

## Kapitel 7. Kanonische Transformationen

---

Dieses Kapitel dient der formalen Ausgestaltung der kanonischen Mechanik. Wir beschäftigen uns vor allem mit der Transformationstheorie der Hamiltonschen Gleichungen, sowie der Charakterisierung und Erzeugung von kanonischen Transformationen.

Die symplektische Struktur des Phasenraumes induziert eine wichtige schiefe Bildung im Raume der differenzierbaren Funktionen, welche im weiteren Verlauf dieser Vorlesung eine wesentliche Rolle spielt.

### 7.1 Die Poisson-Klammern

---

Es sei  $X: U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorfeld auf  $U \subset \mathbb{R}^n$  und  $\phi_{t,s}$  der zugehörige Fluss. Ferner sei  $F: U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine zeitabhängige Funktion auf  $U$ . Nun betrachten wir die Integralkurve  $\gamma(t) = \phi_{t,s}(x)$  durch  $x$  ( $\gamma(s) = x$ ) und bestimmen die Zeitableitung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(\gamma(t), t) &= D_1 F(\gamma(t), t) \cdot \dot{\gamma}(t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\gamma(t), t) \\ &= D_1 F(\gamma(t), t) \cdot X(\gamma(t), t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\gamma(t), t). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Im folgenden bezeichne  $D_X$  die Richtungsableitung in Richtung  $X$  bei fester Zeit. Dann lautet (7.1) für  $t = s$

$$\begin{aligned} \dot{F}(x, s) &:= \frac{d}{dt} F(\gamma(t), t) \Big|_{t=s} = \frac{d}{dt} F(\phi_{t,s}(x), t) \Big|_{t=s} \\ &= D_X F(x, s) + \frac{\partial F}{\partial t}(x, s), \end{aligned}$$

d.h. es gilt

$$\boxed{\dot{F} = D_X F + \frac{\partial F}{\partial t}} \quad (7.2)$$

Ist  $\bar{X} = (X, 1)$  das Vektorfeld der autonomen Erweiterung (vgl. S. 41), so ist die rechte Seite von (7.2) gleich  $D_{\bar{X}}F$ .

Also gilt auch

$$\dot{F} = D_{\bar{X}}F. \quad (7.2')$$

Sei jetzt speziell  $X$  Hamiltonsch,  $X = X_H$ , dann wird aus (7.2)

$$\dot{F} = \{F, H\} + \partial_t F, \quad (7.3)$$

wobei

$$\{F, H\} := D_{X_H}F = D_1F \cdot X_H = \overbrace{\sum_{i,j} F_{,x_i} \varepsilon_{ij} H_{,x_j}}^{DF J(DH)^T}. \quad (7.4)$$

Schreiben wir (7.4) in  $q$  und  $p$ , so erhalten wir

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right). \quad (7.5)$$

Gl. (7.3) nennt man die Liouvillesche Gleichung.

Insbesondere lassen sich die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen wie folgt schreiben

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\}. \quad (7.6)$$

Die Bildung (7.4), (7.5) ist die sog. Poissonklammer. (Das Vorzeichen ist in der Literatur nicht einheitlich gewählt.)

Ausgedrückt durch die schiefe Form (5.42) gilt

$$\{F, G\} = \omega(X_F, X_G). \quad (7.7)$$

Wir stellen nun einige elementare Eigenschaften der Poissonklammer fest. Zunächst notieren wir für die Koordinatenfunktionen  $x_i: \mathbb{R}^{2f} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\{x_i, x_j\} = \varepsilon_{ij}, \quad (7.8)$$

d.h.

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}. \quad (7.9)$$

Aus (7.4), d.h.  $\{F, G\} = D_1 F J(D_1 G)^T$ , ergeben sich die meisten der folgenden Eigenschaften unmittelbar.

Satz 7.1: Für beliebige differenzierbare Funktionen  $F, G, H$  und Konstanten  $c_1, c_2$  gelten die folgenden Beziehungen:

- (i) Linearität:  $\{c_1 F + c_2 G, H\} = c_1 \{F, H\} + c_2 \{G, H\}$
- (ii) Antisymmetrie:  $\{F, G\} = -\{G, F\}$  (7.10)
- (iii) Produktregel:  $\{F, GH\} = \{F, G\} H + \{F, H\} G$  (7.11)
- (iv) Jacobi-Identität:  $\{F, \{G, H\}\} + \text{zyklisch} = 0$  (7.12)
- (v) Vollständigkeit:  $\{F, G\} = 0 \quad \forall G \Rightarrow \text{grad } F = 0$ .

Einzig die Jacobiidentität ist nicht offensichtlich. Diese könnte man durch eine direkte Rechnung verifizieren. Es gibt aber eine elegantere Möglichkeit, welche uns darüber hinaus auf wichtige Begriffsbildungen führt.

Wir ordnen einem Vektorfeld  $X$  durch  $L_X F := D_X F$  den Differentialoperator  $L_X$  zu. (Dieser ist vorläufig nur auf Funktionen  $F$  erklärt; er lässt sich aber zur Lieschen Ableitung auf beliebige Tensorfelder, insbesondere Differentialformen, erweitern.) Eine einfache Rechnung zeigt, dass der Kommutator

$$[L_X, L_Y] := L_X L_Y - L_Y L_X$$

von der Form  $L_Z$  ist, mit

$$Z_i = \sum_k (X_k Y_{i,k} - Y_k X_{i,k}), \quad Y_{i,k} := Y_{i, X_k}. \quad (7.13)$$

Das Vektorfeld  $Z$  nennen wir das Lieprodukt von  $X$  und  $Y$

und bezeichnen dieses mit  $[X, Y]$ . Das Lieprodukt ist also definiert durch

$$[L_X, L_Y] = L[X, Y] \quad (7.14)$$

Es ist sehr einfach zu zeigen, dass für das Lieprodukt die Eigenschaften (i) - (iv) von Satz 7.1 erfüllt sind. An Stelle von (v) hat man

$$[X, Y] = 0 \quad \forall Y \implies X = 0 \quad (7.15)$$

Dies sieht man aus (7.13). Insbesondere ist die Jacobi-Identität leicht zu verifizieren.

Nun betrachten wir speziell Hamiltonsche Vektorfelder  $X_H = J \operatorname{grad} H$ . Wir zeigen, dass die Zuordnung  $H \mapsto X_{-H}$  ein Liealgebren-Homomorphismus ist. Zur Erläuterung definieren wir die folgenden Begriffe.

Definition: Ein Vektorraum  $\mathcal{L}$  über  $\mathbb{R}$  mit einer Operation  $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ ,  $(x, y) \mapsto [x, y]$  ist eine Liealgebra über  $\mathbb{R}$ , falls die folgenden Axiome erfüllt sind:

- (L-1)  $[x, y]$  ist  $\mathbb{R}$ -bilinear
- (L-2)  $[x, y] = -[y, x]$
- (L-3) Es gilt die Jacobi-Identität:  
 $[x, [y, z]] + \text{zyklisch} = 0$ .

Beispiele: 1) Die Menge  $\mathcal{X}(M)$  der Vektorfelder auf  $M$ , ausgerüstet mit dem Lieprodukt.

2)  $C^\infty$ -Funktionen über dem Phasenraum, ausgerüstet mit der Poissonklammer.

Definition: Ein Homomorphismus  $\varphi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$  zwischen zwei Lieschen Algebren  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{L}'$  ist eine lineare Abbildung von  $\mathcal{L}$  nach  $\mathcal{L}'$  mit der Eigenschaft

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] . \quad (7.16)$$

Es bleibt uns die Verifikation von (7.16) für die lineare Zuordnung  $H \mapsto X_{-H}$ . Nun ist

$$\begin{aligned} L_{[X_{-H_1}, X_{-H_2}]} G &= L_{X_{-H_1}} (L_{X_{-H_2}} G) - L_{X_{-H_2}} (L_{X_{-H_1}} G) \\ &= L_{X_{-H_1}} (\{H_2, G\}) - L_{X_{-H_2}} (\{H_1, G\}) = \{H_1, \{H_2, G\}\} - \{H_2, \{H_1, G\}\} \\ &= \{ \{H_1, H_2\}, G \} = L_{X_{-\{H_1, H_2\}}} G, \end{aligned} \quad (7.17)$$

wobei die Jacobi-Identität für die Poisson-Klammer verwendet wurde (siehe aber die nachfolgende Bemerkung).

