

# KOSMOLOGIE I

(N. Straumann)

„Das Gewebe der Welt hat seinen Mittelpunkt überall und seinen Umkreis nirgends.“

NIKOLAUS VON CUSA

„The evolution of the world can be compared to a display of fireworks that has just ended: some few red wisps, ashes, and smoke. Standing on a cooled cinder, we see the slow fading of the suns, and we try to recall the vanishing brilliance of the origin of the worlds.“

G. LEMAITRE

## Vorwort

Der weitaus überwiegende Teil des vorliegenden Skripts wurde vor über 10 Jahren geschrieben. Seitdem hat sich in der beobachtenden Kosmologie viel getan. Einige Abschnitte mussten unbedingt neu geschrieben werden. Hieraus habe ich aber am Schluss von manchen Abschnitten Ergänzungen und Aufnahmen vorgenommen. Die Stellen, wo diese im Haupttext hingehören, sind am linken Rand mit dem Zeichen **E#** markiert. Da dieser 1. Teil der Kosmologievorlesung die etablierten Aspekte behandelt, dürfte dies genügen.

Die Qualität der Beobachtungen wird in den nächsten 10 Jahren wesentlich besser werden. Ich hoffe, dass der vorliegende Text die Einordnung des auffallenden Materials erleichtern wird.

Wolfgang Baumann

P.S. (einige Jahre später) In der beobachteten Kosmologie haben inzwischen so wichtige Entwicklungen stattgefunden, dass manche der im Skript zitierten Daten überholt sind. Die theoretischen Grundlagen sind aber immer noch gültig.

# Inhaltsverzeichnis

Prolog

## I. Friedmann-Modelle

1. Homogenität und Isotropie des beobachtbaren Universums
2. Friedmann-Raumzeit-Mannigfaltigkeiten
3. Riemannsche Räume mit konstanter Krümmung
4. Feldgleichung für ein Friedmann-Lemaître-Universum
5. Rotverschiebung
6. Kosmische Distanz Masse
7. Beziehung zwischen Rotverschiebung und scheinbarer Helligkeit
8. Zählung von Quellen (Teil 1)

## II. Materiedominierte Aera

1. Dichte des gegenwärtigen Universums
2. Zeitlicher Verlauf des Skalenfaktors
3. Helligkeitsdistanz und scheinbare Winkelausdehnung als Funktion der Rotverschiebung
4. Zählung von Quellen (Teil 2)
5. Horizonte
6. Friedmann- Lemaître Modelle für  $\Lambda \neq 0$
7. Zur Dunkelheit des nächtlichen Himmels
8. Grösse und Alter des Universums

## III. Thermische Geschichte des Universums für $T < 10^9\text{K}$

1. Die 3K-Hintergrundstrahlung
2. Rekombination, Baryondichte/Entropiedichte
3. Kausalität und Isotropie der 3K-Strahlung
4. Materiefluktuationen zur Zeit der Rekombination und Anisotropien der 3K-Strahlung
5. Die strahlungsdominierte Aera
6. Bewegung der Galaxis durch den Strahlungshintergrund
7. Intergalaktische Materie
8. Oszillierende kosmologische Modelle

## IV. Die frühe Phase $0.1 \text{ MeV} < T < 10 \text{ MeV}$

1. Einleitung
2. Das Standardmodell (Uebersicht)
3. Einzelheiten zur thermischen Geschichte
  - A. Chemische Potentiale der Leptonen
  - B. Konstanz der Entropie
  - C. Reaktionsraten versus Expansionsrate
  - D. Neutrinotemperatur, Massenschranken für stabile leichte Neutrinos
  - E. Expansion und Temperatur als Funktion der Zeit
4. Nukleosynthese
  - A. Neutron/Proton Verhältnis
  - B. Kernreaktionen
  - C. Primordiale Häufigkeiten der leichten Elemente
  - D.  $^4\text{He}$ -Häufigkeit und die Zahl der leichten Neutrinosorten

Anhang: Neutron-Proton-Verhältnis im expandierenden Universum

## Anhänge

- A. Homogene kosmologie Modelle
- B. Zur Kinematik von Strömungen, die Raychaudhuri Gleichung
- C. Wirbelfreie kosmologische Modelle
- D. Kosmologische Singularitäten
- E. Strahlungstransport
- F. Der Sunyaev-Zel'dovich Effekt

## Literatur

Wir führen an dieser Stelle nur neuere Lehrbücher auf und zitieren die spezielle Literatur später an passender Stelle.

### Kosmologie

- S. Weinberg: *Gravitation and Cosmology*,  
John Wiley (1972), Kap. 14 & 15.
- J. V. Narlikar: *Introduction to Cosmology*,  
Cambridge University Press (1993).
- P. J. Peebles: *Principles of Physical Cosmology*,  
Princeton University Press (1993).
- T. Padmanabhan: *Structure Formation in the Universe*,  
Cambridge University Press (1993).
- G. Börner: *The Early Universe: Facts and Fiction*,  
Springer-Verlag (1988).
- P. Coles & F. Lucchin: *Cosmology*,  
John Wiley (1995).
- E.W. Kolb & M. S. Turner: *The Early Universe*,  
Addison-Wesley (1990).
- Ya.B. Zeldovich & I. D. Novikov:  
*The Structure and Evolution of the Universe*,  
University of Chicago Press (1983).
- M. R. Robinson: *The Cosmological Distance Ladder*,  
Freeman & Comp. (1985).

### Allgemeine Relativitätstheorie

- N. Straumann: *General Relativity and Relativistic Astrophysics*,  
Springer-Verlag (1984).
- N. Straumann: *Allgemeine Relativitätstheorie und relativistische Astrophysik*,  
2. Auflage, Springer-Verlag (1988).
- R. M. Wald: *General Relativity*,  
University of Chicago Press (1984).
- C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler: *Gravitation*,  
Freeman (1973).
- L. D. Landau, E. M. Lifschitz: *Klassische Feldtheorie*,  
Akademie-Verlag (1992).

## Prolog: Ein Rückblick auf die letzten 80 Jahre

Das Bild eines expandierenden Universums, welches sich explosionsartig aus einem heißen und dichten Zustand entwickelt hat, gehört heute zum gesicherten Wissen. Diese Erkenntnis ist gleichzeitig eine der bedeutendsten Errungenschaften unseres Jahrhunderts. Die Evolution des Kosmos zeigt unmißbar geschichtliche Züge, welche die Physik mit der Biologie und anderen Wissenschaften eng verknüpft als dies früher der Fall war. Fast alles, was wir im heutigen Universum vorfinden – von Sternen und Galaxien bis zu Atomen und Atomkernen, ja selbst den Bestandteilen der Atomkerne – ist durch evolutive Prozesse entstanden.

Die Kosmologie hat natürlich die Menschheit schon immer beschäftigt und die verschiedenen Vorstellungen vermitteln tiefe Einblicke in die Gedankenwelt der jeweiligen Epoche. Bis auf ein paar kurze Bemerkungen will ich aber diesen Rückblick mit dem Jahre 1917 beginnen, in welchem Einstein der Preussischen Akademie der Wissenschaften seine berühmte Arbeit "Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie" vorlegte. Damit ist die Kosmologie in das Stadium quantitativer Naturforschung übergegangen.

Stellvertretend für vorangegangene Generationen, berichte ich zuerst über eine bis heute interessante kosmologische Bemerkung von Kepler in einem Brief an Galilei.

## Warum ist der Nachthimmel dunkel?

In seiner berühmten Schrift "Sidereus Nuncius" hat Galilei 1610 die Entdeckung der Jupitermonde beschrieben. Mit seinem Fernrohr beobachtete er auch die Milchstrasse und beschrieb seine erstaunlichen Feststellungen folgendermassen:

"Auf welchen ihrer Ausschnitte man das Fernrohr auch richten mag, sogleich zeigt sich dem Blick eine ungeheure Menge von Sternen, von denen mehrere ziemlich gross und sehr auffallend sind; die Anzahl der kleinen jedoch ist schierlich unerschöpflich."

Die Erregung, die Kepler bei der Lektüre des "Sternboten" überfallen hatte, setzte er unmittelbar in eine Abhandlung um (Bild 1). Diese im Stil einer Rezension gehaltene Schrift liess er nebst einer Vorrede an den Leser im Mai 1610 unter dem Titel "Dissertation cum Nuncio Sidereo" (Unterredung mit dem Sternboten) drucken. Zuvor hatte Kepler eine Abschrift nach Padua geschickt.

Unter dem Eindruck von Galilei's Auflösung der Milchstrasse erörtert Kepler u.a. die Frage der unendlich vielen Welten, wie sie Nikolaus von Cusa vorausgedacht und der zehn Jahre zuvor verbrannte Giordano Bruno in dichterischer Überinterpretation des kopernikanischen Systems zu einer pantheistischen Vision ausgeweitet hatte. Mit einem schlagenden Argument kommt Kepler zur Überzeugung, dass die Sternwelt nicht unendlich ausgedehnt sein könne, sondern eine riesige Insel bilden müsse. Ausdruckslos wäre - so teilt er Galilei mit - der

JOHANNES KEPLERS  
DES KAISERLICHEN MATHEMATIKERS  
AUSEINANDERSETZUNG

MIT DEM

»STERNENHEROLD«

DEN NEULICH ZU DEN STERBLICHEN AUSGEHEN LIESS

GALILAEO GALILEI  
LEHRER DER GROSSENWISSENSCHAFTEN  
IN PADUA.

*Alcinous:*

*Freimütig muß der Sinn aller sein,  
die die Welt erforschen wollen.*

[Motto zum »Bericht« des ‚Rhaetikers‘.]

Mit kaiserlicher Druckbegünstigung.

---

PRAG  
DRUCK VON DANIEL SEDESAN.  
Im Jahre des Herrn 1610.



Nachthimmel dunkel. Kepler sagt: Wäre der Weltraum unggänzlich gleichmäßig mit Sternen ähnlichen wie die Sonne bevölkert und – so müssen wir heute beifügen – wären diese Sterne mehr oder weniger in Ruhe und beliebig alt, so würde jeder von uns ausgehende Lichtstrahl adressiert auf einen Stern treffen, und deshalb müsste uns der Himmel jederzeit als blendend helles Gewölbe erscheinen. In Keplers Brief an Galilei findet man dazu als Beispiel den Satz:

„Wenn das wahr ist, und wenn jene Sonnen von gleicher Beschaffenheit sind wie die unsrige, weshalb überbieten dann all jene Sonnen insgesamt an Glanz nicht unsere Sonne?“

Die Unmöglichkeit des dunklen Nachthimmels für ein unendliches Universum überzeugte ihn, wie bereits gesagt, dass die Ansammlung der Sterne endlich sei und einen äusseren Rand habe. Keplers Argument geriet bald in Vergessenheit, wurde aber im Laufe der Zeit mehrfach „widerlegt“. So auch 1823 vom Bremer Arzt und Astronomen Heinrich Wilhelm Olbers, und ist heute als Olbersches Paradoxon bekannt.\*)

[Mehr darüber findet man in: E.R. Harrison. Darkness at Night: A Riddle of the Universe. Cambridge Massachusetts: Harvard University Press (1987).]

\*) Wir werden die Strahlungsintensität des Nachthimmels in §II.7 abschätzen. Wesentlich für deren geringen Wert ist, dass die Sterne höchstens etwa 15 Milliarden Jahre alt sind. (Die Rotverschiebung spielt eine untergeordnete Rolle.)

## Vom statischen zum dynamischen Universum

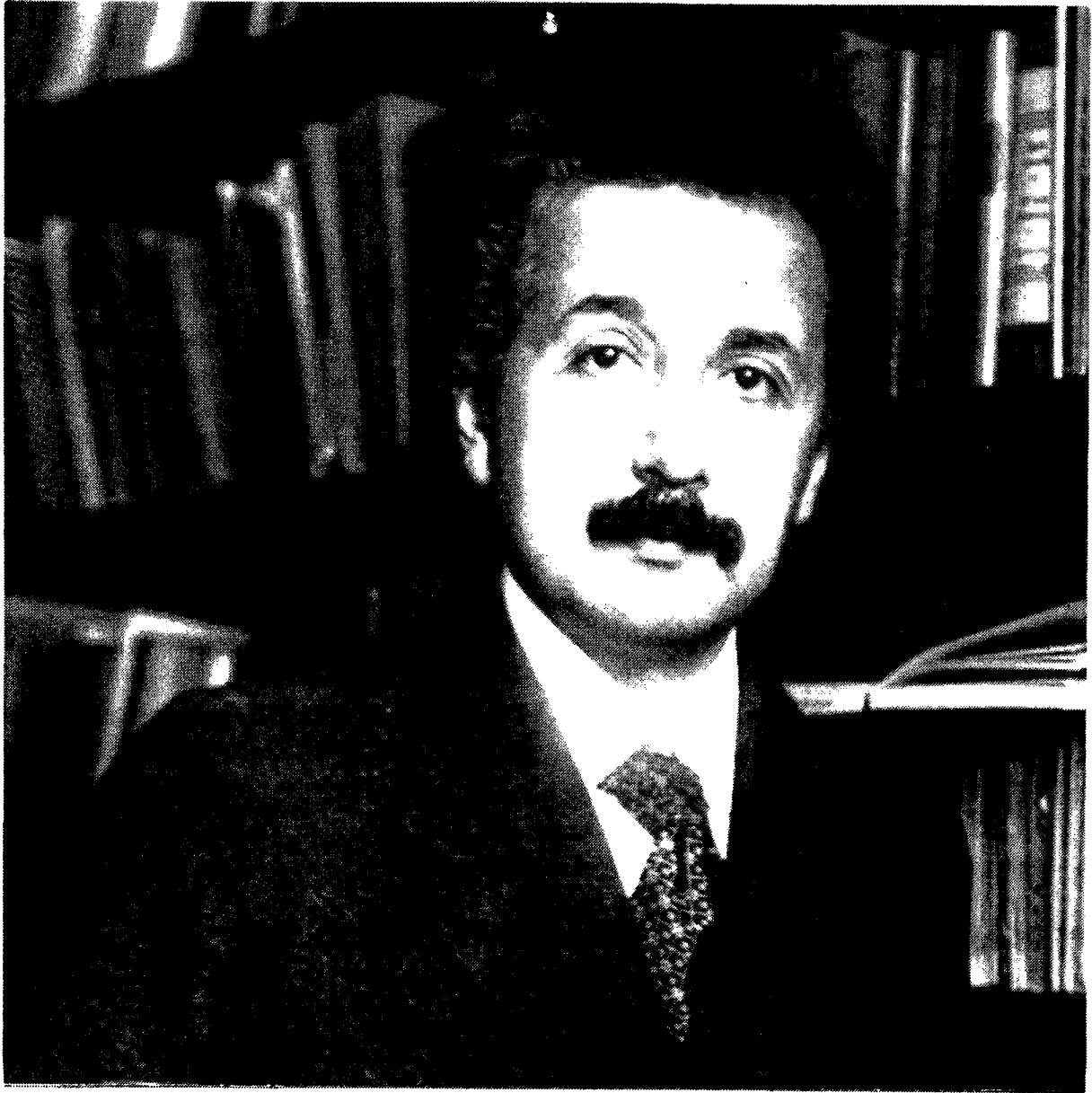
Die Vorstellung eines dynamischen expandierenden Universums hat sich nur langsam durchgesetzt. Freilich war schon Newton klar, dass die universell anziehende Gravitation kein statisches Universum zulässt. Der Einsturz der Fixsterne schien ihm unvermeidlich, wie z.B. aus einem seiner berühmten Briefe an Bentley (vom 25. Feb. 1693) deutlich hervorgeht. Darin schreibt er:

"And tho all ye matter were at first divided into several systems & every system by a divine power constituted like ours: yet would the outward systemes descend towards ye middlemost so yt this frame of things could not always subsist without a divine power to conserve it."

Tatsächlich lässt sich allgemein zeigen, dass die Newtonschen Gesetze kein statisches Staubuniversum zulassen. (Für einen Beweis im Rahmen der Newton-Cotes Kosmologie siehe O. Ruede & N. Straumann, Helv. Phys. Acta 70, 318 (1997).) Dasselbe kann man auch in ganz analoger Weise im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) beweisen. (Die Details findet man im Anhang zu diesem Prolog.) Speziell für homogene und isotrope Modelle erkannte dies Einstein in der erwähnten Arbeit von 1917, als er das erste von ihm Gesetze einer Gravitationstheorie genügende Weltmodell darstellte.

Zu dieser Arbeit schrieb er an seinen Freund und Kollegen Paul Ehrenfest am 4. Feb. 1917 aus Berlin:

"Ich habe wieder etwas verbrochen in der Gravitations-  
theorie, was mich ein wenig in Gefahr bringt, in ein  
Tollhaus interniert zu werden."



Da Einstein, vor allem wegen der Kleinheit der damals bekannten  
 Pekuliargeschwindigkeiten der Sterne (im Vergleich zu  $c$ ), vor allem  
 an einem statischen Universum festhielt, sah er sich gezwungen,  
 das seither viel diskutierte kosmologische Glied in seine Feld-  
 Gleichungen einzuführen, welches dem Vakuum eine repulsive  
 gravitative Wirkung zuschreibt.

Die Raumzeit des Einstein-Universums ist

$$M = \mathbb{R} \times S_a^3, \quad S_a^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\|^2 = a^2\}, \quad (1)$$

$$g = dt^2 - h. \quad (2)$$

Dabei ist  $t$  die natürliche Koordinate von  $\mathbb{R}$  und  $h$  ist die  
 Standard-Metrik der 3-Sphäre  $S_a^3$ .  $[(S_a^3, h)]$  ist ein  
 Riemannscher Raum konstanter Krümmung; siehe Abschnitt I.3.]

Für die Komponente  $R_{00} = \text{Ric}(\partial_t, \partial_t)$  des Ricci-Tensors  
 sowie die entsprechende Komponente des Einstein-Tensors  
 findet man leicht (Übung; siehe auch § I.4)

$$R_{00} = 0, \quad G_{00} = \frac{3}{a^2}. \quad (3)$$

Die ursprünglichen Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad \text{oder} \quad R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right) \quad (4)$$

können damit nicht erfüllt werden, denn die  $(00)$ -Komponenten  
 dieser Gleichungen führen auf

$$\frac{3}{a^2} = 8\pi G \rho, \quad T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T = \frac{1}{2} (\rho + 3p) = 0. \quad (5)$$

Die zweite Gleichung würde verlangen, dass es einen konstanten,  
 negativen Druck geben müsste. Deshalb hat Einstein das

Vielstrukture Kosmologische Wert hinzugefügt:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G_1 T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (6)$$

( $\Lambda$   $8\pi G_1$  ist eine Vakuumenergiedichte). Damit erhält man anstelle von (5)

$$\frac{3}{a^2} = 8\pi G_1 \rho + \Lambda, \quad 4\pi G_1 (\rho + 3p) - \Lambda = 0. \quad (7)$$

Für Staub ( $p=0$ ) muss also gelten

$$\boxed{\frac{1}{a^2} = 4\pi G_1 \rho = \Lambda.} \quad (8)$$

Die mittlere Dichte bestimmt somit den Krümmungsradius des Weltraumes. Der räumliche Teil ist dabei endlich, aber ohne Rand. Dies war eine grosse Novität. [Für die Gesamtmasse findet man:  $2GM = \pi a$ .]

-----  
 Einstein beschäftigt seine Arbeit mit den folgenden Sätzen:

Die theoretische Auffassung der tatsächlichen Welt wäre also, falls dieselbe unserer Betrachtung entspricht, die folgende. Der Krümmungscharakter des Raumes ist nach Maßgabe der Verteilung der Materie zeitlich und örtlich variabel, läßt sich aber im großen durch einen sphärischen Raum approximieren. Jedenfalls ist diese Auffassung logisch widerspruchsfrei und vom Standpunkte der allgemeinen Relativitätstheorie die naheliegendste; ob sie, vom Standpunkte des heutigen astronomischen Wissens aus betrachtet, haltbar ist, soll hier nicht untersucht werden. Um zu dieser widerspruchsfreien Auffassung zu gelangen, mußten wir allerdings eine neue, durch unser tatsächliches Wissen von der Gravitation nicht gerechtfertigte Erweiterung der Feldgleichungen der Gravitation einführen. Es ist jedoch hervorzuheben, daß eine positive Krümmung des Raumes durch die in demselben befindliche Materie auch dann resultiert, wenn jenes Zusatzglied nicht eingeführt wird; das letztere haben wir nur nötig, um eine quasistatische Verteilung der Materie zu ermöglichen, wie es der Tatsache der kleinen Sternengeschwindigkeiten entspricht.

