_c} geregelt wird.

Das Resultat (A.61) ist in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von detaillierten Computerrechnungen.

Diverse Anhänge

Anhang A. Homogene kosmologische Modelle

Die homogenen kosmologischen Modelle sind Verallgemeinerungen der Friedmann-Mannigfaltigkeiten. In diesen Modellen gibt es immer noch eine ausgezeichnete Schichtung gleicher Zeit, aber die Unterräume zu fester Zeit sind nur noch als homogen vorausgesetzt. Neben ihrer möglichen astronomischen Relevanz, bilden sie ein nützliches theoretisches Labor, z.B. für die Untersuchung der Natur von Singularitäten und gewisser globaler Fragen. Wir geben hier lediglich eine kurze Einführung.

1. Mathematische Vorbereitungen

Wir benötigen im folgenden einige allgemeine Kenntnisse aus der Theorie der Lieschen Gruppen. Alles Nötige findet man z.B. in [MS, Vol. I, Kap. 10].

Es sei M eine Mannigf. auf welcher eine Liesche Gruppe G operiere. Zu jedem $g \in G$ gehört also ein Diffeomorphismus τ_g von M und es gilt die Gruppeneigenschaft (Linksoperation):

$$\tau_{g_1} \circ \tau_{g_2} = \tau_{g_1 g_2} . \tag{A.1}$$

$\mathfrak{g}$ bezeichne die Liesche Algebra von G und $L(M)$ die Menge der G-invarianten Vektorfelder auf M. $L(M)$ ist eine Liesche Algebra, denn [NS, Part I, Thm. 3.6]:

$$(\tau_g)_*([X,Y]) = [(\tau_g)_* X, (\tau_g)_* Y] , \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{A.2}$$

Neben den invarianten Vektorfeldern betrachten wir noch die <u>fundamentalen Vektorfelder</u>, welche folgendermassen definiert sind. Zu jedem $A \in \mathfrak{g}$ gibt es eine zugehörige 1-parametrige Untergruppe $\alpha_A(t) = \exp tA$ und $\phi_t^A = \tau_{\alpha_A(t)}$ ist der Fluss eines Vektorfeldes auf M, welches wir mit A^* bezeichnen (fundamentales VF zu A). Man kann zeigen, dass die Zuordnung $A \mapsto A^*$ ein <u>Antihomomorphismus</u> ist (siehe z.B. [HS, Vol. II, p. 351]).

Die fundamentalen VF vertauschen mit den invarianten VF, denn für $X \in L(H)$ folgt aus $(\tau_{\alpha_A(t)})_* X = X$

$$L_{A^*} X = 0 = [A^*, X]. \tag{A.3}$$

Nun sei γ eine (pseudo-) Riemannische Metrik von M und G operiere isometrisch,

$$\tau_g^* \gamma = \gamma \quad \text{für } g \in G. \tag{A.4}$$

Dann ist A^* ein Killingfeld,

$$L_{A^*} \gamma = 0. \tag{A.5}$$

Ausserdem ist für $X, Y \in L(H)$ die Funktion $\gamma(X,Y)$ auf den Orbits von H konstant, denn allgemein ist

$$(\tau_g^* \gamma)(X,Y) = \tau_g^* \left(\gamma(\tau_{g*} X, \tau_{g*} Y) \right),$$

und folglich

$$\gamma(X,Y) = \tau_g^* (\gamma(X,Y)).$$

Nun nehmen wir speziell an, dass G auf M transitiv und fixpunktfrei operiert. Letzteres bedeutet: Falls für ein $x \in M$, $\tau_g(x) = x$, dann ist $g = e$. In dieser Situation verschwindet A^* für jedes $A \neq 0$ nirgends (Übung).

Wählen wir einen festen Punkt $x_0 \in M$ aus, so gehört dazu ein Diffeomorphismus $\varphi: G \to M$, definiert durch

$$\varphi(g) = \tau_g(x_0). \tag{A.6}$$

Wenn l_g die Linksmultiplikation von G mit g bezeichnet, so gilt

$$\tau_g \circ \varphi = \varphi \circ l_g \quad , \tag{A.7}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "l_g"'] & M \arrow[d, "\tau_g"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & M \end{tikzcd}$$

denn

$$(\tau_g \circ \varphi)(h) = \tau_g(\tau_h(x_0)) = \tau_{gh}(x_0) = \varphi(gh) = \varphi(l_g(h)) = (\varphi \circ l_g)(h).$$

φ ist also mit der G-Operation verträglich, d.h. G und M sind als G-Mannigfaltigkeiten isomorph. (Jedes x_0 definiert aber einen anderen Isomorphismus!) Beim Isomorphismus φ gehen die fundamentalen VF von G, d.h. die rechtsinvarianten VF, in die fundamentalen VF, während die linksinvarianten Felder in $L(M)$ übergehen.

2. Die Metrik eines räumlich homogenen Modells

Nun definieren wir präzise, was wir unter einem homogenen kosmologischen Modell verstehen.

Definition: Eine Raumzeit (M, g) ist ein homogenes kosmologisches Modell, falls eine 3-dimensionale Liesche Gruppe isometrisch und fixpunktfrei auf (M,g) so operiert, dass die Orbits (in einem Teilbereich) raumartige Flächen sind.

Als nächstes zeigen wir, dass (M,g) lokal folgende Struktur hat

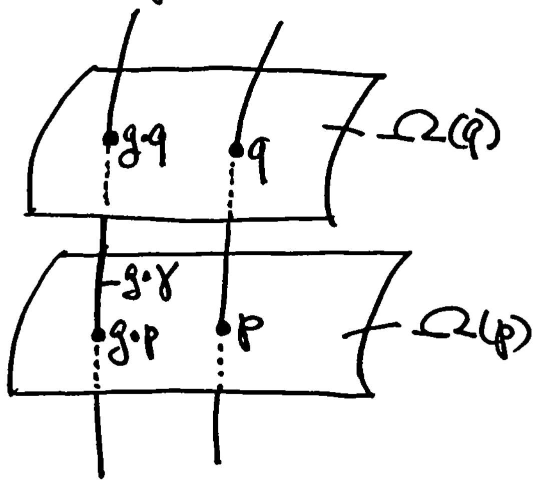
$$M = \mathbb{R} \times G \,, \quad \text{als } G\text{-Mannigfaltigkeiten}$$

$$g = dt \otimes dt + g_{ik}(t)\, \pi^*(\theta^i) \otimes \pi^*(\theta^k) \,. \tag{A.8}$$

Dabei ist $t = pr_1$, $\pi = pr_2$, und $\{\theta^i\}$ ist eine Basis von linksinvarianten Formen auf G. Kurzer schreiben wir auch

$$g = dt^2 + g_{ik}(t)\, \theta^i \otimes \theta^k \,. \tag{A.8'}$$

<u>Beweis</u>: Wir wählen ein $p \in M$ und konstruieren die Geodäte $\gamma(t)$ durch p senkrecht auf dem Orbit $\Omega(p)$ durch p (s. Fig.).



Da G isometrisch operiert, ist das Bild $g \cdot \gamma$ unter $g \in G$ wieder eine Geodäte, welche ebenfalls senkrecht auf $\Omega(p)$ steht. Ferner ist der geodätische Abstand von p nach q gleich demjenigen von $g \cdot p$ nach $g \cdot q$, d.h. $\Omega(q)$ ist geodätisch parallel zu $\Omega(p)$. Dann folgt aus einer bekannten Variationsformel*), dass γ

*) Siehe z.B.: [MS, Vol. I, p. 443].

auf allen Orbits senkrecht steht.

Dem Punkt $g \cdot q$ ordnen wir den Punkt $(t, g) \in \mathbb{R} \times G$ zu, wenn t der geodätische Abstand des Orbits $\Omega(q)$ vom $\Omega(p)$ ist. Dieser lokale Diffeomorphismus ist offensichtlich mit der G-Operation verträglich. In der übertragenen Metrik ist $\mathbb{R}$ senkrecht auf G und da t der geodätische Abstand ist, gilt

$$g = dt^2 + \pi^*(h(t)) \, ,$$

wobei $h(t)$, für festes t, eine linksinvariante Metrik von G ist. Sie hat also die Form $h = g_{ik}(t)\, \theta^i \otimes \theta^k$. □

3. Berechnung der Krümmung

Es sei $\theta^0 = dt$, also

$$g = g_{\mu\nu}\, \theta^\mu \otimes \theta^\nu \, , \quad g_{00} = 1 \, , \quad g_{0i} = 0 \, , \quad g_{ik} = g_{ik}(t) \, . \tag{A.9}$$

Für die Zusammenhangsformen $\omega^\mu{}_\nu$ gilt

$$\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = dg_{\mu\nu} \, ,$$

also

$$\omega_{00} = 0 \, , \quad \omega_{0k} + \omega_{k0} = 0 \, , \quad \omega_{ik} + \omega_{ki} = \dot{g}_{ik}\, \theta^0 . \tag{A.10}$$

Die Zeitkomponente der 1. Strukturgleichung

$$d\theta^\mu + \omega^\mu{}_\nu \wedge \theta^\nu = 0 \tag{A.11}$$

lautet

$$\omega^0{}_k \wedge \theta^k = 0 \, . \tag{A.12}$$

Für die räumlichen Komponenten benutzen wir die Maurer-Cartan Gleichungen (siehe [MS, Vol. I, p. 538]):

$$d\theta^i = -\frac{1}{2} C^i{}_{jk}\,\theta^j\wedge\theta^k\,, \quad C^i{}_{jk}: \text{Strukturkonstanten von } G, \tag{A.13}$$

und erhalten die Beziehungen

$$-\frac{1}{2} C^i{}_{jk}\,\theta^j\wedge\theta^k + \omega^i{}_j\wedge\theta^j + \omega^i{}_0\wedge\theta^0 = 0. \tag{A.14}$$

Als Lösung für die $\omega^\mu{}_\nu$ findet man nach einiger Rechnung (Übung):

$$\omega^0{}_0 = 0\,, \quad \omega^0{}_i = -\frac{1}{2}\dot g_{ij}\,\theta^j\,, \quad \omega^i{}_0 = \frac{1}{2} g^{ik}\dot g_{kj}\,\theta^j \tag{A.15}$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\dot g_{ij}\,\theta^0 + \lambda_{ijk}\,\theta^k, \tag{A.16}$$

mit

$$\lambda_{ijk} = -\frac{1}{2}\left(C_{ijk} + C_{jki} - C_{kij}\right). \tag{A.17}$$

Für die Krümmung erhält man z.B.

$$\Omega^0{}_0 = d\omega^0{}_0 + \omega^0{}_\nu\wedge\omega^\nu{}_0 = \omega^0{}_k\wedge\omega^k{}_0 = -\frac{1}{4}\dot g_{kl}\, g^{ks}\dot g_{sj}\,\theta^l\wedge\theta^j$$

Analog findet man die anderen Komponenten. Für die Ricci-Krümmung ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\left(g^{ik}\dot g_{ik}\right)^{\cdot} - \frac{1}{4} g^{ir}\dot g_{is}\, g^{js}\dot g_{jr} \tag{A.18}$$

$$R_{0s} = -\frac{1}{2}\dot g_{ik}\left(C^{ik}{}_s - \delta^k_s\, C^l{}_l{}^i\right) \tag{A.19}$$

$$R_{ik} = -\frac{1}{2}\ddot g_{ik} + \frac{1}{2} g^{sl}\dot g_{lk}\dot g_{is} - \frac{1}{4} g^{jl}\dot g_{lj}\dot g_{ik} + \bar R_{ik} \tag{A.20}$$

In der letzten Gleichung ist dabei $\bar R_{ik}$ die Ricci-Krümmung des 3-dim. Riemann'schen Raumes (G,h), mit der Metrik $h = -g_{ik}(t)\,\theta^i\otimes\theta^k$. Explizit findet man leicht

$$\bar R_{jr} = -\lambda^s{}_{jk}\lambda^k{}_{rs} + C^s{}_{sk}\lambda^k{}_{jr}\,. \tag{A.21}$$

Bemerkungen:

1) Die Gleichung (A.18) ergibt sich auch aus der verallgemeinerten Poisson-Gleichung, welche wir in Anhang C herleiten werden (Gl. (C6)). In unserem Falle lautet diese

$$R_{00} = -\mathrm{Sp}\,K^2 + (\mathrm{Sp}\,K)^{\cdot} \qquad (A.22)$$

mit $K = (K^i{}_j)$. Nun ist $\omega^0{}_i = K_{ij}\,\theta^j$, also nach (A.15) $K_{ij} = -\frac{1}{2}\dot{g}_{ij}$ und folglich

$$K_i{}^j = -\frac{1}{2}\dot{g}_{ik}\,g^{jk}. \qquad (A.23)$$

Setzt man dies in (A.22) ein, so folgt in der Tat (A.18).

2) Daneben hat man auch die allgemeine Gleichung ([NS1, p.163], oder Anhang G, (G.22))

$$G_{00} = \frac{1}{2}\bar{R} - \frac{1}{2}\left[\mathrm{Sp}(K^2) - (\mathrm{Sp}\,K)^2\right] \qquad (A.24)$$

und dies gibt hier mit (A.23)

$$G_{00} = \frac{1}{2}\bar{R} - \frac{1}{8}\left[g^{ir}\dot{g}_{is}\,g^{js}\dot{g}_{jr} - (g^{ik}\dot{g}_{ik})^2\right]. \qquad (A.25)$$

Aus den Einstein'schen Feldgleichungen werden damit gewöhnliche Differentialgleichungen für die $g_{ik}(t)$.

Wir wollen noch die Bedingung $\nabla\cdot T = 0$ für eine ideale mitbewegte Flüssigkeit, $T = (\rho + p)\,u\otimes u - p\,g$, explizit ausschreiben. Allgemein folgt daraus – neben der relativistischen Eulergleichung – der Energiesatz (siehe [NS1, p.92])

$$\nabla_u \rho = -(\rho + p)\,\nabla\cdot u. \qquad (A.26)$$

Da nach Voraussetzung $u = \partial/\partial t$ ist, bedeutet dies hier (e_α: duale Basis zu θ^α):

$$-\frac{\dot\rho}{\rho+p} = \nabla\cdot u = \omega^\sigma{}_0(e_\sigma)\underbrace{u^0}_{1} = \omega^i{}_0(e_i)$$

$$\overset{(A.15)}{=} \frac{1}{2} g^{ik}\dot g_{ik}\,.$$

Das wollen wir festhalten

$$\boxed{\dot\rho = -(\rho+p)\,\frac{1}{2}g^{ik}\dot g_{ik} = (\rho+p)\,\mathrm{Sp}K\,.} \qquad (A.27)$$

4. Klassifizierung der 3-dim. $\mathbb{R}$-Liealgebren

Wir bestimmen nun alle möglichen 3-dim. Liealgebren über $\mathbb{R}$, und damit die Strukturkonstanten $C^i{}_{jk}$. Diese erfüllen

$$C^i{}_{jk} = -C^i{}_{kj} \qquad (A.28)$$

$$C^s{}_{ij}C^l{}_{sk} + C^s{}_{jk}C^l{}_{si} + C^s{}_{ki}C^l{}_{sj} = 0\,. \qquad (A.29)$$

Weiter verhalten sich die $C^i{}_{jk}$ wie die Komponenten eines Tensors unter affinen Basistransformationen der Liealgebra.

In drei Dimensionen lassen sich die $C^i{}_{jk}$ wie folgt darstellen:

$$\boxed{\begin{aligned} &C^k{}_{ij} = \varepsilon_{ijl}\, n^{lk} + \delta^k_j a_i - \delta^k_i a_j\,, \\ &n^{lk}:\ \text{symm. Tensor}\,,\quad a_i:\ \text{Vektor}\,. \end{aligned}} \qquad (A.30)$$

Dies sieht man folgendermassen ein. Zunächst ersetzen wir (i,j) in $C^k{}_{ij}$ durch einen oberen Vektorindex

$$T^{kl} := \varepsilon^{ijl} C^k{}_{ij}\,,$$

und spalten sodann T^{kl} in seine symmetrischen und antisymmen Teile auf,

$$T^{kl} = n^{kl} + \varepsilon^{kls} a_s \quad , \quad n^{kl} = n^{lk}.$$

Damit ist

$$C^k{}_{ij} = \# \, \varepsilon_{ijl} T^{kl} = \text{rechte Seite von (A.30)}.$$

Die Jacobi-Identität (A.29) reduziert sich auf (Übung):

$$\boxed{n^{ij} a_j = 0.} \qquad (A.31)$$

Die Matrix (n^{ij}) sei diagonalisiert

$$(n^{ij}) = \begin{pmatrix} n^{(1)} & & 0 \\ & n^{(2)} & \\ 0 & & n^{(3)} \end{pmatrix}. \qquad (A.32)$$

Falls $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq 0$, ist $\underline{a}$ nach (A.31) Eigenvektor von (n^{ij}) mit Eigenwert 0. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir in der Darstellung (A.32) $\underline{a}$ von der Form $\underline{a} = (a, 0, 0)$ wählen. Dann ist entweder $a = 0$ oder $a \neq 0$, $n^{(1)} = 0$. In dieser Darstellung lauten die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= a X_2 + n^{(3)} X_3 \\ [X_2, X_3] &= n^{(1)} X_1 \\ [X_3, X_1] &= n^{(2)} X_2 - a X_3. \end{aligned} \qquad (A.33)$$

In (A.33) können wir jedes Basiselement X_i noch mit einem Faktor multiplizieren und so erreichen, dass für $a \neq 0$ die Zahl a positiv ist (da dann $n^{(1)} = 0$). Ist ferner eine der Grössen a, $n^{(2)}$, $n^{(3)}$ gleich Null, so lassen sich alle Strukturkonstanten gleich ± 1 wählen. Sind aber alle drei Grössen von Null verschieden, so bleibt bei einer

Maßstabsänderung das Verhältnis $a^2/(n^{(2)}n^{(3)})$ invariant.

Mit diesen Bemerkungen ergibt sich die folgende

<u>Klassifizierung von Bianchi</u>:

Typ	a	$n^{(1)}$	$n^{(2)}$	$n^{(3)}$	
I	0	0	0	0	⟵ Translationsgruppe von $\mathbb{R}^3$
II	0	1	0	0	
VII	0	1	1	0	
VI		1	-1	0	
IX		1	1	1	⟵ SO(3)
VIII	0	1	1	-1	⟵ SO(2,1)
V	1	0	0	0	
IV	1	0	0	1	
VII	a	0	1	1	
III $(a=1)$ / VI $(a\neq 1)$	a	0	1	-1	

<u>Tabelle A.1.</u> Die 9 Bianchi Typen. Die Typen VI und VII sind übersehb 1-parametrige Familien.

<u>Bemerkungen</u>

- Typ I: $R_{ij}=0$: (lokal) Euklidischer Raum; enthält Friedmann-Modell mit $k=0$
- Typ IX: Liealgebra von SO(3); wähle $g_{ik}=\frac{1}{4}a^2\delta_{ik}$ und zeige
$$R_{ij}=\frac{2}{a^2}g_{ij}$$
: Raum mit konstanter positiver Krümmung
- Typ V: Setze $X_2'=X_2+X_3$, $X_3'=X_2-X_3$, $X_1'=X_1$, dann gilt $[X_1',X_2']=X_2'$, $[X_2',X_3']=0$, $[X_3',X_1']=-X_3'$. Setzt man bezüglich dieser Basis $g_{ik}=a^2\delta_{ik}$,

dann ist $R_{ij} = -\frac{2}{a^2} g_{ij}$: Raum mit konstanter negativer Krümmung.

Dies zeigt, dass die Friedmann-Modelle unter die folgenden Bianchi-Typen fallen:

	I	V	IX
k:	0	−1	1

Übungsaufgabe: Spezialisiere die Ergebnisse des Abschnitts 3 auf die Friedmann-Modelle,

$$g = dt^2 - \frac{1}{4} a^2(t)\, \delta_{ik}\, \theta^i \otimes \theta^k , \qquad (A.34)$$

und stelle die Feldgleichungen auf.

---

5. Beispiele von homogenen Modellen

a) "Singuläres" Verhalten der mittleren Krümmung Sp K

Die 00-Komponente der Feldgl. $R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right)$ gibt nach (A.22)

$$-\operatorname{Sp} K^2 + (\operatorname{Sp} K)^{\cdot} = 8\pi G \left[T(u,u) - \tfrac{1}{2} T \right]. \qquad (A.35)$$

Für eine ideale Flüssigkeit ist die rechte Seite gleich $4\pi G(\rho + 3p)$, also positiv. Ist allgemeiner die sog. starke Energiebedingung (s. Anhang D) erfüllt, so ist die rechte Seite von (A.35) positiv, d.h. es gilt

$$+(\operatorname{Sp} K)^{\cdot} - \operatorname{Sp} K^2 \geqslant 0. \qquad (A.36)$$

Nun folgt aber aus der Schwartz'schen Ungleichung

$$(\mathrm{Sp}\,K)^2 \leq 3\,\mathrm{Sp}(K^2), \qquad (A.37)$$

also ist

$$(\mathrm{Sp}\,K)^{\cdot} \geq \frac{1}{3}(\mathrm{Sp}\,K)^2,$$

oder, falls $\mathrm{Sp}\,K \neq 0$,

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\mathrm{Sp}\,K}\right) \leq -\frac{1}{3}} \;. \qquad (A.38)$$

Beachte, dass nach (A.23)

$$\mathrm{Sp}\,K = -\frac{d}{dt}\ln\sqrt{-g}\,. \qquad (A.39)$$

Falls $\mathrm{Sp}\,K < 0$ für eine Zeit t_1, dann liegt Expansion vor (siehe auch Anhang B, speziell Gl. (15)). Dann verschwindet aber nach (A.38) $(\mathrm{Sp}\,K)^{-1}$ einige Zeit vorher, d.h. die Expansion (genauer die logarithmische Rate der Volumenexpansion) divergiert in der Vergangenheit von t_1. Analog folgt aus $\mathrm{Sp}\,K(t_1) > 0$, dass die Expansion nach endlicher Zeit in der Zukunft divergiert.