Tatsächlich gilt also die wichtige Beziehung:

$$\boxed{[X_{-H_1}, X_{-H_2}] = X_{-\{H_1, H_2\}} .} \quad (7.18)$$

**Bemerkung:** Im Anschluss an (7.17) kann man auch noch einen einfachen Beweis der Jacobi-Identität für die Poisson-Klammer geben. Dazu bemerken wir, dass in  $\{F, \{G, H\}\} +$  zyklisch keine zweiten Ableitungen vorkommen, denn diese würden für  $H$  in  $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\}$  auftreten, was nach der Rechnung in (7.17) gleich  $L_{[X_{-F}, X_{-G}]} H$  ist. Dasselbe gilt für die 2. Ableitungen von  $F$  und  $G$ . Mit dieser Bemerkung verifiziert man die Gültigkeit der Jacobi-Identität ohne Mühe.

Wir geben nun eine wichtige Charakterisierung von Hamiltonschen Vektorfeldern.

**Satz 7.2:** Sei  $X(x, t)$  ein (nichtautonomes) Vektorfeld über dem Phasenraum  $M$ . Dieses ist lokal genau dann Hamiltonsch,

wenn für alle  $F, G \in C^\infty(M)$  die folgende Identität gilt:

$$L_X \{F, G\} = \{L_X F, G\} + \{F, L_X G\}. \quad (7.19)$$

Beweis: " $\implies$ " Falls  $X$  (lokal) hamiltonsch ist,

$X = J \operatorname{grad} H$ , so gilt nach (7.4) für die linke Seite von (7.19)

$$L_X \{F, G\} = \{dF, G\} \cdot H.$$

Aus demselben Grund ist die rechte Seite von (7.19)

$$\{L_X F, G\} + \{F, L_X G\} = \{dF, H\} \cdot G + \{F, dG, H\}.$$

Deshalb folgt mit der Jacobi-Identität die Gültigkeit von (7.19).

" $\impliedby$ " Nun gelte umgekehrt für alle  $F, G \in C^\infty(M)$  die Gleichung (7.19). Insbesondere ist dann

$$L_X \{x_i, x_j\} = L_X \varepsilon_{ij} = 0 = \{L_X x_i, x_j\} + \{x_i, L_X x_j\}.$$

Da  $L_X x_i = \sum_k X_k \partial x_i / \partial x_k = X_i$ , so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \{X_i, x_j\} + \{x_i, X_j\} = X_{i,k} \varepsilon_{ke} x_{j,e} + x_{i,k} \varepsilon_{ke} X_{j,e} \\ &= X_{i,k} \varepsilon_{kj} + \varepsilon_{ie} X_{j,e} \end{aligned}$$

d.h.  $D_1 X J + J (D_1 X)^T = 0$ ,

oder nach Multiplikation von rechts und links mit  $J$

$$J D_1 X + (D_1 X)^T J = 0.$$

Dies zeigt

$$D_1(JX) - [D_1(JX)]^T = 0,$$

d.h. die Rotation des Vektorfeldes  $JX$  verschwindet. Deshalb existiert eine Funktion  $H$  mit  $JX = -\operatorname{grad} H$ , oder  $X = J \operatorname{grad} H$ .  $\square$

Korollar 1: Aus dem Beweis geht hervor, dass  $X$  schon hamiltonsch ist, wenn die Gleichung (7.19) nur für die Koordinatenfunktionen  $x_i$  ( $i = 1, \dots, 2f$ ) gilt.

Korollar 2: Aus (7.2) und  $\partial_t \{F, G\} = \{\partial_t F, G\} + \{F, \partial_t G\}$  sieht man, dass  $X$  genau dann Hamiltonsch ist, wenn für alle zeitabhängigen Phasenfunktionen  $F(x, t), G(x, t)$  gilt

$$\{F, G\}^\bullet = \{\dot{F}, G\} + \{F, \dot{G}\} \quad (7.20)$$

( $\bullet = D_{\bar{x}}$ ). Sind deshalb  $F$  und  $G$  Konstanten der Bewegung zur Hamiltonfunktion  $H$ , so folgt daraus, dass auch  $\{F, G\}$  eine Konstante der Bewegung ist. Die Konstanten der Bewegung bilden also eine Liesche Unteralgebra von  $(C^\infty(M, \{\cdot, \cdot\}))$ .

## 7.2. Charakterisierungen von kanonischen Transformationen

Wir wollen im folgenden untersuchen, unter welchen Diffeomorphismen ein Hamiltonsches Vektorfeld wieder in ein solches übergeht.

Zunächst führen wir die folgenden Begriffe ein.

Definition: Ein (zeitabhängiger) Diffeomorphismus  $\phi$  ist kanonoid bezüglich  $H$ , wenn das Hamiltonsche Vektorfeld  $X_H$  wieder in ein Hamiltonsches Vektorfeld übergeht;  $\phi$  ist verallgemeinert kanonisch, falls jedes (!) Hamiltonsche Vektorfeld wieder in ein solches übergeht.

Eine kanonoide Transformation braucht nicht unbedingt verallgemeinert kanonisch zu sein, wie wir in den Übungen sehen werden.

Die Gesamtheit der verallgemeinerten kanonischen Transformationen bildet in natürlicher Weise eine Gruppe.

**Satz 7.3:** Es sei  $\psi$  ein (zeitabhängiger) symplektischer Diffeomorphismus, d.h.  $\psi_t(x) := \psi(x, t)$  sei für jedes  $t$  symplektisch,  $D\psi_t \in \text{Sp}(f, \mathbb{R})$ . Dann ist  $\psi$  verallgemeinert kanonisch.

Zum Beweis benötigen wir das folgende

**Lemma:** Es sei  $X$  ein Vektorfeld im  $\mathbb{R}^n$  und  $\varphi$  ein Diffeomorphismus. Dann gilt für jede Funktion  $f$  auf  $\mathbb{R}^n$

$$L_X(\varphi^*f) = \varphi^*(L_{\varphi_*X}f), \quad (7.21)$$

wobei  $\varphi^*f := f \circ \varphi$ .

**Beweis:** Für die linke Seite von (7.21) haben wir

$$\begin{aligned} L_X(\varphi^*f) &= D(\varphi^*f) \cdot X = Df \cdot D\varphi \cdot X = Df \cdot \varphi_*X \\ &= D_{\varphi_*X} f. \end{aligned}$$

Genauer erhält man

$$L_X(\varphi^*f)(x) = (D_{\varphi_*X}f)(\varphi(x)) = \varphi^*(L_{\varphi_*X}f)(x). \quad \square$$

**Beweis von Satz 7.3:** Wir betrachten zuerst den autonomen Fall.

Für diesen wurde die Behauptung schon auf S. 140 bewiesen. Wir

geben hier einen anderen Beweis, aus welchem sich auch der

nichtautonome Fall sofort ergibt. Dazu benutzen wir (das Ko-

rollar 2 zum) Satz 7.2. Danach genügt es zu zeigen, dass  $L_{\psi_*X_H}$

als Derivation auf den Poissonklammern wirkt. Nun ist aber

nach (7.21)

$$\psi^*(L_{\psi_*X_H} \{F, G\}) = L_{X_H}(\psi^* \{F, G\}). \quad (7.22)$$

Ferner lassen symplektische Diffeomorphismen die Poissonklammern invariant:

$$\begin{aligned} \underline{\{\psi^*F, \psi^*G\}} &= (F \circ \psi)_{,i} \epsilon_{ij} (G \circ \psi)_{,j} = (F_{,k} \circ \psi) \underbrace{\psi_{k,i} \epsilon_{ij} \psi_{\ell,j}}_{\epsilon_{k\ell}} (G_{,\ell} \circ \psi) \\ &= \underline{\psi^* \{F, G\}}. \end{aligned} \quad (7.23)$$



Damit folgt, unter Benutzung von (Korollar 2 zu) Satz 7.2,

$$\begin{aligned} \phi^*(L_{\phi_* X_H} \{F, G\}) &= L_{X_H} \{ \phi^* F, \phi^* G \} = \{ L_{X_H} \phi^* F, \phi^* G \} + \\ &\{ \phi^* F, L_{X_H} \phi^* G \} \stackrel{(7.21)}{=} \{ \phi^*(L_{\phi_* X_H} F), \phi^* G \} + \{ \phi^* F, \phi^*(L_{\phi_* X_H} G) \} \\ &\stackrel{(7.23)}{=} \phi^*( \{ L_{\phi_* X_H} F, G \} + \{ F, L_{\phi_* X_H} G \} ), \end{aligned}$$

d.h.

$$L_{\phi_* X_H} \{F, G\} = \{ L_{\phi_* X_H} F, G \} + \{ F, L_{\phi_* X_H} G \}.$$

$L_{\phi_* X_H}$  ist also tatsächlich eine Derivation.