## Fussnote (Einstein u. das Machsche Prinzip)

Einsteins kosmologisches Modell von 1917 war stark von Machschen Ideen motiviert. Hier ein typischer Satz aus der Arbeit:

"In einer konsequenten Relativitätstheorie kann es keine Trägheit gegenüber dem "Raum" geben, sondern nur eine Trägheit der Massen gegeneinander."

Zur Vorstellung eines asymptotisch flachen kosmologischen Modell (Weltinsel) sagt er ferner:

"[Dann] würde die Trägheit durch die (im Endlichen vorhandene) Materie zwar beeinflusst aber nicht bedingt. Wenn nur ein einziger Massenpunkt vorhanden wäre, so besäße er nach dieser Auffassung Trägheit...."

Im Sinne von Mach war Einstein lange der Meinung, dass "das  $g$ -Feld restlos durch die Massen der Körper bestimmt" wird.

Im Kap. 15 seines gewählten Buches beschreibt A. Pais wie Einsteins Einflussverhältnis für das Machsche Prinzip langsam abnahm. Ein Jahr vor seinem Tod schrieb er dazu an F. Pirani am 2. Feb. 1954:

"... von dem Machschen Prinzip sollte man nun eigentlich überhaupt nicht mehr sprechen."

Besonders antimachische Züge hat eine roherende Abwandlung des Einstein-Universums, die von I. Ozsváth und E. Schucking 1969 entdeckt wurde. Wir werden diese an anderer Stelle besprechen.

Es muss aber in diesem Zusammenhang betont werden, dass wir die Trägheit überhaupt nicht verstehen (Passivproblem).

Wenige Jahre später (1922) zeigte aber der russische Mathematiker A. Friedmann (Bild 2), dass die kosmologische Konstante gar nicht nötig ist, wenn nichtstationäre homogene und isobare Lösungen der ursprünglichen Feldgleichungen zugelassen werden. Einstein nahm diese Entwicklungen interessanterweise zunächst mit Zurückhaltung und Kritik auf. In einer zweiten Erwiderung (Z.f. Physik, 16, 228 (1923)) anerkannte er zwar, dass Friedmann's Lösung eine Alternative seines statischen Modells darstelle, aber er betrachtete diese offenbar als unphysikalisch. Im handschriftlichen Entwurf zu dieser Veröffentlichung findet man den durchgestrichenen Teilsatz "... kann keine physikalische Bedeutung zugeschrieben werden" (unveröffentlichtes Dokument 1-026). [Friedmann starb übrigens wenig später (1925) mit 37 Jahren an Typhus.]

Wir kommen nun zu einem ganz anderen Pionier, der heute als der eigentliche Vater der Urknall-Theorie gilt. Der Belgier Georg Lemaitre (1894-1966, Bild 2) wurde 1922 zum Priester geweiht. Zur Zeit als er fünf Jahre später am MIT in Boston den Ph.D. erlangte, entdeckte der Abbé unabhängig ebenfalls die Friedmann'schen Lösungen (mit und ohne  $\Lambda$ ) und wandte diese auf das Universum an. Er erkannte, dass die Verteilung der Galaxien die grossräumige Struktur des Universums abbilden könnte und leitete aus seinen Modellen das Hubble-Gesetz ab, welches die Dichtbewegung der Galaxien beschreibt. Gleichzeitig unter-

---

\*) Für ein ausgedehntes Verzeichnis der frühen Literatur verweise ich auf G. Ellis: The expanding universe: A history of cosmology from 1917 to 1960. Proceedings of Osgood Hill conference, ed. D. Howard (1989).

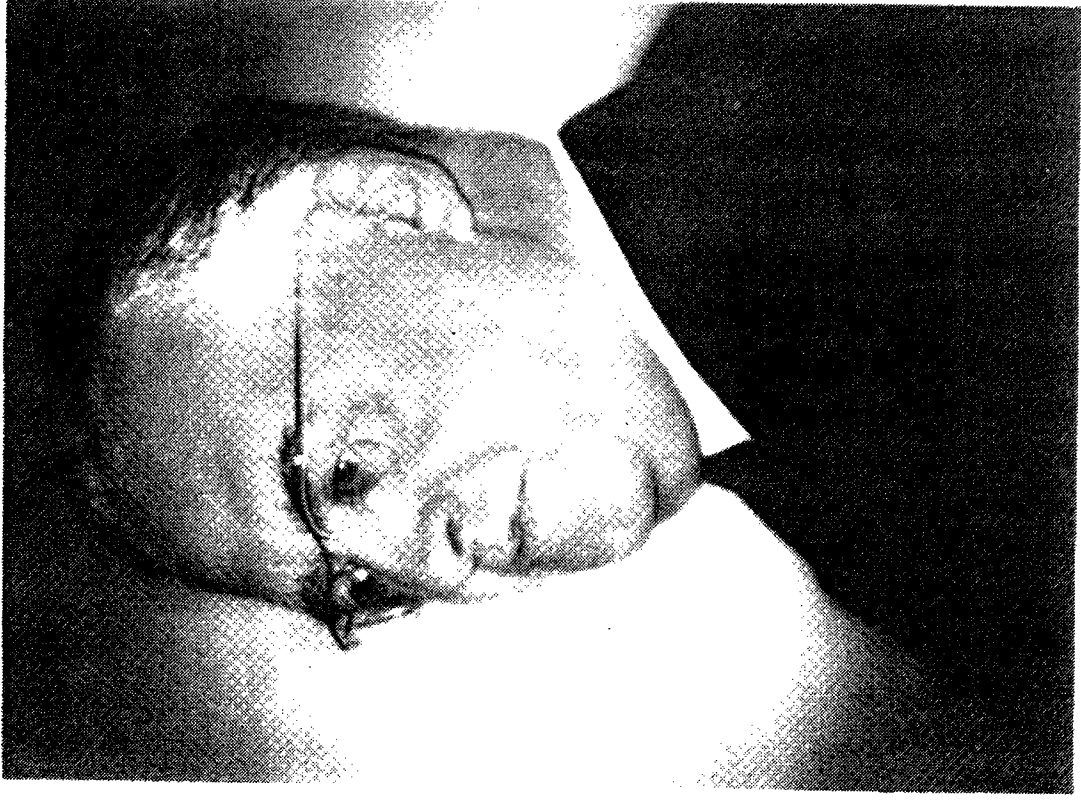


Figure 2.9 Georges Lemaître  
(1894–1966)



Figure 2.8 Alexander Friedmann  
(1888–1925)



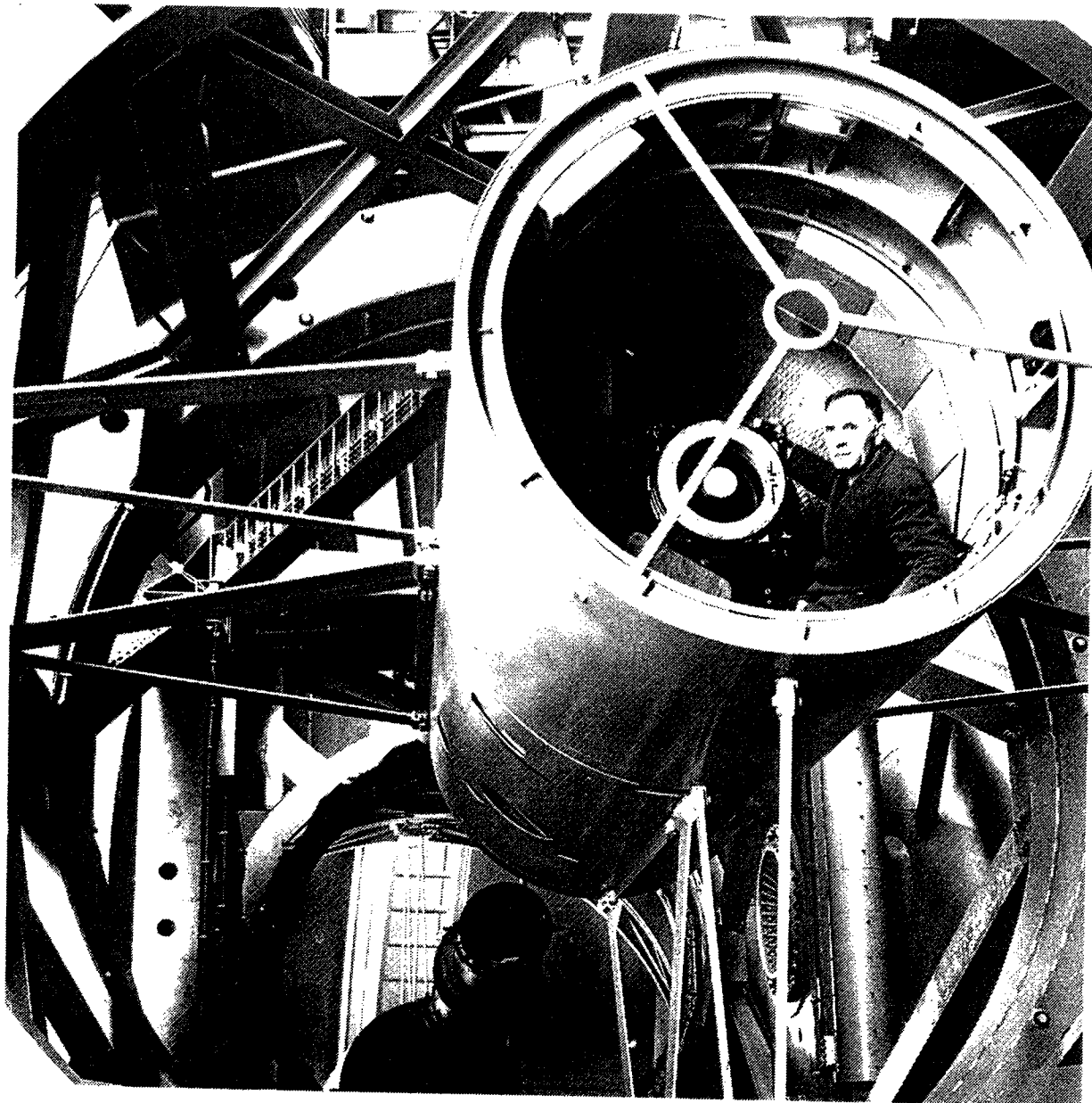
kehrte er die damals bekannten Beobachtungen in diesem Sinne. (Tiedmann hatte noch keine Beziehung zu den astronomischen Beobachtungen herstellen können.) Lemaitre zeigte zudem, dass Einsteins Modell unsichtbar ist. Deshalb ist auch für die modifizierten Feldgleichungen kein statisches Universum möglich.

Es dauerte freilich einige Jahre bis sich Lemaitres Vorstellungen durchsetzten. Entscheidend dafür war die epochemachende astronomische Entdeckung von E. Hubble, dass das System der Galaxien auseinanderfliegt. (Vor dieser Beschreibung war Hubble Boxer und Rechtsanwalt; siehe Bild 3.) Die unvollständigen Einrichtungen auf Mount Wilson (und später auf Mount Palomar) ermöglichten es ihm, systematisch die extragalaktischen Nebel zu erforschen. Dabei stellte er durch Bestimmung der Rotverschiebung fest, dass die Galaxien umso schneller von uns wegfliegen, je weiter sie entfernt sind. Innerhalb der damaligen Genauigkeit ergab sich dabei ein lineares Gesetz. Dieses gab Hubble im Jahre 1929 bekannt. Genau dieses Gesetz hatte Lemaitre bereits zwei Jahre vorher auf theoretischem Wege erhalten.

Hier muss erwähnt werden, dass Vesto Melvin Slipher vor Hubble bereits Radialgeschwindigkeiten von Nebeln gemessen hat<sup>\*)</sup>. Zu jener Zeit waren die Entfernungen der Nebel noch nicht bekannt, und es wurde ein erbittertes Streit darüber geführt, ob sie sich innerhalb unseres Sternsystems - der Galaxis - oder außerhalb ihrer Grenzen befinden.

---

<sup>\*)</sup> Schon 1912 fand Slipher (Lowell Observatory, Flagstaff (Arizona)) für Andromeda (M31) die Geschwindigkeit von 300 km/s.



Bahnbrechende kosmologische Entdeckungen gelangen Edwin Hubble durch jahrelang geübte Beobachtungsgabe, persönlichen Einsatz und Zugang zu den besten Instrumenten seiner Zeit. Oben ist er in der Beobachtungskammer des 5-Meter-Hale-Teleskops auf dem Mount Palomar (Kalifornien) zu sehen; die Aufnahme stammt aus der Zeit um 1950. Nach Abschluss des Studiums an der Universität Chicago sollte Hubble eigentlich Anwalt werden; er fand aber am Auslegen von Gesetzestexten wenig Gefallen (unten links). In späteren Jahren genoss er das Alleinsein beim Angeln (unten rechts).

Hubble entdeckte, dass sich die Mehrzahl der Nebel (36 von 41 gemessenen\*) von uns entfernt und ihre Fluchtgeschwindigkeit fast 2000 km/s erreichen. Nur wenige (nämlich - wie sich später herausstellte - nahe Galaxien) nähern sich uns. Erst wesentlich später konnte geklärt werden, dass sich die Sonne um das Zentrum unserer Galaxis mit einer Geschwindigkeit von etwa 250 km/s bewegt, und ein grosser Teil der "Annäherungsgeschwindigkeiten" hängt eben damit zusammen, dass sich die Sonne auf diese Objekte zubewegt.

Mit Hilfe der publizierenden Gemeine wurden dann in den 20iger Jahren die Entfernungen zu den Nebeln gemessen. Damit war endgültig geklärt, dass letztere weit entfernte Sternsysteme sind, die unserem eigenen sehr ähneln.

Es ist interessant, dass Hubble in seiner epochalen Arbeit von 1929 die Rotverschiebung der Galaxien im Sinne des statischen Modells von de Sitter aus dem Jahre 1917 interpretierte und keineswegs im Sinne der Friedmann-Lemaître-Modelle. Die statische de Sitter-Lösung erfüllt die Einsteinschen Vakuumgleichungen mit  $\Lambda > 0$ . Sie lautet

$$g = \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (9)$$

wobei

$$\Lambda =: \frac{3}{R^2}. \quad (10)$$

Diese "anti-Kadische" Lösung ohne Materie hat eine interessante

---

\*) Diese werden bereits im Buch von Eddington von 1924 aufgeführt. Einen Artikel darüber findet man in der New York Times, Jan. 19, 1921, p. 6.

Eigenschaft: Für Lichtquellen, welche sich entlang statischer Weltlinien bewegen, gibt es eine positive Rotverschiebung, welche als "de Sitter-Effekt" bekannt wurde. Man dachte, dass dies etwas mit den Rotverschiebungen zu tun haben könnte, die Slipher gefunden hatte. Da die statischen Weltlinien keine Geodäten sind, wird ein freifallendes Teilchen relativ zu diesen beschleunigt und zu einer zusätzlichen (Doppler-) Rotverschiebung Anlass geben, welche den Relativgeschwindigkeiten entspricht. In der 2. Auflage seines Buches, die 1924 erschien, schreibt Eddington:

"de Sitter's theory gives a double explanation for this motion of recession; first there is a general tendency to scatter ... second there is a general displacement of spectral lines to the red in distant objects owing to the slowing down of atomic vibrations ... which would erroneously be interpreted as a motion of recession."

In diesem Sinne hat Hubble 1929 seine Beobachtungen interpretiert, denn er sagt:

"The outstanding feature however is that the velocity-distance relation may represent the de Sitter effect and hence that numerical data may be introduced into the discussion of the general curvature of space. In the de Sitter cosmology, displacements of the spectra arise from two sources, an apparent slowing down of atomic vibrations and a general tendency of particles to scatter. The latter involves a separation and hence introduces the element of time. The relative importance of the two effects should determine the form of the relation between distances and observed velocities."

Die Vorstellungen eines statischen Universums waren eben um diese Zeit immer noch vorherrschend. Diese kamen aber nun ins Wanken, vor allem unter dem Einfluss von A. Eddington, der damals als eine Art Papst der Astrophysik galt. Dieser erkannte die Bedeutung von Lemaitres Arbeiten und liess sie aus dem französischen ins englische übersetzen. Dabei: Lemaitre zeigte im Oktober 1927 auf dem Solway-Kongress seine Arbeit Einstein. Der winkte ab mit der Bemerkung: "Vos calculs sont corrects, mais votre physique est abominable".

Auch Einstein stellte sich bald auf die neue Lage ein und verwarf fortan das kosmologische Glied, dessen Einführung er "als grösste Dummheit seines Lebens" bezeichnete. Später schrieb er dazu:

Würde die HUBBLE-Expansion bei Aufstellung der allgemeinen Relativitätstheorie bereits entdeckt gewesen sein, so wäre es nie zur Einführung des kosmologischen Gliedes gekommen. Es erscheint nun a posteriori um so ungerechtfertigter, ein solches Glied in die Feldgleichungen einzuführen, als dessen Einführung seine einzige ursprüngliche Existenzberechtigung — zu einer natürlichen Lösung des kosmologischen Problems zu führen — einbüsst.

An diese Stelle gehört eine amüsante Geschichte. Einstein publizierte seine geänderte Haltung in den Berliner Sitzungsberichten. Das korrekte Zitat lautet:

Einstein, A. (1931). Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss....

Diese Stelle wurde oft zitiert, aber selten gelesen. Damit änderten sich die Zitationen ganz allmählich. Hier eine Liste aus

## Bekannten Arbeiten und Büchern:

- A. Einstein. 1931. Sitzsber. Preuss. Akad. Wiss. ...
- A. Einstein. Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. ... (1931)
- A. Einstein (1931). Sber. Preuss. Akad. Wiss. ...
- A. Einstein. .. 1931. Sb. Preuss. Akad. Wis. ...
- A. Einstein. S.-B. Preuss. Akad. Wis. ... 1931
- A. Einstein. S.B. Preuss. Akad. Wiss. (1931) ...
- A. Einstein and Preuss. S. B. (1931) Akad. Wiss. ...

Eines Tages wird vermutlich ein junger Wissenschaftshistoriker herauszufinden versuchen, was und dem hoffnungsvollen jungen Physiker S.B. Preuss passiert ist, der nach dieser Arbeit von der Szene verschwand.

Damit habe ich in groben Zügen gezeichnet, wie es von einer statischen zu einer dynamischen Vorstellung des Universums gekommen ist, welche schlussendlich durch astronomische Beobachtungen stützgestützt wurde. Wandlungen dieser Art nennt man heute meist Paradigmenwechsel (nach T. Kuhn). Wesentlich später (1946) beschrieb Lemaitre seine Vorstellungen des Urknalls mit folgenden Worten:

"Die Entwicklung der Welt könnte man vergleichen mit dem Ende eines Feuerwerks — einige rote Feuerschwaben und Asche. Wir stehen auf einer gut gekühlten Schlacke und sehen das langsame Schwänden der Sonnen, und wir versuchen uns zu erinnern an den vergangenen Glanz des Anfangs der Welt."

Zeitweise geriet das Standardmodell von Friedmann und Lemaitre (ohne kosmologisches  $\Lambda$ ) in Kritik, da das Alter des Universums aufgrund von Hubbles Messungen im Vergleich zum Alter der Sterne zu kurz herauskam.

Das änderte sich aber als neue astronomische Beobachtungen, vorallem durch V. Freeze am Mt. Palomar Observatorium, zu einer erheblichen Revision des Hubble-Parameters führten. Tabäbidid ist das Alter des Universums, auf welches man aus der galaktischen Flucht schliesst, in guter Übereinstimmung mit dem Alter der ältesten Sterne und ebenso mit dem Alter der Elemente, welches mit radioaktiven Datierungsmethoden gewonnen wird. Das ist ein sehr wichtiger Test des Standard-Modells.