Dies beweist allerdings noch nicht, dass "echte" Singularitäten auftreten. Es könnte auch sein, dass die Tetraden ungeschickt gewählt worden sind. Dafür gibt es interessante Beispiele.

b) Die Kasner Lösung

Dies ist eine Vakuum-Lösung vom Bianchi-Typ I ($C^i_{jk}=0$). Für eine Metrik der Form

$$g = dt^2 - X^2(t)\,dx^2 - Y^2(t)\,dy^2 - Z^2(t)\,dz^2 \qquad (A.40)$$

findet man durch Spezialisierung ($\theta^0 = dt$, $\theta^1 = dx$, etc.):

$$G_{0i} = 0$$

$$G_{00} = +\left(\frac{\dot X \dot Y}{XY} + \frac{\dot X \dot Z}{XZ} + \frac{\dot Y \dot Z}{YZ}\right) \qquad (A.41)$$

$$R^1{}_1 = \frac{(\dot X Y Z)^{\cdot}}{XYZ}, \text{ etc.}$$

Übungsaufgabe: Leite dies auch direkt her.

Die Vakuumgl. $R^1{}_1 = R^2{}_2 = R^3{}_3 = 0$ geben

$$\dot X Y Z = a, \quad X \dot Y Z = b, \quad X Y \dot Z = c. \qquad (A.42)$$

Addition dieser drei Gleichungen gibt für $S^3 := XYZ$

$$(S^3)^{\cdot} = a+b+c,$$

also nach Wahl eines geeigneten Zeitnullpunktes

$$S^3 = (a+b+c)\,t. \qquad (A.43)$$

Aus (A.42) folgt dann

$$\frac{\dot X}{X} = \frac{a}{S^3} = \frac{a}{(a+b+c)t}, \text{ etc.} \qquad (A.44)$$

Nun haben wir noch die Bedingung $G_{00} = 0$, d.h.

$$\dot X \dot Y Z + \dot X Y \dot Z + X \dot Y \dot Z = 0. \qquad (A.45)$$

Dies verlangt für die Konstanten a, b, c:

$$\underline{ab + ac + bc = 0} \,. \tag{A.46}$$

Nach (A.44) ist

$$\ln X = \frac{a}{a+b+c} \ln t + \text{const.}$$

$$X = \text{const}\; t^{\frac{a}{a+b+c}} \,, \quad \text{etc.}$$

Sei $p = \frac{a}{a+b+c}$, $q = \frac{b}{a+b+c}$, $r = \frac{c}{a+b+c}$, dann ist

$$p + q + r = 1 \tag{A.47}$$

und nach (A.46)

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1 \,. \tag{A.48}$$

Dies sind die sog. Kasner-Bedingungen und die Kasner-Metrik hat die Form

$$\boxed{g = dt^2 - \left(A\, t^{2p} dx^2 + B\, t^{2q} dy^2 + C\, t^{2r} dz^2\right).} \tag{A.49}$$

c) Die Vakuum-Lösung von Taub

Nun betrachten wir den Bianchi-Typ IX mit einer Metrik der Form

$$g = dt^2 - \gamma_{ik}\, \theta^i \otimes \theta^k \,,$$

$$\gamma_{ik} = \begin{pmatrix} a^2 & & 0 \\ & b^2 & \\ 0 & & c^2 \end{pmatrix} . \tag{A.50}$$

Die Strukturkonst. sind jetzt $C^i{}_{jk} = \varepsilon_{ijk}$. Die allgemeinen Formeln geben für diesen Fall

$$R^1{}_1 = \frac{(\dot{a}bc)^{\cdot}}{abc} + \bar{R}^1{}_1$$

$$R^2{}_2 = \frac{(a\dot{b}c)^{\cdot}}{abc} + \bar{R}^2{}_2 \qquad (A.51)$$

$$R^3{}_3 = \frac{(ab\dot{c})^{\cdot}}{abc} + \bar{R}^3{}_3 \quad ,$$

mit

$$\bar{R}^1{}_1 = \frac{1}{2(abc)^2}\left[a^4 - (b^2 - c^2)^2\right], \text{ etc.}, \qquad (A.52)$$

sowie

$$R^0{}_0 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} \; . \qquad (A.53)$$

Alle andern Komponenten des Ricci-Tensors verschwinden.*) (Für $a^2 = b^2 = c^2$ erhält man wieder das Friedmann-Modell für $k = +1$.)

Die Taub-Lösung erfüllt $a^2 = b^2$, $Ric = 0$. Man findet sie folgendermassen. Zunächst ist $R^1{}_1 = R^2{}_2$. Aus $R_{22} + R_{33} = 0$ erhält man mit der Zeitvariablen

$$dt' = c\, dt \qquad (A.55)$$

die Gleichung

$$(a^2c^2)'' + 2 = 0 \qquad (A.56)$$

($'$ bedeutet die Ableitung nach t'). Diese hat die Lösung

---

*) Für G_{00} findet man (vgl. mit (A.41))

$$G_{00} = +\left(\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{a}\dot{c}}{ac} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc}\right) + \frac{1}{2}\bar{R}, \quad \bar{R} = \underbrace{\bar{R}^i{}_i}_{(A.52)} \qquad (A.54)$$

$$(ac)^2 = (t' - t_1')(t_2' - t') \tag{A.57}$$

mit Konstanten $t_1' < t_2'$. Dies benutzen wir in $G_{00} = 0$ und finden nach einer kurzen Rechnung

$$\left(\frac{c'}{c}\right)^2 = \frac{(t_2' - t_1')^2 - c^4}{4(ac)^4}. \tag{A.58}$$

Man zeigt leicht, dass jede Lösung von (A.57) und (A.58) auch die Gleichung $R_{33} = 0$ erfüllt.

Durch eine Quadratur findet man aus den beiden letzten Gleichungen die Lösung

$$a^2 = \frac{1}{2C(t_2' - t_1')}\left[C^2 (t' - t_1')^2 + (t_2' - t_1')^2 (t_2' - t')^2\right], \tag{A.59}$$

wobei C eine Integrationskonstante ist. Durch eine geeignete lineare Transformation $t'' = \alpha t' + \beta$ kann man erreichen, dass die Metrik

$$g = \frac{(dt')^2}{c^2} - a^2\left((\theta^1)^2 + (\theta^2)^2\right) - c^2 (\theta^3)^2 \tag{A.60}$$

– bis auf einen irrelevanten Faktor – die folgende Form annimmt (Taub 1951):

$$g = \frac{(dt'')^2}{U(t'')} - (2l)^2 U (\theta^3)^2 - \left((t'')^2 + l^2\right)\left((\theta^1)^2 + (\theta^2)^2\right) \tag{A.61}$$

mit

$$U(t'') = -1 + \frac{2(mt'' + l^2)}{(t'')^2 + l^2} \tag{A.62}$$

(m, l sind Integrationskonstanten).

Eine andere Form erhält man mit Hilfe der neuen Zeitkoordinate τ, definiert durch

$$dt = a^2 c\, d\tau \implies dt' = (ac)^2 d\tau . \qquad (A.63)$$

Aus (A.56) und (A.58) erhält man mit dem Ergebnis (A.57)

$$\left[\frac{d}{d\tau} \ln (ac)^2\right]^2 + 4(ac)^2 = 4\omega^2 \qquad (A.64)$$

$$\left[\frac{d c^2}{d\tau}\right]^2 = c^4 \left(4\omega^2 - c^4\right) , \qquad (A.65)$$

wobei $4\omega^2 = (t_2' - t_1')^2$. Integration dieser beiden Gleichungen gibt mit Integrationskonstanten λ, μ

$$(ac)^2 = \frac{\omega^2}{(\cosh \omega\tau + \lambda)^2} , \qquad (A.66)$$

$$c^2 = \frac{2\omega}{\cosh (2\omega\tau + 2\mu)} \qquad (A.67)$$

und folglich

$$a^2 = \frac{\omega}{2} \frac{\cosh(2\omega\tau + 2\mu)}{\cosh^2(\omega\tau + \lambda)} . \qquad (A.68)$$

Hinzu kommt

$$t = \int^{\tau} a^2 c\, d\tau . \qquad (A.69)$$

Für $\tau \to \pm\infty$ konvergiert a^2 gegen eine endliche Konstante $\neq 0$ und $c \sim e^{-\omega\tau}$. Deshalb konvergiert das Integral in (A.69) für $\tau \to \pm\infty$. Für die zugehörigen endlichen Werte von t ist c nach (A.67) gleich Null, während $a = b \neq 0$ sind.

Auch die Form (A.61) wird singulär bei $t'' = m \pm \sqrt{m^2+l^2}$.
Diese Singularitäten sind aber spurios. Die Taub-Metrik lässt sich isometrisch in eine grössere Mannigfaltigkeit einbetten, welche von Newman, Tamburino und Unti 1963 gefunden wurde.*) Dies wird in [HE, §5.8] diskutiert. Das Phänomen, das hier auftritt, sollte nicht allzu überraschend sein, wie das folgende zweidimensionale Beispiel von Misner zeigt.

Wir betrachten auf $\mathbb{R}\times S^1$ die Metrik

$$g = d\tau^2 - \frac{\tau^2}{4}d\psi^2 \quad , \quad 0 \leq \psi < 2\pi , \qquad (A.70)$$

welche invariant ist unter der Gruppe $SO(2): \psi \to \psi + \varphi$ (mod 2π). In diesen synchronen Koordinaten ist die Metrik für $\tau = 0$ singulär. Deshalb beschränken wir diese auf $M = \mathbb{R}_+ \times S^1$. Wenn wir aber die folgende Koordinatentransformation ausführen

$$\tau = 2\sqrt{t} \, , \quad \psi' = \psi - \ln t \, ,$$

so lautet die Metrik in den neuen Koordinaten

$$g' = -2dt\, d\psi' - t(d\psi')^2 \qquad (A.71)$$

und diese ist nicht nur für das Bild von M ($\tau > 0$), d.h. für $t > 0$ regulär, sondern auf ganz $M' = \mathbb{R}\times S^1$ (ψ' ist zyklisch und t durchläuft alle reellen Werte).

---

*) Diese Raumzeit nennt man die T-NUT-Mannigfaltigkeit.

Um genauer zu verstehen, wie die ursprüngliche Mannigfaltigkeit (M,g) isometrisch in Teil I von M' mit $t>0$ eingebettet ist, betrachten wir die beiden folgenden Familien von Nullgeodäten:

(i) $d\psi'=0$ (vertikale Linien in Fig. 1);

(ii) $\dfrac{dt}{d\psi'} = -\dfrac{t}{2}$.

Die zweite Familie hat die Kurve $t=0$ als Grenzzyklus (s. Fig. 1); dasselbe gilt für die Kurven $d\psi=0$ ("parallel" zur synchronen Zeitachse), denn dies ist gleichbedeutend mit $dt/d\psi'=-t$.

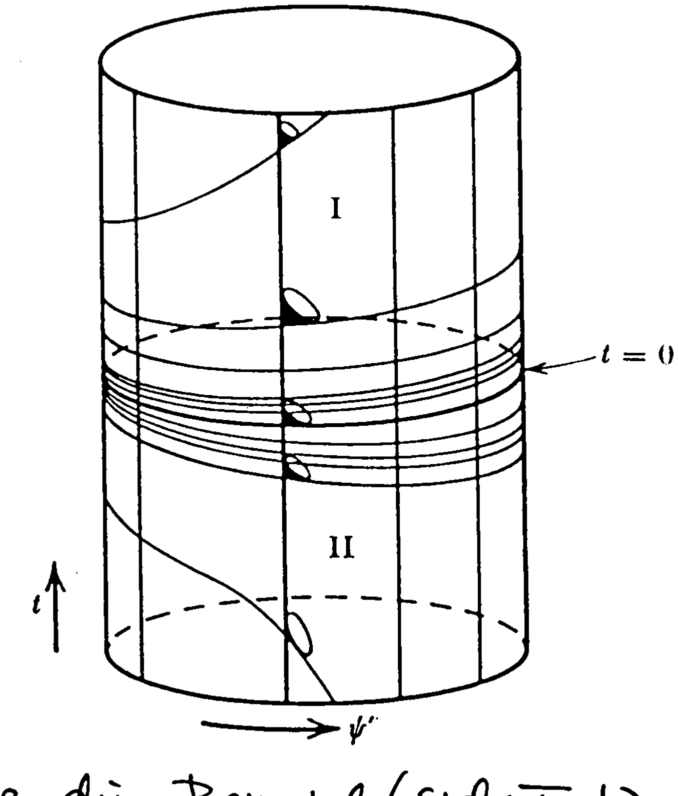


Fig. A.1. Misners 2-dim. Beispiel (siehe Text)

Man sieht auch, dass in Teil I (isometrisches Bild von (M,g)) keine geschlossenen zeitartigen Linien existieren, während dies in Teil II ($t<0$) der Fall ist.

Es gibt auch eine zweite Erweiterung (H'', g''), in welcher die Rolle der beiden Familien von Nullgeodäten vertauscht ist. Dazu setze man $\psi'' = \psi + \ln t$. Beide inäquivalenten Ausdehnungen sind maximal, sie sind aber nach dem Gesagten geodätisch unvollständig.

* * *

Falls a und b in (A.50) nicht gleich angenommen werden, sind keine analytischen Vakuumlösungen bekannt. Eine interessante qualitative Diskussion der Gleichungen in diesem allgemeinen Bianchi-Typ IX Vakuumfall findet man in Landau-Lifschitz, Bd. 2, §113.

d) Ein Beispiel vom Bianchi-Typ I für Staub

Wir setzen wieder die Metrik (A.40) an, lösen aber die Feldgleichungen diesmal für druckfreien mitbewegten Staub,

$$T_{\mu\nu} = \rho\, u_\mu u_\nu\,, \quad u = \frac{\partial}{\partial t}\,. \qquad \text{(A.72)}$$

Die Gleichung $G_{00} = 8\pi T_{00}$ $(G=1)$ lautet dann nach (A.41)

$$\dot X \dot Y Z + \dot X Y \dot Z + X \dot Y \dot Z = 8\pi\rho S^3\,, \qquad \text{(A.73)}$$

wobei

$$S^3 = XYZ\,. \qquad \text{(A.74)}$$

Die Gleichungen $R^1{}_1 = 8\pi(T^1{}_1 - \frac{1}{2}\rho)$, etc., lauten nach (A.41)

$$(\dot X Y Z)^{\cdot} = 4\pi\rho S^3,\ \text{etc.} \qquad \text{(A.75)}$$

Die Gleichung $\nabla . T = 0$ gibt nach (A.27)

$$\dot{\rho} = -\rho \left[\frac{\dot{X}}{X} + \frac{\dot{Y}}{Y} + \frac{\dot{Z}}{Z} \right] = -\rho \frac{(S^3)^{\cdot}}{S^3} .$$

Also gilt

$$\boxed{\rho S^3 = \text{const}} \quad \text{(Erhaltung der Materie)}, \qquad \text{(A.76)}$$

Addition der Gleichungen (A.75) gibt

$$(S^3)^{\cdot\cdot} = 12\pi\rho S^3 =: 9M, \qquad \text{(A.77)}$$

wobei M nach (A.76) eine Konstante ist,

$$M = \frac{4\pi}{3} S^3 \rho .$$

Aus (A.77) folgt

$$S^3 = \frac{9}{2} M t (t + \Sigma), \quad \Sigma : \text{Integr. Konstante.} \qquad \text{(A.78)}$$

Für (A.75) können wir schreiben: $(\dot{X} Y Z)^{\cdot} = 3M$, etc. Also gilt

$$\dot{X} Y Z = 3Mt + a, \quad \text{etc}, \qquad \text{(A.79)}$$

und folglich

$$\frac{\dot{X}}{X} = \frac{3Mt + a}{S^3} = \frac{3Mt + a}{\frac{9}{2} M t (t + \Sigma)}, \text{ etc.} \qquad \text{(A.80)}$$

Die Gleichung 1. Ordnung (A.73) gibt eine Bedingung an die Integrationskonstanten a, b, c. Sie lautet $\dot{X}\dot{Y}Z + \dots = 6M$, also ist

$$\frac{\dot{X}\dot{Y}}{XY} + \cdot + \cdot = \frac{6M}{S^3} .$$

Setzt man darin (A.80) ein, so kommt

$$\frac{3Mt+a}{S^3}\,\frac{3Mt+b}{S^3}+\dots=\frac{6M}{S^2},$$

oder

$$(3Mt+a)(3Mt+b)+\dots=6MS^3=27M^2t(t+\Sigma).$$

Dies gibt

$$27Mt\Sigma=3Mt(a+b+a+c+b+c)$$
$$ab+ac+bc=0,$$

oder

$$a+b+c=\frac{9}{2}M\Sigma$$
$$ab+ac+bc=0.$$

Wir setzen $a=\frac{3M}{2}\Sigma(1+a')$, etc, und erhalten für a', b' und c' die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned}a'+b'+c'&=0\\ a'b'+a'c'+b'c'&=0\end{aligned}\right\}\Longleftrightarrow\left\{\begin{aligned}a'+b'+c'&=0\\ a'^2+b'^2+c'^2&=6.\end{aligned}\right.$$

Diese haben die 1-parametrige Lösungsschar

$$a'=2\sin\alpha,\quad b'=2\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right),\quad c'=2\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right).$$

Damit folgt aus (A.80)

$$\begin{aligned}\frac{\dot X}{X}&=\frac{2}{3t}\,\frac{t+\Sigma(1+2\sin\alpha)/2}{t+\Sigma}\\ \frac{\dot Y}{Y}&=\frac{2}{3t}\,\frac{t+\Sigma(1+2\sin(\alpha+\frac{2\pi}{3}))/2}{t+\Sigma}\\ \frac{\dot Z}{Z}&=\frac{2}{3t}\,\frac{t+\Sigma(1+2\sin(\alpha+\frac{4\pi}{3}))/2}{t+\Sigma}.\end{aligned}\qquad (A.81)$$

Diese Gleichungen lassen sich leicht integrieren:

$$X = S\,(t^{2/3}/S)^{2\sin\alpha}\,,\ \text{etc.} \tag{A.82}$$

Dies, zusammen mit (A.78), gibt die Lösung der Feldgleichungen. Die freien Parameter sind α, Σ und M.

Diskussion:

Für $\Sigma = 0$ erhält man das Einstein-de Sitter Universum (Friedmann-Lösung für $k = 0$). Deshalb setzen wir $\Sigma > 0$; für α können wir uns auf das Intervall

$$-\frac{\pi}{6} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

beschränken. Wir notieren auch (s. (A.78))

$$\frac{\dot{S}}{S} = \frac{2}{3t}\,\frac{t + \Sigma/2}{t + \Sigma}\,. \tag{A.83}$$

Die gefundene Lösung expandiert von einem hochgradig anisotropen singulären Zustand bei $t = 0$ und nähert sich für sehr grosse t praktisch einem Einstein-de Sitter Universum. Die mittlere Länge S nimmt monoton mit t zu:

$$S \propto \begin{cases} t^{1/3} & \text{für kleine } t \\ t^{2/3} & \text{für grosse } t. \end{cases}$$

Für $\alpha \neq \pi/2$ ist $1 + 2\sin(\alpha + \frac{4\pi}{3}) < 0$. Gehen wir also rückwärts in der Zeit, so wird der Kollaps in der z-Richtung gestoppt und für genügend frühe Zeiten durch eine Expansion (!) ersetzt. In den x- und y-Richtungen geht aber der Kollaps monoton bis zur Singularität weiter. Das Modell hat also eine "zigarrenähnliche"

<u>Singularität</u>: Die Materie kollabiert zunächst in allen Richtungen, aber der Kollaps wird entlang der z-Richtung schliesslich gestoppt und es schliesst sich in dieser Richtung eine Expansion an, während sich die x- und y-Richtungen monoton verhalten. (In z-Richtung gibt es für sehr frühe Zeiten eine Blauverschiebung.)

Diskutiere auch den Ausnahmefall $\alpha = \pi/2$ („Pfannkuchensingularität")

* * *

Über homogene Modelle gibt es eine sehr ausgedehnte Literatur. Für einen neueren Übersichtsartikel, mit umfangreichen Literaturangaben, verweisen wir auf:

<u>M. A. H. MacCallum</u>, in "General Relativity", An Einstein Centenary Survey, Ed. S.W. Hawking, W. Israel, p. 533.

weitere Referenzen

Anhang B. Zur Kinematik von Strömungen in der ART

Die Betrachtungen und Resultate dieses Anhangs haben mannigfaltige Anwendungen, insbesondere im Hinblick auf Singularitätstheoreme in der ART.