Für den nichtautonomen Fall muss man im obigen Beweis lediglich überall  $\phi$  durch  $\bar{\phi}$  und  $X$  durch  $\bar{X}$  im erweiterten Phasenraum (vgl. S.41) ersetzen.  $\square$

Die Untergruppe der symplektischen Diffeomorphismen nennt man auch die Gruppe der kanonischen Transformationen. Diese ist eine echte Untergruppe der verallgemeinerten kanonischen Transformationen, wie der folgende Satz zeigt. (In vielen Lehrbüchern wird das übersehen).

**Satz 7.4:** Sei  $\phi(x, t)$  ein zeitabhängiger (lokaler) Diffeomorphismus des Phasenraumes. Dann sind die drei folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $\phi$  ist verallgemeinert kanonisch;
- (ii) es gibt eine Konstante  $c \neq 0$ , so dass

$$\{ \phi_t^* F, \phi_t^* G \} = c \phi_t^* \{ F, G \} \quad \forall F, G \in C^\infty(M); \quad (7.24)$$

- (iii)  $\phi$  ist kanonoid bezüglich aller quadratischen Hamiltonfunktionen der Form

$$H = a + \sum b_i x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} c_{ij} x_i x_j \quad (7.25)$$

$(a, b_i, c_{ij} \in \mathbb{R}) .$

Beweis: Wir führen den Beweis wieder nur für den autonomen Fall. Durch Uebergang zum erweiterten Phasenraum beweist man den Satz im nichtautonomen Fall genau gleich.

Aus (i) folgt trivialerweise (iii). (ii)  $\Rightarrow$  (i): Nach (7.24) gilt für ein Hamiltonsches Vektorfeld  $X_H$

$$L_{X_H} \{ \phi^*F, \phi^*G \} = c L_{X_H} \phi^* \{ F, G \} = c \phi^* (L_{\phi_* X_H} \{ F, G \} ). \quad (7.26)$$

(7.21)

Die linke Seite dieser Gleichung ist nach Satz (7.2)

$$\begin{aligned} L_{X_H} \{ \phi^*F, \phi^*G \} &= \{ L_{X_H} \phi^*F, \phi^*G \} + \{ \phi^*F, L_{X_H} \phi^*G \} \\ &= \{ \phi^*(L_{\phi_* X_H} F), \phi^*G \} + \{ \phi^*F, \phi^*(L_{\phi_* X_H} G) \} \\ (7.21) \end{aligned}$$

$$= c \phi^* \{ L_{\phi_* X_H} F, G \} + c \phi^* \{ F, L_{\phi_* X_H} G \}. \quad (7.27)$$

(7.24)

Aus (7.26) und (7.27) folgt, dass  $L_{\phi_* X_H}$  die Produktregel (7.19) erfüllt. Deshalb ist  $\phi_* X_H$  nach Satz 7.2 Hamiltonsch für jedes  $H$  und folglich ist  $\phi$  verallgemeinert kanonisch. Es bleibt (iii)  $\Rightarrow$  (ii): Nach Voraussetzung erfüllt  $\phi_* X_H$  zu (7.25) die Derivationseigenschaft (7.19). Diese wenden wir auf die Funktionen  $\varphi_i$  in  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{2f}) := \phi^{-1}$  an:

$$L_{\phi_* X_H} \{ \varphi_i, \varphi_j \} = \{ L_{\phi_* X_H} \varphi_i, \varphi_j \} + \{ \varphi_i, L_{\phi_* X_H} \varphi_j \}. \quad (7.28)$$

Nun ist, mit (7.21) und  $\phi^* \varphi_i = \varphi_i \circ \phi: x \longmapsto x_i$ ,

$$\phi^*(L_{\phi_* X_H} \varphi_i) = L_{X_H} (\phi^* \varphi_i) = \{ x_i, H \}. \quad (7.29)$$

Aber

$$\{ x_i, H \} = \varepsilon_{ij} b_j + \varepsilon_{il} c_{lk} x_k = \varepsilon_{ij} b_j + \varepsilon_{il} c_{lk} \phi^* \varphi_k.$$

Deshalb gibt (7.29)

$$L_{\phi_* X_H} \varphi_i = \varepsilon_{ij} b_j + \varepsilon_{il} c_{lk} \varphi_k. \quad (7.30)$$

Setzen wir dies in (7.28) ein, so erhalten wir

$$L_{\phi_* X_H} \{ \varphi_i, \varphi_j \} = e_{ie} c_{ek} \{ \varphi_k, \varphi_j \} + \{ \varphi_i, \varphi_k \} \varepsilon_{je} c_{ek}.$$

Darauf wenden wir  $\phi^*$  an und benutzen links wiederum (7.21).

Mit der Definition

$$\mu_{ij} := \phi^* \{ \varphi_i, \varphi_j \} \quad (7.31)$$

ergibt sich

$$L_{X_H} \mu_{ij} = e_{ie} c_{ek} \mu_{kj} + \mu_{ik} \varepsilon_{je} c_{ek},$$

oder in Matrixschreibweise, mit  $M := (\mu_{ij})$ ,  $S = (c_{ek})$ ,

$$L_{X_H} M = JSM - MSJ. \quad (7.32)$$

(Beachte:  $M^T = -M$ ,  $S^T = S$ .) Für  $H = a$  sind beide Seiten in (7.32) gleich Null. (Im nichtautonomen Fall könnten wir auf  $\mathcal{O}M/\mathcal{O}t = 0$  schliessen.) Wählen wir jetzt  $H = \sum b_i x_i$ , so verschwindet die rechte Seite von (7.32). Die linke Seite hat die Matrixelemente

$$\{ \mu_{ij}, b_k x_k \} = \mu_{ij, e} c_{ek} b_k.$$

Also gilt  $M_{,e} J = 0$ , d.h.  $M$  ist eine konstante antisymmetrische Matrix. Aus (7.32) erhalten wir damit

$$JSM = MSJ \quad (7.33)$$

für jede symmetrische Matrix  $S$ . Wir zeigen nun, dass aus dieser Eigenschaft auf  $M = \text{const} \cdot J$  geschlossen werden kann.

Multiplizieren wir (7.33) von rechts und links mit  $J$ , so kommt

$$S(MJ) = JMS = (MJ)^T S. \quad (7.34)$$

Speziell für  $S = 1$  gibt dies  $MJ = (MJ)^T$ , weshalb wir aus (7.34) die Bedingung

$$S(MJ) = (MJ) S \quad (7.35)$$

erhalten.  $MJ$  ist also eine symmetrische Matrix, die mit allen symmetrischen Matrizen kommutiert. Damit muss  $MJ$  ein Vielfaches von  $I$  sein. Dies sieht man so: Ist  $S$  speziell von der Form  $S = \text{diag. } (s_1, \dots, s_{2f})$ , so gibt (7.35), wenn  $N := MJ$  ist

$$N_{ij} s_j = N_{ij} s_i, \quad 1 \leq i, j \leq 2f,$$

für beliebige  $s_1, \dots, s_{2f}$ . Dies ist nur möglich, wenn  $N$  diagonal ist. Dann wird aber aus  $NS = (NS)^T$ :

$$N_{ii} S_{ij} = N_{jj} S_{ij},$$

für beliebige  $S_{ij} = S_{ji}$ . Dies ist nur möglich, wenn alle Diagonalelemente  $N_{ii}$  gleich sind, d.h.  $MJ = c^{-1} \cdot I$ , oder  $M = c^{-1} J$ . Dies bedeutet nach (7.31)

$$\mu_{ij} = \varphi^* \{ \varphi_i, \varphi_j \} = c^{-1} \varepsilon_{ij},$$

oder

$$\{ \varphi_i, \varphi_j \} = c^{-1} \varepsilon_{ij}; \quad (7.36)$$

d.h.