### Kosmische Hintergrundstrahlung

Im Jahre 1965 entdeckten Penzias und Wilson ganz zufällig eine Hintergrundstrahlung, welche sehr schnell als "Nachglühen" des Urknalls interpretiert wurde (S. 4). Eine solche Strahlung, welche als Relikt des heissen primordialen Feuerballs existieren sollte, war <sup>von</sup> Gamows Mitarbeitern Alpher und Herman bereits 1948 vorausgesagt worden. Sie hatten dabei die Temperatur auf 5K abgeschätzt. In diesem Zusammenhang sind die folgenden Erinnerungen von A. Sandage sehr interessant (Saas-Fee Advanced Course 23, Springer 1993):

<sup>1</sup> Remembrance of the 1948 prediction of the cosmic microwave background (CMB) radiation, hinted at by Gamow and thereafter predicted in detail in a sweeping vision of "creation" by Alpher and Herman, was the occasion of a famous reply by Gamow to a question put by a session chairman at (probably) the fourth Texas Symposium on High Energy Astrophysics in 1965. The session was on the discovery by Penzias and Wilson (1965) of the CMB, which had just been announced. The chairman, after the observational data had been presented and discussed asked Gamow, in the audience of perhaps 1000 persons, if this was the background radiation which Alpher, Herman, Follin, and he had predicted. Gamow replied "Well, I lost 5 cents around here someplace and now someone has found a nickel nearby. It looks the same as mine. I would have thought that this is the exact same that I lost, but then all nickels look pretty much the same." A thousand heard and saw this lost-and-found exchange.

<sup>2</sup> The prediction of the radiation was so explicit by Alpher and Herman that many believe the CMB should be called the Alpher-Herman radiation. Critics of this view have stated that, although Alpher, Herman, and Follin did make the prediction, they could not have believed much in it because, it has been said, they mounted no plans to discover it experimentally, contrary, for example, to the plans explicitly made at Princeton, based on the later rediscovery of the physics of the hot universe at the creation. The criticism is not correct.

Sometime in the mid 1950's James Follin appeared in my office in Pasadena to talk about observational cosmology. Not knowing of his and his colleague's developments concerning genesis, I asked what his line of work was. He said that the George Washington University group was engaged in mounting efforts to observe the birthday of the universe directly. Their plan was to use rockets to observe the highly redshifted Lyman alpha line which they believed was related in some way to their predicted "5°K" relic radiation. This all sounded off the wall to me, not knowing of the "new cosmology", having come from a training as a simple classical (observational) cosmologist concerned solely with problems of galaxy distances and redshifts. However, Follin was dead serious, talking Sanskrit to my naivety in the offices still dominated by Hubble's ghost.

More recently Alpher and Herman told that they had, in fact, begun contacting radar physicists in the late 1940's, discussing the idea of an experiment. In a letter of December 1989 they wrote "We also discussed this subject with some of the radar experts at the Naval Research Laboratories and the National Bureau of Standards during that same period when radio astronomy was in its infancy."

Zu jener Zeit stand die "Steady State" Theorie im Vordergrund. In diesem Klima fanden die Pionierarbeiten von Alpher, Herman und Gamow nicht die nötige Anerkennung. Auch nach 1965 wurden ihre Beiträge für längere Zeit ignoriert. Es muss deshalb umso deutlicher hervorgehoben werden, wieviel diese Autoren von der heutigen Urknalltheorie bereits vorgegenommen haben.

Lemaître lag im Krankenhaus, als ihm sein Kollege Godart an der Katholischen Universität Löwen das Astrophysical Journal vom 1. Juli 1965 überreichte, das die Arbeiten von Penzias und Wilson sowie der Princeton Gruppe um Dicke enthielt. Lemaître starb dort nach langer Krankheit am 20. Juni 1966.

An der kosmologischen Interpretation der Mikrowellen-Hintergrundstrahlung kann heute nicht mehr gezweifelt werden, da diese ungläublich genau einer Planck-Verteilung folgt.

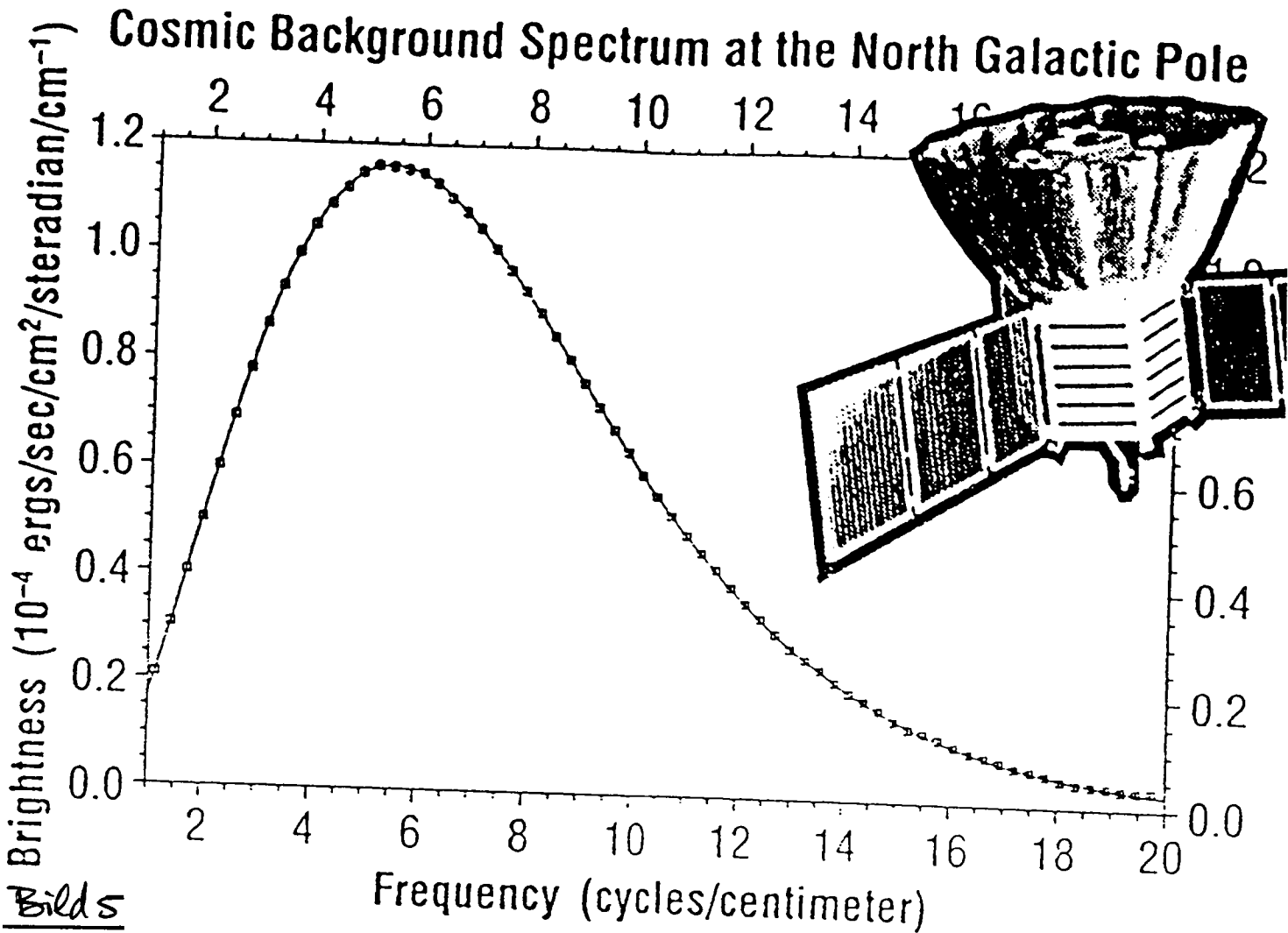




Arno A. Penzias (links) und Robert W. Wilson (rechts) von den Bell-Laboratorien in Holmdel (New Jersey) vor der Hornan-

tenne, mit der sie die kosmische Hintergrundstrahlung registrierten und damit eine Vorhersage der Urknall-Theorie bestätigten.

Dies wurde vor etwa vier Jahren mit Hilfe des eigens dafür gebauten Satelliten COBE (Cosmic Background Observer) auf eindrucksvolle Art sichergestellt. Schon nach wenigen Minuten Überflug er die vorstehende spektrale Verteilung (Bilds).



Bilds

**Applause line.** Measurements of the background radiation made by COBE (inset) fit a 2.735 K spectrum to 1%.

Für die Kosmologie sehr wichtig ist ferner die Tatsache, dass die 3K-Hintergrundstrahlung aus allen Richtungen ungleichmäßig gleichmäßig auf uns einfallt. Erst mit COBE gelang es, winzige Richtungsabhängigkeiten ( $\sim 10^{-5}$ ) der Strahlungsintensität festzustellen. (Waheres dazu in Kap. III.)

Mit den wesentlichen Entwicklungen der Elementarteilchenphysik in den 70iger Jahren eröffnete sich die Möglichkeit, tiefer in das frühe Universum vorzustoßen und auf schreckliche Weise alte und neue kosmologische Rätsel anzugehen. Ausdehnung, Alter, Struktur und Inhalt des heutigen Universums wurden wahrscheinlich wesentlich durch Hadronenzerfallsprozesse im sehr frühen Universum mitbestimmt. Hier bleibt aber das meiste noch sehr spekulativ. (Siehe dazu die Vorlesung Kosmologie II.)

\*

\*

\*

# Umwegbarkeit eines statischen Staubuniversums für $\Lambda=0$

Diese Einsicht gewann Einstein in seiner epochenmachenden Arbeit von 1917 unter starken zusätzlichen Symmetrieanahmen (Homogenität und Isotropie). Wir geben hier einen allgemeinen Beweis. Ausschliessend untersuchen wir den Fall  $\Lambda \neq 0$  und zeigen, dass für Staub die einzige statische Lösung das Einstein-Universum ist. Dieses ist aber instabil, wie zuerst G. Lemaitre erkannt hat.

## 1. Identitäten für Killingfelder

Wir beginnen mit einigen Vorbereitungen. Es sei  $\xi^\alpha$  ein Killingfeld. Dafür gilt die Identität

$$\xi_{\mu;\alpha\beta} = \xi^\lambda R_{\lambda\beta\alpha\mu}. \quad (1)$$

Beweis. Für jedes Vektorfeld gilt

$$\xi_{\sigma;\rho\mu} - \xi_{\sigma;\mu\rho} = \xi^\alpha R^\alpha_{\sigma\rho\mu}. \quad (2)$$

Dazu addieren wir die zyklischen Vertauschungen in  $(\sigma, \rho, \mu)$  und benutzen die 1. Bianchi-Identität, um dem Resultat:

$$\xi_{\sigma;\rho\mu} - \xi_{\sigma;\mu\rho} + \xi_{\rho;\mu\sigma} - \xi_{\rho;\sigma\mu} + \xi_{\mu;\sigma\rho} - \xi_{\mu;\rho\sigma} = 0. \quad (3)$$

Für ein Killingfeld wird daraus, unter Benutzung der Killinggleichung  $\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0$ :

$$\xi_{\sigma;\rho\mu} - \xi_{\sigma;\mu\rho} - \xi_{\mu;\rho\sigma} = 0. \quad (4)$$

Setzen wir dies in (2) ein, so ergibt sich die Behauptung (1).

Als wichtige Identität erhalten wir aus (1) durch Kontraktion

$$\xi^{\mu}{}_{;\alpha}{}^{\alpha} = -R_{\mu\lambda} \xi^{\lambda}. \quad (5)$$

Dies folgt auch aus (2) durch Kontraktion bez.  $\sigma$  und  $\rho$  sowie der  $\xi^{\sigma}{}_{;\sigma} = 0$  (als Konsequenz der Killinggleichung).

Die Identität (5) schreiben wir jetzt im streifen Kalkül. Es sei  $R(\xi)$  die 1-Form mit den Komponenten  $R_{\mu\nu} \xi^{\nu}$ . Wegen der Killinggleichung haben wir dann für die 1-Form  $\xi$  nach (5)

$$\delta \xi = -2R(\xi). \quad (6)$$

Nun machen wir Gebrauch von der folgenden Identität für eine beliebige  $p$ -Form  $\Omega$  (Herleitung in Fußnote):

$$\delta(\xi \wedge \Omega) = -\xi \wedge \delta\Omega - L_{\xi}\Omega \quad (7)$$

(in  $L_{\xi}$  ist  $\xi$  das Vektorfeld zu  $\xi$ ). Wenden wir dies auf  $\Omega = d\xi$  an und benutzen (6), so kommt (da dann  $L_{\xi}\Omega = dL_{\xi}\xi = 0$ )

$$\delta(\xi \wedge d\xi) = -2\xi \wedge R(\xi). \quad (8)$$

Übung. Leide (8) auch in Indexschreibweise her.

Falls  $\xi$  speziell die Frobenius-Bedingung

$$\xi \wedge d\xi = 0 \quad (9)$$

erfüllt, so gilt also

$$\boxed{\xi \wedge R(\xi) = 0.} \quad (10)$$

Diese Beziehung wird unten sehr nützlich sein.

Lemma: Herleitung von (7). Zunächst ist

$$\delta(\Xi \wedge \Omega) = (-1)^{p+1} \star^{-1} d \star (\Xi \wedge \Omega) = - \star^{-1} d i_{\Xi} \star \Omega.$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{(-1)^p \Omega \wedge \Xi}$$

Beim letzten Gleichheitszeichen haben wir die algebraische Identität

$$\star(\Omega \wedge \Xi) = i_{\Xi} \star \Omega \tag{11}$$

(Übungsaufgabe) verwendet. Damit erhalten wir unter Benutzung der Cartan-Identität  $L_{\Xi} = d \circ i_{\Xi} + i_{\Xi} \circ d$ :

$$\delta(\Xi \wedge \Omega) = - \star^{-1} [L_{\Xi} \star \Omega - i_{\Xi} d \star \Omega]$$

$$= -L_{\Xi} \Omega + \star^{-1} i_{\Xi} d \star \Omega. \tag{12}$$

Wir haben dabei benutzt, dass für ein Killingfeld  $\Xi$  die Lieoperation mit  $L_{\Xi}$  vertauscht.

Für den letzten Term in (12) notieren wir

$$i_{\Xi} d \star \Omega = i_{\Xi} \star \underbrace{\star^{-1} d \star \Omega}_{(-1)^p \delta \Omega} \stackrel{(11)}{=} (-1)^p \star (\delta \Omega \wedge \Xi) = - \star (\Xi \wedge \delta \Omega).$$

Also ist der letzte Term in (12) gleich  $-\Xi \wedge \delta \Omega$ , somit (7) bewiesen ist.

2. Ein statisches Staubuniversum ist für  $\Lambda = 0$  und mit den Feldgleichungen verträglich

---

Für ein statisches Universum mit Killingfeld  $\Xi$  gilt die Frobeniusbedingung (9) und folglich (10). In Komponenten lautet diese Gleichung

$$\Xi^{\lambda} R_{\lambda[\alpha \Xi \beta]} = 0. \tag{13}$$

Für ein Staubuniversum mit <sup>-20-</sup> Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu \quad (14)$$

geben die Feldgl. (wobei wir im Hinblick auf später noch eine kosmologische Konstante  $\Lambda$  zulassen)

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G_1 (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T) - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (15)$$

wegen (13)  $u_{[\alpha} \xi_{\beta]} = 0$ , d.h.  $\xi^\mu$  ist proportional zur Viergeschwindigkeit  $u^\mu$ .

In adaptierten Koordinaten ist

$$\xi = \partial_t, \quad u = \frac{1}{\phi} \partial_t. \quad (16)$$

Die Feldgl. für  $\Lambda = 0$  implizieren ( $G_1 = 1$ )

$$G_1(u, u) = 8\pi T(u, u) : \quad {}^{(3)}R = 16\pi\rho \quad (17)$$

(siehe Übung #) sowie

$$Ric(u, u) = 8\pi [T(u, u) - \frac{1}{2} Sp(T)] :$$

$$\frac{1}{\phi} {}^{(3)}\Delta\phi = 4\pi G_1 (\rho + \underbrace{\xi p}_0) = \frac{4\pi G_1 \rho}{\phi}. \quad (18)$$

Für Staub ist  $u$  geodätisch und also (mit Übung #)

$$0 = \nabla_u u = \nabla_{e_0} e_0 = - \underbrace{\omega^i_0(e_0)}_{\frac{1}{\phi} \phi^{li} \theta^0(e_0)} e_i = -\frac{1}{\phi} \phi^{li} e_i, \quad (19)$$

somit  $d\phi = 0$ ,  $\phi = \text{const.}$  Wir können  $t$  so normieren, dass  $\phi \equiv 1$ . Dann impliziert aber (18), dass  $\rho = 0$  sein müsste.

### 3. Statisches Staubuniversum mit kosmologischer Konstante

Alles was im letzten Abschnitt von Gl. (17) ausgeführt wurde bleibt bestehen. Insbesondere hat die Metrik die Form

$$g = \varphi^2 dt^2 - h, \quad \varphi^2 = (\partial_t, \partial_t) = (\xi, \xi). \quad (20)$$

Natürlich ist  $\varphi$   $t$ -unabhängig, was auch aus

$$L_{\xi} \varphi^2 = L_{\xi} * (\xi \wedge * \xi) = 0$$

folgt ( $L_{\xi}$  vertauscht mit  $*$  und  $L_{\xi} \xi = 0$ ). Überdies zeigt Gl. (19), dass  $d\varphi = 0$  bestehen bleibt. Weiter können wir  $t$  so normieren, dass  $\varphi \equiv 1$  ist. Dann lauten die Komponenten des Ricci-Tensors nach der Übung #

$$R_{00} = 0, \quad R_{0i} = 0,$$

$$R_{ij} = {}^{(3)}R_{ij}. \quad (21)$$

Die Feldgl. (15) geben deshalb

$$\underline{00}: \quad 0 = 4\pi G \rho - \Lambda, \quad (22)$$

$$\underline{ik}: \quad {}^{(3)}R_{ik} = (4\pi G \rho + \Lambda) h_{ik} \stackrel{(22)}{=} 8\pi G \rho h_{ik}. \quad (23)$$

Es ist also  $\rho = \text{const}$ ,  $\Lambda > 0$  und  $h$  ist die Metrik eines dreidimensionalen Einstein-Raumes. Dann weiss man (siehe Fussnote), dass dies ein Raum konstanter positiver Krümmung ist, d.h. er ist von der Form

$$S^3/G, \quad G \text{ eine endliche Untergruppe von } SO(4), \text{ welche frei auf } S^3 \text{ operiert.} \quad (24)$$

Modulo globale Fragen ist also die Raumzeit



$$M = \mathbb{R} \times S_a^3, \quad g = dt^2 - h, \quad (25)$$

$h$  = Standardmetrik auf der Sphäre  $S_a^3$  mit Radius  $a$ .

Ferner gilt

$$\frac{1}{a^2} = 4\pi G \rho = \Lambda. \quad (26)$$

Dies ist gerade das Einstein-Universum.

Fussnote. Wir beweisen hier die

Proposition. Es sei  $(M, g)$  ein dreidim. Einstein-Raum,  $\text{Ric}(g) = \lambda g$  ( $\lambda = \text{const}$ ), dann ist es ein Raum konstanter Krümmung.

Beweis. Wir benutzen den Abschnitt # über Räume konstanter Krümmung. Für eine Ebene  $E \subset T_x(M)$  bezeichne  $K_x(E)$  wie dort die Schnittkrümmung. Es sei  $\{e_i\}_{i=1,2,3}$  eine ortonormierte Basis von  $T_x(M)$  damit, dass  $\text{Span}\langle e_1, e_2 \rangle = E$ . Daneben sei  $E_{ij}$  die Ebene, welche durch  $\{e_i, e_j\}_{i \neq j}$  aufgespannt wird.