1. Relative Bewegungen von benachbarten Teilchen

Wir betrachten eine zeitartige Kongruenz von Weltlinien mit normiertem tangentialem Vektorfeld u, $(u,u)=1$. In der Umgebung einer willkürlich herausgegriffenen Kurve γ_0 dieser Kongruenz führen wir folgende Koordinaten ein. Es seien $e_i(\tau)$, $i=1,2,3$, unabhängige Vektorfelder längs γ_0 (τ: Eigenzeit längs γ_0), welche senkrecht zu $u=e_0$ sind. In einer Tubenumgebung von γ_0 definieren wir Koordinaten durch

$$(t,x^i) \longmapsto \exp_{\gamma_0(t)}(x^i e_i(t)) . \qquad (1)$$

Längs γ_0 fällt t mit der Eigenzeit τ zusammen. Die Kurve γ_0 steht senkrecht auf den (lokalen) Untermannigfaltigkeiten $\{t=\text{const}\}$.

Eine Weltlinie $\gamma(\tau)$ (τ: Eigenzeit) der Kongruenz, welche genügend nahe an γ_0 ist, kann auch durch t parametrisiert werden. In diesem Parameter ist der Tangentialvektor $\tilde{u}=\varphi u$, $\varphi = d\tau/dt$. Der Fluss ϕ_t zum Vektorfeld $\tilde{u}$ ist eine Translation längs der Kongruenz mit t. Speziell längs γ_0 transformiert

$(\varphi_t)_*$ die Tangentialräume senkrecht zu u ineinander.

Unter einem <u>relativen Positionsvektor</u> längs γ_0 verstehen wir ein Vektorfeld $X(t)$ längs γ_0, welches senkrecht zu $u(t)$ steht und unter dem Fluss φ_t invariant ist.

Der zugehörige <u>relative Geschwindigkeitsvektor</u> V ist die Fermiableitung*) von X:

$$V = \mathbb{F}_u X = \nabla_u X + (X, \nabla_u u)\, u = \perp \nabla_u X \qquad (2)$$

($\perp$: Projektion senkrecht auf u), welcher ebenfalls senkrecht auf u ist.

Da X unter dem Fluss φ_t zu $\tilde{u} = \varphi u$ invariant ist, gilt $[\tilde{u}, X] = 0$ und folglich $\nabla_{\tilde{u}} X = \nabla_X \tilde{u}$, oder (da $\varphi = 1$ längs γ_0)

$$\nabla_u X = \nabla_X \tilde{u} \,. \qquad (3)$$

Längs γ_0 gilt dann, wenn $Y(t)$ ein zweites Vektorfeld senkrecht zu $u(t)$ bezeichnet,

$$\begin{aligned}(V, Y) &= (\mathbb{F}_u X, Y) = (\nabla_u X, Y) = (\nabla_X \tilde{u}, Y) \\ &= (\nabla_X (\varphi u), Y) = X(\varphi)\underbrace{(u, Y)}_{0} + \varphi\, (\nabla_X u, Y) \\ &= (\nabla_X u, Y).\end{aligned}$$

---

*) Für die Fermiableitung, siehe [NS, §1.10.2].

Deshalb gilt für den relativen Geschwindigkeitsvektor

$$\boxed{V = \nabla_X u\,.} \qquad (4)$$

V hängt also linear von X ab.

2. Vortizität, Dehnung und Expansion

Für Vektorfelder X, Y senkrecht zu u sei

$$\Theta(X,Y) = \tfrac{1}{2}\left[(X, \nabla_Y u) + (\nabla_X u, Y)\right]$$
$$\Omega(X,Y) = \tfrac{1}{2}\left[(X, \nabla_Y u) - (\nabla_X u, Y)\right]\,. \qquad (5)$$

Für beliebige Vektorfelder setzen wir $\Theta(X,Y) = \Theta(\perp X, \perp Y)$, $\Omega(X,Y) = \Omega(\perp X, \perp Y)$. Θ nennen wir den <u>Dehnungstensor</u> und Ω die <u>Wirbelform (Wirbeltensor)</u>. Mit dem Projektionstensor

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu \qquad (6)$$

lauten die Komponenten des Wirbeltensors

$$\omega_{\alpha\beta} = h^\mu_\alpha h^\nu_\beta\, u_{[\mu;\nu]} = h^\mu_\alpha h^\nu_\beta\, u_{[\mu,\nu]} \qquad (7)$$

und diejenigen des Dehnungstensors

$$\theta_{\alpha\beta} = h^\mu_\alpha h^\nu_\beta\, u_{(\mu;\nu)}\,.$$

Die Spur von Θ ist die <u>Volumenexpansion</u> θ,

$$\theta = h^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu} = u^\mu{}_{;\mu}\,. \qquad (8)$$

Der <u>Scherungstensor</u> $\sigma_{\alpha\beta}$ ist der spurfreie Anteil von $\theta_{\alpha\beta}$:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta}\, \theta . \tag{9}$$

Man verifiziert leicht die Identität

$$\boxed{u_{\alpha;\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\theta\, h_{\alpha\beta} + a_\alpha u_\beta} \quad , \quad a = \nabla_u u . \tag{10}$$

Diese Formel ist auch in der allgemeinrelativistischen Hydrodynamik wichtig; siehe [NS, Anhang B].

Wir diskutieren nun die geometrische Bedeutung der eingeführten Grössen. Dazu nehmen wir ~~jetzt~~ speziell an, die $e_i(t)$ seien längs γ_0 Fermi-transportiert und orthonormiert. Für einen relativen Positionsvektor $X(t) = X^i(t)\, e_i(t)$ längs γ_0 ist das relative Geschwindigkeitsfeld

$$V(t) = F_u X(t) = \frac{dX^i}{dt} e_i(t) \equiv V^i(t)\, e_i(t) .$$

Mit den Abkürzungen $\underline{x}(t) = (X^1(t), X^2(t), X^3(t))$, $\underline{v}(t) = (V^1(t), V^2(t), V^3(t))$ gilt also

$$\underline{v}(t) = \frac{d\underline{x}}{dt} . \tag{11}$$

Bezeichnet $A(t)$ die Matrix von $(\varphi_t)_*$ relativ zur Basis $\{e_i\}$, so gilt, wegen $X(t) = (\varphi_t)_* X(0)$,

$$\underline{x}(t) = A(t)\, \underline{x}(0) . \tag{12}$$

Für $A(t)$ benutzen wir die Polarzerlegung

$$A(t) = \underset{\text{Rotation}}{R(t)}\ \underset{\text{positiv definite symm. Matrix}}{P(t)} . \tag{13}$$

Natürlich gilt

$$\dot{A}(0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{schiefs.}}}{\dot{R}(0)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{symm.}}}{\dot{P}(0)} \quad . \tag{14}$$

Aus (4), (11), (12) und (14) folgt

$$(\nabla_X u)_{\gamma_0(0)} = V(0) = V^i(0)\, e_i(0) = \frac{dX^i}{dt}(0)\, e_i(0)$$

$$= \dot{A}(0)_{ij}\, X^j(0)\, e_i(0) = (e_i, \nabla_{e_j} u)_{\gamma_0(0)}\, X^j(0) \quad ;$$

$$\dot{A}(0)_{ij} = (e_i, \nabla_{e_j} u)_{\gamma_0(0)} = u_{i;j} \quad ;$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{P}_{ij}(0) &= \tfrac{1}{2}(u_{i;j} + u_{j;i}) \overset{(s)}{=} \theta_{ij} \\ \dot{R}_{ij}(0) &= \tfrac{1}{2}(u_{i;j} - u_{j;i}) \overset{(s)}{=} \omega_{ij} \ , \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

wobei $\theta_{\alpha\beta}, \omega_{\alpha\beta}$ die Komponenten von Θ und Ω bezüglich der Basis $\{e_\alpha\}$ sind. (Bezüglich dieser Basis verschwinden die Komponenten $\theta_{\alpha 0}, \omega_{\alpha 0}$.)

Aus den beiden letzten Gleichungen sehen wir, dass θ_{ij} die Dehnungsraten der relativen Positionsvektoren und ω_{ij} deren Rotationsraten beschreiben, beide bezüglich Fermi-transportierten Basen. Dies rechtfertigt die Bezeichnungen für Θ und Ω.

Schliesslich betrachten wir noch die Expansion der Strömung. Es sei $\omega_\perp = i_u \eta$, η: Volumenform der Raumzeit. Wir bilden

$$L_{\tilde{u}}\,\omega_\perp = L_{\tilde{u}}\, i_u \eta = i_{\tilde{u}}\, d\, i_u \eta = i_{\tilde{u}} L_u \eta$$
$$= (\operatorname{div} u)\, i_{\tilde{u}} \eta = \varphi\, (\operatorname{div} u)\, \omega_\perp\ .$$

Längs γ_0 ist $\varphi = 1$, also

$$L_{\tilde{u}}\,\omega_\perp = (\operatorname{div} u)\,\omega_\perp\ , \quad \text{längs } \gamma_0\ . \tag{16}$$

Folglich misst $\operatorname{div} u$ die logarithmische Rate der Volumenexpansion im üblichen dreidimensionalen Sinn.

Nun ist auch

$$\operatorname{div} u = \nabla\cdot u = \overset{0}{\overbrace{(\nabla_{e_0} u, e_0)}} - (\nabla_{e_i} u, e_i)\ ;$$

d.h.

$$\operatorname{div} u = -\sum_i \theta_{ii} = \sum_i \theta^i{}_i\ . \tag{17}$$

Der Dehnungstensor hängt auch sehr eng mit der 2. Fundamentalform der Flächen $\{t = \text{const}\}$ zusammen. In der Tat folgt aus (5)

$$\theta_{ij} = \tfrac{1}{2}\left[(e_i, \nabla_{e_j} e_0) + (e_j, \nabla_{e_i} e_0)\right]$$
$$= -\tfrac{1}{2}\left[\omega^i{}_0(e_j) + \omega^j{}_0(e_i)\right]\ ,$$

wo jetzt $\omega^\alpha{}_\beta$ die Zusammenhangsformen bezeichnen. Die 2. Fundamentalform K_{ij} hängt mit diesen folgendermassen zusammen (s. Anhang G, oder [NS, (2.7.7)]) :

$$\omega^i{}_0 = \omega^0{}_i = K_{ij}\,\theta^j + \text{Term prop. zu } \theta^0.$$

Folglich gilt

$$\boxed{\theta_{ij} = -K_{ij}} \tag{18}$$

und deshalb nach (17)

$$\theta = \theta^i{}_i = \operatorname{div} u = + \sum_i K_{ii} . \tag{19}$$

Übung: Beweise die folgende wichtige Tatsache

$$\omega_{\alpha\beta} = 0 \iff u^\flat \wedge du^\flat = 0 . \tag{20}$$

Nach Frobenius folgt also aus $\omega_{\alpha\beta} = 0$, dass u hyperflächenorthogonal ist.

Lösung: Nach Definition ist

$$-\Omega = \perp du . \tag{21}$$

Nun sieht man leicht, dass

$$-u^\flat \wedge \Omega = u^\flat \wedge du^\flat . \tag{22}$$

Deshalb folgt aus $\Omega = 0$ auch $u^\flat \wedge du^\flat = 0$. Verschwindet umgekehrt letztere Grösse, so folgt

$$0 = i_u (u^\flat \wedge du^\flat) = du^\flat - u^\flat \wedge i_u du^\flat .$$

Durch orthogonale Projektion folgt $\Omega = 0$.

---

3. Propagationsgleichungen

Mit Hilfe der Identität

$$u_{\alpha;\beta\gamma} - u_{\alpha;\gamma\beta} = R^\sigma{}_{\alpha\beta\gamma}\, u_\sigma \tag{23}$$

erhalten wir für $\nabla_u (\nabla u)$:

$$u^\gamma (u_{\alpha;\beta})_{;\gamma} = u^\gamma u_{\alpha;\gamma\beta} + R^\sigma{}_{\alpha\beta\gamma} u_\sigma u^\gamma$$
$$= (u^\gamma u_{\alpha;\gamma})_{;\beta} - u^\gamma{}_{;\beta} u_{\alpha;\gamma} + R_{\sigma\alpha\beta\gamma} u^\sigma u^\gamma \,,$$

oder

$$u^\gamma (u_{\alpha;\beta})_{;\gamma} = a_{\alpha;\beta} - u^\gamma{}_{;\beta} u_{\alpha;\gamma} + R_{\sigma\alpha\beta\gamma} u^\sigma u^\gamma \,. \qquad (24)$$

Von dieser Gleichung bilden wir zunächst die Spur:

$$\nabla_u \theta = \operatorname{div}(\nabla_u u) - u_{\alpha;\beta} u^{\beta;\alpha} - \operatorname{Ric}(u,u) \,. \qquad (25)$$

Darin ist

$$u_{\alpha;\beta} u^{\beta;\alpha} = u_{(\alpha;\beta)} u^{(\alpha;\beta)} - u_{[\alpha;\beta]} u^{[\alpha;\beta]} \,.$$

Nach (10) gilt

$$u_{(\alpha;\beta)} = \theta_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}(a_\alpha u_\beta + a_\beta u_\alpha) \,, \quad u^\beta \theta_{\alpha\beta} = 0 \,; \qquad (26)$$
$$u_{[\alpha;\beta]} = \omega_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}(a_\alpha u_\beta - a_\beta u_\alpha) \,, \quad u^\beta \omega_{\alpha\beta} = 0 \,;$$

also

$$u_{\alpha;\beta} u^{\beta;\alpha} = \theta_{\alpha\beta} \theta^{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta} \,. \qquad (27)$$

Damit erhalten wir aus (25) die <u>(Landau–) Raychaudhuri-Gleichung</u> $(\dot\theta \equiv \nabla_u \theta = u(\theta))$:

$$\dot\theta = -\operatorname{Ric}(u,u) - \theta_{\alpha\beta}\theta^{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} + \operatorname{div}(\nabla_u u) \,, \qquad (28)$$

oder

$$\dot\theta = -\operatorname{Ric}(u,u) - \sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{3}\theta^2 + \omega_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} + \operatorname{div}(\nabla_u u) \,. \qquad (28')$$

Beachte die Vorzeichen auf den rechten Seiten!

Als Nächstes bilden wir die orthogonale Projektion von (24). Die Projektion der linken Seite ist gleich $\perp(\dot{\theta}_{\alpha\beta}+\dot{\omega}_{\alpha\beta})+a_\alpha a_\beta$ $\quad(\dot{\theta}_{\alpha\beta}\equiv u^\gamma\theta_{\alpha\beta;\gamma}$, etc.). Damit erhalten wir

$$\mathbb{F}_u(\theta_{\alpha\beta}+\omega_{\alpha\beta})=-a_\alpha a_\beta-(\theta^\gamma{}_\beta+\omega^\gamma{}_\beta)(\theta_{\alpha\gamma}+\omega_{\alpha\gamma})$$
$$+R_{\sigma\alpha\beta\gamma}u^\sigma u^\gamma+\perp a_{\alpha;\beta}\,. \qquad (29)$$

Nehmen wir von dieser Gleichung den antisymmetrischen Teil, so fällt der Krümmungsbeitrag weg und wir finden

$$\mathbb{F}_u\,\omega_{\alpha\beta}=-2\,\theta^\gamma{}_{[\beta}\,\omega_{\alpha]\gamma}+\perp a_{[\alpha;\beta]}\,, \qquad (30)$$

oder mit (9)

$$\boxed{\mathbb{F}_u\,\omega_{\alpha\beta}=-2\,\sigma^\gamma{}_{[\beta}\,\omega_{\alpha]\gamma}-\frac{2}{3}\theta^2\omega_{\alpha\beta}+\perp a_{[\alpha;\beta]}\,.} \qquad (31)$$

Für eine geodätische Strömung, $\nabla_u u=0$, reduziert sich dies auf

$$\dot{\omega}_{\alpha\beta}=-\frac{2}{3}\theta^2\omega_{\alpha\beta}-2\,\sigma^\gamma{}_{[\beta}\,\omega_{\alpha]\gamma}\,. \qquad (31')$$

Der symmetrische Anteil von (29) gibt

$$\mathbb{F}_u\,\theta_{\alpha\beta}=-a_\alpha a_\beta+\perp a_{(\alpha;\beta)}-\theta_{\alpha\gamma}\theta^\gamma{}_\beta-\omega_{\alpha\gamma}\omega^\gamma{}_\beta+R_{\sigma\alpha\beta\gamma}u^\sigma u^\gamma\,. \qquad (32)$$

Beachten wir noch die Raychaudhuri-Gleichung (28), so erhalten wir aus (32) für den spurfreien Anteil:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{F}_u\,\sigma_{\alpha\beta}=&-a_\alpha a_\beta+\perp a_{(\alpha;\beta)}-\sigma_{\alpha\gamma}\sigma^\gamma{}_\beta-\frac{2}{3}\theta\,\sigma_{\alpha\beta}-\omega_{\alpha\gamma}\omega^\gamma{}_\beta\\&+R_{\rho\alpha\beta\gamma}u^\rho u^\gamma-\frac{1}{3}h_{\alpha\beta}\left(-R_{\gamma\rho}u^\gamma u^\rho-\sigma_{\gamma\rho}\sigma^{\gamma\rho}+\omega_{\gamma\rho}\omega^{\gamma\rho}+a^\gamma{}_{;\gamma}\right).\end{aligned}} \qquad (33)$$

Der Riemann-Tensor kann durch den Ricci-Tensor und den Weyl-Tensor $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ wie folgt ausgedrückt werden:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} - g_{\alpha[\delta} R_{\gamma]\beta} - g_{\beta[\gamma} R_{\delta]\alpha} - \frac{1}{3} R\, g_{\alpha[\gamma}\, g_{\delta]\beta} \, . \tag{34}$$

Diese Definitionsgleichung für den Weyl-Tensor zeigt, dass dieser dieselben Symmetrieeigenschaften wie der Riemann-Tensor hat und dass alle seinen Kontraktionen verschwinden. Der Weyl-Tensor ist besonders wichtig, weil er konform invariant ist (siehe z.B., [RW, Appendix D]).

<u>Übungsaufgabe:</u> Substituiere (34) in (33) und leite die folgende Gleichung her:

$$\begin{aligned} ⟂_u \sigma_{\alpha\beta} = &- C_{\alpha\gamma\beta\delta}\, u^\gamma u^\delta + \frac{1}{2} \perp R_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\gamma}\,\omega^\gamma{}_\beta - \sigma_{\alpha\gamma}\,\sigma^\gamma{}_\beta \\ &- \frac{2}{3}\theta\,\sigma_{\alpha\beta} + \perp a_{(\alpha;\beta)} - a_\alpha a_\beta \\ &- \frac{1}{3} h_{\alpha\beta}\left(\omega_{\gamma\delta}\,\omega^{\gamma\delta} - \sigma_{\gamma\delta}\,\sigma^{\gamma\delta} + a^\gamma{}_{;\gamma} + R_{\gamma\delta}\, h^{\gamma\delta}\right) \end{aligned} \tag{35}$$

(Vorzeichen?).

---

4. Relative Beschleunigung

Für V in (2) bilden wir nun den <u>relativen Beschleunigungsvektor</u> $⟂_u V = ⟂_u^2 X$. Mit (4) gilt

$$\begin{aligned} ⟂_u V &= ⟂_u \nabla_X u = \perp \nabla_u \nabla_X u \\ &= \perp \left(\nabla_u \nabla_X - \nabla_X \nabla_u - \nabla_{[u,X]}\right) u + \perp \nabla_X \nabla_u u + \perp \nabla_{[u,X]} u \end{aligned}$$

$$= \perp R(u,X)u + \perp \nabla_X a + \perp \nabla_{[u,X]} u .$$

Aus den Symmetrieeigenschaften des Riemann-Tensors folgt $(u, R(u,X)u) = 0$, d.h. es gilt $\perp R(u,X)u = R(u,X)u$. Ferner ist mit (2) und (4)

$$[u,X] = \nabla_u X - \nabla_X u = V - (X,a)u - V = -(X,a)u;$$

also

$$\nabla_{[u,X]} u = -(X,a)a .$$

Da dies senkrecht auf u steht, erhalten wir endgültig

$$\boxed{\nabla_u^2 X = R(u,X)u + \perp \nabla_X a - (a,X)a.} \tag{36}$$

(Dies löst die Übung 3 in [NS, p.127].)

Für eine geodätische Kongruenz ($a=0$) erhalten wir wieder die Gleichung für die geodätische Abweichung

$$\nabla_u^2 X = R(u,X)u. \tag{37}$$

Bezüglich der Fermi-transportierten Basis, welche wir in Abschnitt 2 eingeführt haben, schreibt sich (36) folgendermassen

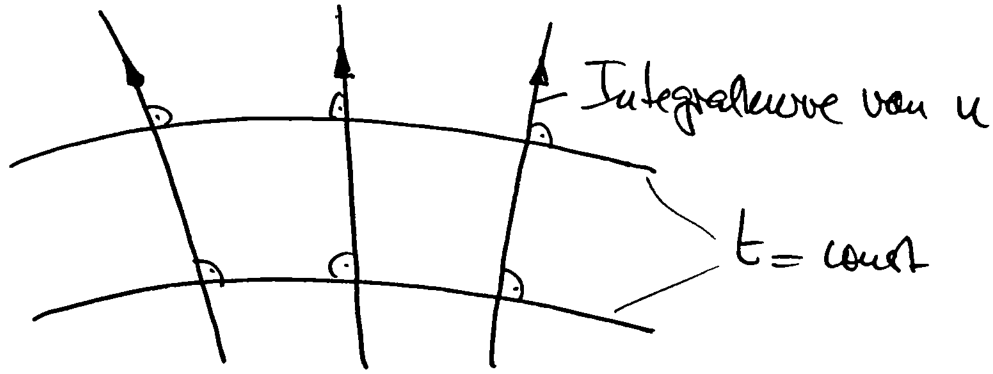
$$\frac{d^2 A_{ik}}{d\tau^2} = (R_{i0j0} - a_{i;j} + a_i a_j) A_{jk} . \tag{38}$$

Benutzt man hier (15), so lassen sich daraus wieder die Propagationsgleichungen ableiten; siehe dazu [HE, §4.1].