$$\varphi_{i,k} \varepsilon_{kl} \varphi_{j,l} = c^{-1} \varepsilon_{ij}.$$

In Matrixschreibweise lautet dies

$$D\varphi J (D\varphi)^T = c^{-1} J. \quad (7.37)$$

Da  $\varphi$  ein Diffeomorphismus ist, folgt daraus  $c \neq 0$ . Ferner ist  $D\varphi = (D\varphi)^{-1}$  und folglich

$$D\varphi J (D\varphi)^T = c J. \quad (7.38)$$

Dies impliziert \*)

$$(D\varphi)^T J D\varphi = c J. \quad (7.39)$$

\*)

Aus  $M J M^T = c J$  folgt

$$M^T J M = c (J^{-1} M^{-1} J) J M = c J.$$

Damit gilt auch

$$\begin{aligned} \{ \phi^* F, \phi^* G \} &= (\phi^* F)_{,i} \varepsilon_{ij} (\phi^* G)_{,j} = \phi^*(F_{,k}) \underbrace{\phi_{k,i} \varepsilon_{ij} \phi_{l,j}}_{c \varepsilon_{kl}} \phi^*(G_{,l}) \\ &= c \phi^*(F_{,k} \varepsilon_{kl} G_{,l}) \\ &= c \phi^* \{ F, G \} . \end{aligned} \quad (7.40)$$

Dies beweist (ii) .  $\square$

**Korollar 1:** Ein zeitabhängiger (lokaler) Diffeomorphismus  $\phi$  ist genau dann verallgemeinert kanonisch, wenn

$$(D\phi_t)^T J D\phi_t = c J , \quad c \neq 0 . \quad (7.41)$$

**Beweis:** Ist  $\phi$  verallgemeinert kanonisch, so gilt (ii) von Satz 7.4. Wenden wir dies auf die Komponentenfunktionen  $x_i$  an, so erhalten wir

$$\{ \phi_t^* x_i, \phi_t^* x_j \} = \{ \phi_i, \phi_j \} = c \underbrace{\phi_t^* \{ x_i, x_j \}}_{\varepsilon_{ij}} = c \varepsilon_{ij} ,$$

oder

$$\phi_{i,k} \varepsilon_{kl} \phi_{j,l} = c \varepsilon_{ij} .$$

Dies ist aber (7.41) in Komponentenschreibweise.

Gilt umgekehrt (7.41), so zeigt die Rechnung im Anschluss an (7.39), dass auch die Aussage (ii) von Satz 7.4 gilt. Deshalb ist nach diesem Satz  $\phi$  verallgemeinert kanonisch.  $\square$

**Korollar 2:** Ein zeitabhängiger (lokaler) Diffeomorphismus

$\phi$  ist genau dann verallgemeinert kanonisch, wenn

$$\{ \phi_i, \phi_j \} = c \varepsilon_{ij} , \quad c \neq 0 \quad (7.42)$$

gilt.

**Beweis:** Dies folgt aus Korollar 1 und der Tatsache, dass (7.42) äquivalent zu (7.41) ist.  $\square$

Definition: Die Untergruppe der verallgemeinerten kanonischen Transformationen mit  $c = 1$ , d.h.  $D\phi_t \in Sp(f, \mathbb{R})$ , nennen wir die Gruppe der kanonischen Transformationen.

Die folgende Transformation ("Massstabsänderung")

$$q \longrightarrow \lambda q, \quad p \longrightarrow p, \quad \lambda \neq 0 \quad (7.43)$$

ist verallgemeinert kanonisch, aber nicht kanonisch. Jede verallgemeinerte kanonische Transformation mit  $c > 0$  lässt sich als Produkt einer Transformation der Art (7.43) und einer kanonischen Transformation darstellen. Ähnliches gilt für  $c < 0$ . Deshalb betrachten wir im folgenden vor allem kanonische Transformationen.

Nach Satz 5.3 ist der Fluss  $\phi_{t,s}$  zu einem Hamiltonschen Vektorfeld kanonisch.

Als Folge von Satz 7.4 haben wir noch das

Korollar 3: Ein zeitabhängiger Diffeomorphismus ist genau dann kanonisch, wenn

$$\phi_t^* \{F, G\} = \{\phi_t^* F, \phi_t^* G\} \quad (7.44)$$

gilt (Invarianz der Poisson-Klammer).

Bemerkung: In vielen Lehrbüchern wird übersehen, dass zwar eine kanonische Transformation ein Hamiltonsches Vektorfeld wieder in ein solches überführt, dass aber nicht jede Transformation mit dieser Eigenschaft (für alle Hamiltonschen Vektorfelder) kanonisch ist.

\* \* \*

### 7.3. Erzeugende Funktionen von kanonischen Transformationen

In diesem Abschnitt werden wir die kanonischen Transformationen in einfacher Weise durch Funktionen erzeugen. Dies hat wichtige Anwendungen, z.B. in der Hamilton-Jacobi Theorie (vgl. Kap. 9).

Zunächst verallgemeinern wir das Korollar zu Satz 5.5 für den nichtautonomen Fall. Wie in (5.72) bezeichne  $\Theta$  die 1-Form

$$\Theta = \sum p_i dq_i \equiv \sum \lambda_{ij} dx_i x_j . \quad (7.45)$$

Es sei  $\phi(x,t)$  ein (zeitabhängiger) Diffeomorphismus des Phasenraumes und  $\bar{\Phi}(x,t) = (\phi(x,t), t)$  der zugehörige zeiterhaltende Diffeomorphismus im erweiterten Phasenraum. Wir fassen auch  $\Theta$  als Differentialform auf dem erweiterten Phasenraum auf und bilden

$$\begin{aligned} \Theta - \bar{\Phi}^* \Theta &= \lambda_{ij} dx_i x_j - \lambda_{ij} (\psi_{i,k} dx_k + \psi_{i,t} dt) \phi_j \\ &\equiv \varphi_i dx_i + \chi dt , \end{aligned} \quad (7.46)$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \lambda_{ij} x_j - \lambda_{kl} \psi_{k,i} \phi_l , \\ \chi &= - \lambda_{kl} \psi_{k,t} \phi_l . \end{aligned} \quad (7.47)$$

Nun ist nach (7.47) für konstantes  $t$  :

$$\begin{aligned} d(\varphi_i dx_i) &= \frac{1}{2} (\varphi_{i,j} - \varphi_{j,i}) dx_j \wedge dx_i \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{ij} - \psi_{k,i} e_{kl} \psi_{l,j}) dx_j \wedge dx_i \end{aligned} \quad (7.48)$$

d.h.  $\varphi_i dx_i$  ist genau dann geschlossen, wenn  $\phi$  kanonisch ist. Lokal ist also  $\varphi_i dx_i = dF_t$  genau dann, wenn  $\phi$  kanonisch ist, und dies ist gleichbedeutend mit

$$\Theta - \bar{\Phi}^* \Theta = dF_t + \chi dt = dF + G dt, \quad (7.49)$$

wo  $F(x,t) = F_t(x)$  und

$$G = \chi - \frac{\partial F}{\partial t} = - \lambda_{kl} \frac{\partial \psi_k}{\partial t} \psi_l - \frac{\partial F}{\partial t} . \quad (7.50)$$

Für die Form (5.67),

$$\omega = - d \theta = \frac{1}{2} \epsilon_{kl} dx_k \wedge dx_l = \sum dq_i \wedge dp_i \quad (7.51)$$

folgt aus (7.49)

$$\omega - \Phi^* \omega = - dG \wedge dt . \quad (7.52)$$

Hat  $\theta - \Phi^* \theta$  umgekehrt die Form (7.49), so ist  $\varphi_i dx_i = dF_t$  und deshalb ist nach (7.48)  $\psi$  kanonisch. Zusammenfassend gilt der

Satz 7.5: Ein lokaler Diffeomorphismus  $\psi_t(x)$  ist genau dann kanonisch, wenn es lokal Funktionen  $F(x,t)$  und  $G(x,t)$  gibt, mit

$$\theta - \Phi^* \theta = dF + G dt . \quad (7.53)$$

Bemerkung: Die Funktionen  $F$  und  $G$  in (7.53) sind nicht eindeutig bestimmt. Ist  $\psi$  zeitunabhängig, so kann man, wie leicht zu sehen ist,  $F$  zeitunabhängig und  $G = 0$  wählen (vgl. das Korollar zu Satz 5.5).