Wir haben z.B.

$$\begin{aligned} \text{Ric}(e_1, e_1) &= R_{11} = R^i_{1i1} = R^2_{121} + R^3_{131} \\ &= R(e_2, e_1, e_2, e_1) + R(e_3, e_1, e_3, e_1) \\ &= K_x(E_{12}) + K_x(E_{13}), \end{aligned}$$

also

$$R_{11} = 0 + K_x(E_{12}) + K_x(E_{13});$$

ebenso

$$R_{22} = K(E_{21}) + 0 + K(E_{23}),$$

$$R_{33} = K(E_{31}) + K(E_{32}) + 0.$$

Daraus folgt

$$\underbrace{R_{11} + R_{22} - R_{33}}_{\lambda} = 2 K(E_{12}) = 2 K(E),$$

d.h.

$$K(E) = \lambda/2.$$

□

\* \* \*



# I. Friedmann-Lemaître-Modelle

*“Im Universum gibt es keinen Mittelpunkt und keine Peripherie, sondern sein Mittelpunkt ist überall”.*

Giordano Bruno (1548-1600)

Wenn wir in Gedanken den Zeitsinn umkehren, dann wird aus der galaktischen Flucht ein Einsturz der kosmischen Massen. Die mittlere Dichte des heutigen Universums ist – trotz deren Kleinheit – so hoch, dass dieser Kollaps auch bei sehr hohen Dichten und Temperaturen nicht aufgehalten werden kann. Die Singularitätstheoreme der ART legen es nämlich nahe, dass sich – im klassischen Rahmen – physikalische Singularitäten ausbilden.<sup>1</sup> In diesem Zusammenhang ist die Bemerkung interessant, dass der beobachtbare Bereich des Universums vergleichbar zu seinem Gravitationsradius ist.<sup>2</sup> Deshalb war im frühen Universum die Gravitation übermächtig.

Die Gesetze der Gravitation legen es also nahe, dass das heutige Universum explosionsartig aus einem sehr heissen und dichten Zustand hervorgegangen ist. Ein eindrückliches Zeugnis dafür gibt die thermodynamisch verteilte kosmische  $3K$ -Hintergrundstrahlung. Diese ist das Relikt der heissen Gleichgewichtsstrahlung, welche sich von der Materie entkoppelte, als die Elektronen und Atomkerne bei etwa  $4000\text{ K}$  zu neutralen Atomen kombinierten.

Wir werden im folgenden sehen, dass die grossräumige Struktur und die Dynamik der Expansion in erster Näherung durch einfache hochsymmetrische Modelle beschrieben werden können, welche zuerst von Friedmann und einige Jahre später unabhängig von Lemaître entwickelt wurden (s. Einleitung). Dieses Faktum ist sehr erstaunlich und vereinfacht die theoretische Analyse ganz ausserordentlich.

## 1. Homogenität und Isotropie des beobachtbaren Universums

Mit den grössten optischen Teleskopen können wir heute über 10 Gigalichtjahre zurückblicken. Das unübersehbare Reich der Galaxien ist nicht gleichmässig verteilt. Ein grosser Teil befindet sich in Gruppen und Haufen mit den verschiedensten Eigenschaften. Reiche Galaxienhaufen sind die grössten gravitativ gebundenen Materieansammlungen im Universum. Sie können tausende von Mitgliedern enthalten. Die Haufen befinden sich ihrerseits manchmal in Superhaufen, welche den Durchmesser grosser Galaxienhaufen um einige zehnmal übersteigen.

---

<sup>1</sup>Diese Theoreme sichern freilich nur die Existenz von unvollständigen zeitartigen oder lichtartigen Geodäten.

<sup>2</sup>Setzen wir den Hubble-Radius  $c/H_0$  ( $H_0$  = Hubble Parameter; siehe Abschnitt 1.4) gleich dem Schwarzschild-Radius der Masse innerhalb des Volumens  $(4\pi/3)(c/H_0)^3$ , so ergibt sich für die mittlere Dichte der kritische Wert  $\rho_{crit} = 3H_0^2/8\pi G$ , dessen Bedeutung später diskutiert wird. Die mittlere materielle Dichte ist aber, wie wir später sehen werden, etwa  $0.3 \rho_{crit}$ .

Grossangelegte Durchmusterungen zeigen eine überraschende Verteilung der Galaxien. Neben den Superhaufen gibt es Ansammlungen von Galaxien in dünnen Wänden und gelegentlich in langen Ketten, die sich über zehn und mehr Megaparsec hinziehen. Dazwischen gibt es auffällige Lücken oder Lehrräume, die manchmal fast so gross sind wie die gigantischen Supergaufen. Auf Skalen von einigen Dutzend Megaparsec scheint das Universum eine schwammähnliche Struktur zu besitzen.

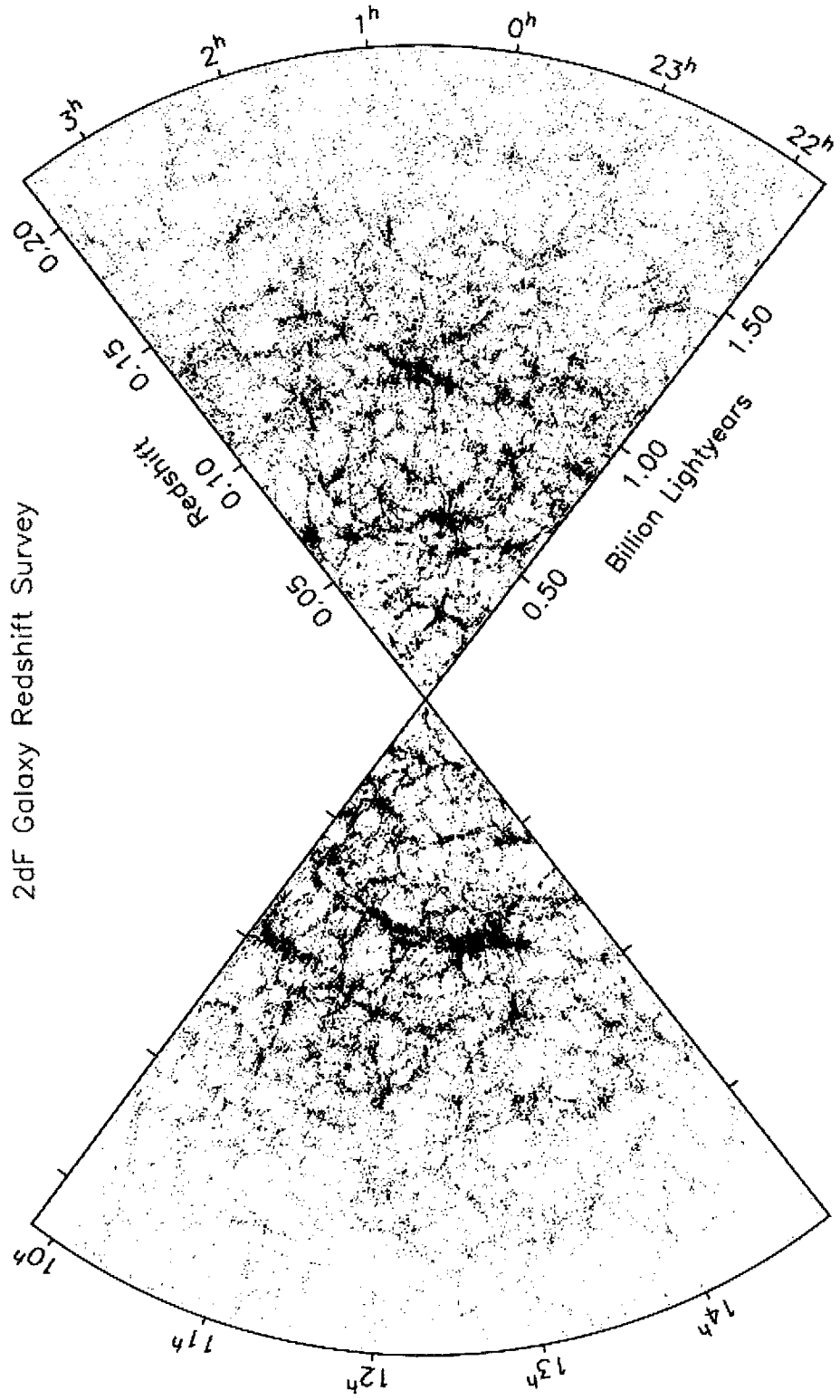
Bis zu grossen Dimensionen hat demnach die Galaxienverteilung eine klumpige Struktur. Neue Durchmusterungen zeigen nun deutlich, dass oberhalb etwa 100 Megaparsec die Verteilung gleichförmig wird. Der Stand der Forschung wird derzeit (2004) durch die zwei ausgedehntesten dreidimensionalen Galaxienkarten repräsentiert, welche die Abkürzungen *2dF* (für "two degree field") und *SDSS* (für "Sloan Digital Sky Survey") tragen. Die erste ist 2003 abgeschlossen worden. Mit einem Multiobjektspektrographen wurden pro Nacht über Jahre Spektren von über 3000 Galaxien aufgenommen und daraus die Rotverschiebungen bestimmt. Die Himmelsdurchmusterung konzentrierte sich auf eine schmale Zone am Himmel. Das Bild auf der nächsten Seite zeigt einen Blick von "oben" auf den ausgewählten Bereich. Insgesamt wurden die Rotverschiebungen von 220'000 Galaxien bestimmt.

Das qualitativ wichtigste Ergebnis der gewonnenen Karte ist, dass es über die schon früher entdeckten Strukturen (Filamente, Klumpen und leeren Blasen, mit typischen Durchmessern von 100 Millionen Lichtjahren) hinaus keine noch grösseren Strukturen gibt. Für diesen Sachverhalt wurde das Schlagwort "*end of greatness*" geprägt. Für weitere Informationen und Erläuterungen verweise ich auf die Homepage: <http://www.mso.anu.edu.au/2dFGRS>.

Die Ergebnisse von *2dF* sind von *SDDD* bestätigt worden. Dieses zweite Projekt läuft noch einige Jahre und wird am Ende ein Sample von etwa  $10^6$  Galaxien umfassen<sup>3</sup>.

---

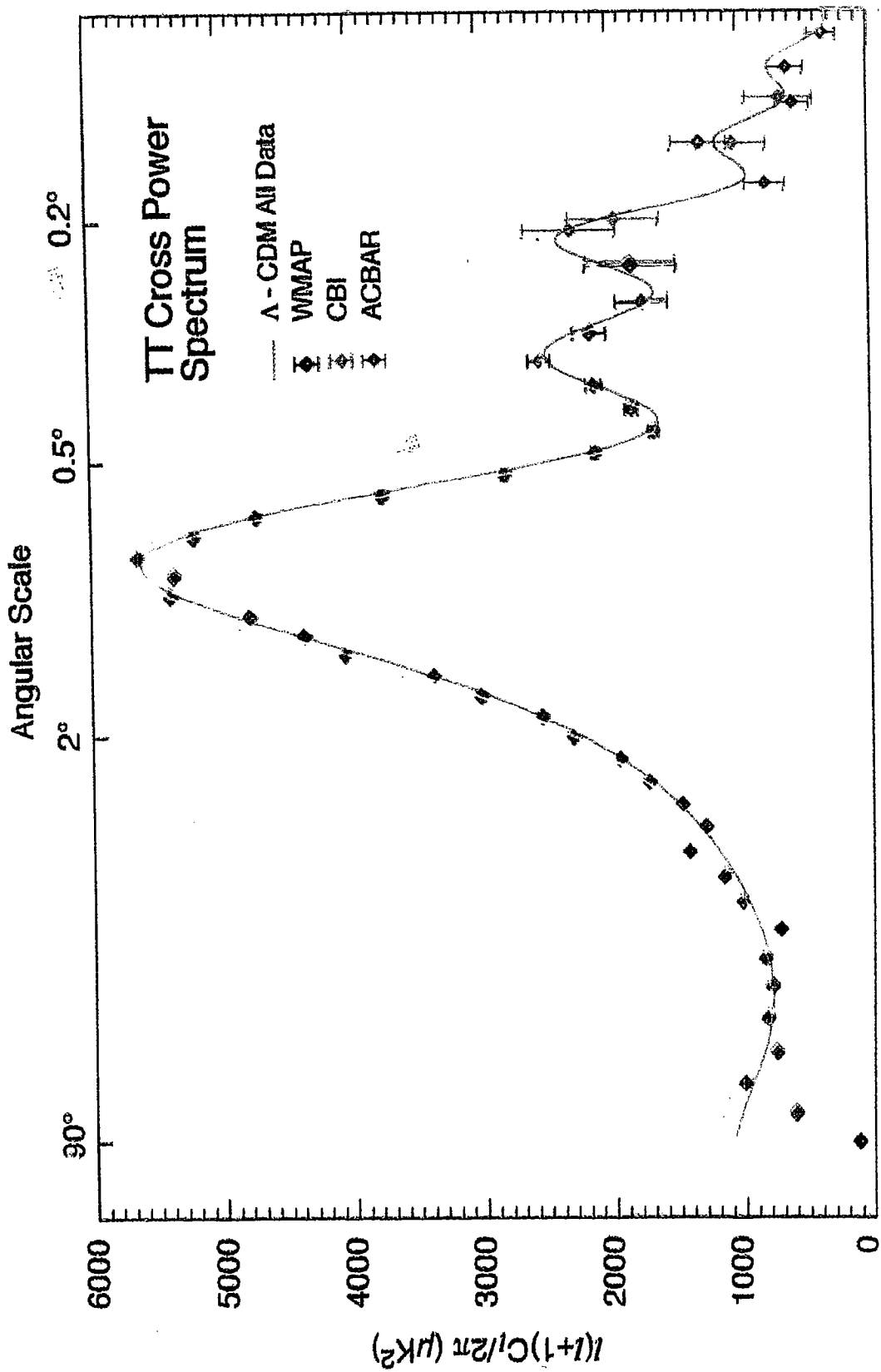
<sup>3</sup>Konsultiere die Homepage: <http://www.sdss.org/sdss.html>.



Die heutige klumpige Struktur ist höchstwahrscheinlich durch gravitative Instabilitäten aus kleinen Dichtefluktuationen hervorgegangen. Die wichtigste Evidenz dafür ergibt sich aus der ausserordentlichen Isotropie der kosmischen Mikrowellen-Hintergrundstrahlung auf allen Winkelskalen. Nach Abzug einer Dipolanisotropie, welche auf unserer Eigenbewegung beruht, betragen diese nur etwa  $10^{-5}$ . Im Mikrowellen-Hintergrund sehen wir weitgehend unverfälscht die Temperaturschwankungen auf der "kosmischen Photosphäre" bei der Rotverschiebung  $z \approx 1100$ . Deren Kleinheit sowie die zunehmend genauere Vermessung des Winkel-Leistungsspektrums der Anisotropien, gehören zu den wichtigsten Entwicklungen der Kosmologie der vergangenen Jahre und werden – ergänzt durch Polarisationsmessungen – für längere Zeit ein dominierendes Thema bleiben.

Der gegenwärtige Stand der Messungen, der mit dem Satelliten WMAP nochmals eine deutliche Verbesserung erfuhr, ist in der Abbildung ? gezeigt. ( Was dabei genau aufgetragen ist, soll an dieser Stelle nicht näher erklärt werden; ich möchte lediglich ein Eindruck von der Qualität der Daten geben.)

Die besprochenen Fakten legen es nahe, dass der beobachtbare Bereich des Universums für jeden Beobachter, der an der mittleren kosmischen Bewegung teilnimmt, isotrop erscheint. Bei der Aufzählung von Beobachtungsdaten sollte man aber nicht vergessen, dass wir grundsätzlich nur Information über einen Teil unseres Rückwärtslichtkegels – also nur über einen kleinen Bereich des Universums – erhalten können.





## 2. Friedman - Raumzeit - Mannigfaltigkeiten

In einer ersten Näherung ignorieren wir nun die tatsächlichen Inhomogenitäten und beschreiben die großräumige Struktur des Universums durch hochsymmetrische Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen. (Das Wachstum von anfänglich kleinen Inhomogenitäten im expandierenden Universum wird in Kap. V behandelt.)

Es sei  $(M, g)$  eine Raumzeit-Mannigfaltigkeit, welche in jedem Punkt isotrop ist relativ zu einem Geschwindigkeitsfeld  $V$ ,  $g(V, V) = 1$ . Dies bedeutet folgendes. Es sei  $\text{Iso}_p(M)$  die Gruppe aller lokalen Isometrien von  $M$ , welche den Punkt  $p \in M$  festlassen. Wir verlangen, dass in jedem Punkt gilt

$$\{T_p \varphi \mid \varphi \in \text{Iso}_p(M), \varphi_* V = V\} \cong \text{SO}_3(V_p). \quad (2.1)$$

Dabei bezeichnet  $\text{SO}_3(V_p)$  die Gruppe aller linearen Transformationen von  $T_p(M)$ , welche  $V_p$  invariant lassen und in dem dazu orthogonalen Raum spezielle orthogonale Transformationen induzieren.

Aus dieser Isotropieannahme in jedem Punkt kann man eine Reihe von Schlüssen ziehen. (Für Details siehe N. Straumann, HPA 47, 379 (1974); eine Kopie dieser Arbeit ist beigelegt.) Zunächst zeigt man, dass die zu  $V$  gehörige 1-Form  $V^b$  die Gleichung

$$V^b \wedge dV^b = 0 \quad (2.2)$$

erfüllt. Nach einem Satz von Frobenius kann daher  $M$  lokal in eine 1-parametrische Familie  $\{\Sigma_t\}$  von Kurvenartigen Hyperflächen zerlegt werden, welche alle orthogonal auf  $V$  sind. Sodann beweist man, dass  $V$  geodätisch ist,

$$\nabla_V V = 0, \quad (2.3)$$

d.h. die Integralkurven von  $V$  sind Geodäten, welche alle orthogonal auf der Familie  $\{\Sigma_t\}$  von Hyperflächen sind. Der geodätische Abstand längs der Integralkurven von  $V$  zwischen zwei orthogonalen Hyperflächen  $\Sigma_{t_1}$  und  $\Sigma_{t_2}$  ist dann konstant. Dies folgt z.B. aus einer bekannten Variationsformel. Damit können wir eine "kosmische Zeit" einführen.

In einem nächsten Schritt beweist man, dass jedes  $\Sigma_t$  ein Raum konstanter Krümmung ist (vgl. § I.3). Dabei benutzt man ein Theorem von Schur, welches wir in Abschnitt I.3 beweisen werden.

Schliesslich kann man folgendes zeigen. Die Abbildung  $\varphi_{t_1 t_2} : \Sigma_{t_1} \rightarrow \Sigma_{t_2}$ , welche durch den Fluss von  $V$  zwischen zwei beliebigen orthogonalen Hyperflächen  $\Sigma_{t_1}$  und  $\Sigma_{t_2}$  induziert wird, erfüllt  $\varphi_{t_1 t_2}^* g_2 = \text{const } g_1$ , wobei  $g_1$  und  $g_2$  die auf  $\Sigma_{t_1}$  und  $\Sigma_{t_2}$  induzierten Metriken sind. Dies folgt unmittelbar aus der Isotropieannahme und dem folgenden Lemma, welches ebenfalls in der zitierten Arbeit bewiesen wird.

Lemma: Es sei  $(N, h)$  ein Riemann'scher Raum mit konstanter Krümmung und Dimension  $n \geq 3$ . Ferner sei  $A$  ein kovariantes Tensorfeld der Stufe 2, welches invariant ist unter allen  $\varphi \in \text{Iso}_m(N)$ , mit  $T_u \varphi \in \text{SO}_2(T_u N)$  für jedes  $u \in N$ . Dann ist  $A = \text{const} \cdot h$ .

In unbewegten Koordinaten sind deshalb die metrischen Tensoren auf allen orthogonalen Flächen, bis auf einen Skalenfaktor, gleich.