Anhang C. Wirbelfreie kosmologische Modelle

Wir studieren nun etwas allgemeinere Modelle als in Anhang A.

Das kosmische 4er-Geschwindigkeitsfeld u sei als wirbelfrei vorausgesetzt ($\omega_{\alpha\beta}=0$). Dies ist nach (B.20) äquivalent zu $u^\flat \wedge du^\flat = 0$. Das differentielle System $u^\flat = 0$ ist deshalb nach Frobenius integrabel. Dies bedeutet: Es gibt lokal eine Zeitkoordinate t, so dass die Flächen $t=\mathrm{const}$ senkrecht auf u stehen.



In mitbewegten Koordinaten $\{t, x^i\}$ lautet deshalb die Metrik (alle Betrachtungen sind lokaler Natur)

$$g = g_{00}\, dt^2 + g_{ik}\, dx^i dx^k. \qquad (1)$$

Für festes t ist $-g_{ik}dx^i dx^k$ die induzierte Riemannsche Metrik der Hyperfläche $t=\mathrm{const}$. Wir nehmen nicht mehr an, dass die Zeitschnitte homogen sind. In diesen Koordinaten ist die Vierergeschwindigkeit

$$u = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \varphi := \sqrt{g_{00}} \qquad (2)$$

1. Verallgemeinerte Poisson-Gleichung

Nun berechnen wir als erstes $Ric(u,u)$. Dazu führen wir eine adaptierte orthonormierte Basis θ^μ von 1-Formen ein, wobei

$$\theta^0 = \varphi\, dt . \tag{3}$$

Ein Querstrich bezeichne immer Grössen für die Hyperflächen $t = const$. Z.B. sei $\bar{\Delta}$ der Laplace-Operator mit der induzierten Metrik auf $t = const$.

Aufgrund der Gauss-Formeln (siehe Anhang G, Gl. (3), (7) und (8)) gilt:

$$\begin{aligned} \omega^i{}_j &= \bar{\omega}^i{}_j + f^i{}_j\, \theta^0 , \quad f^i{}_j = -f^j{}_i \\ \omega^0{}_i &= K_{ij}\, \theta^j + c_i \theta^0 , \quad K_{ij} = K_{ji} : \text{2. Fundamentalform.} \end{aligned} \tag{4}$$

Es wird sich zeigen, dass wir für $Ric(u,u)$ die Grössen $f^i{}_j$ nicht zu kennen brauchen. Die c_i ergeben sich aus der 1. Strukturgleichung:

$$d\theta^0 = \frac{1}{\varphi} \varphi_{,i}\, \theta^i \wedge \theta^0 = -\omega^0{}_i \wedge \theta^i = -\underbrace{K_{ij}\, \theta^j \wedge \theta^i}_{0} - c_i\, \theta^0 \wedge \theta^i$$

zu $c_i = \frac{1}{\varphi} \varphi_{,i}$, also gilt

$$\boxed{\omega^0{}_i = K_{ij}\, \theta^j + \frac{1}{\varphi} \varphi_{,i}\, \theta^0 = \omega^i{}_0 .} \tag{5}$$

Nun berechnen wir $\Omega^i{}_0$. Zunächst ist nach (4) und (5)

$$\Omega^i{}_0 = d\omega^i{}_0 + \omega^i{}_j \wedge \omega^j{}_0 = d(K_{ij}\, \theta^j) + d\left(\frac{1}{\varphi} \varphi_{,i}\, \theta^0\right) +$$

$$+\,\bar\omega^i{}_j \wedge \left(K_{jl}\theta^l + \frac{1}{\varphi}\varphi_{,j}\theta^0\right) + f^i{}_j\,\theta^0 \wedge \left(K_{jl}\theta^l + \frac{1}{\varphi}\varphi_{,j}\theta^0\right)$$

Wir benötigen

$$d(K_{ij}\theta^j) = dK_{ij}\wedge\theta^j + K_{ij}\,d\theta^j$$

$$dK_{ij} = \bar d K_{ij} + \varphi^{-1}\partial_t K_{ij}\,\theta^0$$

$$d\theta^j = -\omega^j{}_\alpha \wedge \theta^\alpha = -\bar\omega^j{}_l \wedge \theta^l - \omega^j{}_0 \wedge \theta^0$$

$$= -\omega^j{}_l \wedge \theta^l - K_{jl}\,\theta^l \wedge \theta^0.$$

trägt nicht zu R_{00} bei

$\bar\omega^j{}_l + f^j{}_l\theta^0$

Eingesetzt gibt

$$\Omega^i{}_0 = \bar d K_{ij}\wedge\theta^j + \varphi^{-1}\partial_t K_{ij}\,\theta^0\wedge\theta^j - K_{ij}\left(\omega^j{}_l\wedge\theta^l + K_{jl}\,\theta^l\wedge\theta^0\right)$$

$$+\,\bar\omega^i{}_j\wedge K_{jl}\theta^l + f^i{}_j K_{jl}\,\theta^0\wedge\theta^l + \bar\omega^i{}_j\,\frac{1}{\varphi}\varphi_{,j}\wedge\theta^0$$

$$+\,\underbrace{d\left(\frac{1}{\varphi}\varphi_{,i}\right)\wedge\theta^0 + \varphi^{-1}\varphi_{,i}\,\varphi^{-1}\varphi_{,j}\,\theta^j\wedge\theta^0}_{\varphi^{-1}\varphi_{,ij}\,\theta^j\wedge\theta^0}.$$

$$\frac{1}{\varphi}\varphi^{\|i}{}_{\|j}\,\theta^j\wedge\theta^0$$

Der Doppelstrich bedeutet die kovariante Ableitung mit der induzierten Metrik.

Aus $\Omega^i{}_0 = \frac{1}{2}R^i{}_{0\alpha\beta}\,\theta^\alpha\wedge\theta^\beta$ folgt, dass $R_{00} = \sum_i$ (Koeff. von $\theta^i\wedge\theta^0$ in $\Omega^i{}_0$), d.h., wegen $K_{ij}f^i{}_j = 0$,

$$R_{00} = \varphi^{-1}\Delta\varphi - K_{ij}K_{ji} - \varphi^{-1}\partial_t K_{ii}.$$

Es sei $K = (K^i{}_j) = -(K_{ij})$ die Weingarten-Abbildung, dann ist also

$$\boxed{\mathrm{Ric}(u,u) = \varphi^{-1}\bar{\Delta}\varphi - \mathrm{Sp}\,K^2 + \varphi^{-1}\partial_t\,\mathrm{Sp}\,K} \qquad (6)$$

Beachte, dass nach (2)

$$\mathrm{Ric}(u,u) = \mathrm{Ric}\left(\frac{1}{\varphi}\partial_t, \frac{1}{\varphi}\partial_t\right) = \frac{1}{g_{00}} R_{00} = g^{00}R_{00} = R^0{}_0 .$$

Mit den Einsteinschen Feldgleichungen erhalten wir deshalb

$$\varphi^{-1}\bar{\Delta}\varphi - \mathrm{Sp}\,K^2 + \varphi^{-1}\partial_t\,\mathrm{Sp}\,K = 8\pi G\left[T(u,u) - \frac{1}{2}T\right]. \qquad (7)$$

Daneben gilt noch (siehe Anhang G, Gl. (22), oder [NS1, p. 163])

$$G(u,u) = \frac{1}{2}\bar{R} - \frac{1}{2}\left[\mathrm{Sp}\,K^2 - (\mathrm{Sp}\,K)^2\right], \qquad (8)$$

oder mit den Feldgleichungen

$$\bar{R} - \mathrm{Sp}\,K^2 + (\mathrm{Sp}\,K)^2 = 16\pi G\, T(u,u). \qquad (9)$$

Wir beachten noch $\mathrm{div}\,u = \mathrm{Spur}(X \longrightarrow \nabla_X u)$. Da $\nabla_X u = \omega^i{}_0(X)e_i$, ist

$$\mathrm{div}\,u = \sum_i \omega^i{}_0(e_i) = K_{ij}\,\theta^j(e_i) = -\mathrm{Sp}\,K,$$

d.h.

$$\mathrm{div}\,u = -\mathrm{Sp}\,K. \qquad (10)$$

Dies haben wir bereits in Anhang B festgestellt (Gl. (B.19)). Dort wurde auch die Beziehung $K_{ij} = -\theta_{ij}$ gezeigt (Gl. (B.18)).

Schliesslich berechnen wir die Änderung eines mitbewegten Volumens. Die Volumenform ω_t der Fläche $t = \text{const}$ bezüglich der induzierten Metrik ist

$$\omega_t = i_u \eta \upharpoonright \text{Tangentialraum von } \{t = \text{const}\}. \tag{11}$$

Ein mitbewegtes 3-dim. Gebiet D_t hat das Volumen

$$|D_t| = \int_{D_t} \omega_t . \tag{12}$$

Nun gilt*)

$$\frac{d}{dt} |D_t| = \int_{D_t} L_{\gamma_t} \eta = \int_{D_t} (\varphi \operatorname{div} u)\, \omega_t ,$$

denn

$$L_{\gamma_t} i_u \eta = i_{\gamma_t} \underbrace{d\, i_u \eta}_{L_u \eta = (\operatorname{div} u)\eta} = \operatorname{div} u \; i_{\gamma_t} \eta = (\operatorname{div} u)\, \varphi \, i_u \eta$$

$$= \varphi (\operatorname{div} u)\, \omega_t .$$

Mit (10) erhalten wir

$$\boxed{\frac{d}{dt} |D_t| = - \int_{D_t} \varphi (\operatorname{Sp} K)\, \omega_t .} \tag{13}$$

Aus $\operatorname{Sp} K < 0$ folgt also $\frac{d}{dt} |D_t| > 0$.

* * *

---

*) Siehe auch [MS, Vol. IV, p. 420].

2. Inkohärente Staubmodelle

Nun betrachten wir inkohärenten Staub. Dann ist die Strömung u geodätisch und folglich $\varphi \equiv 1$. Aus den Gl. (7) und (9) wird dann

$$\partial_t \, Sp\, K = 4\pi G \rho + Sp\, K^2 \tag{14}$$

$$\bar{R} - Sp\, K^2 + (Sp\, K)^2 = 16\pi G \rho\,. \tag{15}$$

Aus (14) folgt

$$\partial_t \, Sp\, K > Sp\, K^2$$

und damit wie in (A.38)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{Sp\, K}\right) \leq -\frac{1}{3}}\,, \tag{16}$$

obschon die räumlichen Schnitte nicht homogen zu sein brauchen. Wieder können wir schliessen, dass die Volumenexpansionsrate (siehe Gl. (13)) vor oder nach endlicher Zeit divergiert.

Für Staub wird aus (A.26) die Kontinuitätsgl.

$$\nabla_u \rho + \rho \, \mathrm{div}\, u = 0\,,$$

oder nach (10)

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho\,(Sp\, K)\,. \tag{17}$$

Da $\partial_t \, Sp\, K > Sp\, K^2$ folgt aus der letzten Gleichung, dass mit $Sp\, K \to \infty$ auch die Dichte gegen ∞ strebt. Diese <u>physikalische Singularität</u> entwickelt sich natürlich nur, wenn sich die Mannigfaltigkeit in t genügend ausdehnen lässt.

Wir berechnen für ein Staubmodell noch die 2. Ableitung von $|D_t|$. Nach (13) und der Herleitung dieser Gleichung folgt

$$\frac{d^2}{dt^2}|D_t| = -\int_{D_t} \partial_t(\mathrm{Sp}\,K)\,\omega_t + \int_{D_t} (\mathrm{Sp}\,K)^2\,\omega_t$$

und damit nach (14) und (15)

$$\frac{d^2}{dt^2}|D_t| = 12\pi G \int_{D_t} \rho\,\omega_t - \int_{D_t} \bar{R}\,\omega_t$$

Nun ist

$$M_t := \int_{D_t} \rho\,\omega_t$$

die Gesamtmasse in D_t. Wir erhalten somit

$$\frac{d^2}{dt^2}|D_t| = 12\pi G\, M_t - \int_{D_t} \bar{R}\,\omega_t \tag{18}$$

Darin bremst der letzte Term für $\bar{R} > 0$.
Folgt

$$\frac{d^2}{dt^2}|D_t| < 0 \quad \text{falls } \bar{R} > 12\pi G\rho. \tag{19}$$

Übungsaufgabe: Spezialisiere die Gl. (7) und (9) auf die Friedmann-Modelle:

$$(7):\quad 3\ddot{a} = -4\pi G(\rho+3p)\,a\,, \quad (9):\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{20}$$

---

3. Unmöglichkeit eines statischen Universums

Zunächst benötigen wir das folgende

Lemma: Für eine statische Lösung einer idealen Flüssigkeit mit Killingfeld ξ ist ξ parallel zum Geschwindigkeitsfeld u.

Beweis: Aus der Killinggleichung $\xi_{(\alpha;\beta)}=0$ und $\xi_{[\alpha;\beta}\xi_{\gamma]}=0$ folgt

$$0=\left(\xi_{[\alpha;\beta}\xi_{\gamma]}\right)^{;\gamma}=\frac{1}{3}\left(\xi_{\alpha;\beta}\xi_\gamma+\xi_{\beta;\gamma}\xi_\alpha+\xi_{\gamma;\alpha}\xi_\beta\right)^{;\gamma}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\xi_{\alpha;\beta\gamma}\xi^\gamma+\xi_{\beta;\gamma}{}^{;\gamma}\xi_\alpha+\underline{\xi_{\beta;\gamma}\xi_\alpha{}^{;\gamma}}+\xi_{\gamma;\alpha}{}^{;\gamma}\xi_\beta+\underline{\xi_{\gamma;\alpha}\xi_\beta{}^{;\gamma}}\right) \qquad (21)$$

Die unterstrichenen Terme addieren sich zu Null.

Nun benutzen wir, dass für ein Killingfeld Folgendes gilt

$$\boxed{\xi_{\mu;\alpha\beta}=R_{\lambda\beta\alpha\mu}\,\xi^\lambda}\,, \qquad (22)$$

was man folgendermassen einsieht. Für ein beliebiges Vektorfeld ξ gilt

$$\xi_{\sigma;\rho\mu}-\xi_{\sigma;\mu\rho}=R^\lambda{}_{\sigma\rho\mu}\,\xi_\lambda \qquad (23)$$

Dazu addieren wir die beiden zyklischen Vertauschungen und benutzen die 1. Bianchi-Identität, mit dem Resultat

$$\xi_{\sigma;\rho\mu}-\xi_{\sigma;\mu\rho}+\xi_{\rho;\mu\sigma}-\xi_{\rho;\sigma\mu}+\xi_{\mu;\sigma\rho}-\xi_{\mu;\rho\sigma}=0$$

Für ein Killingfeld ξ $(\xi_{\mu;\nu}+\xi_{\nu;\mu}=0)$ wird daraus

$$\xi_{\sigma;\rho\mu}-\xi_{\sigma;\mu\rho}-\xi_{\mu;\rho\sigma}=0 \qquad (24)$$

Setzen wir dies in (23) ein, so ergibt sich die Behauptung (22).

Benutzen wir (22) in (21), so erhalten wir

$$R_{\lambda\gamma\beta\alpha}\xi^\lambda\xi^\gamma + R_\lambda{}^\gamma{}_{\alpha\gamma}\,\xi^\lambda\xi_\beta + R_\lambda{}^\gamma{}_{\gamma\beta}\,\xi^\lambda\xi_\alpha = 0$$

Der erste Term verschwindet und die andern geben Ricci-Komponenten:

$$0 = \xi^\lambda R_{\lambda[\alpha}\xi_{\beta]} = 8\pi G\,\xi^\lambda\left(T_{\lambda[\alpha} - \tfrac{1}{2}g_{\lambda[\alpha}T\right)\xi_{\beta]}$$

$$= 8\pi G\,\xi^\lambda\left[(\rho+p)u_\lambda u_{[\alpha} + \tfrac{1}{2}(\rho-p)g_{\lambda[\alpha}\right]\xi_{\beta]}$$

Der letzte Term verschwindet trivialerweise und wir schliessen auf $u_{[\alpha}\xi_{\beta]} = 0$, d.h. $u \propto \xi$. $\square$

<u>Satz</u>: Für inkohärenten Staub gibt es keine statischen Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen mit $\Lambda = 0$.

<u>1. Beweis des Satzes</u>: Nach dem Lemma ist u wirbelfrei und wir erhalten aus (14) für ein statisches Universum die unerfüllbare Bedingung:

$$4\pi G\rho + Sp(K^2) = 0. \;\square \tag{25}$$

<u>2. Beweis des Satzes</u>:

Aus der Wirbelfreiheit ($\omega_{\alpha\beta} = 0$) und der Raychaudhuri-Gleichung (B.28) folgt, wegen $\nabla_u\theta \propto L_\xi\theta = 0$,

$$Ric(u,u) = -\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{3}\theta^2 + div(\nabla_u u)$$

$$= 8\pi G\left(T(u,u) - \tfrac{1}{2}T\right). \tag{26}$$

Für $p=0$ ist $\nabla_u u = 0$ und (26) impliziert

$$-\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\theta^2 = 4\pi\rho\,, \tag{27}$$

was für positive ρ keine Lösung hat. □

<u>Ergänzung</u>

Betrachten wir allgemeiner eine ideale Flüssigkeit, so ist die 4er-Geschwindigkeit für ein statisches Universum nach dem Lemma immer noch wirbelfrei und wir erhalten deshalb nach (7)

$$\varphi^{-1}\Delta\varphi - \mathrm{Sp}\,K^2 = 4\pi G(\rho+3p). \tag{28}$$

Nehmen wir deshalb <u>zusätzlich</u> an, dass die räumlichen Schnitte <u>homogen</u> sind, so ist $\Delta\varphi = 0$, und die resultierende Bedingung

$$-\mathrm{Sp}\,K^2 = 4\pi G(\rho+3p)$$

lässt sich für $\rho+3p>0$ (starke Energiebedingung) nicht erfüllen. Man beachte, dass für diese Schlussfolgerung keine Isotropie angenommen wurde.

<u>Übungsaufgabe</u>: Beweise diese Ergänzung ähnlich wie im 2. Beweis des obigen Satzes.

---

* * *

Anhang D. Kosmologische Singularitäten

Die Friedmann-Modelle haben alle Singularitäten in der Vergangenheit und für $k=1$ auch in der Zukunft. Für diese hochsymmetrischen Modelle ist das nicht erstaunlich. Interessant ist aber die Frage, ob dieses singuläre Verhalten generisch ist, ob also z.B. bei kleinen Abweichungen von der Homogenität und Isotropie die Singularitäten nicht verschwinden.

Die Singularitätstheoreme der ART zeigen, dass Singularitäten in kosmologischen Lösungen und beim Gravitationskollaps tatsächlich generisch auftreten, falls der Energie-Impulstensor physikalisch vernünftige Positivitätseigenschaften hat. Diese Theoreme machen allerdings über die physikalische Natur der Singularitäten keine näheren Aussagen. Sie sichern lediglich die Existenz von geodätisch unvollständigen Weltlinien.

1. Was ist eine Singularität?

Leider gibt es auf diese Frage keine allseitig befriedigende Antwort. Es ist aber üblich geworden, eine Lorentzmannigfaltigkeit <u>singulär</u> zu nennen, wenn sie <u>zeitartig oder lichtartig geodätisch unvollständig</u> ist, d.h., wenn nicht jede zeitartige oder lichtartige geodätische Linie für beliebig grosse Affinparameter fortgesetzt werden kann. Dies ist natürlich nur eine interessante Eigenschaft, wenn die Mannigfaltigkeit nicht ausdehnbar ist. Dann gibt es wenigstens ein Teilchen oder ein Photon, das nur für eine endliche "Zeit" existieren kann oder nur für eine endliche Zeit existiert hat. Dies kann aber physikalisch beliebig harmlos

Lösung der Übung in Anhang D

Wir konstruieren eine zeitartige Geodäte, bei der $x+t$ nach endlicher Eigenzeit unendlich wird.

Sei $u = t - x$, $v = t + x$, so wird die Lagrange-Funktion für die Bewegung

$$L = -\frac{h}{2}\dot{v}^2 + \dot{u}\dot{v}.$$

Dann ist

$$-\frac{h}{2}\dot{v}^2 + \dot{u}\dot{v} = 1, \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} = h\dot{v} - \dot{u} = \text{const}.$$

Wir müssen also

$$\dot{u} = \sqrt{p^2 + 2h}, \quad \dot{v} = \frac{1}{h}(p + \dot{u}) = \frac{2}{\dot{u} - p}$$

integrieren. Ist $p^2 = \lambda$ wird

$$\dot{u} = p \cos^2 u \implies ps = \operatorname{tg} u \implies \dot{u} = \frac{p}{p^2 s^2 + 1} \implies$$

$$\dot{v} = -\frac{2}{p}\left(1 + \frac{1}{p^2 s^2}\right) \implies v = -\frac{2s}{p} + \frac{2}{sp^3} + \text{const}.$$

Also wird $v = t + x$ für $s = 0$ unendlich!