Wir interessieren uns nun für die transformierte Hamiltonfunktion  $K$  in  $\psi_* X_H = X_K$  für eine kanonische Transformation, welche (7.53) erfüllt. Dazu drücken wir (7.53) zunächst wie folgt aus. Es sei  $y = \psi(x,t)$  und damit

$$\lambda_{ij} dx_i x_j - \lambda_{ij} dy_i y_j = dF(x,t) + G dt . \quad (7.54)$$

Wenden wir diese Gleichung auf  $(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{2f}, 1)$  an, so ergibt sich, wegen

$$dy_i = \psi_{i,k} dx_k + \psi_{,t} dt ,$$



$$\lambda_{ij} \dot{x}_i x_j - \lambda_{ij} \dot{y}_i y_j = G + \frac{dF}{dt}, \quad (7.55)$$

wobei

$$\dot{y} = D_1 \phi(x, t) \dot{x} + \partial_t \phi(x, t) \quad (7.56)$$

und  $dF/dt$  die formale totale Zeitableitung ist (vgl. S. 83)

Nun erinnern wir daran, dass die kanonischen Gleichungen als Eulersche Gleichungen zur Lagrangefunktion (vgl. S. 131)

$$L(x, \dot{x}, t) = \lambda_{ij} \dot{x}_i x_j - H(x, t) \quad (7.57)$$

aufgefasst werden können. Nach (7.55) ist die dazu transformierte Lagrangefunktion

$$\bar{L}(y, \dot{y}, t) = \lambda_{ij} \dot{y}_i y_j - K,$$

mit

$$H(x, t) - K(y, t) = G(x, t). \quad (7.58)$$

(Nach Satz 3.1 gibt  $dF/dt$  keinen Beitrag zur Eulerableitung.)

Benutzen wir noch die Folgerung zu Satz 3.2, so ergibt sich, dass  $K$  in (7.58) die neue Hamiltonfunktion ist. Wir halten dieses Resultat fest.

**Satz 7.6:** Es sei  $H$  eine (zeitabhängige) Hamiltonfunktion und  $\theta_H := \theta - H dt$ . Ein lokaler Diffeomorphismus  $\phi(x, t)$  ist genau dann kanonisch, wenn es zu jedem  $H$  Funktionen  $F$ ,  $K$  gibt, so dass gilt:

$$\theta_H - \phi^* \theta_K = dF. \quad (7.59)$$

$K$  ist die transformierte Hamiltonfunktion, d.h. es gilt  $\phi_* X_H = X_K$ . ( $K$  ist nur bis auf eine irrelevante additive Funktion der Zeit bestimmt.)

In der  $(q, p)$ -Notation lautet (7.59)

$$\sum p_i dq_i - H(q, p, t) dt = \sum P_i dQ_i - K(Q, P, t) dt + dF. \quad (7.60)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir daraus

$$p_i - \sum_k p_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad (7.61)$$

$$- \sum_k p_k \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad (7.62)$$

$$K(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial F}{\partial t}(q,p,t) + \sum_k p_k \frac{\partial Q_k}{\partial t}. \quad (7.63)$$

Bemerkungen: Eine kanonische Transformation bestimmt nach (7.61) und (7.62) die Funktion  $F$  bis auf eine additive Funktion  $f(t)$ . Ist umgekehrt eine Funktion  $F$  gegeben, so können wir (7.61) und (7.62) als Differentialgleichungen einer kanonischen Transformation auffassen. Eine Lösung dieser Differentialgleichungen ist nach Satz 7.5. eine kanonische Transformation, weil sich immer ein  $G$  finden lässt, so dass (7.53) erfüllt ist. Die Lösung dieser Gleichungen ist aber nicht eindeutig. Mit anderen Worten: Verschiedene kanonische Transformationen führen zum gleichen  $F$ . Die Funktion  $F$  in Satz 7.5 nennt man erzeugende Funktion, obschon zu jedem  $F$  eine Klasse von kanonischen Transformationen gehört.

#### Kanonische Transformationen 1. Art

Wir betrachten nun eine zeitabhängige kanonische Transformation  $\psi_t: (q,p) \mapsto (Q,P)$ , welche die Eigenschaft hat, dass die Transformationsgleichungen  $Q_i = Q_i(q,p,t)$  nach  $p_i$  aufgelöst werden können:  $p_i = \varphi_i(q,Q,t)$ . Kanonische Transformationen mit dieser Eigenschaft bezeichnet man von 1. Art. Wir definieren dann zu einer erzeugenden Funktion  $F$  :

$$F_1(q,Q,t) = F(q, \varphi(q,Q,t), t). \quad (7.64)$$

Aus (7.60) ergibt sich

$$\sum p_i dq_i - H dt = \sum P_i dQ_i - K dt + \sum \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt . \quad (7.65)$$

Daraus folgt

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}(q, Q, t) , \quad P_i = - \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}(q, Q, t) \quad (7.66)$$

und

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}(q, Q, t) . \quad (7.67)$$

Die Gleichungen (7.66) definieren die kanonische Transformation. Zu jeder kanonischen Transformation 1. Art gehört eine, bis auf eine additive Funktion der Zeit, eindeutige Funktion  $F_1$ . Da sich aus der 1. Gleichung in (7.66) die  $Q_i$  eindeutig nach  $q$ ,  $p$  und  $t$  auflösen lassen, muss gelten

$$\det \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j} \right) \neq 0 . \quad (7.68)$$

Umgekehrt sei  $F_1(q, Q, t)$  eine Funktion, welche (7.68) erfüllt. Dann definieren die Gleichungen (7.66) eine kanonische Transformation 1. Art. Die letzte Aussage ergibt sich daraus, dass dann ein  $F$  existiert, welches (7.64) genügt, und dieses  $F$  erfüllt wegen (7.65) die Gleichung (7.53) von Satz 7.5 mit einem geeigneten  $G$ .

Die erzeugenden Funktionen  $F_1(q, Q, t)$  klassifizieren also, im wesentlichen eindeutig, die kanonischen Transformationen 1. Art.

Natürlich ist nicht jede kanonische Transformation vom

Typ 1. Z.B. ist  $Q = q$ ,  $P = q+q$  kanonisch (die Poissonklammern bleiben invariant), aber  $q$  und  $Q$  sind nicht unabhängig.

Kanonische Transformationen 2. Art

Sind  $q$  und  $P$  unabhängig, so sagen wir, die Transformation ist 2. Art, oder vom Typ 2. Sind hingegen die  $p$  und  $Q$  unabhängig, dann sprechen wir vom Typ 3 und bei unabhängigen  $p$  und  $P$  vom Typ 4. Das eben besprochene Beispiel ist gleichzeitig vom Typ 2,3 und 4.

Für jeden Typ kann eine erzeugende Funktion definiert werden. Wir betrachten als Beispiel noch Typ 2. Sei

$$\tilde{F}_2(q, P, t) = F(q, p(q, P, t), t) \tag{7.69}$$

und

$$F_2 := \tilde{F}_2 + \sum Q_i P_i, \tag{7.70}$$

dann folgt aus (7.60)

$$\sum p_i dq_i - H dt = \sum p_k \left( \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial Q_k}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial Q_k}{\partial t} \right) - K dt + d\tilde{F}_2.$$

Aber

$$d\tilde{F}_2 = dF_2 - \sum Q_i dP_i - \sum_k p_k \left( \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial Q_k}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial Q_k}{\partial t} \right).$$

Deshalb ergibt sich

$$\sum p_i dq_i - H dt = \sum \left[ \frac{\partial F_2}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} dP_i - Q_i dP_i \right] + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt - K dt.$$

Daraus folgt

$$\left| \begin{array}{l} p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}(q, P, t), \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}(q, P, t) \end{array} \right. \tag{7.71}$$

$$\boxed{K(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(q,P,t)}. \quad (7.72)$$

In den Übungen werden wir auch für Typ 3 und Typ 4 analoge Formeln herleiten.

Neben den vier betrachteten Typen von kanonischen Transformationen gibt es noch gemischte Typen, bei denen jeder Freiheitsgrad irgend einem der vier Typen angehört.

Wir nennen eine elementare kanonische Transformation eine kanonische Transformation, bei der eine Anzahl  $n$  der Paare  $(q_i, p_i)$  gemäss  $Q_i = p_i, P_i = -q_i$  ersetzt werden und die übrigen unberührt bleiben. Nach dem oben Ausgeführten ergibt sich unmittelbar der folgende

Satz 7.7: Jede kanonische Transformation kann als Komposition einer elementaren kanonischen Transformation mit einer Transformation vom Typ 1, welche gemäss (7.66) durch eine erzeugende Funktion bestimmt ist, dargestellt werden.