Betrachten wir in den Hyperflächen  $\Sigma_t$  unbewegte Koordinaten, sowie den geodätischen Abstand  $t$  (vgl. Fig. 3)

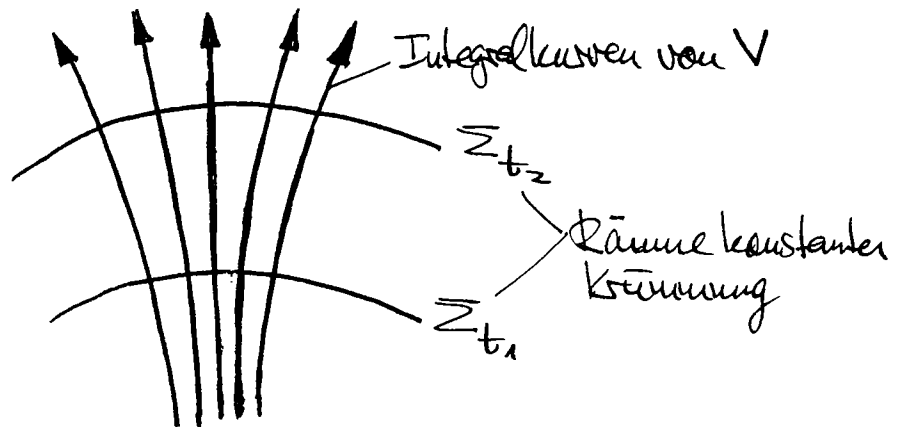


Fig. 3. Friedmann-Raumzeit - Homogenität

so hat die Metrik von  $(M, g)$  die folgende Form:\*)

$$g = dt^2 - a^2(t) h, \quad h: \text{Metrik eines 3-dim. Riemannschen Raumes konstanter Krümmung.}$$

Dies ist die Metrik einer Friedmann-Raumzeit.

(2.4)

\*) Genauer hat  $(M, g)$  lokal folgende Struktur:

$M = \mathbb{R} \times N$ ,  $(N, h)$ : Raum konstanter Krümmung

$g = dt^2 - a^2(t) \pi^* h$ ,  $t = p^*_1$ ,  $\pi = p^*_2$  ("Projektionen").

We assume now that  $(M, g)$  is isotropic relative to  $V$  at every space-time point and prove that the properties (i)-(iv) can be deduced from this assumption.

First we show that  $V$  is hyper-surface orthogonal. This means that the differential system  $D: \dot{p} \rightarrow H_p$  is completely integrable [3]. For this to be true, it is necessary and sufficient - as has been shown by Frobenius [3] - that the following equation holds

$$\omega \wedge d\omega = 0, \tag{1}$$

where  $\omega$  denotes the differential form corresponding to  $V[\omega(X) = g(V, X)]$  for all vector fields  $X$ .

In order to prove (1) at an arbitrary point  $m \in M$ , we consider the exponential mapping  $\text{Exp}_m$  at the point  $m$ . Any  $\varphi \in \text{Iso}_m(M)$  with  $T_m(\varphi) \in SO_3(V_m)$  can be represented as follows

$$\varphi: \text{Exp}_m(X) \mapsto \text{Exp}_m(RX): X \in T_m(M), R \in SO_3(V_m). \tag{2}$$

We introduce the following basis  $E_i$  in  $T_m(M): E_i, i = 1, 2, 3$  are orthonormal vectors in  $H_p$  and  $E_4 = V(m)$ . The normal coordinates in the neighbourhood of  $m$ , with respect to this basis, will be denoted by  $x^\mu$ . In these coordinates, the mapping (2) is given by

$$\varphi: x^\mu \mapsto R^\mu_\nu x^\nu, \tag{3}$$

where  $R^\mu_\nu$  is the matrix corresponding to  $R$  with respect to the basis  $E_\mu$ . Hence  $R^i_j, i, j = 1, 2, 3$ , is a special orthogonal matrix,  $R^4_i = R^i_4 = 0$  and  $R^4_4 = 1$ . The Killing fields belonging to the local isometries (3) are of the form

$$K^\mu = L^\mu_\nu x^\nu,$$

where

$$(L^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} L^i_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, L^i_k + L^k_i = 0. \tag{4}$$

The Lie derivative of  $\omega$  with respect to every Killing field of the form (4) vanishes

$$L_X \omega = 0. \tag{5}$$

In components this reads

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} L^\nu_\lambda x^\lambda + V_\nu L^\nu_\mu = 0. \tag{6}$$

Especially for  $L^i_k = \epsilon_{jks}, s = 1, 2, 3$ , we obtain

$$\frac{\partial V_i}{\partial x^j} \epsilon_{jks} x^k + \epsilon_{jis} V_j = 0.$$

Taking the derivative of this equation with respect to  $x^l$  and putting  $x^\mu = 0$  gives

$$\epsilon_{jis} \frac{\partial V_i}{\partial x^j} + \epsilon_{jis} \frac{\partial V_j}{\partial x^l} = 0.$$

For  $i = s$  we obtain

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial V_k}{\partial x^j} = 0.$$

This implies at the point  $m (V_0 = 1, V_i = 0)$

$$\epsilon^{\mu\lambda\sigma} V_\nu \partial_\lambda V_\sigma = 0,$$

i.e. equation (1). Hence, we have shown that locally<sup>2)</sup> the space-time manifold can be decomposed into a family of space-like hyper-surfaces orthogonal to  $V$ .

Next, we show that the integral curves of  $V$  are geodesics. An isometry  $\varphi$  of  $M$  leaves the affine connection  $\nabla$  invariant. If in addition  $V$  is invariant under  $\varphi$  this means that

$$\varphi^*(\nabla_V V) = \nabla_V V.$$

Hence we have

$$L_K(\nabla_V V) = 0 \tag{7}$$

for the Killing vector fields (4). Let  $W: = \nabla_V V$ ; then (7) reads in components

$$L^\mu_\lambda x^\lambda \frac{\partial W^\nu}{\partial x^\mu} - L^\lambda_\nu W^\lambda = 0.$$

At the point  $m (x^\lambda = 0)$  we obtain

$$L^i_l W^l = 0.$$

Hence  $W^l = 0$  for  $l = 1, 2, 3$ . This means that  $\nabla_V V$  is parallel to  $V$ . But from  $g(V, V) = -1$  we obtain  $g(V, \nabla_V V) = 0$  and consequently  $\nabla_V V = 0$ .

A well-known variational formula for families of geodesics [4] then tells us that the geodesic distance along the integral curves of  $V$  between any two orthogonal hyper-surfaces is constant. This enables us to introduce a 'cosmic time'.

Obviously the sectional curvature of any orthogonal hyper-surface is isotropic. A well-known theorem of Schur implies then that the hyper-surface is a Riemannian manifold of constant curvature. This proves property (iii).

Finally the property (iv) of the flow of  $V$  is a consequence of the following Lemma, which is a sharpening of a statement proved in Ref. [5].

*Lemma:* Let  $(M, g)$  be a Riemannian space of constant curvature with dimension  $n \geq 3$  and let  $A$  be a covariant tensor field of second rank on  $M$  which is invariant under every  $\varphi \in \text{Iso}_m(M)$  for any point  $m \in M$ . Then  $A = \text{const. } g$ .

*Proof:* We introduce normal coordinates around  $m \in M$  with respect to an orthonormal basis of  $T_m(M)$ . Then we have by assumption

$$L_K A = 0. \tag{8}$$

<sup>2)</sup> The considerations in this note are only of a local nature.

# Minimal Assumptions Leading to a Robertson-Walker Model of the Universe

by N. Straumann

University of Zürich and SIN

(25. III. 74)

The homogeneous and isotropic cosmological models of the Robertson-Walker (or Friedmann) type assume the following structure:

- i) A time-like vector field  $V$  with  $g(V, V) = -1$  (which represents the average 4-velocity field of matter) whose integral curves are geodesics.
- ii) The vector field  $V$  is hyper-surface orthogonal, i.e. the space-time manifold can be decomposed into a family of space-like surfaces, which are orthogonal to  $V$ .
- iii) The orthogonal hyper-surfaces are maximally symmetric and hence Riemannian manifolds of constant curvature.
- iv) The mapping  $\varphi_{12}: O_1 \rightarrow O_2$ , which is induced by the flow  $\phi_t$  of  $V$  between any two orthogonal hyper-surfaces  $O_1$  and  $O_2$ , with their respectively induced metrics  $g_1$  and  $g_2$ , satisfies<sup>1)</sup>  $\varphi_{12}^*(g_2) = \lambda_{12}g_1$ , where  $\lambda_{12}$  is a constant. (In co-moving coordinates this means that the metric tensors of all orthogonal hyper-surfaces are equal up to a scaling factor.)

In this note, we show that this structure is already implied by the assumption that the space-time manifold is isotropic at every point relative to the vector field  $V$  in the sense of the definition given below. This fact is certainly known to many people (see for instance Ref. [2]), but we did not find a mathematical proof of it in the literature.

Let there be given a time-like vector field  $V$  with  $g(V, V) = -1$  on the space-time manifold  $(M, g)$  with Lorentz metric  $g$ .  $H_p$  denotes the subspace of the tangent space  $T_p(M)$  orthogonal to  $V(p)$  and  $\text{Iso}_p(M)$  denotes the group of all isometries of  $M$  with fixed point  $p$ . Furthermore, let  $SO_3(V_p)$  be the group of all linear transformations in  $T_p(M)$  which leave  $V(p)$  invariant and induce special orthogonal transformations in  $H_p$ .

*Definition:* The space-time manifold  $(M, g)$  is isotropic at  $p \in M$  relative to  $V$  if the following condition is satisfied

$$\{T_p \varphi: \varphi \in \text{Iso}_p(M), \varphi_* V = V\} \supseteq SO_3(V_p).$$

<sup>1)</sup> Unexplained notations are standard, as for instance laid down in Ref. [1].

for all Killing fields  $\mathbf{K}$  with components of the form

$$K^i = \Omega^i_j x^j, \quad \Omega^i_j + \Omega^j_i = 0.$$

In components equation (8) reads

$$K^i \partial_i A_{ij} + A_{ij} \partial_i K^i + A_{ii} \partial_j K^j = 0.$$

From this we obtain at the point  $m(x^i = 0)$

$$A_{ij} \Omega^i_l + A_{il} \Omega^l_j = 0$$

or

$$\Omega^i_k (\delta^k_l A_{ij} + \delta^k_j A_{il}) = 0. \quad (9)$$

Hence the bracket in (9) must be symmetric in  $l$  and  $k$ :

$$\delta_{ik} A_{lj} + \delta_{kj} A_{il} = \delta_{il} A_{kj} + \delta_{ij} A_{lk}. \quad (10)$$

Contraction of  $k$  and  $i$  gives

$$(n-1)A_{lj} + A_{ji} = \delta_{ij} A^k_k. \quad (11)$$

If we interchange in this equation  $j$  and  $l$  and subtract the two, we get

$$(n-2)(A_{ji} - A_{lj}) = 0.$$

Hence, for  $n > 2$ ,  $\mathbf{A}$  must be a symmetric tensor. If we use this in equation (11), we obtain

$$nA_{ij} = \delta_{ij} A^k_k.$$

Consequently  $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{g}$ . Since  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{g}$  are invariant under every  $\varphi \in \text{Iso}_m(M)$ ,  $m \in M$ , the function  $\lambda$  has to be invariant under  $\varphi$  too:  $\varphi^*(\lambda) = \lambda$ . Now the set  $\{\varphi \in \text{Iso}_m(M) : m \in M\}$  acts transitively on a space with constant curvature. This is geometrically obvious. Alternatively it is easy to show that one can construct out of the Killing fields arising from isometries with fixed point, a Killing field  $\mathbf{K}$ , which has any prescribed value at a given point  $m \in M$  and for which  $L_{\mathbf{K}}\lambda = 0$ . This also shows that  $\lambda$  has to be a constant.

The property (iv) follows from the Lemma, because the flow  $\phi_t$  of  $\mathbf{V}$  commutes with a sufficiently large group of isometries from  $\text{Iso}_m(M)$ ,  $m \in M$ , which in turn implies that  $\varphi_{12}^*(\mathbf{g}_2)$  in property (iv) satisfies on  $O_1$  the assumptions made for the tensor field  $\mathbf{A}$  in the Lemma.

Observationally the average large-scale properties of the universe seem to be approximately isotropic around us. In particular, it has been shown that the extragalactic radio sources are distributed approximately isotropically and that the 3°K microwave background radiation is isotropic to a remarkably high degree. If one assumes that the universe looks isotropic for any observer moving with the 'average cosmological fluid' (Copernican principle) then the cosmological model is, as we have shown, necessarily of the Robertson-Walker (Friedmann) type.

## REFERENCES

- [1] S. W. HAWKING and G. F. R. ELLIS, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press 1973).
- [2] A. EINSTEIN, *Grundzüge der Relativitätstheorie* (Vieweg & Sohn 1956), Anhang I.
- [3] Y. MATSUSHIMA, *Differentiable Manifolds* (M. Dekker, New York 1972), Chapter III.
- [4] D. GROMOLL, W. KLINGENBERG and W. MEYER, *Riemannsche Geometrie im Grossen, Lectures Notes in Mathematics* (Springer 1968), Section 4.
- [5] S. WEINBERG, *Gravitation and Cosmology* (Wiley & Sons 1972), Section 13.4

### 3. Riemann'sche Räume mit konstanter Krümmung

Wir untersuchen nun die Räume konstanter Krümmung.

#### A. Algebraische Preliminarien

Es sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum und  $R: V \times V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine quadrilineare Abbildung, welche die drei folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$R(v_1, v_2, v_3, v_4) = -R(v_2, v_1, v_3, v_4) \quad (3.1a)$$

$$R(v_1, v_2, v_3, v_4) = -R(v_1, v_2, v_4, v_3) \quad (3.1b)$$

$$R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_3, v_4, v_2) + R(v_1, v_4, v_2, v_3) = 0. \quad (3.1c)$$

Proposition: Wenn  $R$  diese drei Eigenschaften erfüllt, dann gilt auch

$$R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_3, v_4, v_1, v_2). \quad (3.2)$$

Beweis:  $S(v_1, v_2, v_3, v_4)$  bezeichne die linke Seite von (3.1c). Eine direkte Bedingung zeigt

$$\begin{aligned} 0 &= S(v_1, v_2, v_3, v_4) - S(v_2, v_3, v_4, v_1) - S(v_3, v_4, v_1, v_2) \\ &\quad + S(v_4, v_1, v_2, v_3) = R(v_1, v_2, v_3, v_4) - R(v_2, v_1, v_3, v_4) \\ &\quad - R(v_3, v_4, v_1, v_2) + R(v_4, v_3, v_1, v_2). \end{aligned}$$

Anwendung von (3.1a) und (3.1b) gibt

$$2R(v_1, v_2, v_3, v_4) - 2R(v_3, v_4, v_1, v_2) = 0. \quad \square$$

Proposition: Sind  $R$  und  $T$  zwei quadrilineare Abbildungen mit den Eigenschaften (3.1a), (3.1b) und (3.1c). Falls

$$R(v_1, v_2, v_1, v_2) = T(v_1, v_2, v_1, v_2) \text{ für alle } v_1, v_2 \in V,$$

dann ist  $R = T$ .

Beweis: Wir können  $T=0$  annehmen. (Betrachte  $R-T$  und 0 statt  $R$  und  $T$ .) Es sei also  $R(v_1, v_2, v_1, v_2) = 0$  für alle  $v_1, v_2 \in V$ . Nun gilt

$$\begin{aligned} 0 &= R(v_1, v_2 + v_4, v_1, v_2 + v_4) = R(v_1, v_2, v_1, v_4) + R(v_1, v_4, v_1, v_2) \\ &= 2R(v_1, v_2, v_1, v_4), \end{aligned}$$

d.h.

$$R(v_1, v_2, v_1, v_4) = 0 \text{ für alle } v_1, v_2, v_4 \in V. \quad (3.3)$$

Daraus folgt

$$0 = R(v_1 + v_3, v_2, v_1 + v_3, v_4) = R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_3, v_2, v_1, v_4).$$

Darin benutzen wir (3.2) und dann (3.1b) und erhalten

$$0 = R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_4, v_3, v_2) = R(v_1, v_2, v_3, v_4) - R(v_1, v_4, v_2, v_3).$$

Also gilt auch

$$R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_1, v_4, v_2, v_3) \text{ für alle } v_1, v_2, v_3, v_4 \in V \quad (3.4)$$

Ersetzen wir darin  $v_2, v_3, v_4$  durch  $v_3, v_4, v_2$ , so kommt

$$R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_1, v_3, v_4, v_2) \quad (3.5)$$

Aus (3.4) und (3.5) erhalten wir

$$3R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_1, v_3, v_4, v_2) + R(v_1, v_4, v_2, v_3).$$



Darin verschwindet nach (3.1c) die rechte Seite. Also ist  $R=0$ .  $\square$

Nun sei der Vektorraum  $V$  mit einem inneren Produkt  $(\cdot, \cdot)$  versehen.  $E$  sei eine Ebene, d.h. ein 2-dim. Unterraum von  $V$ , welcher durch eine orthogonale Basis  $v_1, v_2$  aufgespannt werde. Wir setzen

$$K(E) = R(v_1, v_2, u_1, u_2). \quad (3.6)$$

Wie die Notation andeutet, ist  $K(E)$  unabhängig von der gewählten orthogonalen Basis von  $E$ . In der Tat, bezeichnen  $w_1$  und  $w_2$  eine zweite orthogonale Basis von  $E$ , dann ist

$$w_1 = a v_1 + b v_2$$

$$w_2 = -b v_1 + a v_2, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Aus (3.1a) und (3.1b) folgt sofort  $R(v_1, v_2, u_1, u_2) = R(w_1, w_2, u_1, u_2)$ .

Proposition 3: Ist  $v_1, v_2$  eine (nicht notwendigerweise orthogonale) Basis von  $E$ , dann gilt

$$K(E) = \frac{R(v_1, v_2, u_1, u_2)}{(v_1, v_2)(v_2, v_2) - (v_1, v_2)^2}. \quad (3.7)$$

Beweis: Aus  $v_1$  und  $v_2$  konstruieren wir die folgende orthogonale Basis

$$\frac{v_1}{(v_1, v_1)^{1/2}}, \quad \frac{1}{a} \frac{[(v_1, v_1)v_2 - (v_1, v_2)v_1]}{(v_1, v_1)^{1/2}},$$

wobei  $a = [(v_1, v_1)((v_1, v_1)(v_2, v_2) - (v_1, v_2)^2)]^{1/2}$ . Durch Einsetzen in (3.6) erhält man sofort (3.7).  $\square$

Wir setzen (Gausse Determinante)

$$R_1(v_1, v_2, v_3, v_4) = (v_1, v_3)(v_2, v_4) - (v_2, v_3)(v_4, v_1). \quad (3.8)$$

Man verifiziert leicht, dass  $R_1$  eine quadrilineare Abbildung ist, welche (3.1a), (3.1b) und (3.1c) erfüllt, sowie

$$K_1(E) := R_1(v_1, v_2, v_1, v_2) = 1 \quad (3.9)$$

für jede orthonormierte Basis  $v_1, v_2$  von  $E$ .

Proposition 4: Ist  $R$  eine quadrilineare Abbildung mit den Eigenschaften (3.1a), (3.1b) und (3.1c). Ist  $K(E) = c$  für alle Ebenen  $E$ , so ist  $R = cR_1$ .

Beweis: Nach Proposition 3 gilt

$$R(v_1, v_2, v_1, v_2) = cR_1(v_1, v_2, v_1, v_2).$$

Wendet man Proposition 2 auf  $R$  und  $cR_1$  an, so folgt  $R = cR_1$ .  $\square$

### 3. Schnittkrümmung

Wir betrachten nun eine  $n$ -dimensionale Riemann'sche  $M_{f, \lambda}^{(n)}$ .  $R(X, Y)$  bezeichne die Krümmungstransformation von  $T_x(M)$ , bestimmt durch  $X, Y \in T_x(M)$ . Der Riemann'sche Krümmungstensor ist

$$R(X_1, X_2, X_3, X_4) = g(R(X_3, X_4)X_2, X_1), \quad (3.10)$$

$$X_i \in T_x(M), i=1, \dots, 4.$$

Proposition 5: Der Riemannsche Krümmungstensor besitzt als quadrilineare Abbildung  $T_x(M) \times \dots \times T_x(M) \rightarrow \mathbb{R}$  für jedes  $x \in M$  die Eigenschaften (3.1a), (3.1b), (3.1c) und folglich (3.2).