Anschauliche Erklärung: Bei geeigneter Anfangsbed. wird ein Teilchen wie bei einem Linearbeschleuniger von der Welle mitgespült und nahezu auf Lichtgeschwindigkeit gebracht. Dadurch verrinnt seine Eigenzeit immer träger und kommt nie über einen endlichen Wert.

sein, wie etwa das folgende Beispiel zeigt. Die Lorentzmannigfaltigkeit (M,g) sei konform zum Minkowski-Raum $(\mathbb{R}^4,\eta)$, d.h. $g=\Omega^2\eta$. Dabei wählen wir den konformen Faktor Ω sphärisch symmetrisch. Ferner sei $\Omega=1$ für $r>1$ und $\Omega(r=0,t)$ verschwinde für $t\to\infty$ genügend rasch, dass die zeitartige Geodäte $\{r=0\}$ unvollständig wird. Alle anderen Geodäten sind in diesem Beispiel aber vollständig!

Übungsaufgabe: Betrachte über $\mathbb{R}^4$ die Metrik

$$g=\left(1-\frac{h}{2}\right)dt^2-\left(1+\frac{h}{2}\right)dx^2-h\,dx\,dt-(dy^2+dz^2)$$

mit

$$h=\frac{\lambda}{2}\left[\cos^4(t-x)-1\right],\quad \lambda\in(0,2),$$

welche für kleine λ eine schwache Gravitationswelle darstellt, die über den flachen Raum streicht. Zeige, dass diese Lorentzmannigfaltigkeit sogar für beliebig kleines λ nicht zeitartig vollständig ist.

---

2. Singularitätstheoreme

Im folgenden zitieren wir ohne Beweise einige Singularitätstheoreme. Eine gute Einführung in diesen Gegenstand, mit einer Darlegung der wesentlichen Beweisschritte, gibt [RW, Kap. 9]; für vollständige Beweise wird jeweils auf die entsprechenden Stellen in [HE] hingewiesen.

Eine wichtige Bedingung in diesen Theoremen betrifft die Grösse $Ric(u,u)$ für zeitartige normierte Vektoren u (in der Raychaudhuri-Gleichung (3.28)). Aufgrund der Feldgleichungen ist

$$\mathrm{Ric}(u,u) = 8\pi G\left[T(u,u) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,T\right]. \qquad (\Lambda = 0!)$$

Also ist $\mathrm{Ric}(u,u) \geq 0$ falls die sog. starke Energiebedingung

$$\boxed{T(u,u) \geq \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,T} \tag{1}$$

erfüllt ist. Für makroskopische Materie ist dies eine sehr vernünftige Annahme. Um dies zu sehen, bemerken wir, dass sich die beiden symmetrischen Bilinearformen T und g generisch simultan diagonalisieren lassen. Es gilt nämlich der Satz[1]: Ist $T(u,u)+g(u,u) \neq 0$ für $u \neq 0$, dann lassen sich T und g simultan diagonalisieren.

Da g ausserdem indefinit ist, gibt es dann eine Basis $\{e_\mu\}$ mit $g = e_0 \otimes e_0 - \sum_i e_i \otimes e_i$ und

$$\left(T(e_\mu, e_\nu)\right) = \begin{pmatrix} \rho & & & 0 \\ & p_1 & & \\ & & p_2 & \\ 0 & & & p_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

(vgl. Greub[1], p 277f). Die starke Energiebedingung bedeutet für $u = u^\mu e_\mu$, $(u^0)^2 - \sum (u^i)^2 = 1$,

$$\rho \underbrace{(u^0)^2}_{1+\sum (u^i)^2} + \sum p_i (u^i)^2 - \tfrac{1}{2}\left(\rho - \sum p_i\right) \geq 0,$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\left(\rho + \sum p_i\right) + \sum (\rho + p_i)(u^i)^2 \geq 0 \text{ für alle } u^i.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\rho + p_i \geq 0, \quad \rho + \sum p_i \geq 0, \tag{3}$$

1) Für einen Beweis siehe z.B. W. Greub: "Linear Algebra", Springer-Verlag, p. 273.

was erfüllt ist, falls $\rho \geq 0$ und keine negativen Drucke (Spannungen) von der Grösse ρ existieren.

Wir zitieren nun zwei wichtige Singularitätstheoreme, welche wir anschliessend anwenden werden.

<u>Theorem 1</u> (Hawking und Penrose)

Es sei (M,g) eine Raumzeit-Mannigfaltigkeit, welche folgende Bedingungen erfüllt.

(1) $Ric(u,u) \geq 0$ für jeden nichtraumartigen Vektor u. (Dies ist erfüllt, wenn T der starken Energiebedingung genügt.)

(2) Für jede zeitartige Geodäte gilt es wenigstens in einem Punkt $R_{\mu\nu\sigma\rho} u^\mu u^\rho \neq 0$, wenn u den Tangentialvektor an die Geodäte bezeichnet und für Nullgeodäten gilt wenigstens in einem Punkt $u_{[\alpha} R_{\beta]\gamma\delta[\varepsilon} u_{\mu]} u^\gamma u^\delta \neq 0$.

(3) Es gibt keine geschlossenen zeitartigen Kurven.

(4) Wenigstens eine der folgenden drei Bedingungen ist erfüllt:

(i) (M,g) hat eine kompakte achronale[2] Menge ohne Rand. [Diese Bedingung besagt, dass (M,g) ein geschlossenes Universum ist.]

(ii) (M,g) hat eine gefangene Fläche[3].

(iii) Es gibt einen Punkt $p \in M$ derart, dass die Expansion der zukunftsgerichteten (oder vergangenheitsgerichteten) Nullgeodäten, welche von p ausgehen, längs jeder Geodäten dieser

Kongruenz negativ wird.

Unter diesen Bedingungen gibt es wenigstens eine unvollständige zeitartige oder lichtartige Geodäte.

Theorem 2 (Hawking)

Es sei (M,g) eine starke kausale[4] Raumzeit mit $Ric(u,u) \geq 0$ für alle zeitartigen u. Ferner gebe es in einem Punkt $p \in M$ einen vergangenheitsorientierten zeitartigen Einheitsvektor v und eine positive Konstante b derart, dass folgendes gilt: Ist u das tangentiale Einheitsfeld an alle vergangenheitsorientierten zeitartigen Geodäten durch p, dann wird auf jeder dieser Geodäten die Expansion $\theta = \nabla \cdot u$ dieser geodätischen Schar kleiner als $-3c/b$ innerhalb einer Distanz b/c von p, wobei $c = (u,v)$ ist.

Unter diesen Voraussetzungen gibt es eine zeitartige oder lichtartige Geodäte durch p, welche vergangenheitsunvollständig ist.

---

2) Eine Menge S ist *achronal*, falls $I^+(S) \cap S = \emptyset$, wobei $I^+(S)$ die chronologische Zukunft von S bezeichnet:

$$I^+(p) = \{ q \in M \mid \text{existiert zukunftsorientierte Kurve } \gamma \text{ mit } \gamma(0)=p, \gamma(1)=q \}$$

$$I^+(S) = \bigcup_{p \in S} I^+(p).$$

3) Dies ist eine kompakte zweidimensionale Untermannigfaltigkeit T mit der Eigenschaft, dass die Expansion θ sowohl für die einlaufenden als auch für die auslaufenden zukunftsorientierten Nullgeodäten senkrecht zu T überall auf T negativ ist. (Für die Definition von θ für Kongruenzen von Nullgeodäten, siehe z.B. [RW, p. 222].)

3. Anwendung der Singularitätstheoreme auf die Kosmologie

Zunächst leiten wir eine hinreichende Bedingung ab, unter welcher die letzte Voraussetzung in Theorem 2 erfüllt ist.

Die Expansion θ der vergangenheitsorientierten zeitartigen Geodäten durch p erfüllt die Raychaudhuri-Gleichung (B.28) mit $\nabla_u u = 0$ und $\omega_{\alpha\beta} = 0$. Die (in p singuläre) geodätische Kongruenz ist tatsächlich wirbelfrei, wie wir zunächst zeigen wollen. Zu diesem Zweck benötigen wir das folgende

<u>Lemma 1</u>: Die Kongruenz von zeitartigen Geodäten durch einen Punkt $p \in M$ ist hyperflächenorthogonal innerhalb einer konvexen normalen Umgebung von p. Die orthogonalen Hyperflächen haben konstanten geodätischen Abstand längs den Geodäten.

<u>Beweis</u>: Es sei $X(t)$ eine Kurve in $T_p(M)$ mit $g(X(t), X(t)) = 1$. Es genügt folgendes zu zeigen: Die Kurven $\lambda(t) = \exp_p(s_0 X(t))$ ($s_0 = \text{konst.}$) sind in einer Umgebung von p orthogonal zu den zeitartigen Geodäten $\gamma(s) = \exp_p(s X(t_0))$ ($t_0 = \text{konst.}$). Für die zweidimensionalen Flächen $\alpha(s,t) = \exp_p(s X(t))$ ist also folgendes zu zeigen (vgl. Fig. 1): $g(\alpha_* \frac{\partial}{\partial s}, \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}) = 0$.

---

4) Eine Raumzeit (M,g) ist <u>stark kausal</u>, falls es zu jedem $p \in M$ und jeder Umgebung U von p eine Umgebung V von p gibt, welche in U enthalten ist und die Eigenschaft hat, dass keine kausale Kurve (nichtraumartige Tangentialvektoren) V mehr als einmal schneidet.

Falls also die starke Kausalität bei $p \in M$ verletzt ist, dann gibt es kausale Kurven in der Nähe von p, welche beliebig nahe zurückkommen.

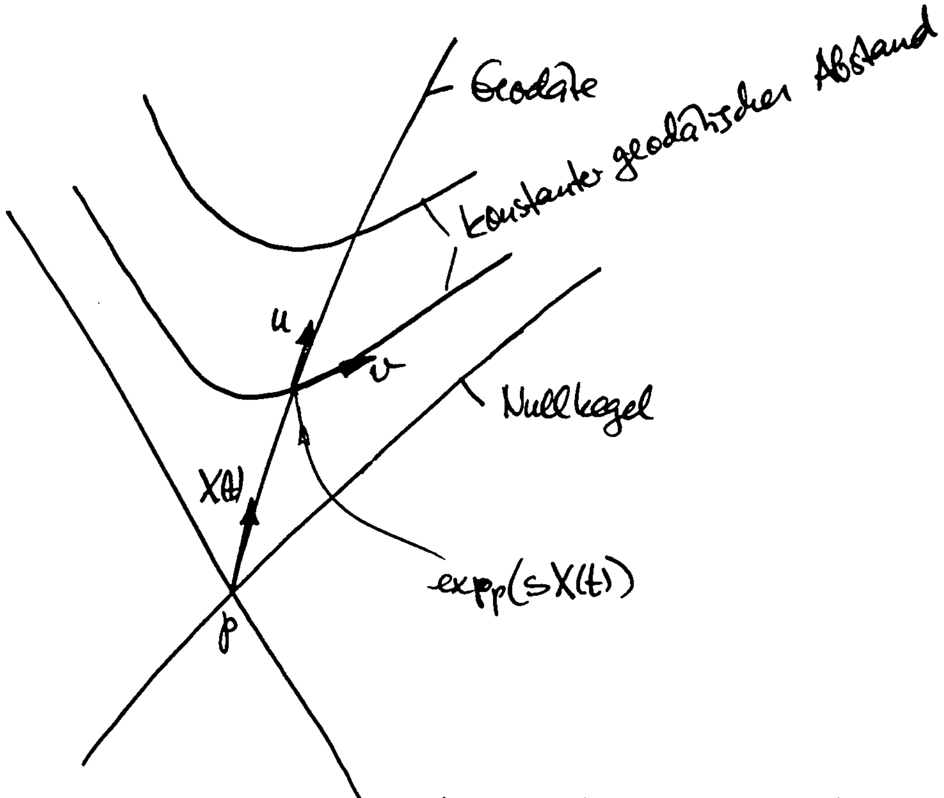


Fig. D1. In einer normalen Umgebung sind Flächen von konstantem Abstand von p orthogonal zu den Geodäten durch p.

Mit den Bezeichnungen $u = \alpha_* \frac{\partial}{\partial s}$, $v = \alpha_* \frac{\partial}{\partial t}$ ist $[u,v]=0$ und folglich $\nabla_u v = \nabla_v u$. Also gilt

$$u\langle u,v\rangle = \underbrace{\langle\nabla_u u, v\rangle}_{0} + \langle u, \underbrace{\nabla_u v}_{\nabla_v u}\rangle = \frac{1}{2} v\langle u,u\rangle = 0 .$$

Deshalb ist $\langle u,v\rangle$ unabhängig von s. Für $s=0$ ~~ist~~ aber $v=0$. Dies zeigt, dass $\langle u,v\rangle$ identisch gleich Null ist. □

Nach (dem trivialen Teil des Satzes von) Frobenius ist deshalb $u^\flat \wedge du^\flat = 0$ und dies ist nach (B.20) äquivalent zu $\omega_{\alpha\beta}=0$.

Aus der Raychaudhuri-Gleichung (B.28) folgt damit

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -Ric(u,u) - \sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\theta^2. \qquad (4)$$

Nun sei v – wie in Theorem 2 – ein vergangenheits-orientierter Einheitsvektor in einem Punkt p und $c = (v, u)$ (also $c \geq 1$).

Die Bedingung $Ric(u,u) \geq 0$ in (4) gibt

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{1}{3}\theta^2 \leq 0 ,$$

oder

$$-\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\theta}\right) + \frac{1}{3} \leq 0. \qquad (5)$$

Diese Ungleichung integrieren wir zwischen $\tau = 0$ (p) und τ:

$$-\frac{1}{\theta(\tau)} + \frac{1}{\theta(0)} + \frac{1}{3}\tau \leq 0.$$

Nun repräsentiere p uns zur jetzigen Zeit. Da $\theta(0) > 0$ ist, so folgt

$$\theta(\tau) \leq \frac{3}{\tau}. \qquad (6)$$

Aus (4) entnehmen wir

$$\frac{d\theta}{d\tau} \leq -Ric(u,u). \qquad (7)$$

Integration dieser Ungleichung zwischen τ_0 und τ_1 gibt

$$\theta(\tau_1) - \theta(\tau_0) \leq -\int_{\tau_0}^{\tau_1} Ric(u,u)\,d\tau.$$

Benutzen wir darin (6) so kommt

$$\theta(\tau_1) \leq \frac{3}{\tau_0} - \int_{\tau_0}^{\tau_1} Ric(u,u)\,d\tau. \qquad (8)$$

Lemma 2: Die letzte Bedingung in Theorem 2 ist erfüllt, falls folgendes gilt: Es existieren R_0, R_1, mit $R_1 > R_0$, derart, dass

$$\int_{R_0/c}^{R_1/c} Ric(u,u)\,d\tau > c\left(\frac{3}{R_0} + \varepsilon\right), \quad \varepsilon > 0. \qquad (9)$$

Beweis: Aus (8) schliessen wir

$$\theta(R_1/c) \le \frac{3}{R_0/c} - c\left(\frac{3}{R_0} + \varepsilon\right) < -\varepsilon c.$$

Falls also $b = \mathrm{Max}(R_1, \frac{3}{\varepsilon})$, dann wird θ innerhalb einer Distanz von weniger als b/c kleiner als $-3c/b$. □

Wir schreiben die hinreichende Bedingung (9) noch etwas anders. Wählen wir als affinen Parameter $\lambda = c\tau$ und sei K das zugehörige Tangentialfeld an die vergangenheitsorientierten Geodäten durch p, $K = \frac{1}{c} u$, dann lautet (9)

$$\boxed{\frac{1}{3} R_0 \int_{R_0}^{R_1} Ric(K,K)\, d\lambda > 1 + \frac{1}{3} R_0 \varepsilon.} \qquad (10)$$

Beachte auch $(K, v)_p = 1$.

Nun zeigen wir, dass (10) für das Universum erfüllt ist, wenn dieses bis zurück zur Rekombinationszeit in guter Näherung durch ein Friedmann-Modell beschrieben werden kann.

Für ein Friedmann-Modell wählen wir $v = -\frac{\partial}{\partial t}$. Längs einer vergangenheitsorientierten Geodäten durch p gilt ($\nabla_K K = 0$)

$$\frac{d}{d\lambda}(v, K) = (\nabla_K v, K).$$

Zur Berechnung der rechten Seite benutzen wir § I.4. Es ist $v = -e_0$ und

$$(\nabla_K v, K) = -(\nabla_K e_0, K) = -\underbrace{\omega^i{}_0(K)}_{\frac{\dot a}{a} K^i} (e_i, K) = -\frac{\dot a}{a} K^i K_i$$

$$= -\frac{\dot a}{a}\Big[\underbrace{(k,k)}_{1/c^2} - \underbrace{(k^0)^2}_{(k,v)^2}\Big] = \frac{\dot a}{a}\Big[(k,v)^2 - \frac{1}{c^2}\Big],$$

d.h.

$$\frac{d}{d\lambda}(v,k) = \frac{\dot a}{a}\Big[(v,k)^2 - \frac{1}{c^2}\Big].$$

Falls $\dot a > 0$ folgt daraus $(v,k) \geqslant 1$. Damit gilt

$$(v,k) = -\langle dt, k\rangle = -kt = -\frac{dt}{d\lambda} > 1 .$$

Folglich können wir (10) so schreiben:

$$\frac{1}{3} R_0 \int_{t(R_1)}^{t(R_0)} Ric(k,k) \frac{1}{(v,k)}\, dt > 1 + \frac{1}{3} R_0\, \varepsilon .$$

Da

$$R_0 = \int_{t(R_0)}^{t_p} \frac{1}{(v,k)}\, dt \geqslant t_p - t(R_0)$$

ist also (10) erfüllt, falls t_2, t_3 existieren, mit $t_2 < t_3 < t_p$ (Zeit von p), so dass gilt

$$\frac{t_p - t_3}{3} \int_{t_2}^{t_3} Ric(k,k) \frac{1}{(v,k)}\, dt > 1 . \qquad (11)$$

Aufgrund der Feldgleichungen (mit $\Lambda = 0$) ist

$$Ric(k,k) = 8\pi G\Big[T(k,k) - \frac{1}{2}\frac{1}{c^2} Sp\, T\Big].$$

Aus

$$T = \rho\, \theta^0 \otimes \theta^0 + p\,(\theta^1 \otimes \theta^1 + \theta^2 \otimes \theta^2 + \theta^3 \otimes \theta^3)$$

folgt

$$T(k,k) = \rho\,(v,k)^2 + p \underbrace{\sum (k^i)^2}_{-(k,k)+(k,v)^2} = (\rho+p)(v,k)^2 - p/c^2$$

und $Sp\, T = \rho - 3p$.

Folglich ist

$$\mathrm{Ric}(K,K) = 8\pi G\left[(\rho+p)(v,K)^2 - \tfrac{1}{2}(\rho-p)/c^2\right] \qquad (12)$$

Falls also $p \geq 0$ gilt

$$\mathrm{Ric}(K,K) \geq 4\pi G\,\rho\,(v,K)^2. \qquad (13)$$

Deshalb ist (11) erfüllt, falls [da $(v,K) \geq 1$]

$$\boxed{\frac{t_p - t_3}{3}\int_{t_2}^{t_3} 4\pi G\,\rho\,dt > 1.} \qquad (14)$$

Diskussion von (14)

Wir zeigen nun, dass diese Bedingung für das tatsächliche Universum erfüllt ist, wobei wir t_2 und t_3 grösser als die Rekombinationszeit t_R wählen können.

Wie in Kap. III ausführlich diskutiert wurde, entkoppelte sich die Strahlung von der Materie bei einer Temperatur $T_R \simeq 4000\,K$. Bei etwa der gleichen Temperatur begann auch die Materie über die Strahlung zu dominieren. Für die Berechnung der linken Seite von (14) können wir deshalb die Formeln von § II.1 verwenden:

$$\rho(t)/\rho_0 = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3},$$

$$dt = \frac{1}{H_0}\left[1 - \Omega_0 + \Omega_0\frac{a_0}{a}\right]^{-1/2}\frac{da}{a_0}.$$

Mit $x(t) = a(t)/a_0 = (1+z)^{-1}$ gilt also

$$\int_{t_2}^{t_3}\rho\,dt = \frac{\rho_0}{H_0}\int_{a(t_2)/a_0}^{a(t_3)/a_0} x^{-3}\left[1-\Omega_0+\Omega_0/x\right]^{-1/2}dx,$$

sowie

$$t_0 - t_3 = \frac{1}{H_0} \int_{a(t_3)/a_0}^{1} [1 - \Omega_0 + \Omega_0/x]^{-1/2} dx .$$

Die Ungleichung (14) lautet deshalb

$$\underbrace{\frac{4\pi G}{3} \frac{\rho_0}{H_0^2}}_{\Omega_0/2} \int_{x_3}^{1} [1 - \Omega_0 + \frac{\Omega_0}{x}]^{-1/2} dx \int_{x_2}^{x_3} x^{-3} [1 - \Omega_0 + \frac{\Omega_0}{x}]^{-1/2} dx > 1$$

Zur Illustration betrachten wir den Fall $\Omega_0 = 1$ (Einstein–de Sitter Universum). Wählen wir als Beispiel $x_3 = \frac{1}{2}$, so ergibt sich für x_2 die Bedingung

$$\frac{1}{2} [1 - (\tfrac{1}{2})^{3/2}] [(x_2)^{-3/2} - (\tfrac{1}{2})^{-3/2}] > 1 \quad ,$$

d.h. $x_2 < 0.3$, oder $z_2 > 2.3$. Dies zeigt, dass (14) auf alle Fälle für $z_3 < z_2 < z_R$ erfüllt werden kann.