Bemerkung: Die kanonische Transformation  $(q_1, q_2, p_1, p_2) \mapsto (q_1, p_2, p_1 - q_2)$  ist von keinem der vier Typen.

Bis auf triviale ("permutationsartige") Transformationen können wir also alle kanonischen Transformationen durch Funktionen erzeugen.



## Kapitel 8. Symmetrien und Erhaltungssätze

---

Der Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen wurde bereits im Lagrangeschen Formalismus diskutiert (siehe § 3.4). Dieses Thema wollen wir jetzt in der kanonischen Mechanik wieder aufnehmen.

### 8.1 Integrale der Bewegung

Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst nur autonome kanonische Systeme. Jeder  $C^\infty$ -Funktion  $G$  ordnen wir, wie immer, ein Hamiltonsches Vektorfeld  $X_G = J \operatorname{grad} G$  zu. Der zu  $X_G$  gehörige Fluss  $\phi_t^G$  ist nach Satz 5.3 eine lokale 1-parametrische Gruppe von kanonischen Transformationen. Umgekehrt gehört zu einer (lokalen) einparametrischen Gruppe von kanonischen Transformationen ein Vektorfeld, welches nach Satz 5.3 (lokal) Hamiltonsch ist. Die zugehörige Hamiltonfunktion, welche bis auf eine irrelevante Konstante eindeutig ist, nennen wir die erzeugende Funktion der 1-parametrischen Gruppe von kanonischen Transformationen.

Zunächst erinnern wir an die Liouvillesche Gleichung. Es gilt für die zeitliche Änderung von  $G$  unter der Dynamik, welche zu  $H$  gehört:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G \circ \phi_t^H &= \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} G \circ \phi_{\tau+t}^H = \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} (G \circ \phi_\tau^H) \circ \phi_t^H \\ &= D_{X_H} G \circ \phi_t^H = \{ G, H \} \circ \phi_t^H \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$= \{ G \circ \phi_t^H, H \} . \quad (8.2)$$

Wir nennen  $G$  ein autonomes H-Integral, falls  $G \circ \phi_t^H = G$  gilt, für alle  $t$ . Nach (8.1) folgt dann

$$D_{X_H} G = 0, \quad (8.3)$$

und umgekehrt impliziert diese Gl. nach (8.1), dass  $G \circ \phi_t^H$  unabhängig von  $t$  ist. Also gilt  $G \circ \phi_t^H = G$ .

Nach der Definition der Poisson-Klammer ist (8.3) äquivalent zu

$$\{G, H\} = 0. \quad (8.4)$$

Dies wiederum ist äquivalent zu  $\{H, G\} = 0$ , was (wenn wir in der obigen Kette - mit  $G \leftrightarrow H$  - rückwärts gehen) äquivalent ist zu  $D_{X_G} H = 0 \iff H \circ \phi_t^G = H$ .

Diese in  $G$  und  $H$  völlig symmetrischen Aussagen wollen wir im folgenden Satz festhalten.

Satz 8.1: Es seien  $G, H$  zwei differenzierbare Phasenraumfunktionen und  $\phi_t^G$ , bzw.  $\phi_t^H$  die Flüsse zu den zugehörigen Hamiltonschen Vektorfeldern  $X_G$  und  $X_H$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $D_{X_H} G = 0$ ,
- (ii)  $G \circ \phi_t^H = G$  für alle  $t$ ,
- (iii)  $\{G, H\} = 0$ ,
- (iv)  $D_{X_G} H = 0$ ,
- (v)  $H \circ \phi_t^G = H$  für alle  $t$ ,
- (vi)  $\{H, G\} = 0$ .

Dies besagt in anderen Worten:  $G$  ist ein Integral der  $H$ -Evolution genau dann, wenn  $H$  unter der durch  $G$  erzeugten 1-parametrischen kanonischen Transformationsgruppe invariant ist.



Korollar: Sind  $F$  und  $G$  autonome  $H$ -Integrale, so ist auch  $\{F, G\}$  ein autonomes  $H$ -Integral.

Dies folgt unmittelbar aus der Jacobi-Identität, oder aus der Derivationseigenschaft (7.19) für  $D_{X_H}$ .

Mit anderen Worten: Die autonomen  $H$ -Integrale bilden eine Liesche Unter algebra von  $(C^\infty(M), \{.,.\})$ . Natürlich ist aufgrund von  $\{H, H\} = 0$  insbesondere  $H$  ein autonomes  $H$ -Integral (Energiesatz).

## 8.2 Galileiinvarianz und die zehn klassischen Erhaltungssätze

Als Beispiel dieser Zusammenhänge betrachten wir nochmals die zehn klassischen Erhaltungsgrößen für ein  $N$ -Teilchensystem mit Phasenraum  $M \subset \mathbb{R}^{6N}$  und der Hamiltonfunktion  $H(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N, \underline{p}_1, \dots, \underline{p}_N)$ .

### a) Translationsinvarianz und Impulserhaltung

Die 1-parametrische Gruppe von Translationen in Richtung  $\underline{a}$

$$\psi_s : (\underline{x}, \underline{p}) \mapsto (\underline{x} + s\underline{a}, \underline{p}) \quad (8.5)$$

ist kanonisch. Das zugehörige Vektorfeld ist

$$\begin{aligned} X(\underline{x}, \underline{p}) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\underline{x}_1 + s\underline{a}, \dots, \underline{x}_N + s\underline{a}, \underline{p}_1, \dots, \underline{p}_N) \\ &= (\underline{a}, \dots, \underline{a}, \underline{0}, \dots, \underline{0}) . \end{aligned}$$

Dieses ist, wie wir wissen Hamiltonsch, d.h. von der Form

$$X = X_G = \left( \frac{\partial G}{\partial \underline{p}}, - \frac{\partial G}{\partial \underline{x}} \right) . \quad (8.6)$$

Die erzeugende Funktion  $G$  ist offenbar

$$G = \underline{p} \cdot \underline{a} , \quad \underline{p} = \sum_{i=1}^N \underline{p}_i . \quad (8.7)$$

Nach Satz 8.1 ist  $H$  genau dann translationsinvariant, wenn der Gesamtimpuls  $\underline{p}$  ein H-Integral ist.

b) Rotationsinvarianz und Drehimpulserhaltung

Die 1-parametrische Untergruppe  $\alpha \mapsto R(\underline{e}, \alpha)$  von Drehungen um  $\underline{e}$  ( $|\underline{e}| = 1$ ) mit dem Drehwinkel  $\alpha$  (vgl. (2.65)) induziert die 1-parametrische Gruppe von kanonischen Transformationen

$$\phi_\alpha : (\underline{x}, \underline{p}) \mapsto (R(\underline{e}, \alpha)\underline{x}, R(\underline{e}, \alpha)\underline{p}) \quad (8.8)$$

des Phasenraumes. Da nach (2.65)

$$\left. \frac{d}{d\alpha} R(\underline{e}, \alpha)\underline{x} \right|_{\alpha=0} = \underline{e} \wedge \underline{x}$$

ist, induziert  $\phi_\alpha$  das Vektorfeld

$$X(\underline{x}, \underline{p}) = (\underline{e} \wedge \underline{x}, \underline{e} \wedge \underline{p}) .$$

Dieses ist von der Form (8.6), mit der erzeugenden Funktion

$$G = \underline{e} \cdot \underline{L} \quad , \quad \underline{L} := \sum_{i=1}^N \underline{x}_i \wedge \underline{p}_i . \quad (8.9)$$

Nach Satz 8.1 ist  $H$  genau dann rotationsinvariant, wenn der totale Drehimpuls  $\underline{L}$  ein H-Integral ist.

c) Zeitliche Translationsinvarianz und Energieerhaltung

Um den Energiesatz in das richtige Licht zu stellen, müssen wir für einen Moment nichtautonome Hamiltonsche Systeme zulassen, da wir für die zeitliche Translationsinvarianz nicht

das obige Schema benutzen können.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i)  $H(\underline{x}, \underline{p}, t+s) = H(\underline{x}, \underline{p}, t)$  für alle  $t, s$   
(zeitliche Translationsinvarianz),

(ii)  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ ,

(iii)  $\frac{d}{dt} H \circ \phi_{t,s}^H = 0$  ( $\dot{H} = 0$ ).