Beweis: Dies ergibt sich aus den Symmetrieeigenschaften des Krümmungstensors (siehe [NS, §I.5]).  $\square$

Für jede Ebene  $E$  des Tangentialraumes  $T_x(M)$  definieren wir die Schnittkrümmung  $K_x(E)$  durch

$$K_x(E) = R(X_1, X_2, X_1, X_2) = g(R(X_1, X_2)X_2, X_1), \quad (3.11)$$

wobei  $X_1, X_2$  eine orthonormierte Basis von  $E$  ist. Wie unter A gezeigt, ist  $K_x(E)$  unabhängig von der gewählten orthon. Basis  $X_1, X_2$ . Proposition 2 zeigt außerdem, dass die  $K_x(E)$  für alle Ebenen  $E$  in  $T_x(M)$  den Krümmungstensor in  $x$  bestimmen.\*)

\*) Für eine geometrische Deutung von  $K_x(E)$  betrachten wir die zweidimensionale Untermannigfaltigkeit  $S_E \subset M$ , die lokal von denjenigen Geodäten durch  $x$  gebildet wird, deren Tangentialvektor in  $x$  zu  $E$  gehören. Genauer ist  $S_E$  das Bild von  $E \cap V$  unter  $\exp_x$  ( $\exp_x$  sei auf  $V$  ein lokaler Diffeomorphismus). Bezeichnet  $j: S_E \hookrightarrow M$  die Inklusion, so liefert  $j^*g$  die induzierte Riemannsche Metrik auf  $S_E$ . Nun gilt die

Proposition 6: Die Schnittkrümmung  $K_x(E)$  ist die Gaußsche Krümmung von  $S_E$  in  $x$ .

Beweis: Siehe z.B. [RW, p.117].

Ist  $K_x(E)$  für alle Ebenen  $E$  in  $T_x(M)$  und alle  $x \in M$  konstant gleich  $k$ , dann ist  $(M, g)$  ein Raum konstanter Krümmung  $k$ .

Für  $\dim M \geq 3$  lässt sich diese Bedingung schwächer formulieren:

Satz 1 (Schur): Es sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$ . Falls die Schnittkrümmung  $K_x(E)$  in jedem Punkt  $x \in M$  unabhängig von  $E \subset T_x(M)$  ist, so ist  $M$  von konstanter Krümmung.

Beweis: Wir definieren das kovariante Tensorfeld  $R_1$  vierter Stufe wie folgt:

$$R_1(W, Z, X, Y) = g(W, X)g(Z, Y) - g(Z, X)g(Y, W). \quad (3.12)$$

Nach Proposition 4 ist

$$R = k R_1, \quad (3.13)$$

wobei  $k$  eine Funktion auf  $M$  ist. Aus  $\nabla g = 0$  folgt auch  $\nabla R_1 = 0$ . Folglich ist mit (3.13)

$$(\nabla_U R)(W, Z, X, Y) = (\nabla_U k) R_1(W, Z, X, Y)$$

für jedes  $U$ . Dies bedeutet

$$[(\nabla_U R)(X, Y)]Z = (Uk) [g(Z, Y)X - g(Z, X)Y]. \quad (3.14)$$

Wir bilden die zyklische Summe dieser Gleichung bezüglich  $(W, X, Y)$ . Dann verschwindet die linke Seite zufolge der 2. Bianchi-Identität. Infolgedessen gilt

$$\begin{aligned}
 0 &= (U_k) (g(Z, Y)X - g(Z, X)Y) \\
 &+ (X_k) (g(Z, U)Y - g(Z, Y)U) \\
 &+ (Y_k) (g(Z, X)U - g(Z, U)X). \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

Für ein beliebiges  $X$  wählen wir  $Y, Z$  und  $U$  so, dass  $X, Y$  und  $Z$  paarweise senkrecht aufeinander stehen und  $U=Z$  mit  $g(Z, Z) = 1$ . Dies ist möglich, da  $n \geq 3$  ist. Für diese Wahl erhalten wir

$$(X_k)Y - (Y_k)X = 0.$$

Da  $X$  und  $Y$  linear unabhängig sind, so gilt  $X_k = Y_k = 0$ . Dies zeigt, dass  $k$  konstant ist.  $\square$

Korollar: Für einen Raum konstanter Krümmung ist nach (3.13)

$$R(X, Y)Z = k (g(Z, Y)X - g(Z, X)Y). \quad (3.16)$$

Ist  $k$  positiv (resp. negativ) und konstant, so nennt man  $M$  einen Raum konstanter positiver (resp. negativer) Krümmung.

In Komponenten lautet (3.16) bezüglich einer lokalen Basis  $\theta^i$  von 1-Formen:

$$R_{jkl} = k (g_{jk} g_{li} - g_{jl} g_{ki}). \quad (3.17)$$

Daraus folgt

$$R_{j\ell} = k(n-1) g_{j\ell}, \quad R = k n(n-1). \quad (3.17')$$

Für die Krümmungsformen  $\Omega_{ij}$  folgt aus (3.17)

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} R_{ijkl} \theta^k \wedge \theta^l = k \theta_i \wedge \theta_j. \quad (3.18)$$

Bemerkung: Diese Formel, welche ein Ausdruck von (3.13) ist, ermöglicht einen einfachen Beweis des Satzes von Schur. Tatsächlich folgt aus der 2. Bianchi-Identität  $D\Omega_{ij} = 0$  und der ersten Strukturgleichung  $D\theta_i = 0$  wieder  $k = \text{const.}$

### C. Konstruktion von Räumen konstanter Krümmung

Vorläufig studieren wir nur das lokale Problem. Zunächst zeigen wir, dass ein Raum konstanter Krümmung lokal konform flach ist. Dazu führen wir die Weyl-Formen ein. Es sei  $\{e_i\}$  die zu  $\{\theta_i\}$  duale Basis. Ferner sei  $\Omega_j = i_{e_i} \Omega^i_j$  ( $i_X$ : inneres Produkt). Der Riemann-Skalar ist  $R = i_{e_j} \Omega^j$ . Die Weyl-Formen  $G_{jk}$  sind definiert durch

$$\Omega_{jk} = -\frac{R}{(n-2)(n-1)} \theta_j \wedge \theta_k + \frac{1}{n-2} (\theta_j \wedge \Omega_k - \theta_k \wedge \Omega_j) + G_{jk}.$$

Setzt man hier Gl. (3.18) ein, so folgt leicht  $G_{jk} = 0$ . (3.19)

Nun ist nach H. Weyl folgendes wahr\*):

- (i) Das Verschwinden der Weyl-Formen ist für  $n > 3$  notwendig und hinreichend dafür, dass der Raum lokal konform flach ist.

---

\*): Für detaillierte Beweise, siehe z.B.: P. K. Rashevski, Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis, Deutscher Verlag der Wissenschaften (1959), §122.

(ii) Für  $n=3$  verschwindet der Weyl-Tensor immer. Der Raum ist für  $n=3$  genau dann lokal konform flach, wenn gilt

$$\nabla_i S_{jk} - \nabla_j S_{ik} = 0, \quad (3.20)$$

wobei

$$S_{jk} := -\frac{R_{jk}}{n-2} + \frac{R g_{jk}}{2(n-1)(n-2)}. \quad (3.21)$$

Aus (3.17') findet man aber sofort

$$S_{jk} = \frac{1}{2} k g_{jk}. \quad (3.22)$$

Deshalb ist  $\nabla_i S_{jk} = 0$  und (3.20) ist erfüllt.

Für einen Raum konstanter Krümmung gibt es also lokale Koordinaten  $x_i$ , derart dass

$$g = \frac{1}{\psi^2} \sum_i (dx^i)^2. \quad (3.23)$$

Wir rechnen im folgenden bezüglich der orthonormierten Basis

$$\theta^i = \frac{1}{\psi} dx^i. \quad (3.24)$$

(Bezüglich dieser Basis brauchen wir nicht zwischen oberen und unteren Indizes zu unterscheiden.)

Da  $d\theta^i = \psi_{,j} \theta^i \wedge \theta^j$  findet man für die Zusammenhangsformen

$$\omega_{ab} = \psi_{,a} \theta_b - \psi_{,b} \theta_a. \quad (3.25)$$

Mit der 2. Strukturgleichung erhält man nach kurzer Rechnung für die Krümmungsformen:

$$\Sigma_{ab} = \psi(\psi_{,ac} \theta^c \wedge \theta_b - \psi_{,bc} \theta^c \wedge \theta_a) - \psi_{,c} \psi'^c \theta_a \wedge \theta_b. \quad (3.26)$$

Damit (3.18) erfüllt ist, muss für alle  $a \neq b$   $\psi_{,ab} = 0$  sein, d.h.  $\psi$  hat die Form

$$\psi = \sum_a f_a(x^a). \quad (3.27)$$

Setzen wir dies in (3.26) ein, so kommt

$$\Sigma_{ab} = \psi(f_a'' + f_b'') \theta_a \wedge \theta_b - f_c' f_c' \theta_a \wedge \theta_b. \quad (3.28)$$

Damit (3.18) erfüllt ist, muss gelten ( $n \geq 3!$ )

$$f_a'' + f_b'' = \psi^{-1}(k + f_c' f_c'). \quad (3.29)$$

Da die linke Seite nur von  $x^a$  und  $x^b$  abhängt, während die rechte Seite für alle  $a$  und  $b$  dieselbe ist, müssen alle  $f_a''$  konstant und gleich sein. Folglich sind die  $f_a$  quadratische Funktionen, wobei der Koeffizient von  $(x^a)^2$  unabhängig von  $a$  ist. In (3.23) ist ein numerischer Faktor von  $\psi$  unwesentlich und die  $x^i$  können ausserdem Translations sein.

Deshalb dürfen wir  $\psi$  in der Form  $\psi = 1 + \frac{a}{4} \sum (x^i)^2$  ansehen. Gl. (3.29) verlangt dann  $a = k$  und folglich ist

$$\psi = 1 + \frac{k}{4} \sum (x^i)^2. \quad (3.30)$$

Damit ist folgendes gezeigt:

Proposition 7: In einem Raum konstanter Krümmung gibt es immer lokale Koordinaten  $\{x^a\}$ , so dass



$$g = \sum_a \frac{(dx^a)^2}{\left(1 + \frac{k}{4} r^2\right)^2}, \quad r^2 := \sum_a (x^a)^2. \quad (3.31)$$

In der orthonormalen Basis

$$\theta^a = \frac{dx^a}{1 + \frac{k}{4} r^2} \quad (3.32)$$

lauten die Zusammenhangsformen nach (3.25)

$$\omega^{ab} = \frac{k}{2} (x^a \theta^b - x^b \theta^a). \quad (3.33)$$

Aus der Proposition  $\Rightarrow$  folgt insbesondere, dass zwei Räume <sup>gleicher</sup> konstanter Krümmung und gleicher Dimension lokal isometrisch sind.

### D. Geometrische Realisierung von Räumen konstanter Krümmung

Für  $k=0$  ist selbstverständlich der Raum lokal isometrisch zum Euklidischen Raum. Wir konstruieren nun auch Räume konstanter Krümmung  $k \neq 0$ . Dazu wählen wir in  $\mathbb{R}^{n+1}$  die Metrik

$$\eta_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik} & \text{für } i, k = 0, 1, \dots, n-1 \\ \varepsilon = \pm 1 & \text{für } i = k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.34)$$

und betrachten die Untermannigfaltigkeiten ( $\rho > 0$ ):

$$H_\rho^\varepsilon = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \eta_{ik} \bar{x}^i \bar{x}^k = \varepsilon \rho^2 \}. \quad (3.35)$$

Die (pseudo-) Sphären  $H_\rho^\varepsilon$  verstehen wir uns der durch

$\gamma_{ik} dx^i dx^k$  induzierten Metrik.

Wir zeigen nun, dass wir damit Räume konstanter Krümmung  $k = \epsilon/\rho^2$  erhalten. Dazu führen wir auf  $H_\rho^\epsilon$  mittels stereographischer Projektion geeignete Koordinaten ein (s. Fig. 4).

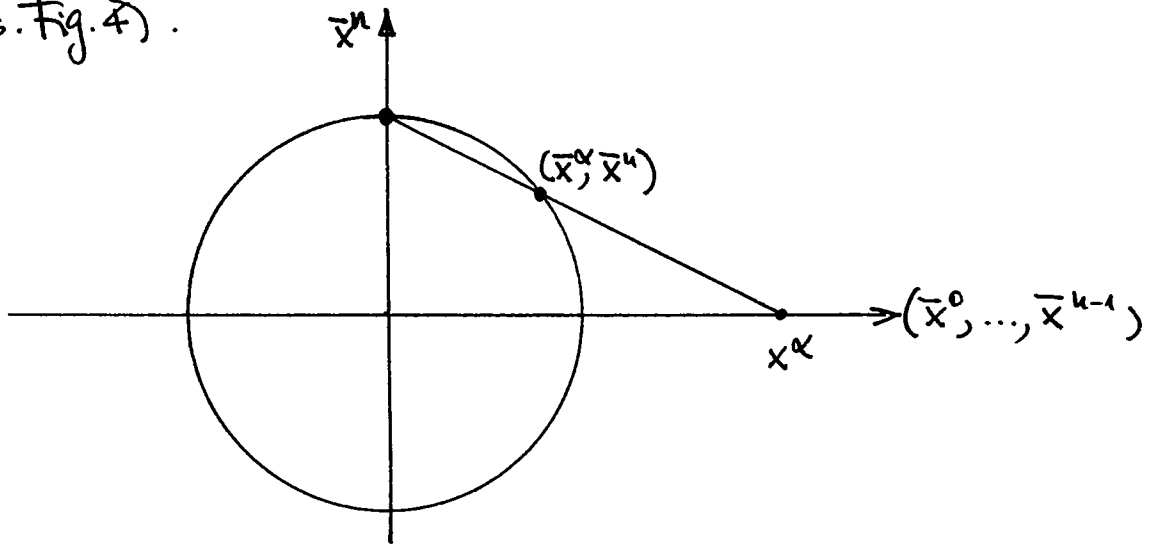


Fig. I.4. Koordinaten für  $H_\rho^{\epsilon=1}$

Das Projektionszentrum sei  $\bar{x} = (0, 0, \dots, \rho)$ . Es gilt die Propagation (griechische Indizes gehen von Null bis  $n-1$ )

$$x^\alpha: (x^\alpha - \bar{x}^\alpha) = \rho : \bar{x}^u ;$$

d.h.

$$x^\alpha = \frac{\bar{x}^\alpha}{1 - \bar{x}^u/\rho}, \quad \bar{x}^\alpha = x^\alpha (1 - \bar{x}^u/\rho). \quad (3.36)$$

Setzen wir dies in die Gleichung für  $H_\rho^\epsilon$  ein, so erhalten wir — mit  $r^2 := \sum_{\alpha=0}^{n-1} (x^\alpha)^2$  —

$$(1 - \bar{x}^u/\rho)^2 r^2 + \epsilon (\bar{x}^u)^2 = \epsilon \rho^2,$$

oder (für  $\bar{x}^u \neq \rho$ )

$$(1 - \bar{x}^u/\rho) r^2 = \epsilon \rho^2 (1 + \frac{\bar{x}^u}{\rho}).$$

Daraus ergibt sich für  $\bar{x}^u$

$$\bar{x}^4 = \rho \frac{r^2 - \epsilon \rho^2}{r^2 + \epsilon \rho^2}. \quad (3.37)$$

Setzen wir dies in (3.36) ein, so folgt

$$\bar{x}^\alpha = \frac{2\epsilon \rho^2}{r^2 + \epsilon \rho^2} x^\alpha. \quad (3.38)$$

(Die Koordinaten  $x^\alpha$  sind natürlich nur für  $r^2 + \epsilon \rho^2 \neq 0$  gut.) Für die Differentiale von (3.37) und (3.38) ergibt sich

$$d\bar{x}^\alpha = \frac{2\epsilon \rho^2 (r^2 + \epsilon \rho^2) dx^\alpha - 2x^\alpha r dr}{(r^2 + \epsilon \rho^2)^2},$$

$$d\bar{x}^4 = \epsilon \rho^2 \frac{\rho + r dr}{(r^2 + \epsilon \rho^2)^2}$$

und deshalb ist die induzierte Metrik auf  $H_\rho^\epsilon$

$$\begin{aligned} \eta_{ik} d\bar{x}^i d\bar{x}^k &= \sum_{\alpha=0}^{u-1} (d\bar{x}^\alpha)^2 + \epsilon (d\bar{x}^4)^2 \\ &= \frac{4\rho^4}{(r^2 + \epsilon \rho^2)^2} \sum_{\alpha=0}^{u-1} (dx^\alpha)^2 \\ &= \frac{4}{(1+k r^2)^2} \sum (dx^\alpha)^2, \quad k = \epsilon/\rho^2. \quad (3.39) \end{aligned}$$

Ersetzen wir noch  $2x^\alpha$  durch  $x^\alpha$ , so hat die Metrik die Form (3.31) mit  $k = \epsilon/\rho^2$ . Wir haben damit gezeigt:

Proposition 8: Die  $u$ -dim. Riemann'schen Räume konstanter Krümmung  $k = \epsilon/\rho^2$  sind lokal isometrisch zu den  $u$ -dim. (pseudo-) Sphären  $H_\rho^\epsilon$ .

Auf  $S^u = H_\rho^{\epsilon=1}$  und  $H_\rho^{\epsilon=-1}$  operieren die Gruppen  $SO(u+1)$ , bzw.  $SO(u,1)$  in natürlicher Weise als Iso-

Metriken. Konstruiere die zugehörigen Killingfelder.

Die Sphären  $S^n$  sind einfach zusammenhängend und  $H_g^{\varepsilon=-1}$  besteht aus zwei einfach zusammenhängenden Hyperboloiden. Diese einfach zusammenhängenden Riemannschen Räume sind vollständig.

Man kann zeigen (siehe, z.B., [KN, Theorem 7.10]), dass zwei einfach zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung zueinander isomorph sind.

Die globale Klassifizierung aller Riemannschen Räume konstanter Krümmung (Raumformen) ist ein sehr schwieriges Problem, welches noch nicht vollständig gelöst ist. Der gegenwärtige Stand ist in [JW] dargestellt. Wir weisen hier lediglich darauf hin, dass es z.B. unendlich viele Typen konstanter negativer Krümmung für  $n=3$  gibt. Darunter gibt es auch kompakte Räume. [Für  $n=2$  sind alle kompakten Riemannschen Flächen mit Gaußkrümmung  $> 1$  Mannigf. mit konstanter Krümmung  $= -1$ .]

Übungsaufgabe: Für  $n=2$ ,  $\varepsilon=-1$ ,  $\rho=1$  erhalten wir die Metrik (Lobatschewskische Ebene)

$$g = 4 \frac{du^2 + dv^2}{(1 - u^2 - v^2)^2}, \quad u^2 + v^2 < 1.$$

Dies ist das Poincaré-Modell der Lobatschewskischen Geometrie. Die komplexe Transformation  $w \rightarrow z = \frac{1+iw}{1-iw}$  bildet bekanntlich die obere Halbebene in den Einheitskreis ab. Setze  $z = u+iv$ ,  $w = x+iy$  und transformiere die Metrik in die folgende Form

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \quad y > 0.$$

Das ist das Klein'sche Modell der Lobatschewski-Geometrie

#### 4. Feldgleichungen für ein Friedmann-Lemaître-Universum

Die Friedmann-Metrik (2.4) können wir nach (3.31) in geeigneten Koordinaten folgendermaßen ausdrücken

$$g = dt^2 - a^2(t) \frac{\sum_{i=1}^3 (dx^i)^2}{(1 + \frac{k}{4} r^2)^2}, \quad r^2 = \sum_{i=1}^3 (x^i)^2. \quad (4.1)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir hierin  $k=0, \pm 1$  wählen.