Eine etwas andere Betrachtung verläuft folgendermassen. Da die 3K-Strahlung thermalisiert ist, muss die optische Tiefe der "kosmischen Photosphäre" mindestens 1 sein.

Nun ist die optische Tiefe von jetzt (t_0) bis zurück zur Zeit t

$$\tau(t) = \int_{t}^{t_0} \varkappa \rho_{gas} dt . \qquad (15)$$

Der wichtigste Beitrag zur Opazität $\varkappa$ kommt von der Thomson-Streuung an intergalaktischen oder prägalaktischen freien Elektronen (vgl. § III.1). Setzen wir die Dichte der freien Elektronen

$$n_e(t) = x \, \frac{\rho(t)}{m_H} , \quad x < 1 \quad ,$$

so ist $(G=c=1)$

$$\varkappa = \times \sigma_T / m_H \leq \frac{6.65}{1.24} \times 10^{27} \text{cm}, \tag{16}$$

also

$$\tau(t) \leq \frac{6.65}{1.24} \times 10^{27} \int_t^{t_0} \rho \, dt \tag{17}$$

(ρ in g/cm^3 und t in cm). Da die Galaxien mit Rotverschiebungen bis zu mindestens 0.3 – entsprechend einer Distanz von etwa 3×10^{27} cm – sehen, muss der Hauptteil zur optischen Tiefe von grösseren Rotverschiebungen herrühren. Wir setzen deshalb $t_3 = t_0 - 3 \times 10^{27}$, d.h. $(t_0 - t_3)/3 = 10^{27}$ cm. Damit können wir die linke Seite von (14) folgendermassen abschätzen

$$4\pi \frac{t_0 - t_3}{3} \int_{t_2}^{t_3} \rho \, dt = 4\pi \times 10^{27} \int_{t_2}^{t_3} \rho \, dt \geq 4\pi \times 10^{27} \frac{1.24}{6.65} \times 10^{-27} \tau(t_2)$$

$$\geq 2\tau(t_2).$$

Die Ungleichung (14) ist also erfüllt falls $\tau(t_2) \geq 0.5$ ist.

Mit Hilfe des Theorems 2 können wir also schliessen, dass das Universum in der <u>Vergangenheit</u> eine "Singularität" hatte.

Auf eine Singularität in der Vergangenheit <u>oder</u> in der Zukunft kann auch mit Hilfe des Theorems 1 geschlossen werden. Dies wird in [HE, §10.1] ausgeführt.

*   *   *

Anhang E. Strahlungstransport

In diesem Anhang entwickeln wir Grundlegendes zum Strahlungstransport und geben am Schluss weiterführende Literaturhinweise. (Einheiten: $\hbar = c = k = 1$)

1. Transportgleichung

Es sei $f(\mathbf{x},\mathbf{k},t)$ die Verteilungsfunktion der Photonen, d.h.

$$dN = f(\mathbf{x},\mathbf{k},t)\, d^3x \; \frac{2\, d^3k}{(2\pi)^3} \qquad (1)$$

sei die Zahl der Photonen im Phasenraumelement $d^3x\, d^3k$ um $(\mathbf{x},\mathbf{k})$ beider Polarisationen. (Wir nehmen an, die Strahlung sei unpolarisiert.) Der Zusammenhang mit der Intensität $I(\mathbf{k}) \equiv I(\omega, \mathbf{n})$, $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{k}}$, der Strahlung ergibt sich aus

$$I(\omega,\mathbf{n})\, d\omega\, d\Omega = \omega f \frac{2}{(2\pi)^3} k^2 dk\, d\Omega$$

zu

$$\boxed{I(\omega,\mathbf{n}) = \frac{2\omega^3}{(2\pi)^3} f(\mathbf{k}).} \qquad (2)$$

Da der Photonimpuls nur bei Wechselwirkung (Streuung) ändern kann, hat die Boltzmann-Gleichung für f die folgende Form ($D_t := \partial_t + \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$):

$$D_t f = \underbrace{-\Lambda(\omega) f}_{\text{Absorption}} + \underbrace{\tilde{\Gamma}(\omega)(1+f)}_{\text{spontane + stimulierte Emission}} + \left(\frac{df}{dt}\right)_{\text{Streuung}} \qquad (3)$$

Das relative Gewicht der spontanen und induzierten Emissionsanteile ist ein Ausdruck einer Einstein-Relation[1]. Für den Faktor $(1+f)$ ist natürlich die Normierung von f in (1) (Besetzungszahlen im $\underline{k}$-Raum) wichtig.

Die 2. Einstein-Beziehung zwischen $\Lambda(\omega)$ und $\Gamma(\omega)$ folgt aus der Zeitumkehr-Invarianz. Betrachten wir Strahlungsübergänge zwischen zwei Zuständen α und β eines Atoms (Moleküls). Die Matrixelemente für die Emission und für die Absorption sind dem Betrage nach aufgrund der T-Invarianz gleich[1].

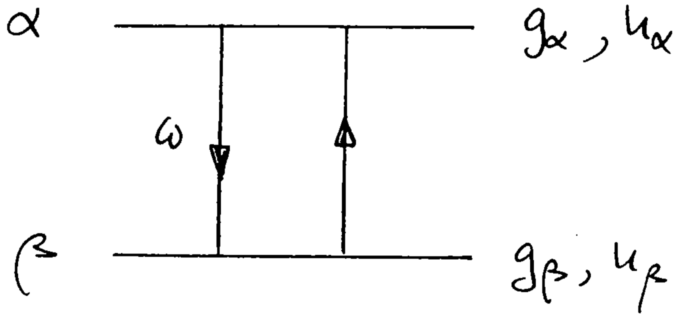


Fig. H.1. Emission und Absorption zwischen zwei Zuständen

Sind die Zustände α und β entartet (Entartungsgrade g_α, g_β) und sind n_α, n_β die Anzahldichten der Atome in den Zuständen α und β, so gilt infolgedessen

$$\frac{\tilde{\Gamma}(\omega)}{\Lambda(\omega)} = \frac{n_\alpha / g_\alpha}{n_\beta / g_\beta} \qquad (4)$$

(α ist das obere Niveau; siehe Fig. 1). Für lokales thermisches

---

1) Für Einzelheiten siehe z.B. das QM II-Skript, Kap. X, oder Landau-Lifschitz, Bd. 4, Kap. V.

Gleichgewicht der Atome (LTE) ist nach Boltzmann

$$\frac{n_\alpha/g_\alpha}{n_\beta/g_\beta} = e^{-\omega/T} . \qquad (5)$$

Dann wird aus der Einstein-Beziehung (4)

$$\frac{\tilde{\Gamma}(\omega)}{\Lambda(\omega)} = e^{-\omega/T} . \qquad (6)$$

Lassen wir im Moment in (3) noch die Streuung weg, so gilt also

$$D_t f = -\alpha(\omega) f + \tilde{\Gamma}(\omega) , \qquad (7)$$

wobei der <u>Absorptionskoeffizient</u> $\alpha(\omega)$ gegeben ist durch

$$\boxed{\alpha(\omega) =} \; \Lambda(\omega)\left(1 - \frac{n_\alpha/g_\alpha}{n_\beta/g_\beta}\right) . \qquad (8)$$

"wirkliche" Absorption $\qquad$ stimulierte Emission

(=> Maseraktivität bei Popul.-Inversion.)

Für LTE gilt speziell

$$\alpha(\omega) = \Lambda(\omega)\left(1 - e^{-\omega/T}\right) . \qquad (9)$$

Zur Kontrolle betrachten wir noch das thermodyn. Gleichgewicht. Dann ist $D_t f = 0$ und aus (7), (9) und (6) folgt

$$f = \frac{\tilde{\Gamma}(\omega)}{\alpha(\omega)} = \frac{e^{-\omega/T}}{1 - e^{-\omega/T}} = \frac{1}{e^{\omega/T} + 1} , \qquad (10)$$

wie es sein soll.

Wir schreiben nun noch (7) auf die Intensität um. Mit (2) ergibt sich

$$\boxed{D_t I = -\alpha(\omega) I + j(\omega)}, \tag{11}$$

wobei der <u>Emissionskoeffizient</u> $j(\omega)$ mit der spontanen Emissionsrate $\Gamma(\omega)$ folgendermassen zusammenhängt:

$$j(\omega) = \frac{2\omega^3}{(2\pi)^3} \tilde{\Gamma}(\omega). \tag{12}$$

(11) ist die gebräuchliche Form der <u>Strahlungstransport-Gleichung</u>.

Wir schreiben (4) und (6) noch auf $\alpha(\omega)$ und $j(\omega)$ um:

$$\frac{j(\omega)}{\alpha(\omega)} \overset{(12),(8),(4)}{=} \frac{2\omega^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\frac{n_\beta/g_\beta}{n_\alpha/g_\alpha} - 1} \overset{(LTE)}{=} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{2\omega^3}{e^{\omega/T} - 1} \equiv B_\omega(T). \tag{13}$$

Dies ist das (verallgemeinerte) <u>Kirchhoff-Gesetz</u>.

Aus (13) und (8) folgt auch

$$\frac{j(\omega)}{\Lambda(\omega)} = \frac{2\omega^3}{(2\pi)^3} \frac{n_\alpha/g_\alpha}{n_\beta/g_\beta} \overset{(LTE)}{=} \frac{2\omega^3}{(2\pi)^3} e^{-\omega/T}. \tag{14}$$

Nach (11) ist die spontan emittierte Energie dE in $dV\,dt\,d\Omega\,d\omega$ gleich $j_\omega dV\,dt\,d\Omega\,d\omega$ und deshalb ist nach (12) die Zahl der spontan emittierten Photonen in $dV\,dt\,d\Omega\,d\omega$ gleich $[2\omega^2/(2\pi)^3]\tilde{\Gamma}(\omega)dV\,dt\,d\Omega\,d\omega$. Dabei beruht der Faktor $2\omega^2/(2\pi)^3$ auf der Beziehung (1), da danach $dN = f\,d^3x\,[2\omega^2/(2\pi)^3]\,d\omega\,d\Omega$ ~~ist~~. Die spektrale Emissionsrate $\Gamma(\omega)$ pro Volumen und Raumwinkel ist also

$$\Gamma(\omega) = \frac{2\omega^2}{(2\pi)^3} \tilde{\Gamma}(\omega) = j(\omega)/\omega. \tag{15}$$

Nach (4) gilt

$$\boxed{\frac{\Gamma(\omega)}{\Lambda(\omega)} = \frac{2\omega^2}{(2\pi)^3}\,\frac{n_\alpha/g_\alpha}{n_\beta/g_\beta} \overset{(LTE)}{=} \frac{2\omega^2}{(2\pi)^3}\,e^{-\omega/T}} \tag{16}$$

Die grundlegende Gl. (11) kann man im LTE nach (13) auch so schreiben:

$$\boxed{D_t I = -\alpha(\omega)\left(I - B_\omega(T)\right)} \tag{17}$$

Wir beachten nun auch noch den Beitrag $\left(\frac{df}{dt}\right)_{St}$ in (3). Dabei nehmen wir der Einfachheit halber an, dass bei der Streuung keine Frequenzänderung stattfindet (Bsp. Thomson-Streuung). (Für Verallgemeinerungen siehe [NS2, p. 216]). Bezeichnet n_s die Anzahldichte der Streuzentren und $\sigma(\underline{k},\underline{k}')$ den Streuquerschnitt für die elastische Streuung $\underline{k} \to \underline{k}'$, so ist

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{Streu.} = n_s \int \sigma_s(\underline{k}',\underline{k})\, f(\underline{k}')\, d\Omega_{k'} - n_s \int \sigma_s(\underline{k},\underline{k}')\, f(\underline{k})\, d\Omega_{k'} . \tag{18}$$

Eigentlich müsste man auch die induzierte Streuung mitnehmen:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{St.} = n_s \left\{ \int \sigma_s(\underline{k}',\underline{k})\, f(\underline{k}')(1+f(\underline{k}))\, d\Omega_{k'} - \int \sigma_s(\underline{k},\underline{k}')\, f(\underline{k})(1+f(\underline{k}'))\, d\Omega_{k'} \right\}$$

Aufgrund der T-Invarianz,

$$\sigma_s(\underline{k},\underline{k}') = \sigma_s(\underline{k}',\underline{k})$$

heben sich aber die induzierten Terme bei Streuung ohne Frequenzänderung weg. (Im allgemeinen ist dies aber nicht der Fall.)

Wir setzen

$$\sigma_s(\underline{k},\underline{k}') = \sigma_s(\omega)\, p(\underline{n},\underline{n}') , \tag{19}$$

mit

$$p(\underline{n},\underline{n}') = p(\underline{n}',\underline{n}) \, , \quad \int p(\underline{n},\underline{n}')\, d\Omega_{\underline{n}'} = 1 \, . \tag{20}$$

Dann ist $\sigma_s(\omega)$ der gesamte Streuquerschnitt. Für elastische Streuung erhalten wir also

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{Streuung} = -n_s \sigma_s(\omega) \left[f(\omega,\underline{n}) - \int p(\underline{n}',\underline{n}) f(\omega,\underline{n}')\, d\Omega_{\underline{n}'} \right] . \tag{21}$$

Wir führen auch den Absorptionsquerschnitt ein durch

$$\Lambda(\omega) = n_a \sigma_a(\omega) \, , \tag{22}$$

wo n_a die Teilchenzahldichte der Absorber ist. Dann ist nach (9) für LTE

$$\alpha(\omega) = n_a \sigma_a(\omega) \left(1 - e^{-\omega/T}\right) . \tag{23}$$

Mit (21) lautet nun die Verallgemeinerung von (11) mit (23)

$$D_t I = -n_a \sigma_a(\omega)\left(1 - e^{-\omega/T}\right) \left[I - B_\omega(T) \right] - n_s \sigma_s(\omega) \left[I - \int p(\underline{n}',\underline{n})\, I(\omega,\underline{n}')\, d\Omega_{\underline{n}'} \right] , \tag{24}$$

wobei nach (13) verwendet wurde. Definieren wir den <u>effektiven Absorptionskoeffizienten</u> $\alpha_e(\omega)$ durch

$$\alpha_e(\omega) = \alpha(\omega) + n_s \sigma_s(\omega) = n_a \sigma_a(\omega)\left(1 - e^{-\omega/T}\right) + n_s \sigma_s(\omega) \tag{25}$$

und die <u>effektive Emissivität</u> gemäss

$$\begin{aligned} j_e(\omega) &= j'(\omega) + n_s \sigma_s(\omega) \int p(\underline{n}',\underline{n})\, I(\omega,\underline{n}')\, d\Omega_{\underline{n}'} \\ &= n_a \sigma_a(\omega)\, e^{-\omega/T} \frac{2\omega^3}{(2\pi)^3} + n_s \sigma_s(\omega) \int p(\underline{n}',\underline{n})\, I(\omega,\underline{n}')\, d\Omega_{\underline{n}'} , \end{aligned} \tag{26}$$

wobei wir in der 2. Zeile (14) und (22) verwendet haben, so können wir für (24) auch schreiben

$$D_t I = -\alpha_e(\omega) I + j_e(\omega). \qquad (27)$$

Ist speziell I isotrop, so heben sich rechts in (27) nach (24) und (26) die Streuterme erwartungsgemäss weg.

2. Thermische Bremsstrahlung

Wir bestimmen zunächst den Wirkungsquerschnitt für Bremsstrahlung:

$$e^- + (Z,A) \longrightarrow e^- + (Z,A) + \gamma .$$

Mit den Notationen in Fig. hat dieser die allgemeine Form*):

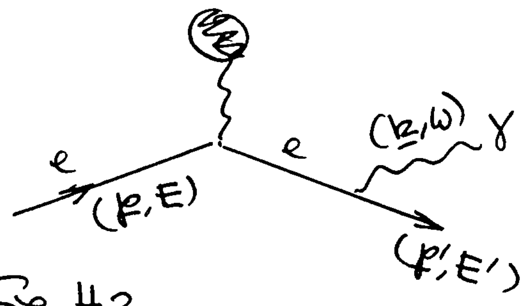


Fig. H2.

$$d\sigma = \frac{e^2 \omega}{2\pi (2\pi)^3 m p} |M|^2 \, d\Omega_{\underline{k}} \, d^3 p' \qquad (28)$$

mit

$$M = {}_{out}\langle p' | e^{-i \underline{k}\cdot\underline{x}} \, \underline{\varepsilon}(\underline{k},\lambda)\cdot \underline{p}_{op} | p \rangle_{in} \qquad (29)$$

Hier sind $|p\rangle_{in}$ und $|p'\rangle_{out}$ die Streuzustände des Elektrons im Coulombfeld des Ions (Z,A). Sie sind so zu normieren,

*) Siehe QM II-Skript, p. 68; oder Landau-Lifschitz, Bd. 4 Kap. V.

dass $\langle p'|p\rangle = (2\pi)^3 \delta^3(p'-p)$ ist.

In der Dipolnäherung könnte man das Matrixelement (29) für die exakten Wellenfunktionen berechnen (siehe Landau-Lifschitz, Bd 4, p. 391). Wir führen hier die Bornsche Näherung – ohne Dipolapproximation – vor. Dazu benutzen wir die Lippman-Schwinger Gleichung (siehe QM I-Skript, § 37.4):

$$|p\rangle_{in} = |p\rangle + \frac{1}{E(p)-H_0+i\varepsilon} U |p\rangle_{in} \tag{30a}$$

$$|p'\rangle_{out} = |p'\rangle + \frac{1}{E(p')-H_0-i\varepsilon} U |p'\rangle_{out}\,, \tag{30b}$$

wobei

$$U(\underline{x}) = -\frac{Ze^2}{|\underline{x}|}\,, \quad |p\rangle = e^{i p\cdot \underline{x}}\,, \tag{31}$$

H_0: kinetische Energie.

Damit gilt bis zur 1. Ordnung in U:

$$M = \langle p'| V \frac{}{E(p)-H_0+i\varepsilon} U |p\rangle + \langle p'| U \frac{}{E(p')-H_0+i\varepsilon} V |p\rangle\,, \tag{32}$$

wobei

$$V = e^{-i\underline{k}\cdot\underline{x}}\, \underline{\varepsilon}(\underline{k},\lambda)\cdot \underbrace{p^{op}}_{-i\underline{\nabla}_x}. \tag{33}$$

Nun führen wir Zwischenzustände $|p_1\rangle$ ein und beachten

$$\langle p_1|V|p\rangle = \int d^3_x\, e^{-ip_1\cdot\underline{x}} e^{-i\underline{k}\cdot\underline{x}} (-i\underline{\nabla})\cdot\underline{\varepsilon}\, e^{ip\cdot\underline{x}}$$

$$= p\cdot\underline{\varepsilon}\,(2\pi)^3 \delta^3(p_1+\underline{k}-p) \tag{34}$$

$$\langle p_1|U|p\rangle = \hat{U}(p_1-p) = -4\pi \frac{Ze^2}{|p_1-p|^2}. \tag{35}$$

($\hat{U}$ ist die Fouriertransformierte von U).