Dies ergibt sich aus (7.3):

$$\dot{H} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (8.10)$$

Falls eine der drei äquivalenten Bedingungen erfüllt ist, ist  $H$  invariant unter  $\phi_t^H$  (Fluss zu  $X_H$ ).

d) Galileiinvarianz und Schwerpunktssatz

Schliesslich betrachten wir spezielle Galileitransformationen  $\underline{x} \mapsto \underline{x} + \underline{v}t$  (vgl. § 1.2). Diese induzieren im Phasenraum die folgenden kanonischen Transformationen:

$$\begin{aligned} \underline{x}_i &\mapsto \underline{x}'_i = \underline{x}_i + \underline{v}t \\ \underline{p}_i &\mapsto \underline{p}'_i = \underline{p}_i + m_i \underline{v}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Für festes  $t$  ist deshalb

$$\psi_s : (\underline{x}_i, \underline{p}_i) \mapsto (\underline{x}_i + s\underline{v}t, \underline{p}_i + sm_i \underline{v}) \quad (8.12)$$

eine 1-parametrische Gruppe von kanonischen Transformationen mit dem Hamiltonschen Vektorfeld

$$X_G = (\underline{v}t, m_i \underline{v}). \quad (8.13)$$

Die erzeugende Funktion  $G$  ist

$$G = \underline{v} \cdot \underline{A} , \quad \underline{A} = t \underline{p} - M \underline{x} , \quad (8.14)$$

wobei  $M = \sum m_i$  ,  $\underline{x} = M^{-1} \sum m_i \underline{x}_i$  . Tatsächlich ist

$$\frac{\partial}{\partial p_i} (\underline{v} \cdot \underline{A}) = \underline{v} t , \quad - \frac{\partial}{\partial x_i} (\underline{v} \cdot \underline{A}) = m_i \underline{v} .$$

Da es sich bei (8.11) um eine zeitabhängige kanonische Transformation handelt, können wir Satz 8.1 nicht direkt anwenden. Um die transformierte Hamiltonfunktion zu bestimmen, stellen wir zunächst fest, dass (8.11) durch die folgende erzeugende Funktion vom Typ 2 gemäss (7.71) bestimmt wird:

$$S(\underline{x}, \underline{p}', t) = \sum_{i=1}^N \underline{x}_i \cdot \underline{p}'_i + \underline{v} \cdot \sum_{i=1}^N (\underline{p}'_i t - m_i \underline{x}_i) - \frac{M}{2} \underline{v}^2 t . \quad (8.15)$$

In der Tat gilt

$$\frac{\partial S}{\partial \underline{x}_i} = \underline{p}'_i - m_i \underline{v} = \underline{p}_i , \quad \frac{\partial S}{\partial \underline{p}'_i} = \underline{x}_i + \underline{v} t = \underline{x}'_i .$$

Die transformierte Hamiltonfunktion  $K$  ist nach (7.72) bestimmt durch

$$K(\underline{x}', \underline{p}', t) = H(\underline{x}, \underline{p}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} (\underline{x}, \underline{p}', t) , \quad (8.16)$$

wobei die gestrichenen und die ungestrichenen Grössen gemäss (8.11) zusammenhängen.

Beispiel: Für die Hamiltonfunktion

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{i < j} v_{ij} (|\underline{x}_i - \underline{x}_j|) \quad (8.17)$$

stimmt  $K$  mit  $H$  überein: Nach (8.16) und (8.11) gilt nämlich

$$\begin{aligned} K(\underline{x}', \underline{p}', t) &= \sum_i \frac{1}{2m_i} (\underline{p}'_i - m_i \underline{v})^2 + \sum_{i < j} v_{ij} (|\underline{x}'_i - \underline{x}'_j|) \\ &\quad + \underline{v} \cdot \sum \underline{p}'_i - M \underline{v}^2 \\ &= \sum_i \frac{p_i'^2}{2m_i} + \sum_{i < j} v_{ij} (|\underline{x}'_i - \underline{x}'_j|) . \end{aligned}$$

Wir zeigen nun: Wenn ein translationsinvariantes  $H$  unter speziellen Galileitransformationen invariant ist, so ist die Schwerpunktsverschiebung

$$\underline{A} = t \underline{P} - M \underline{X} \quad (8.18)$$

( $\underline{P}$ : Gesamtimpuls,  $\underline{X}$ : Schwerpunktskoordinaten) zeitlich konstant (Schwerpunktssatz).

Um dies zu beweisen, führen wir eine kanonische Transformation auf Jacobi-Koordinaten durch. Diese sind wie folgt definiert:

$$\underline{x}_1 = \underline{x}_2 - \underline{x}_1$$

$$\underline{x}_2 = \underline{x}_3 - (m_1 \underline{x}_1 + m_2 \underline{x}_2) / (m_1 + m_2)$$

$$\underline{x}_{N-1} = \underline{x}_N - \frac{\sum_{i=1}^{N-1} m_i \underline{x}_i}{\sum_{i=1}^{N-1} m_i}$$

$$\underline{x}_N = \underline{X} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \underline{x}_i}{M} ,$$

$$\underline{\pi}_1 = (m_1 \underline{p}_2 - m_2 \underline{p}_1)$$

$$\underline{\pi}_2 = [(m_1 + m_2) \underline{p}_3 - m_3 (\underline{p}_1 + \underline{p}_2)] / (m_1 + m_2 + m_3)$$

$$\underline{\pi}_{N-1} = [(\sum_{i=1}^{N-1} m_i) \underline{p}_N - m_N \sum_{i=1}^{N-1} \underline{p}_i] / M$$

$$\underline{\pi}_N = \underline{P} = \sum_{i=1}^N \underline{p}_i .$$

Man verifiziert leicht, dass die  $\underline{x}_i, \underline{\pi}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) die Beziehungen (7.9) erfüllen. Deshalb ist die Transformation auf Jacobi-Koordinaten (nach Korollar 2 auf p. 2') kanonisch.

Wenn  $H$  gegenüber räumlichen Translationen invariant ist, so ist  $H$  in den Jacobi-Koordinaten nur eine Funktion

$H(\underline{\xi}_1, \dots, \underline{\xi}_{N-1}, \underline{\pi}_1, \dots, \underline{\pi}_N, t)$ . Nun ist nach (8.11), (8.16) und (8.15)

$$K(\underline{\xi}'_1, \dots, \underline{\xi}'_N, \underline{\pi}'_1, \dots, \underline{\pi}'_N, t) = H(\underline{\xi}'_1, \dots, \underline{\xi}'_{N-1}, \underline{\pi}'_1, \dots, \underline{\pi}'_{N-1}, \underline{\pi}'_N - M \underline{v} t) + \underline{v} \cdot \underline{\pi}'_N - \frac{M}{2} \underline{v}^2. \quad (8.20)$$

Damit  $K$  dieselbe Funktion wie  $H$  ist, muss folgendes gelten, wie man durch Differentiation von (8.20) nach  $\underline{v}$  an der Stelle  $\underline{v} = 0$  sieht:

$$\underline{\pi}_N = M \frac{\partial H}{\partial \underline{\pi}_N}(\underline{\xi}_1, \dots, \underline{\xi}_{N-1}, \underline{\pi}_1, \dots, \underline{\pi}_N, t). \quad (8.21)$$

Dies zeigt, dass  $H$  die folgende Form hat

$$H = \frac{\underline{\pi}_N^2}{2M} + H_{\text{rel}}(\underline{\xi}_1, \dots, \underline{\xi}_{N-1}, \underline{\pi}_1, \dots, \underline{\pi}_{N-1}, t). \quad (8.22)$$

Für die Schwerpunktsverschiebung (8.18) ergibt sich

$$\underline{\dot{A}} = t \underline{\dot{\pi}}_N + \underline{\pi}_N - M \underline{\dot{\xi}}_N = \underline{\pi}_N - M \frac{\partial H}{\partial \underline{\pi}_N} = 0. \quad (8.23)$$

Dabei haben wir die kanonischen Gleichungen

$$\underline{\dot{\pi}}_N = -\frac{\partial H}{\partial \underline{\xi}_N} = 0, \quad \underline{\dot{\xi}}_N = \frac{\partial H}{\partial \underline{\pi}_N},$$

sowie die Folge (8.21) der Galileiinvarianz verwendet. Man sieht ausserdem leicht, dass die spezielle Galileiinvarianz (8.21) für  $H$ , die Form (8.22) von  $H$ , sowie  $\underline{\dot{A}} = 0$  paarweise äquivalent sind. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Falls alle zehn Erhaltungssätze für ein Hamiltonsches  $N$ -Teilchensystem erfüllt sind, muss nach dem Ausgeführten  $H$  die folgende Form haben.

$$H(\underline{\xi}, \underline{\pi}) = \frac{\underline{\pi}_N^2}{2M} + H_{\text{rel}}(\underline{\xi}_1, \dots, \underline{\xi}_{N-1}, \underline{\pi}_1, \dots, \underline{\pi}_{N-1}), \quad (8.24)$$

mit der Eigenschaft

$$H_{\text{rel}}(R\underline{\xi}_1, \dots, R\underline{\pi}_{N-1}) = H_{\text{rel}}(\underline{\xi}_1, \dots, \underline{\pi}_{N-1}) \text{ für alle } R \in SO(3). \quad (8.25)$$

Umgekehrt, hat ein  $H$  dieser Form die zehn klassischen Integrale der Bewegung.