Wir führen die folgende orthogonale Basis ein

$$\theta^0 = dt, \quad \theta^i = a(t) \bar{\theta}^i, \quad \bar{\theta}^i := \frac{dx^i}{1 + \frac{k}{4} r^2}. \quad (4.2)$$

Die  $\{ \bar{\theta}^i \}$  bilden eine orthogonale Basis des 3-dim. Raumes konstanter Krümmung  $k$ . Dafür gelten die Strukturgleichungen (Querschnitt bezieht sich auf diesen Raum)

$$d\bar{\theta}^i + \omega_{ij}^i \wedge \bar{\theta}^j = 0. \quad (4.3)$$

Aus (4.2) folgt mit (4.3)

$$d\theta^0 = 0, \quad d\theta^i = \frac{\dot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^i - a \omega_{ij}^i \wedge \bar{\theta}^j. \quad (4.4)$$

Der Vergleich mit der Strukturgleichung für die Friedmann-Mannigf. liefert

$$\omega_{ij}^0 \wedge \theta^i = 0, \quad \omega_{ij}^i \wedge \theta^0 + \omega_{ij}^i \wedge \theta^j = \frac{\dot{a}}{a} \theta^i \wedge \theta^0 + a \omega_{ij}^i \wedge \bar{\theta}^j, \quad (4.5)$$

weshalb \*)

$$\omega_{ij}^0 = \frac{\dot{a}}{a} \theta^i, \quad \omega_{ij}^i = \bar{\omega}_{ij}^i. \quad (4.6)$$

---

\*) Aus der 1. Gl. in (4.6) ergibt sich für die 2. Fundamentalform der Zeit-Schichte:  $K_{ij} = \frac{\dot{a}}{a} \delta_{ij}$  (vgl. Anhang 6).

Damit findet man leicht die folgenden Krümmungsformen

$$\Omega^0_i = \frac{\ddot{a}}{a} \theta^0 \wedge \theta^i, \quad \Omega^i_j = \frac{k + \dot{a}^2}{a^2} \theta^i \wedge \theta^j \quad (4.7)$$

und dies liefert für den Einstein-Tensor die folgenden Ausdrücke<sup>\*)</sup>:

$$G_{00} = 3 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right), \quad (4.8)$$

$$G_{11} = G_{22} = G_{33} = -2 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2}, \quad (4.9)$$

$$G_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu \neq \nu. \quad (4.10)$$

Damit die Feldgleichungen erfüllt sind, muss der Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}$  diagonal sein. Wir setzen

$$T_{00} = \rho : \text{ Energiedichte}; \quad T_{ij} = p \delta_{ij}, \quad p : \text{ Druck}. \quad (4.11)$$

Die Feldgleichungen  $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$  ( $\Lambda$ : kosmologische Konstante) ergeben damit

$$3 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) = 8\pi G \rho + \Lambda, \quad (4.12)$$

$$-2 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} = 8\pi G p - \Lambda. \quad (4.13)$$

\*) Gl. (4.8) folgt auch aus der folgenden allgemeinen Formel (s. [NS, (2.7.14)], oder Auhang G):

$$G_{00} = \frac{1}{2} \bar{R} + \frac{1}{2} [(\text{Sp } K)^2 - \text{Sp } K^2], \quad \bar{R}: \text{ Krümmungsskalar des räumlichen Teils von (4.1).}$$

Aus (3.17') und folgt nämlich  $\bar{R} = \frac{6k}{a^2}$ . Benutzt man ferner  $K_{ij} = \frac{\dot{a}}{a} \delta_{ij}$ , so ergibt sich tatsächlich (4.8).

Wir betrachten noch die Konsequenz der Bianchi-Identität

$$D^* T^\alpha = d^* T^\alpha + \omega^\alpha_\beta \wedge^* T^\beta = 0. \quad (4.14)$$

Für  $\alpha=0$  gibt dies

$$d(\rho \gamma^0) = -\omega^0_j \wedge^* T^j = p \omega^0_j \wedge \gamma^j.$$

$$\underbrace{d\rho \wedge \gamma^0 + \rho d\gamma^0}$$

Bemerken wir  $D\gamma^0=0$  und (4.4), so gibt dies

$$d\rho \wedge \gamma^0 = (\rho + p) \omega^0_j \wedge \gamma^j = (\rho + p) \frac{\dot{a}}{a} \delta^j_i \wedge \gamma^j.$$

Daraus folgt

$$\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p), \quad (4.15)$$

oder

$$\boxed{p = -\frac{d}{dt}(\rho a^3) / \frac{d}{dt} a^3}; \quad (4.16)$$

d.h.  $p = -$  Energieänderung / Volumenänderung.

Falls eine Zustandsgleichung  $p(\rho)$  vorliegt, so können wir (4.16) in der Form

$$\frac{d}{da}(\rho a^3) = -3p a^2 \quad (4.17)$$

bemerken, um  $\rho$  als Funktion von  $a$  zu bestimmen. [Bsp.:  $p = \rho/3 \Rightarrow \rho \propto a^{-4}$ ]. Mit diesem Kenntnis bestimmt (4.12) die Zeitabhängigkeit von  $a(t)$ .

Übungsaufgabe: Zeige, dass (4.13) aus (4.12) und (4.15) (oder (4.16)) folgt.

Aus (4.13) sehen wir wieder, dass für ein statisches Universum  $\Lambda \neq 0$  sein muss; andernfalls müsste der Druck negativ sein.

Im Moment wollen wir die Materie nicht näher spezifizieren. Trotzdem lassen sich aber einige interessante Schlüsse ziehen. Aus (4.12) und (4.13) folgt \*)

$$3\ddot{a} = -4\pi G (\rho + 3p)a + \Lambda a. \quad (4.18)$$

Wir sehen nun  $\Lambda = 0$ , wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt wird. Solange  $\rho + 3p$  positiv ist, <sup>(starke Energiebedingung)</sup> muss nach (4.18) die "Beschleunigung"  $\ddot{a}/a$  negativ sein. Da  $a$  positiv ist und  $\dot{a}/a$  gegenwärtig positiv ist (Hubble Expansion), muss  $a(t)$  als Funktion von  $t$  konkav sein. Deshalb muss  $a(t)$  bei einer endlichen Zeit in der Vergangenheit verschwinden.

Diese Zeit sei  $t=0$ . Dann ist der jetzige Wert  $t_0$  von  $t$  die Zeit, welche seit dieser anfänglichen Singularität vergangen ist und kann als Alter des Universums bezeichnet werden. Da  $a(t)$  konkav ist, gilt

$$t_0 < H_0^{-1}, \quad H_0 := \dot{a}(t_0)/a(t_0). \quad (4.19)$$

$H_0$  ist der sog. Hubble-Parameter. Dieser kann gemessen

\*) Dies ergibt sich auch aus der verallgemeinerten Poisson-Gleichung in Anhang C. Im vorliegenden Fall lautet diese

$$\begin{aligned} R_{00} &= -S_p K^2 - \partial_t S_p K = -3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)' = -3\frac{\ddot{a}}{a} \\ &= 8\pi G \left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T\right) - \Lambda g_{00} = 4\pi G(\rho + 3p) - \Lambda. \end{aligned}$$



werden. Wir gehen unten näher darauf ein. Es wird sich zeigen, dass die Hubble-Zeit  $1/H_0$  zwischen 10 bis 20 Milliarden Jahren liegt. Das tatsächliche Alter des Universums ist kurzer als diese Zeit.

Betrachten wir noch die Zukunft des Universums.

Solange  $p \geq 0$  ist, muss  $\dot{a}$  nach (4.17) mindestens mit  $a^{-3}$  abnehmen. Deshalb verschwindet die rechte Seite der Friedmann-Gleichung

$$\dot{a}^2 + k = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 \quad (4.12')$$

(Gleichung (4.12) für  $\Lambda=0$ ) mindestens mit  $a^{-1}$ .

Für  $k=-1$  bleibt  $\dot{a}^2$  positiv definit und deshalb nimmt  $a(t)$  monoton zu, und

$$a(t) \sim t \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Ist  $k=0$ , so nimmt  $a(t)$  ebenfalls dauernd zu, aber  $\dot{a}(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ ; d.h. die Zunahme ist langsamer.

Ist aber  $k=+1$ , so wird  $\dot{a}(t)$  gleich Null, wenn  $\rho a^2$  auf den Wert  $3/8\pi G$  gefallen ist. Da nach (4.18)  $\ddot{a}$  negativ-definit ist, wird danach das Universum in endlicher Zeit auf  $a=0$  kollabieren.

Das qualitative Verhalten des Friedmann-Universums ist also durch den Krümmungstyp bestimmt: Für  $k=0$  und  $k=-1$  wird das Universum für immer expandieren  
Ist hingegen  $k=+1$ , so schließt sich der jetzigen Expansion

Schlusslich eine Kollapsphase auf einen singulären Zustand ( $a=0$ ) an.

Der Wert von  $k$  ist prinzipiell beobachtbar. Wir werden darauf wiederholt eingehen, halten aber schon jetzt fest, dass der Krümmungstyp  $k$  zur Zeit noch unklar ist. [Für  $k=0, -1$  könnte das Universum baldem geschlossen sein; Beispiel Torus.]

### Newtonsche Interpretation der Friedmann-Gleichung

Nach dem Birkhoff-Theorem [NS, p.169] ist die Raumzeit innerhalb eines sphärischen Hohlraumes in einer kugelsymmetrischen Materieverteilung flach. Dieser Aussage Satz ermöglicht eine Newtonsche Interpretation der Friedmann-Gleichung (4.12'). Denken wir uns dazu irgendwo im Friedmann-Universum eine mitbewegte sphärische Fläche. Solange ihr Eigenradius viel kleiner ist als  $a(t)$ , wird die Bewegung der Galaxien innerhalb der Fläche vom Rest des Universums nicht beeinflusst. Der Raum ist dort fast flach und deshalb dürfen wir für nichtrelativistische Geschwindigkeiten die Newtonsche Theorie anwenden.

Betrachten wir eine Galaxie auf der herausgegriffenen mitbewegten sphärischen Oberfläche. Ihre Trajektorie sei  $\underline{x}(t) = \frac{a(t)}{a(t_0)} \underline{x}(t_0)$ . Die potentielle Energie  $V$  rührt von der homogenen Massenverteilung innerhalb der Kugel her. Pro Masseneinheit ist diese deshalb

$$V = -\frac{4\pi}{3} |\underline{x}(t)|^3 \rho(t) \frac{G}{|\underline{x}(t)|}, \quad \rho(t): \text{mittlere Dichte.}$$

Die kinetische Energie ist anders als pro Masseneinheit

$$T = \frac{1}{2} |\dot{\underline{x}}(t)|^2 = \frac{1}{2} |\underline{x}(t_0)|^2 \frac{\dot{a}(t)}{a^2(t_0)} .$$

Der Energiesatz gibt

$$\frac{1}{2} |\underline{x}(t_0)|^2 \frac{1}{a^2(t_0)} \left[ \dot{a}^2(t) - \frac{8\pi G}{3} \rho(t) a^2(t) \right] = \text{const} .$$

Daraus folgt, bei geeigneter Normierung von  $a(t)$ , tab. 4.12'. In der Newtonschen Interpretation der Friedmann-Gleichung ist  $k$  proportional zur Gesamtenergie. Die  $k$ -Abhängigkeit für den Verlauf des Skalenfaktors  $a(t)$  wird damit sehr anschaulich.

Weiter über Newton'sche Kosmologie findet man in :

O. Heckmann, Theorien der Kosmologie, Springer Verlag (1968).

siehe auch den Handbucheintrag von O. Heckmann und E. Schürzing (Handbuch der Physik, Bd. LIII, p.489).

## 5. Rotverschiebung

Die Expansion des Universums hat zur Folge, dass wir das Licht von weit entfernten Quellen rotverschoben sehen. Wir wollen diese Rotverschiebung durch den Skalenfaktor  $a(t)$  ausdrücken.

Dazu betrachten wir zwei Integralkurven des mittleren Geschwindigkeitsfeldes  $V$  (s. Abschnitt 2). Die eine beschreibt die Weltlinie einer weit entfernten Quelle und die andere einen irdischen Beobachter (s. Fig. 5).

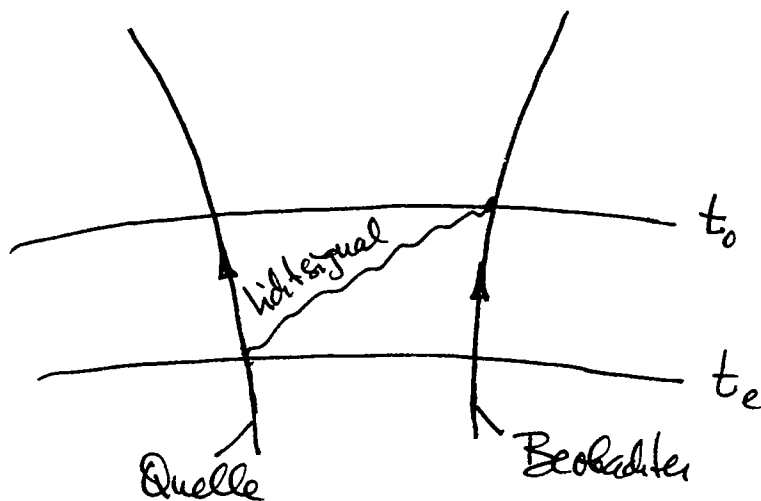


Fig. I.5. Zur Rotverschiebung

Die Metrik hat nach (2.4) die Form

$$g = dt^2 - a^2(t) d\sigma^2, \quad (5.1)$$

wobei  $d\sigma^2$  die Metrik eines Raumes konstanter Krümmung  $k = \pm 1, 0$  ist. (Für festes  $t$  ist dann der räumliche Anteil von (5.1) die Metrik eines Raumes konstanter Krümmung  $k/a^2(t)$ .) Da sich das Licht längs einer Nullgeodäte bewegt,

ist

$$dt = a(t) d\sigma ;$$

d.h. 
$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{\text{Quelle}}^{\text{Beob.}} dt : \underline{\text{unabhängig}} \text{ von } t_0, t_e. \quad (5.2)$$

Beobachten wir nun Licht, welches zur Zeit  $t_e + \Delta t_e$  emittiert und zur Zeit  $t_0 + \Delta t_0$  empfangen wird. Nach (5.2) gilt

$$\int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (5.3)$$

Für ein kleines  $\Delta t_e$  folgt daraus

$$\frac{\Delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\Delta t_e}{a(t_e)}.$$

Die beobachtete und die emittierte Frequenz  $\nu_0$ , bzw.  $\nu_e$ , stehen dann in folgender Beziehung

$$\frac{\nu_0}{\nu_e} = \frac{\Delta t_e}{\Delta t_0} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)}. \quad (5.4)$$

Der Rotverschiebungsparameter  $z$  ist definiert durch

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\nu_e - \nu_0}{\nu_0} \quad (5.5)$$

( $\lambda_0, \lambda_e$ : Wellenlängen). Da  $\lambda_0 / \lambda_e = \nu_e / \nu_0$ , folgt

$$\boxed{z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} - 1}. \quad (5.6)$$

Nach den Beobachtungen erscheinen entfernte Galaxien mit zunehmendem Abstand immer mehr nach rot verschoben. Deshalb folgt aus (5.6), dass  $a(t)$  mit  $t$  zunimmt.

2. Herleitung von (5.6): Die folgende (formale) Herleitung

der Rotationsformel ist ganz induktiv. Die Kreisfrequenz der Lichtwelle in Fig. 5 ist für einen mitbewegten Beobachter:

$$\omega = (k, V), \quad k: \text{Wellenzahlvektor.} \quad (5.7)$$

Bezeichnet  $\lambda$  einen <sup>passend gewählten</sup> affinen Parameter längs der Nullgeodäten zu  $k$ , so gilt

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = k(k, V) = \underbrace{(\nabla_k k, V)}_0 + (k, \nabla_k V).$$

Aber

$$\nabla_k V = \nabla_k e_0 = \omega^i_0(k) e_i \stackrel{(4.4)}{=} \frac{\dot{a}}{a} \theta^i(k) e_i = \frac{\dot{a}}{a} k^i e_i;$$

folglich

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{\dot{a}}{a} k^i k_i = - \frac{\dot{a}}{a} \omega^2.$$

Längs der Nullgeodäten ist

$$\frac{dt}{d\lambda} = \langle dt, k \rangle = \langle \theta^0, k \rangle = (V, k) = \omega.$$

Damit finden wir

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega/d\lambda}{dt/d\lambda} = - \frac{\dot{a}}{a} \omega,$$

und folglich gilt

$$\boxed{\omega \cdot a = \text{const} \text{ längs Nullgeodäten.}} \quad (5.8)$$

Übung: Mit der neuen Zeitkoordinate  $t'$ , definiert durch  $dt' = dt/a(t)$ , lautet die Friedmann-Metrik (5.1)

Lösung: Bezüglich unbewegten Koordinaten ist  $g$  konform zu

$$g' = dt'^2 - \underbrace{h_{ik} dx^i dx^k}_{\text{Metrik } h \text{ in (2.4)}}$$

Da die metrischen Koeffizienten  $t'$ -unabhängig sind, haben die Maxwell'schen Gl.  $dF=0$ ,  $\delta F=0$  Lösungen von der Form

$$F = F^{(0)} e^{-i\omega' t'} \quad (*)$$

mit konstantem  $\omega'$ , in welchen die Amplitude  $F^{(0)}$  nur von den Raumkoordinaten abhängt.

Da die Maxwell-Gl. (für  $j=0$ ) konform invariant sind, ist (\*) auch eine Lösung zur ursprünglichen Metrik. Transformieren wir diese auf die ursprünglichen Koordinaten, so kommt

$$F = F^{(0)} e^{-i\omega' \int \frac{dt}{a(t)}}$$

Dabei ist zu beachten, dass  $x' = (t', x^i)$

$$F^{(0)} = F_{\mu\nu}^{(0)}(x^i) dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} = F_{\mu\nu}^{(0)}(x) dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$$

die  $F_{0i}^{(0)}(x)$  langsam (proportional zu  $\bar{a}'(t)$ ) von  $t$  abhängen. Bis auf diese langsame Abhängigkeit, haben wir auch im ungestörten System eine periodisch veränderliche Welle mit der Frequenz  $\omega = \omega'/a(t)$ . Es ist somit wieder

$$\omega \cdot a = \text{const}$$

$$g = a^2(dt'^2 - ds^2).$$

(Für  $k=1$  ist also  $g$  konform zum Einstein-Universum.)  
Bemerkte die konforme Invarianz der Maxwell-Gleichungen  
im Vakuum für eine Herleitung von (5.8).

---

Um das Ergebnis (5.6) in eine beobachtbare Relation  
zu verwandeln, müssen wir uns zunächst mit operationell  
definierten (und bemessenen) Distanzmaßen befassen.

### 6. Kosmische Distanzmasse

Es sei  $D$  die physikalische Ausdehnung eines entfernten  
Objektes und  $\delta$  seine Winkelausdehnung (siehe Fig. 6).