Dies gibt

$$M = \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \Big\{ \langle p' | V | p_1 \rangle \frac{1}{E(p) - E(p_1) + i\varepsilon} \langle p_1 | U | p \rangle \; +$$

$$\langle p' | U | p_1 \rangle \frac{1}{E(p') - E(p_1) + i\varepsilon} \langle p_1 | V | p \rangle \Big\}$$

$$= \frac{(p' + \underline{k}) \cdot \underline{\varepsilon} \; \hat{U}(p' - p + \underline{k})}{E(p) - E(p' + \underline{k}) + i\varepsilon} + \frac{p \cdot \underline{\varepsilon} \; \hat{U}(p' - p + \underline{k})}{E(p') - E(p - \underline{k}) + i\varepsilon} . \qquad (36)$$

Die beiden Terme entsprechen den folgenden zwei Diagrammen:

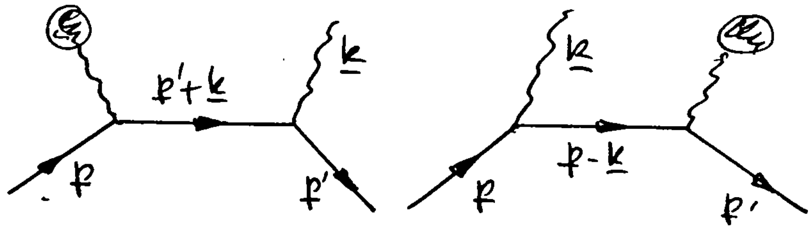


Fig. H3

Nun gilt

$$E(p) - E(p' + \underline{k}) = \frac{p^2}{2m} - \frac{(p' + k')^2}{2m} = E(p) - E(p') - \frac{p' \cdot k}{m} - \frac{\omega^2}{2m} .$$

Mit der Energieerhaltung $E(p') + \omega = E(p)$ gibt dies

$$E(p) - E(p' + k') = \omega - \frac{p' \cdot k}{m} - \frac{\omega^2}{2m} = \omega \left[1 + O\left(\frac{\omega}{m}, \frac{v}{c}\right)\right] ;$$

ebenso

$$E(p') - E(p - \underline{k}) = -\omega \left[1 + O\left(\frac{\omega}{m}, \frac{v}{c}\right)\right] . \qquad (37)$$

Da $\omega = p^2/2m - p'^2/2m = (p - p') \cdot \frac{p + p'}{2m} \ll |p - p'|$, können wir $\underline{k}$ in den Argumenten von $\hat{U}$ im nichtrelativistischen Bereich in (36) vernachlässigen. Damit erhalten wir in ausreichender Näherung

$$M = \frac{4\pi Z e^2}{|p' - p|^2} \; \frac{1}{\omega} \; (p' - p) \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{k}, \lambda) \qquad (38)$$

und daraus

$$\sum_{Pol} |M|^2 = (4\pi Z e^2)^2 \frac{1}{|\mathbf{p}'-\mathbf{p}|^2} \frac{2}{3\omega^2} \,,$$

wobei wir noch über die Richtungen von $\underline{k}$ gemittelt haben, da anschliessend über $d\Omega_{\underline{k}}$ integriert wird. Damit erhalten wir aus (28)

$$d\sigma = 4\pi \frac{2}{3} (4\pi Z e^2)^2 \frac{1}{|\mathbf{p}'-\mathbf{p}|^2} \frac{1}{\omega^2} \frac{e^2 \omega}{2\pi (2\pi)^3 m p} \underbrace{p'^2 dp'}_{p' m\, d\omega} d\Omega_{\mathbf{p}'} \,.$$

Die Integration über $d\Omega_{\mathbf{p}'}$ gibt

$$\int \frac{1}{|\mathbf{p}'-\mathbf{p}|^2} d\Omega_{\mathbf{p}'} = \frac{2\pi}{p p'} \ln \frac{p+p'}{p-p'} \,.$$

Damit

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{16}{3} Z^2 \alpha\, r_0^2 \frac{c^2}{v^2} \ln\left(\frac{v+v'}{v-v'}\right) \frac{1}{\omega} \qquad (39)$$

(r_0: klassischer Elektronenradius). Dies schreiben wir in der gebräuchlichen Form

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\nu} = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \frac{\alpha c^2}{v^2} \frac{Z^2 r_0^2}{\nu} G(\nu, v)} \,, \qquad (40)$$

mit dem sog. Gaunt-Faktor

$$G(\nu, v) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left[\frac{\frac{1}{2} m_e (v_i + v_f)}{h\nu} \right] \qquad (41)$$

$$\left(v_i = v ,\ \frac{1}{2} m_e v_f^2 = \frac{1}{2} m_e v_i^2 - h\nu \right) .$$

In Bereichen, wo die Bornsche Näherung nicht gut ist, schreibt man den Querschnitt immer noch in der Form (39), nur ist dann der Gaunt-Faktor komplizierter (siehe Formel (90.15) in Landau-Lifschitz, Bd. 4).

Nun betrachten wir die Abstrahlung in einem thermischen Plasma. Die spektrale Abstrahlung pro Volumen- und Zeiteinheit ist (n_i: Anzahldichte der Ionen, n_e: Anzahldichte der Elektronen):

$$\varepsilon_\nu = n_i \int n_e \left(\frac{m_e}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-m_e v^2/2kT}\, 4\pi v^2 dv \left(v \cdot \frac{d\sigma}{d\nu}\right) h\nu$$

$$= 2\pi \cdot 4\pi\, n_i n_e \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2 e^2}{c} \left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 c^2 \left(\frac{m_e}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty dv\, v\, e^{-m_e v^2/2kT}\, G(\nu, v) .$$

Sei

$$y = \frac{\frac{m_e v^2}{2} - h\nu}{kT} \longrightarrow v = \sqrt{\frac{2(ykT + h\nu)}{m_e}}$$

$$dy = \frac{m v\, dv}{kT} ,$$

dann ergibt sich mit der Abkürzung (gemittelter Gaunt-Faktor)

$$\overline{G}(\nu, T) = \int_0^\infty e^{-y}\, G\left(\nu, v = \sqrt{\frac{2(ykT + h\nu)}{m_e}}\right) dy \qquad (42)$$

$$\varepsilon_\nu = \frac{2^5 \pi e^6}{3 m_e c^3} \left(\frac{2\pi}{3 k m_e T}\right)^{1/2} Z^2 n_e n_i\, e^{-h\nu/kT}\, \overline{G}(\nu, T)$$

$$= (6.8 \times 10^{-38}\, \mathrm{erg\, s^{-1}\, cm^{-3}\, Hz^{-1}})\, Z^2 n_e n_i\, T^{-1/2} e^{-h\nu/kT}\, \overline{G}(\nu, T) . \qquad (43)$$

Die gesamte Abstrahlung ist nach ν-Integration

$$\varepsilon = \left(\frac{2\pi kT}{3m}\right)^{1/2} \frac{2^5 \pi e^6}{3 h m c^3} Z^2 n_e n_i\, \overline{\overline{G}}(T)$$

$$= (1.4 \times 10^{-27}\, \mathrm{erg\, s^{-1}\, cm^{-3}})\, T^{1/2} n_e n_i Z^2\, \overline{\overline{G}}(T) , \qquad (44)$$

mit

$$\overline{\overline{G}}(T) = \int_0^\infty \overline{G}(\nu = x kT/h, T)\, e^{-x} dx \qquad (45)$$

Für die gemittelten Gaunt-Faktoren existieren Kurven und Tabellen, z.B. in:

W. Karzas, R. Latter, Ap. J. Suppl. 6, 167 (1961).

Im allgemeinen ist $\bar{\bar{G}}$ nahe bei Eins und kann deshalb für grobe Rechnungen gleich Eins gesetzt werden.

Zum Schluss geben wir noch einige Literaturhinweise.

- Verschiedene Strahlungsprozesse werden im folgenden Buch ausführlich behandelt

  G.B. Rybicki, A.P. Lightman: "Radiative Processes in Astrophysics", Wiley 1979.

- Speziell für Synchrotronstrahlung ist das folgende Buch sehr nützlich:

  A.G. Pacholczyk: "Radio Astrophysics", Freeman 1970.

- Für formale Aspekte und Lösungsmethoden der Transportgleichungen gibt es das klassische Buch

  S. Chandrasekhar: "Radiative Transfer", Dover 1960.

- Der Strahlungstransport im Sterninneren und die Opazitäten von Sternmaterie werden auch in den Astrophysikbüchern des Literaturverzeichnisses behandelt.

Anhang F. Der Sunyaev – Zel'dovich Effekt

Beide Galaxienhaufen haben grosse Mengen eines heissen ($T_e \sim 10^8$ K) verdünnten ($n_e \sim 10^{-2} \div 10^{-3}\,cm^{-3}$) intergalaktischen Gases, welches mit Röntgensatelliten entdeckt wurde. Die beobachtete Röntgenstrahlung entsteht durch Bremsstrahlung der Elektronen dieses Plasmas. Im Anhang H wird gezeigt, dass die spektrale Abstrahlung pro Volumeneinheit gegeben ist durch

$$\varepsilon_\nu^{ff} = (6.8 \times 10^{-38}\,erg\,s^{-1}\,cm^{-3}\,Hz^{-1})\, Z^2 n_i n_e T_e^{-1/2} \times e^{-h\nu/kT_e}\, \bar{g}_{ff}(\nu,T)\,, \qquad (1)$$

wo $\bar{g}_{ff}$ den Gaunt-Faktor (~ 1) bezeichnet.

Das Plasma ist optisch dünn (optische Tiefe $\ll 1$) und deshalb ist die Oberflächenhelligkeit der Röntgenstrahlung proportional zum effektiven Radius R der Wolke

$$I_X = \text{const}\, R\, n_e^2\, T_e^{-1/2}\, e^{-h\nu/kT_e}\, \bar{g}_{ff}\,. \qquad (2)$$

Aus der spektralen Verteilung der beobachteten Strahlung kann man grundsätzlich die Elektronentemperatur T_e bestimmen und damit wäre es möglich, das Produkt $R n_e^2$ festzulegen.

Eine andere Kombination von R und n_e, nämlich $R n_e$, lässt sich wahrscheinlich mit zukünftigen Präzisionsmessungen der Strahlungstemperatur der Hintergrundstrahlung in Richtung dieser Wolken gewinnen. Beim Durchgang der 3K-Strahlung durch die heissen intergalaktischen Wolken in Galaxienhaufen werden nämlich die Photonen durch "inverse Comptonstreuung" an den Elektronen im Mittel energiereicher und aus der Deformation des ursprünglichen Planck'schen Spektrums lässt sich, wie wir nun zeigen wollen, prinzipiell $n_e R$ bestimmen. Damit würden wir dann aber die physikalische Distanz R kennen und zusammen mit der scheinbaren Ausdehnung und der Rotverschiebung könnten wir die <u>Hubble-Konstante bestimmen</u>.

A. Herleitung der Kompaneets-Gleichung

Es stellt sich nun also die Aufgabe, die Änderung der Photonenverteilung $n(\nu)$ beim Durchgang der Strahlung durch ein heisses Plasma im thermischen Gleichgewicht (der Temperatur T) zu berechnen.

Wir betrachten ein unendliches homogenes Volumen und nehmen an, dass $n(\nu)$ isotrop ist. Die Boltzmann-Verteilung der Elektronen bezeichnen wir mit $N(E)$. Dann lautet die Boltzmann-Gl. für $n(\nu)$:

$$\frac{\partial n(\nu)}{\partial t} = -\int d^3p \; c\, d\sigma(\nu,\vec{p} \to \nu',\vec{p}\,')$$
$$\times \left[(1+n(\nu'))\, n(\nu)\, N(E) - (1+n(\nu))\, n(\nu')\, N(E')\right]$$

$(E = \vec{p}^{\,2}/2m,\; E' = \vec{p}\,'^2/2m)$. (3)

Für nichtrelativistische Elektronen ist nun die Frequenz ν' nach der Streuung nahe bei ν und somit ist das Verhältnis $h\Delta/kT$, $\Delta := \nu' - \nu$, eine kleine Zahl*) ist. In dieser Situation wird aus der Boltzmann-Gl. näherungsweise eine Fokker-Planck Gleichung, wie wir nun im Einzelnen zeigen wollen.

Die Richtungen der Photonen vor und nach dem Streuprozess seien $\vec{n}$, bzw. $\vec{n}'$. Dann lauten Energie-Impulssätze

$$h\nu + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m_e} = h\nu' + \frac{\vec{p}'^{\,2}}{2m_e} ,$$
$$\frac{h\nu}{c}\vec{n} + \vec{p} = \frac{h\nu}{c}\vec{n}' + \vec{p}' . \qquad (4)$$

Die 2. Gl. löse man nach $\vec{p}'$ auf, quadriere die resultierende Gl. und benutze das Resultat in der ersten Gl.. Man findet leicht

$$h\Delta = -\frac{h\nu c\,\vec{p}\cdot(\vec{n}-\vec{n}') + h^2\nu^2(1-\vec{n}\cdot\vec{n}')}{m_e c^2 + h\nu(1-\vec{n}\cdot\vec{n}') - c\vec{p}\cdot\vec{n}'} . \qquad (5)$$

In der Rechnung weiter unten benötigen wir davon explizite nur die tiefste Ordnung in v/c:

$$h\Delta \simeq -\frac{h\nu c\,\vec{p}\cdot(\vec{n}-\vec{n}')}{m_e c} . \qquad (6)$$

---

*) In einer Übungsaufgabe werden wir weiter unten zeigen, dass im Mittel

$$\frac{\langle h\Delta\rangle}{kT} = 4\frac{h\nu}{mc^2} - \frac{h\nu}{mc^2}\frac{h\nu}{kT} .$$

Nun entwickeln wir den Integranden des Stossterms in (3) bis zur 2. Ordnung in $h\Delta/kT$. Dazu benutzen wir die Taylorentwicklungen ($x := h\nu/kT$):

$$
\begin{aligned}
n(\nu') &= n(\nu) + \frac{h\Delta}{kT}\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{h\Delta}{kT}\right)^2 \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \cdots , \\
N(E') &= N(E - h\Delta) = N(E)\left[1 + \frac{h\Delta}{kT} + \frac{1}{2}\left(\frac{h\Delta}{kT}\right)^2 + \cdots\right] .
\end{aligned}
\tag{7}
$$

In der letzten Gleichung haben wir verwendet, dass $N(E)$ eine Boltzmann-Verteilung ist. Nach einer kurzen Rechnung finden wir

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial n(\nu)}{\partial t} &= \frac{h}{kT}\left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2\right) I_1 \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{kT}\right)^2 \left[\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + 2(1+n)\frac{\partial n}{\partial x} + n^2\right] I_2 + \cdots ,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int d^3p \; c \, d\sigma \, N(E)\, \Delta , \\
I_2 &= \int \quad '' \quad\quad '' \quad\quad \Delta^2 .
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Das Integral I_2 lässt sich einfach berechnen, wie wir gleich sehen werden. Hingegen wäre eine direkte Berechnung von I_1 ziemlich kompliziert, da man dann für $h\Delta$ in der Entwicklung eine Ordnung weitergehen muss. Mit einem schlauen Trick lässt sich aber diese Rechnung vermeiden.

Setzen wir im Integral I_2 den differentiellen Thomson-Querschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 \left[1 + (\vec{n}\cdot\vec{n}')^2\right], \quad r_e = \frac{e^2}{m_e c^2},$$

so lautet dieses explizit

$$I_2 = \left(\frac{\nu}{m_e c}\right)^2 \int c\, d\sigma\, N(E)\, (\vec{p}\cdot(\vec{n}-\vec{n}'))^2\, d^3p$$

$$= \left(\frac{\nu}{m_e c}\right)^2 \int c\, d\sigma\, |\vec{n}-\vec{n}'|^2 \underbrace{\int \frac{1}{3} 4\pi p^2 dp\, N(E)\, p^2}_{\frac{1}{3}\langle p^2\rangle = kT m_e n_e}$$

$$= \left(\frac{\nu}{m_e c}\right)^2 kT m_e n_e c \int d\Omega\, \frac{1}{2} r_e^2 \left[1 + (\vec{n}\cdot\vec{n}')^2\right] \underbrace{|\vec{n}-\vec{n}'|^2}_{2-2\vec{n}\cdot\vec{n}'}$$

Wir haben also

$$I_2 = 2\left(\frac{\nu}{m_e c}\right)^2 kT m_e n_e \sigma_T c, \tag{10}$$

wo $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2$ der totale Thomson-Querschnitt ist.

Setzen wir dies in (8) ein, so sehen wir, dass der Term mit I_2 einen Anteil proportional zu $x^2(\partial^2 n/\partial x^2)$ ~~ist~~ hat, während der Term mit I_1 keinen Beitrag von diesem Typ enthält. Diese Beobachtung wird es uns ermöglichen, den ersten Term in (8) (und somit I_1) ohne lange Rechnung zu bestimmen.

Bei der Comptonstreuung bleibt die Photonenzahl erhalten und deshalb muss für eine isotrope Verteilung ein Erhaltungssatz von folgender Form gelten:

$$\frac{\partial n}{\partial t}(x,t) = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial(x^2 j)}{\partial x}, \qquad (11)$$

wo j eine "Stromdichte" im Impulsraum ist. Dies garantiert

$$\frac{d}{dt}\int n\, x^2 dx = \int \frac{\partial n}{\partial t} x^2 dx = \int \frac{\partial(x^2 j)}{\partial x} dx = 0. \qquad (12)$$

Nun enthält die Gl. (8), wie oben bemerkt, einen Term proportional zu $\partial^2 n/\partial x^2$ mal eine Funktion von x (aber nicht von n!). Deshalb hat j notwendigerweise die Form

$$j = g(x)\left(\frac{\partial n}{\partial x} + h(n,x)\right), \qquad (13)$$

wobei die Funktionen g und h noch bestimmt werden müssen.

Natürlich muss die Bose-Verteilung $n_0(x)$ (ev. mit chemischem Potential) eine Lösung von (8) sein und für diese muss die Quelle j selbstverständlich verschwinden. Da aber n_0 die Gl. $\partial n_0/\partial x = -n_0 - n_0^2$ erfüllt, impliziert dies

$$h(n,x) = n + n^2. \qquad (14)$$

Zur Bestimmung von g vergleichen wir die Koeffizienten von $\partial^2 n/\partial x^2$. In (8) ist der Koeffizient, wie schon festgehalten, ~~proportional~~ proportional zu x^2 und somit gilt $g(x) \propto x^2$. Der konstante Proportionalitätsfaktor ergibt sich aus unserem Ausdruck (10) für I_2:

$$g(x) = - \frac{kT}{m_e c^2} n_e \sigma_T c\, x^2 . \qquad (15)$$

Damit ist j bekannt und wir haben mit der neuen Zeitvariablen

$$y := t \left[\frac{kT}{m_e c^2} n_e \sigma_T c \right] \qquad (16)$$

die gesuchte Kompaneets-Gl.:

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right) \right]} . \qquad (17)$$

Schliesslich können wir auch noch I_1 bestimmen, indem wir die Koeffizienten von $\partial n/\partial x$ vergleichen. Man findet sofort

$$\frac{h}{kT} \cdot I_1 = \frac{kT}{m_e c^2} \sigma_T n_e\, x\, (4 - x)\, c . \qquad (18)$$

[Das gleiche Resultat erhält man selbstverständlich auch durch Vergleich der Koeffizienten von n oder n^2.]

<u>Bemerkung</u>: Das letzte Resultat benützen wir, um die mittlere Energieübertragung <u>~~po~~ Stoss</u> zu bestimmen.

Ein Blick auf den Ausdruck für I_1 in (9) zeigt, dass

$$\frac{\langle h\Delta\rangle}{kT} = \frac{hI_1}{kT}\,\frac{1}{c\,n_e\,\sigma} \overset{(18)}{=} \frac{kT}{m_e c^2}\,x(4-x)$$

oder

$$\boxed{\langle h\Delta\rangle = \frac{h\nu}{m_e c^2}\left(4kT - h\nu\right).} \qquad (20)$$

<u>Übungsaufgabe</u>: Leite dieses Resultat durch eine direktere Betrachtung her.

<u>Lösung</u>: Rechnen in Einheiten $\hbar = c = 1$. Sei $\varepsilon = h\nu$, $\varepsilon' = h\nu'$. Für den mittleren Energiegewinn setzen wir eine Reihenentwicklung in $\frac{\varepsilon}{m} \ll 1$, $T/m \ll 1$ an:

$$\langle\Delta\varepsilon\rangle = -m\left[\alpha_1 + \alpha_2\frac{\varepsilon}{m} + \alpha_3\frac{T}{m} + \alpha_4\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^2 + \alpha_5\frac{\varepsilon T}{m} + \alpha_6\frac{T^2}{m^2} + \dots\right]$$

und bestimmen die tiefsten nichtverschwindenden Terme.

Für $T = \varepsilon = 0$ passiert nichts und somit ist $\alpha_1 = 0$. Falls $T = 0$, $\varepsilon \neq 0$ haben wir bei der Compton-Streuung den Energieübertrag*) $\Delta\varepsilon = -\frac{\varepsilon^2}{m}(1-\cos\theta)$ (θ = Streuwinkel) und dies müssen wir mit der Winkel

---

*) Im Ruhesystem des Elektrons ist $\underbrace{\Delta\varepsilon = -\frac{\varepsilon\varepsilon'}{m}(1-\cos\theta)}_{\text{exakt}}$ $\simeq -\frac{\varepsilon^2}{m}(1-\cos\theta)$

abhängigkeit der Thomson-Streuung $d\sigma/d\Omega \propto 1+\cos^2\theta$ mitteln: $\langle\Delta\varepsilon\rangle = -\varepsilon^2/m$ für $T=0$. Dies zeigt $\alpha_2=0$, $\alpha_4=1$. Falls andererseits $\varepsilon=0$, $T\neq 0$ muss $\langle\Delta\varepsilon\rangle$ verschwinden, weshalb $\alpha_3=\alpha_6=0$. Es bleibt die Bestimmung von α_5. Dazu machen wir ein Gedanken-experiment. Wir stellen uns vor, es gebe einen verdünnten thermischen Gleichgewichtsfluss von Photonen*) mit derselben Temperatur wie für das Gas, so dass

$$d(\text{Zahl der Photonen})/d\varepsilon = \text{const}\ \varepsilon^2 e^{-\varepsilon/T}.$$

Im thermischen Gleichgewicht muss gelten

$$\int_0^\infty \langle\Delta\varepsilon\rangle\, \varepsilon^2 e^{-\varepsilon/T}\, d\varepsilon = 0\,,$$

d.h. (für $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_6=0$, $\alpha_4=1$)

$$\underbrace{\langle\varepsilon^2\rangle_T}_{12T^2} + \alpha_5 T \underbrace{\langle\varepsilon\rangle_T}_{3T} = 0 \implies \alpha_5 = -4\,.$$

Somit haben wir

$$\langle\Delta\varepsilon\rangle = -(\varepsilon^2 - 4T\varepsilon)/mc^2 + \cdots\,,$$

was mit (20) übereinstimmt.