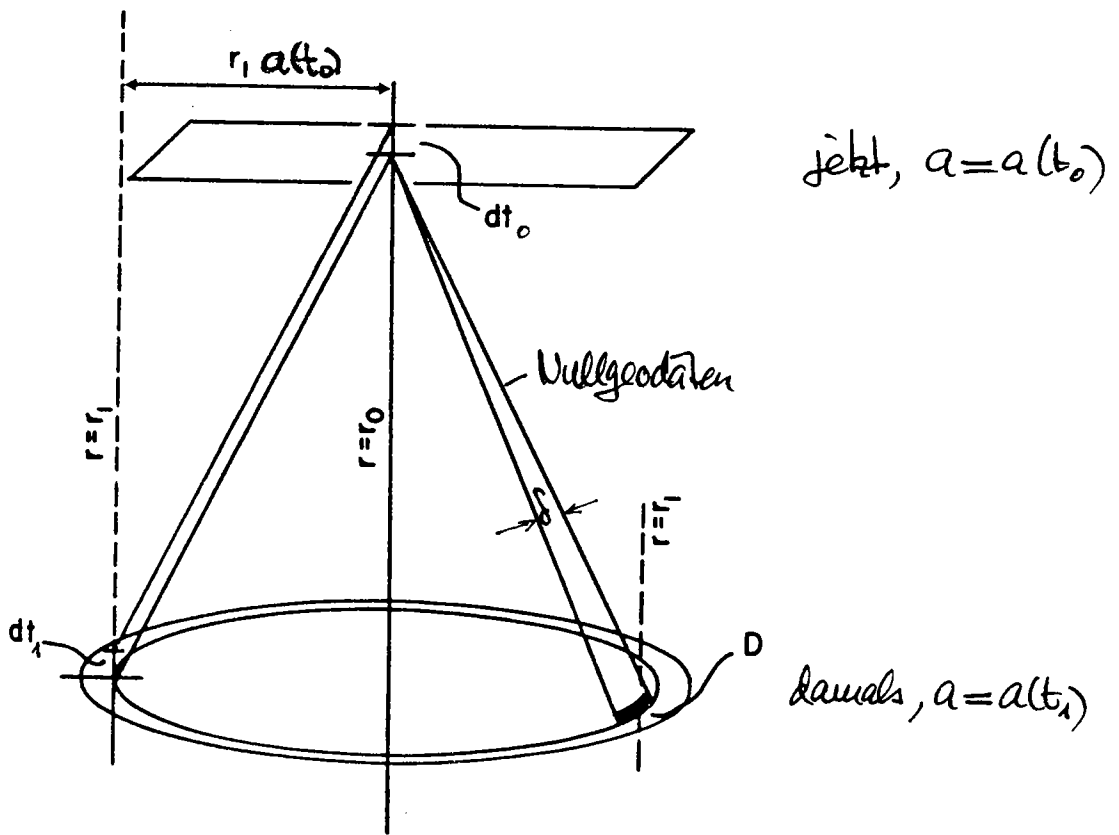


Fig. I. 6



Die Winkeldistanz  $d_A$  ist definiert durch

$$d_A = D/\delta. \quad (6.1)$$

Falls <sup>sich</sup> das Objekt mit einer wahren transversalen Geschwindigkeit  $v_{\perp}$  und einer scheinbaren Winkelgeschwindigkeit  $d\delta/dt_0$  bewegt, so ist die Eigenbewegungsdistanz definiert durch

$$d_H = \frac{v_{\perp}}{d\delta/dt_0}. \quad (6.2)$$

Wenn das Objekt eine intrinsische Luminosität  $L$  hat und wir einen Energiefluss  $l$  (scheinbare bolometrische Helligkeit) beobachten, so ist die Helligkeitsdistanz per Definitionem

$$d_L = \left( \frac{L}{4\pi l} \right)^{1/2}. \quad (6.3)$$

Diese drei Distanzen sind nicht gleich. Wir zeigen im folgenden die Beziehungen

$$\boxed{d_L = (1+z) d_H = (1+z)^2 d_A.} \quad (6.4)$$

\* \* \*

Zunächst bringen wir die Friedmann-Metrik (4.1) in eine andere Form. Führen wir im euklidischen Faktor des räumlichen Teils Polarkoordinaten ein, so kommt

$$g = dt^2 - a^2(t) \frac{du^2 + u^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2)}{\left(1 + \frac{k}{4} u^2\right)^2}. \quad (6.5)$$

(Die radiale Koordinate wird jetzt mit  $u$  bezeichnet.) Ersetzen wir  $u$  durch die radiale Koordinate  $r$  gemäss

$$r = \frac{u}{1 + \frac{k}{4} u^2} \quad (6.6)$$

so erhalten wir eine weitere gebänderte Form:

$$g = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2) \right]. \quad (6.7)$$

Ersetzen wir schliesslich  $r$  durch  $X$  gemäss

$$r = \begin{cases} \sin X, & k=1, \\ X, & k=0, \\ \sinh X, & k=-1, \end{cases} \quad (6.8)$$

dann ist

$$\frac{dr^2}{1 - kr^2} = dX^2$$

und folglich

$$g = dt^2 - a^2(t) \left[ dX^2 + \Sigma^2(X) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2) \right], \quad (6.9)$$

$$\text{mit} \quad \Sigma^2(X) = \begin{cases} \sin^2 X, & k=1, \\ X^2, & k=0, \\ \sinh^2 X, & k=-1. \end{cases} \quad (6.10)$$

Man kann übrigens die Friedmann-Metrik durch eine explizite Koordinatentransformation auch auf eine konform flache Gestalt bringen (siehe z.B. [H E, p.121, 135]). <sup>lokal</sup>

Um (6.4) zu beweisen, zeigen wir (für Berechnungen siehe Fig. 6)

$$d_A = r_1 a(t_1), \quad d_M = r_1 a(t_0), \quad d_L = r_1 a(t_0) \frac{a(t_0)}{a(t_1)}. \quad (6.11)$$

Dabei ist  $r_1$  die  $r$ -Koordinate in (6.7) für das entfernte Objekt, wenn wir die  $r$ -Koordinate für den Beobachter (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) gleich Null setzen.

Aus Fig. 6 und (6.7) folgt

$$D = a(t_1) r_1 \delta \quad (6.12)$$

und deshalb ist nach (6.1) die erste Gleichung in (6.11) richtig.

In der Zeit  $dt_0$  bewegt sich die Quelle um die <sup>transversale</sup> wirkliche  $V$  Distanz

$$dD = V_{\perp} dt_1 = V_{\perp} dt_0 \frac{a(t_1)}{a(t_0)}.$$

Die zugehörige Winkeländerung ist wie in (6.12)

$$d\delta = \frac{dD}{a(t_1) r_1} = \frac{V_{\perp} dt_0}{a(t_0) r_1}.$$

Nach der Definition (6.2) folgt deshalb die 2. Gleichung in (6.11).

In der Zeit  $dt_1$  emittiert die Quelle die Energie  $L dt_1$ . Diese Energie wird um den Faktor  $a(t_1)/a(t_0)$  rotverschoben und wird nach (6.7) über eine Kugelfläche der Größe  $4\pi (r_1 a(t_0))^2$  verteilt. Deshalb ist diechein-

bare Helligkeit

$$l = L dt_1 \frac{a(t_1)}{a(t_0)} \frac{1}{4\pi (\tau_1 a(t_0))^2} \frac{1}{dt_0},$$

d.h.

$$l = \frac{L a^2(t_1)}{4\pi a^4(t_0) \tau_1^2}. \quad (6.13)$$

Für die Definitionen (3) folgt daraus die 3. Gleichung von (6.11).

Wir schreiben (6.13) auch noch folgendermassen

$$l = \frac{L}{4\pi (\tau_1 a(t_0))^2} \frac{1}{(1+z)^2} \quad (6.13')$$

↑ Effekt der Rotverschiebung.

Für Ergänzungen zu diesem Abschnitt verweisen wir auf [SW, § 14.4].

### 7. Beziehung zwischen Rotverschiebung und scheinbarer Helligkeit

Wir leiten zunächst eine Beziehung zwischen der Rotverschiebung  $z$  und der Helligkeitsdistanz  $d_L$  ab.

Nach (5.2) und (6.7) ist mit den bisherigen Beziehungen

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{\tau_1} \frac{d\tau}{\sqrt{1-k\tau^2}}. \quad (7.1)$$

Wir erinnern auch an (5.6),

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1. \quad (7.2)$$

Nach (6.11) ist

$$d_L = \tau_1 \frac{a(t_0)}{a(t_1)} = \tau_1 a(t_0) (1+z). \quad (7.3)$$

Die Funktion  $d_L(z)$  interessiert uns zunächst nur für kleine  $z$  ("normale" Galaxien). Dann sind  $t_0 - t_1$  und  $r_1$  klein und wir können  $a(t)$  entwickeln:

$$a(t) = a(t_0) \left[ 1 + H_0(t-t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t-t_0)^2 + \dots \right]. \quad (7.4)$$

Dabei ist

$$H_0 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} \quad (7.5)$$

die Hubble-Konstante (Hubble-Parameter) und

$$q_0 = - \frac{\ddot{a}(t_0) a(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)} \quad (7.6)$$

ist der Bremsparameter.

Setzen wir (7.4) in (7.2) ein, so kommt

$$z = H_0(t_0 - t_1) + (1 + \frac{q_0}{2}) H_0^2 (t_0 - t_1)^2 + \dots \quad (7.7)$$

Die Umkehrung dieser Reihenentwicklung gibt

$$t_0 - t_1 = H_0^{-1} \left[ z - (1 + q_0/2) z^2 + \dots \right]. \quad (7.8)$$

Die Koordinate  $r_1$  finden wir aus einer Entwicklung von (7.1)

$$\begin{aligned} \bar{a}^{-1}(t_0) \int_{t_1}^{t_0} \left[ 1 + H_0(t_0 - t) + (1 + q_0/2) H_0^2 (t_0 - t)^2 + \dots \right] dt \\ = r_1 + O(r_1^3); \end{aligned}$$

also

$$r_1 = \frac{1}{a(t_0)} \left[ t_0 - t_1 + \frac{1}{2} H_0 (t_0 - t_1)^2 + \dots \right]. \quad (7.9)$$

Darin setzen wir (7.8) ein:

$$r_1 = \frac{1}{a(t_0) H_0} \left[ z - \frac{1}{2} (1 + q_0) z^2 + \dots \right]. \quad (7.10)$$

Substituieren wir dies in (7.3), so erhalten wir  $d_L$  als Potenzreihe von  $z$ :

$$d_L = H_0^{-1} \left[ z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 + \dots \right] \quad \text{: Hubble Gesetz.} \quad (7.11)$$

gravitative Effekte (quadratisch, violett!)

linearer Doppelleffekt, quadratischer Doppelleffekt

Die scheinbare Helligkeit ist damit nach (6.3)

$$l = \frac{L H_0^2}{4\pi z^2} [1 + (q_0 - 1)z + \dots]. \quad (7.12)$$

Wir betonen, dass für diese Beziehung die Feldgleichungen nicht verwendet wurden.

Die Astronomen benutzen statt  $l$  und  $L$  die scheinbaren und absoluten (Bolometrischen) Magnituden  $m$ , bzw.  $M$ , definiert durch

$$L = 10^{-24/5} \times 3.02 \times 10^{35} \text{ erg sec}^{-1},$$

$$l = 10^{-2m/5} \times 2.52 \times 10^{-5} \text{ erg sec}^{-1}. \quad (7.13)$$

Anstelle der ersten Gleichung haben wir auch

$$M - 4.72 = -2.5 \log \left( \frac{L}{L_0} \right). \quad (7.14)$$

Für zwei Sterne mit scheinbaren Helligkeiten  $l_1$  und  $l_2$  gilt für die zugehörigen scheinbaren Magnitudines

$$m_1 - m_2 = -\frac{5}{2} \log \left( \frac{l_1}{l_2} \right). \quad (7.15)$$

Für die Sonne ist  $m = -26.85$ .

Die absolute Helligkeit  $M$  ist nach Definition gleich der scheinbaren Helligkeit, welche das Objekt in einer Entfernung von 10 pc haben würde. Deshalb gilt

$$d_L = 10^{1+(m-M)/5} \text{ pc.} \quad (7.16)$$

Die Grösse  $m-M$  bezeichnet man als den Entfernungsmodul. Nach der letzten Gleichung gilt dafür

$$\begin{aligned} m-M &= 5 \log_{10} \left( \frac{d_L}{10 \text{ pc}} \right) \\ &= 5 \log_{10} [d_L (\text{Mpc})] + 25. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Hier setzen wir den  $\log_{10}$  von Gl. (7.11) ein und finden

$$\begin{aligned} m-M &= 25 - 5 \log_{10} [H_0 (\text{km sec}^{-1} \text{Mpc}^{-1})] + 5 \log_{10} [cz (\text{km/sec})] \\ &\quad + 1.086 (1-q_0) z + \dots, \end{aligned} \quad (7.18)$$

Grundsätzlich könnte man mit Hilfe dieser Beziehung die wichtigen Parameter  $H_0$  und  $q_0$  bestimmen. Man müsste dazu "lediglich" für zwei Objekte mit bekanntem  $M$  die scheinbaren Magnitudines  $m$  messen. In Wirklichkeit ist dies ein enorm schwieriges Unterfangen, da wir die absoluten Helligkeiten von weit entfernten Objekten nicht hinreichend genau kennen.

Für relativ kleine  $z$  ( $z \lesssim 0.1$ ) dominiert der lineare Term in (7.11):

$$d_L \approx H_0^{-1} z \quad (\text{Hubble'sches Gesetz}) \quad (7.19)$$

Entsprechend kann der letzte  $q_0$ -abhängige Beitrag in (7.18) vernachlässigt werden. Zur Bestimmung von  $H_0$  ist deshalb die Kenntnis von  $z$ ,  $m$  und  $M$  für mindestens ein Objekt mit  $z \lesssim 0.1$  nötig. Natürlich darf  $z$  andererseits nicht zu klein sein, damit peculiare Geschwindigkeiten nicht wichtig sind.

Wir werden später (§ II.) näher auf die Bestimmung der Hubble-Konstante eingehen, geben aber bereits das Resultat der bisherigen Bemühungen. Parametrisiert man  $H_0$  in der folgenden gebändelten Weise

$$H_0 = h_0 \times \frac{100 \text{ km}}{\text{sec Hpc}}, \quad (7.20)$$

so streuen die Ergebnisse verschiedener Gruppen im Intervall

$$\boxed{\frac{1}{2} \lesssim h_0 \lesssim 1.} \quad (7.21)$$

(Sandage u. Tamman bevorzugen den Wert  $h_0 \approx \frac{1}{2}$ .)

Notiere auch die Hubble-Zeit

$$\boxed{H_0^{-1} = h_0^{-1} \times 10^{10} \text{ Jahre}} \quad (7.22)$$

Für größere  $z$  ( $z \gtrsim 0.1$ ) ist der letzte Term in (7.18) nicht mehr vernachlässigbar. Deshalb würde es zur Be-



Stimmung von  $q_0$  genügen, die Form der Kurve  $u(z)$  für "Standardkerzen" zu bestimmen. Weit entfernte Galaxien sind aber wesentlich jünger und deshalb überlagern sich evolutive Effekte der Galaxien. Aufgrund dieser, sowie anderer Unsicherheiten, kann man gegenwärtig nur auf

Schlüssen. (Näheres dazu führen wir in §II.8 aus.) (7.23)

### 8. Zählung von Quellen (Teil 1)

Wir besprechen in diesem Abschnitt die Zahl der optischen- oder Radioquellen in Abhängigkeit der scheinbaren Helligkeit, oder der Rotverschiebung. In diese gehen die Parameter  $H_0$  und  $q_0$  explizite ein.

Zur Zeit  $t_1$  sei die Zahl der Quellen pro Volumeneinheit einer bestimmten Sorte (normale Galaxien, Radiogalaxien, Quasare) mit absoluter Helligkeit im Intervall  $(L, L+dL)$  gleich  $n(L, t_1) dL$ . Das räumliche Volumen zur Metrik (6.7) ist

$$dV = a^3(t_1) (1 - k r_1^2)^{-1/2} r_1^2 dt_1 \sin^2 \vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi_1. \quad (8.1)$$

Die Zahl der Quellen zwischen  $r_1$  und  $r_1 + dr_1$  mit absoluter Helligkeit zwischen  $L$  und  $L + dL$  ist deshalb

$$dN = 4\pi a^3(t_1) \frac{r_1^2}{\sqrt{1 - k r_1^2}} n(t_1, L) dt_1 dL. \quad (8.2)$$

Die Beziehung zwischen  $r_1$  und  $t_1$  wird durch (7.1) be-

stimmt, was aus (8.2) durch Differentiation

$$dt_1 = - (1 - kt_1^2)^{1/2} \frac{dt_1}{a(t_1)} \quad (8.3)$$

ergibt. Deshalb ist  $(r_1 = r(t_1))$ :

$$dN = 4\pi a^2(t_1) r^2(t_1) h(t_1, L) |dt_1| dL. \quad (8.4)$$

Wir benutzen noch (siehe (5.6) und (6.13))

$$z+1 = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}, \quad (8.5)$$

$$l = \frac{L a^2(t_1)}{4\pi r_1^2 a^4(t_0)}. \quad (8.6)$$

Damit ist die Zahl der Quellen mit Rotverschiebung  $< z$  und scheinbarer Helligkeit  $> l$ :

$$N(< z, > l) = \int_0^\infty dL \int_{\max\{t_z, t_z(L)\}}^{t_0} 4\pi r^2(t_1) a^2(t_1) h(t_1, L) dt_1. \quad (8.7)$$

Die unteren Grenzen  $t_z$ ,  $t_z(L)$ , welche durch  $z$  und  $l$  definiert werden, sind durch

$$a(t_z) = \frac{a(t_0)}{1+z}, \quad (8.8)$$

$$\frac{r^2(t_0)}{a^2(t_0)} = \frac{L}{4\pi l a^4(t_0)} \quad (8.9)$$

bestimmt.

Wir behandeln im folgenden nur  $N(< z)$  und  $N(> l)$ . (Radioteleskope messen meistens nur bei einer bestimmten Frequenz. Diesen Fall werden wir in § II.4 behandeln; siehe auch [SW, § 14.7].) Ferner vernachlässigen wir vorerst

evolutive Effekte. Dann gilt

$$n(t, L) = \left( \frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^3 n(t_0, L) \quad (8.10)$$

und folglich nach (8.7)

$$N(< z) = \int_0^\infty dL 4\pi n(t_0, L) a^3(t_0) \int_{t_z}^{t_0} \bar{a}^4(t_1) r^2(t_1) dt_1. \quad (8.11)$$

Für  $N(> l)$  müssen wir in diesem Ausdruck lediglich  $t_z$  durch  $t_p(L)$  ersetzen.

In (8.11) betrachten wir wieder kleine  $z$  und benutzen (7.4) sowie (7.9). Damit kommt

$$\begin{aligned} N(< z) &= 4\pi \int_0^\infty dL n(t_0, L) \int_{t_z}^{t_0} (t_0 - t_1)^2 [1 + 2H_0(t_0 - t_1) + \dots] dt_1 \\ &= \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty dL n(t_0, L) (t_0 - t_z)^3 [1 + \frac{3}{2} H_0(t_0 - t_z) + \dots]. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Die Grösse  $t_0 - t_z$  folgt aus (7.9):

$$t_0 - t_z = \frac{z}{H_0} [1 - (1 + q_0/2)z + \dots] \quad (8.13)$$

und wir erhalten schliesslich

$$N(< z) = \frac{4\pi}{3} \frac{z^3}{H_0^3} \int_0^\infty dL n(t_0, L) [1 - \frac{3}{2} z (1 + q_0) + \dots]. \quad (8.14)$$

Bis zu dieser Ordnung in einer Entwicklung nach  $z$  gehen die Feldgleichungen nicht ein. ( $N(< z)$  für beliebige  $z$  wird in §II.4 untersucht.)

Für  $N(> l)$  haben wir zunächst den Ausdruck (8.12) mit

$t_1$  statt  $t_2$ . Setzen wir (7.9) und (7.4) in (8.9) ein, so ergibt sich

$$t_0 - t_1 = \left(\frac{L}{4\pi l}\right)^{1/2} \left[ 1 - \frac{3}{2} H_0 \left(\frac{L}{4\pi l}\right)^{1/2} + \dots \right] \quad (8.15)$$

und somit

$$N(>l) = \int_0^\infty dL \frac{4\pi}{3} n(t_0, L) \left(\frac{L}{4\pi l}\right)^{3/2} \left[ 1 - \frac{3}{2} H_0 \left(\frac{L}{4\pi l}\right)^{1/2} + \dots \right]. \quad (8.16)$$

Ohne Evolution der Quellen müsste also  $N(>l)$  langsamer als  $l^{-3/2}$  abfallen.

Entsprechend findet man für Radioquellen für die Zahl  $N(>S, \nu)$  der Quellen mit Strahlungsstrom  $> S$  bei der Frequenz  $\nu$

$$N(>S, \nu) = \frac{4\pi}{3} S^{-3/2} \int_0^\infty n(t_0, P, \nu) \left[ 1 - \frac{3}{2} (\alpha+1) \left(\frac{PH_0}{S}\right)^{1/2} + \dots \right] P^{3/2} dP. \quad (8.17)$$

(Für eine Herleitung siehe [SW, S14.7] sowie §II.4 unten.)

In dieser Formel bezeichnet  $\alpha$  den Spektralindex der Quelle: spektrale abgestrahlte Energie pro Zeiteinheit und Raumwinkel  $P(\nu) \propto \nu^{-\alpha}$ . Wieder sollte  $N(>S, \nu)$  langsamer als  $S^{-3/2}$  abfallen. Dies widerspricht den Beobachtungen, welche wir in §II.4 ausführlich besprochen werden. Höchstwahrscheinlich beruht diese Diskrepanz auf evolutionen Effekten. Deshalb lernt man aus der Zählung der Quellen nicht über  $H_0$  und  $q_0$ . Historisch waren diese Zählungen vor allem wichtig, weil sie klar gegen die einst populäre "Steady state Theorie" aussagten.