* * *

---

*) Das chemische Potential ist also $\neq 0$. Dies ist möglich, da die Photonenzahl bei der Streuung erhalten ist.

numerisches Beispiel :

$$\frac{\Delta T}{T} = -2 \frac{kT_e}{m_e c^2} \tau_T$$

$$kT_e = 5\,\mathrm{keV} \quad , \quad \tau_T = \frac{1}{20}$$

$$\rightarrow \quad \underline{\frac{\Delta T}{T} \simeq 10^{-3}}$$

B. Anwendungen der Kompaneets-Gleichung

Wir betrachten als erste Anwendung eine Situation, bei der anfänglich eine schwarze Strahlung vorliegt, die ausschliessend durch die Wechselwirkung mit einem heissen Plasma leicht verändert wird.

Für kleine Änderungen können wir in der Kompaneets-Gl. (17) rechts die ungestörte Verteilung

$$n_0 = \frac{1}{e^{\bar{x}}-1} \quad , \quad \bar{x} = \frac{h\nu}{kT_\gamma} = x\,\frac{T_e}{T_\gamma} \qquad (21)$$

einsetzen. Nun ist

$$n_0^2 + n_0 = -\frac{\partial n_0}{\partial \bar{x}} = -\frac{\partial n_0}{\partial x}\,\frac{T_\gamma}{T_e} .$$

Damit wird aus (17)

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{\bar{x}^2}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\,\bar{x}^4\,\frac{\partial n_0}{\partial \bar{x}}\left(1-\frac{T_\gamma}{T_e}\right). \qquad (22)$$

Den Faktor $1-T_\gamma/T_e$ können wir durch eine Redefinition von y absorbieren $\left[\bar{y} = (1-T_\gamma/T_e)\,y = \frac{T_e-T_\gamma}{m}\,\tau\, n_e\right]$.
Nun ist

$$\frac{1}{\bar{x}^2}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\,\bar{x}^4\,\frac{\partial n_0}{\partial \bar{x}} = -4\bar{x}\,\frac{e^{\bar{x}}}{(e^{\bar{x}}-1)^2} + \bar{x}^2\,\frac{e^{\bar{x}}}{(e^{\bar{x}}-1)^2}\Bigg[-1+\underbrace{2\,\frac{e^{\bar{x}}}{e^{\bar{x}}-1}}_{\frac{e^{\bar{x}}+1}{e^{\bar{x}}-1} = \frac{1}{\tanh\frac{\bar{x}}{2}}}\Bigg]$$

$$= \frac{e^{\bar{x}}}{(e^{\bar{x}}-1)^2}\,\bar{x}\left[\frac{\bar{x}}{\tanh\frac{\bar{x}}{2}} - 4\right].$$

Damit ergibt sich für die Änderung von n und I_ν

$$\frac{\Delta n}{n_0} = \frac{\Delta I_\nu}{I_\nu} = \bar{y}\ \frac{\bar{x}\, e^{\bar{x}}}{e^{\bar{x}}-1}\left[\frac{\bar{x}}{\tanh\frac{\bar{x}}{2}} - 4\right]. \qquad (23)$$

Im Rayleigh–Jeans Bereich ($\bar{x} \ll 1$) wird daraus

$$\frac{\Delta n}{n_0} = \frac{\Delta I_\nu}{I_\nu} \simeq -2\bar{y}\,. \qquad (24)$$

[Für $T_e \gg T_\gamma$ haben wir natürlich $\bar{y} \simeq y$.]

Wir wollen noch die Änderung der Strahlungstemperatur (brightness temperature) bestimmen. Diese ist definiert durch

$$I_\nu = B_\nu(T_b)\,. \qquad (25)$$

Im Rayleigh–Jeans Bereich bedeutet dies (man nennt dann T_b oft auch die R–J–Temp. T_{RJ}):

$$T_{RJ} = \frac{c^2}{2\nu^2 k} I_\nu\,. \qquad (26)$$

Nach (24) ist

$$\frac{T_{RJ} - T_\gamma}{T_\gamma} = -2\bar{y}\,. \qquad (27)$$

Bei einer beliebigen Frequenz setzen wir $\frac{T_b}{T_\gamma} = 1 + y f(\bar{x})$, wo f eine kleine Grösse ist. Wir haben dann für kleine y

$$n(\bar{x}, T_b) = \frac{1}{e^{\bar{x}/(1+yf(\bar{x}))} - 1} \simeq \frac{1}{e^{\bar{x}}-1} + y f(\bar{x}) \frac{\bar{x}\, e^{\bar{x}}}{(e^{\bar{x}}-1)^2}\,.$$

Folglich ist

$$\frac{\Delta n}{n_0} = y\, f(\bar{x})\, \frac{\bar{x}\, e^{\bar{x}}}{e^{\bar{x}} - 1} .$$

Durch Vergleich mit (23) ergibt sich

$$f(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{\tanh \frac{\bar{x}}{2}} - 4 .$$

Somit

$$\frac{T_e - T_\gamma}{T_\gamma} = \bar{y} \left\{ \frac{\bar{x}}{\tanh \frac{\bar{x}}{2}} - 4 \right\} . \qquad (28)$$

Im Rayleigh-Jeans Gebiet ergibt sich daraus wieder (27).

Ergänzung

Für $T_e \gg T_\gamma$ kann man in der Kompaneets-Gl. (17) die Terme mit n^2 und n vernachlässigen. Dann bleibt die lineare Gl.

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{\bar{x}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{x}^4 \frac{\partial n}{\partial \bar{x}} . \qquad (29)$$

Mit der Variablentransf. $\xi = \ln \bar{x}$ wird daraus

$$\frac{\partial n}{\partial y} = 3 \frac{\partial n}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 n}{\partial \xi^2} .$$

Diese lässt sich durch die Transformation

$$(y, \xi) \longmapsto (y, z) , \quad z = 3y + \xi \qquad (30)$$

in die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \tag{31}$$

überführen, für welche wir das Cauchy-Problem in bekannter Weise lösen können:

$$n(z,y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi y}} \int e^{-(z-z')^2/4y}\, n(z',0)\, dz'.$$

Hier setzen wir wieder die alten Variablen ein.

$$n(\bar{x},y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi y}} \int_0^{\infty} n_0(w) \exp\left[-\frac{(\ln\bar{x}-\ln w-3y)^2}{4y}\right] \frac{dw}{w}, \tag{32}$$

wo $n_0(w)$ die spektrale Anfangsverteilung ist. Wir wollen sehen wie sich die Rayleigh-Jeans Temp. ändert. Im Rayleigh-Jeans Gebiet ist $n_0(w) = \frac{1}{w}$, also mit $t = \ln w$

$$n(\bar{x},y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi y}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-[4yt + (\ln\bar{x}+3y-t)^2]/4y}.$$

Die eckige Klammer im Exponenten ist gleich $4y(2y+\ln\bar{x}) + (t-\ln\bar{x}-y)^2$, also erhalten wir

$$n(\bar{x},y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi y}}\, e^{-2y-\ln\bar{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-(t-\ln\bar{x}-y)^2/4y}$$

$$= \frac{1}{\bar{x}}\, e^{-2y}. \tag{33}$$

Dies hat wieder die Form des Rayleigh-Jeans-Gesetzes, aber mit

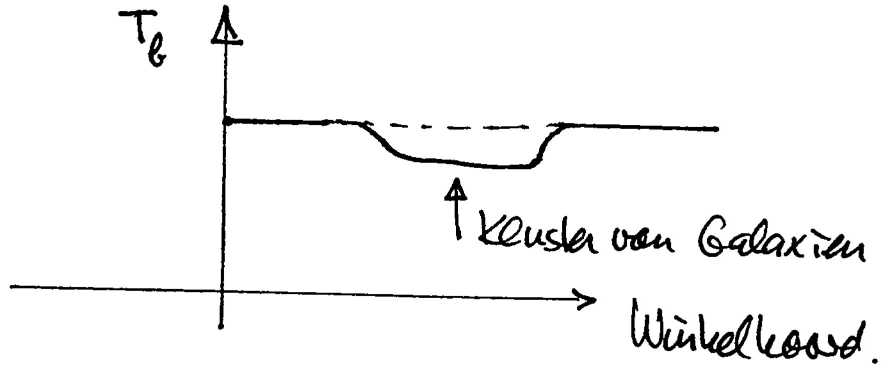
$$\boxed{T_{RJ} = T_0\, e^{-2y}}. \tag{34}$$

Bei der Durchquerung der intergalaktischen Plasmawolke eines reichen Galaxienhaufens erwarten wir nach (34) eine Absenkung der Rayleigh-Jeans Temperatur um

$$\frac{\Delta T_{RJ}}{T_0} \simeq -2y = -2\,\frac{2R}{c}\,\frac{kT_e}{m_e c^2}\,n_e \sigma_T c$$

$$= -4\,\frac{kT_e}{m_e c^2}\,\sigma_T \underline{\underline{n_e R}} . \qquad (35)$$

Diese relative Änderung ist zahlenmässig in der Gegend von 10^{-3} ($\Delta T_{RJ} \simeq 1$ mK).



Wie bereits ausgeführt, ist es mit diesem Sunyaev-Zel'dovich-Effekt grundsätzlich möglich, die Hubble-Konstante ohne intermediäre Schritte oder Benutzung von anderen Distanzindikatoren zu bestimmen! Ferner wäre es mit dieser Methode bei grossen Rotverschiebungen prinzipiell möglich, auch den Dichteparameter Ω_0 einzugrenzen, und dies ohne irgend welche Annahmen über die Evolution der Kluster. Leider sind aber verschiedene Schwierigkeiten zu erwarten. So können andere Quellen (z.B. kompakte Radioquellen in Galaxien) die effektive

Temperaturen der Hintergrundstrahlung in Richtung der Haufen verändern.

Die erwartete Absenkung von T_{RJ} von der Grössenordnung 1 mK soll angeblich in einigen Fällen nachgewiesen worden sein.

Aufdatierungen

Anhang G. Untermannigfaltigkeiten der Kodimension 1, Gleichungen von Gauss, Codazzi und Mainardi

Es sei Σ eine raumartige dreidimensionale Untermannigfaltigkeit der Raumzeit (M,g) mit induzierter Metrik $\bar{g}$. Die folgenden Betrachtungen sind rein lokaler Natur. Aus rechnerischen Gründen erweist es sich als zweckmässig, bezüglich adaptierten orthonormierten Rahmen $\{e_\mu\}$ zu arbeiten, für welche e_i $(i=1,2,3)$ in Punkten von Σ tangential an Σ sind. Die duale Basis von $\{e_\mu\}$ sei $\{\theta^\mu\}$ und $\omega^\mu{}_\nu$, $\Omega^\mu{}_\nu$ bezeichnen wie immer die Zusammenhangsformen und Krümmungsformen relativ zu dieser Basis. Die entsprechenden Grössen der Untermannigfaltigkeit Σ relativ zur Basis $\{\theta^i\}$ bezeichnen wir mit $\bar{\omega}^i{}_j$, $\bar{\Omega}^i{}_j$.

Zunächst beschränken wir die 1. Strukturgleichung zu (M,g) auf $T(\Sigma)$:

$$d\theta^i + \omega^i{}_k \wedge \theta^k = 0 \qquad \text{auf } T(\Sigma) \tag{1}$$

$$\underbrace{d\theta^0}_{0} + \omega^0{}_k \wedge \theta^k = 0 \qquad \text{auf } T(\Sigma) \tag{2}$$

Die $\bar{\omega}^i{}_k$ erfüllen dieselben Gleichungen (1) und haben dieselben Symmetrieeigenschaften wie die $\omega^i{}_k$. Die Eindeutigkeit der Lösung impliziert also

$$\bar{\omega}^i{}_j = \omega^i{}_j \quad \text{auf } T(\Sigma). \tag{3}$$

Die Formen $\omega^0{}_i = \omega^i{}_0$ erfüllen nach (2) auf $T(\Sigma)$ die Hypothese des folgenden Lemmas.

<u>Lemma (Cartan)</u>: Sind $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ linear unabhängige 1-Formen auf einer Mannigfaltigkeit M der Dimension

$n' \geq n$ und sind $\mu_1, \dots, \mu_n$ 1-Formen, welche

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda^i \wedge \mu_i = 0 \tag{4}$$

erfüllen, dann gibt es eindeutige C^∞-Funktionen f_{ij} auf M, so dass

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} \lambda^j ; \tag{5}$$

überdies gilt

$$f_{ij} = f_{ji} . \tag{6}$$

<u>Beweis</u>: In einer Umgebung irgend eines Punktes können wir 1-Formen $\lambda^{n+1}, \dots, \lambda^{n'}$ konstruieren, so dass $\lambda^1, \dots, \lambda^{n'}$ überall linear unabhängig sind. Dann gibt es aber glatte Funktionen f_{ij} $(i \leq n, j \leq n')$ mit

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{n'} f_{ij} \lambda^j .$$

Die Gleichung (4) impliziert

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n'} f_{ij} \lambda^i \wedge \lambda^j = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (f_{ij} - f_{ji}) \lambda^i \wedge \lambda^j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>n} f_{ij} \lambda^i \wedge \lambda^j .$$

Da die $\lambda^i \wedge \lambda^j$ für $i<j$ linear unabhängig sind, haben wir $f_{ij} = f_{ji}$ für $i,j \leq n$ und $f_{ij} = 0$ für $j > n$. □

Nach diesem Lemma gibt es eindeutige Funktionen k_{ij} auf Σ, so dass

$$\omega^0_j = k_{ij} \theta^i \quad \text{auf } T(\Sigma) , \tag{7}$$

$$k_{ij} = k_{ji} . \tag{8}$$

Wir deuten nun die bisherigen Resultate geometrisch. Bezeichnet ∇ den Riemannschen Zusammenhang von

(M,g) und $\bar\nabla$ denjenigen von $(\Sigma,\bar g)$, so folgt aus (3)

$$(\nabla_X e_j, e_i) = \omega_{ij}(X) = \bar\omega_{ij}(X) = (\bar\nabla_X e_j, e_i) \quad \text{für } X \in T(\Sigma), \tag{9}$$

und aus (7) und (8)

$$(\nabla_{e_i} e_j, e_0) = \omega_{0j}(e_i) = k_{ij} = (\nabla_{e_j} e_i, e_0). \tag{10}$$

Bezeichnet ferner $K(X,Y)$ die symmetrische Bilinearform auf $T(\Sigma)$ zu k_{ij}, so schliessen wir aus (9) und (10):

$$\boxed{\nabla_X Y = \bar\nabla_X Y + K(X,Y)\,n} \quad , \quad X,Y \in T(\Sigma), \tag{11}$$

wobei $n = e_0$ der normierte Normalenvektor auf Σ ist.

Dies sind die Formeln von Gauss und $K(X,Y)$ ist die 2. Fundamentalform (extrinsische Krümmung) von Σ. Insbesondere gilt

$$K(X,Y) = (n, \nabla_X Y) = -(\nabla_X n, Y). \tag{11'}$$

Der zweite Ausdruck für K beinhaltet die sog. Weingarten-Gleichung.

Nun restringieren wir die 2. Strukturgleichung auf $T(\Sigma)$. Aus

$$\Omega^i{}_j = d\omega^i{}_j + \omega^i{}_k \wedge \omega^k{}_j + \omega^i{}_0 \wedge \omega^0{}_j \quad \text{auf } T(\Sigma)$$

und (3) folgt

$$\Omega^i{}_j = \bar\Omega^i{}_j + \omega^i{}_0 \wedge \omega^0{}_j \quad \text{auf } T(\Sigma). \tag{12}$$

Ferner haben wir

$$\Omega^0{}_j = d\omega^0{}_j + \omega^0{}_i \wedge \omega^i{}_j \quad \text{auf } T(\Sigma). \tag{13}$$

Mit (7) erhalten wir aus (12)

$$\boxed{\Omega^i{}_j = \bar\Omega^i{}_j + k_{ik}\, k_{jl}\, \theta^k \wedge \theta^l} \quad \text{auf } T(\Sigma). \tag{14}$$

Diese Gleichung können wir folgendermassen umdeuten:

$$(R(X,Y)e_j,e_i) = \Omega_{ij}(X,Y) = (\bar{R}(X,Y)e_j,e_i)$$

$$- \underbrace{k_{ik}k_{jl}(\theta^k\wedge\theta^l)(X,Y)}_{k(e_i,X)\,k(e_j,Y)-(X\leftrightarrow Y)} \qquad \text{für } X,Y\in T(\Sigma).$$

Also ist (14) äquivalent zur berühmten Gauss-Gleichung (Theorema Egregium):

$$\boxed{(R(X,Y)Z,W) = (\bar{R}(X,Y)Z,W) + k(X,Z)\,k(Y,W) - k(Y,Z)\,k(X,W),} \qquad (15)$$

in welcher alle Vektorfelder tangential an Σ sind.

Aus (13), (7) und (8) folgt

$$\Omega^0{}_j = \underbrace{d(k_{ij}\theta^i)}_{dk_{ij}\wedge\theta^i + k_{ij}\underbrace{d\theta^i}_{-\omega^i{}_k\wedge\theta^k \text{ auf } T(\Sigma)}} + k_{ik}\theta^k\wedge\omega^i{}_j \qquad \text{auf } T(\Sigma)$$

d.h.

$$\boxed{\Omega^0_j = \bar{D}k_{ij}\wedge\theta^i} \qquad \text{auf } T(\Sigma) \qquad (16)$$

($\bar{D}$: absolutes äusseres Differential auf Σ). Auch diese Gleichung deuten wir um:

$$(R(X,Y)e_j,n) = \Omega_{0j}(X,Y) = (\bar{D}k_{ij}\wedge\theta^i)(X,Y)$$

$$= \bar{\nabla}_k k_{ij}(\theta^k\wedge\theta^i)(X,Y) = X^kY^i\,\bar{\nabla}_k k_{ij} - (X\leftrightarrow Y)$$

$$= (\bar{\nabla}_X k)(Y,e_j) - (X\leftrightarrow Y) \qquad \text{für } X,Y\in T(\Sigma).$$

Dies zeigt, dass (16) äquivalent ist zur folgenden Gleichung von Codazzi und Mainardi:

$$\boxed{(R(X,Y)Z,n) = (\bar{\nabla}_X k)(Y,Z) - (\bar{\nabla}_Y k)(X,Z)} \qquad \text{für } X,Y,Z\in T(\Sigma). \qquad (17)$$

Die grundlegenden Gleichungen (14) und (16) gestatten es uns, interessante und nützliche Ausdrücke für die Komponenten R_{0i} und G_{00} auf Σ zu finden. Dazu notieren wir zunächst ganz allgemein:

$$i_{e_\alpha}\Omega^\alpha{}_\beta = \frac{1}{2}\, i_{e_\alpha} R^\alpha{}_{\beta\rho\sigma}\,\theta^\rho\wedge\theta^\sigma = R_{\beta\sigma}\,\theta^\sigma$$

und damit

$$\boxed{\Omega^\alpha{}_\beta(e_\alpha, e_\sigma) = R_{\beta\sigma}.} \tag{18}$$

Insbesondere gilt

$$R_{0i} = \Omega^j{}_0(e_j, e_i). \tag{19}$$

Die rechte Seite erfordert $\Omega^i{}_0$ nur auf $T(\Sigma)$!

Für G_{00} haben wir

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}\left(R_{00} - \sum_i R_{ii}\right) = \frac{1}{2}\left(R_{00} + \sum R_{ii}\right).$$

Darin ist nach (18)

$$R_{00} = \Omega^j{}_0(e_j, e_0)$$

$$\sum_i R_{ii} = \sum_i \left[\sum_j \Omega^j{}_i(e_j, e_i) + \Omega^0{}_i(e_0, e_i)\right]$$

und folglich

$$2G_{00} = \sum_{i,j} \Omega^j{}_i(e_j, e_i). \tag{20}$$

Rechts wird wieder lediglich $\Omega^j{}_i$ auf $T(\Sigma)$ benötigt.

Setzen wir in (19) und (20) die Ausdrücke (16), bzw. (14) ein, so kommt

$$\boxed{R_{0i} = \sum_j\left(\bar\nabla_j K_{ij} - \bar\nabla_i K_{jj}\right)} \quad \text{auf } \Sigma, \tag{21}$$

sowie

$$2G_{00} = \sum_{i,j} \bar\Omega^j{}_i(e_j, e_i) + K_{jk}K_{il}\underbrace{(\theta^k\wedge\theta^l)(e_j, e_i)}_{\delta^k_j\delta^l_i - \delta^k_i\delta^l_j} =$$

$$= \underbrace{\sum \bar{R}_{ii}}_{-\bar{R}} + \Big(\sum_j k_{jj}\Big)\Big(\sum_i k_{ii}\Big) - \sum_{i,j} k_{ij} k_{ji} \,,$$

d.h.

$$\boxed{G_{00} = -\frac{1}{2}\bar{R} + \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(k_{ii}k_{jj} - k_{ij}k_{ji}\right)} \quad \text{auf } \Sigma . \tag{22}$$

<u>Bemerkung</u>: 1) Wählt man auf Σ das <u>Negative</u> der induzierten Metrik (wodurch Σ ein Riemannscher Raum mit <u>positiv</u> definiter Metrik wird), so ändert das Vorzeichen von $\bar{R}$.
2) Bezeichnen wir das Tensorfeld aus $\mathcal{T}^1_1(\Sigma)$ zu k ebenfalls mit k, so lautet (22) etwas invarianter geschrieben

$$G(n,n) = -\frac{1}{2}\bar{R} + \frac{1}{2}\left[(\mathrm{Sp}\,k)^2 - \mathrm{Sp}\,k^2\right] \quad \text{auf } \Sigma . \tag{22'}$$

3) Für Ergänzungen zu diesem Anhang verweisen wir auf [MS, Vol. III, Chapter 1].