### 8.3 Liesche Gruppen von kanonischen Transformationen

Wir beginnen mit einem Beispiel. Für ein Hamiltonsches N-Teilchensystem operiert die Drehgruppe  $SO(3)$  in natürlicher Weise im Phasenraum  $M \subset \mathbb{R}^{6N}$  gemäss:

$$R \in SO(3) \longmapsto \tau_R : (\underline{x}, \underline{p}) \longmapsto (R\underline{x}, R\underline{p}) . \quad (8.26)$$

Diese Operation ist kanonisch (benutze das Korollar 2 auf p. 205).

Zu jeder 1-parametrischen Untergruppe  $R(\underline{e}, \varphi)$  ist die infinitesimale Erzeugende nach (2.67)

$$\left. \frac{d}{d\varphi} R(\underline{e}, \varphi) \right|_{\varphi=0} = \underline{I} \cdot \underline{e} \quad (8.27)$$

mit den drei Matrizen  $I_k$  in Gl. (2.68). Durch direkte Rechnung findet man sofort die Vertauschungsrelationen

$$[I_i, I_j] = \sum_k \varepsilon_{ijk} I_k \quad (8.28)$$

oder, anders geschrieben,

$$[\underline{I} \cdot \underline{e}_1, \underline{I} \cdot \underline{e}_2] = \underline{I} \cdot (\underline{e}_1 \wedge \underline{e}_2) . \quad (8.29)$$

Die 1-parametrische Untergruppe  $R(\underline{e}, \varphi)$  von  $SO(3)$  induziert die 1-parametrische Gruppe  $\varphi \longmapsto \tau_{R(\underline{e}, \varphi)}$  von kanonischen Transformationen des Phasenraumes. Das zugehörige Hamiltonsche Vektorfeld ist nach (8.9) gleich  $X_{\underline{e} \cdot \underline{L}}$ . Der infinitesimalen Drehung  $\underline{e} \cdot \underline{I}$  entspricht also in natürlicher Weise die Funktion  $\underline{e} \cdot \underline{L}$  auf dem Phasenraum. Eine direkte Rechnung der Poissonklammern der Drehimpulskomponenten liefert das Resultat (vgl. Übungen)

$$\{L_i, L_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} L_k , \quad (8.30)$$

oder

$$\{L \cdot e_1, L \cdot e_2\} = L \cdot (e_1 \wedge e_2) . \quad (8.31)$$

Die Vertauschungsrelationen (8.28) der infinitesimalen Drehungen widerspiegeln sich also in den Poissonklammern der Drehimpulskomponenten. Wir wollen im folgenden den allgemeinen Sachverhalt aufdecken, der für diesen Zusammenhang verantwortlich ist. Eine ganz analoge Situation werden wir in der Quantenmechanik wieder antreffen. [Für die meisten Zuhörer wird es im folgenden genügen, die Resultate (ohne Beweise) zur Kenntnis zu nehmen. Die minimalen gruppentheoretischen Hilfsmittel, die wir im folgenden benötigen, werden im Anhang II entwickelt.]

Es sei  $G$  eine lineare Liesche Gruppe, welche durch kanonische Transformationen auf dem Phasenraum  $M$  operiert, d.h. es existiere eine differenzierbare Abbildung  $\tau : G \times M \longrightarrow M$ , mit (vgl. Abschnitt 9 von Anhang II):

- (i)  $\tau_{g_1} \circ \tau_{g_2} = \tau_{g_1 g_2}$ ,  $\tau_g(x) := \tau(g, x)$
- (ii)  $\tau_e = \text{Id}$ ,  $e$ : Einselement von  $G$
- (iii)  $\tau_g$  ist kanonisch.

Zu jedem Element  $X$  der Liealgebra  $\mathfrak{g}$  von  $G$  betrachten wir die 1-parametrische Untergruppe  $g(s) = \exp(sX)$  von  $G$ . Dann ist  $\tau_{g(s)}$  nach (i) - (iii) eine 1-parametrische Gruppe von kanonischen Transformationen des Phasenraumes. Das zugehörige Vektorfeld bezeichnen wir mit  $X^*$ . In Anhang II (Abschnitt 9) wird gezeigt, dass die Zuordnung  $\mathcal{Q} : X \longmapsto X^*$  ein Liealgebren-Homomorphismus ist. Da  $G$  kanonisch operiert, ist  $X^*$  (lokal) ein Hamiltonsches Vektorfeld (Satz 5.3). Das Vektorfeld  $X^*$  hat also die Form  $X_F = J \text{ grad } F$ .



Wir nehmen für einen Moment an, die Operation von  $G$  sei zeitunabhängig. Wir nennen  $G$  eine Symmetriegruppe, wenn  $\tau_g$  die Hamiltonfunktion des Systems invariant lässt:

$$H \circ \tau_g = H \quad \text{für alle } g \in G. \quad (8.33)$$

Dies gilt dann insbesondere für eine 1-parametrische Untergruppe  $g(s)$  von  $G$  und folglich haben wir

$$\left. \frac{d}{ds} H(\tau_{g(s)}(x)) \right|_{s=0} = D_{X_F} H = \{F, H\} = 0, \quad (8.34)$$

d.h.  $F$  ist ein Integral der Bewegung. Zu jedem Element der Liealgebra  $\mathcal{G}$  gehört demnach ein Integral der Bewegung.

Wir kehren zur allgemeinen Situation zurück und nehmen an, dass  $M$  zusammenhängend ist. Für die  $C^\infty$ -Funktionen über  $M$  betrachten wir die Äquivalenzrelation  $F \sim G \iff F - G = \text{const.}$  Es sei  $\tilde{\mathcal{F}}(M) = C^\infty(M)/\sim$ . Jedem  $X \in \mathcal{G}$  entspricht dann ein eindeutiges  $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{F}}(M)$  mit  $X^* = X_F$  für jedes  $F \in \tilde{F}$ . Die Zuordnung  $X \mapsto \tilde{F}$  bezeichnen wir mit  $\sigma$ .

Den Raum  $\tilde{\mathcal{F}}(M)$  versehen wir mit der Struktur einer Liealgebra durch

$$[\tilde{F}, \tilde{G}] := \widetilde{\{F, G\}}, \quad F \in \tilde{F}, G \in \tilde{G}. \quad (8.35)$$

Die Definition ist natürlich unabhängig von der Wahl der Repräsentanten. Nun gilt der

**Satz 8.2:** Die Abbildung  $\sigma : \mathcal{G} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}(M)$  ist ein Liealgebren Homomorphismus.

Beweis: Es sei  $\sigma(X) = \tilde{F}$ ,  $\sigma(Y) = \tilde{G}$  und  $\sigma([X, Y]) = \tilde{K}$ . Für Repräsentanten  $F \in \tilde{F}$ ,  $G \in \tilde{G}$ ,  $K \in \tilde{K}$  gilt dann  $\rho(X) = X_{-F} (= -X^*)$ ,  $\rho(Y) = X_{-G}$ ,  $\rho([X, Y]) = X_{-K}$ . Da  $\rho$  ein Homomorphismus ist, haben wir mit (7.18)

$$\begin{aligned} X_{-K} &= \mathcal{Q}([X, Y]) = [\mathcal{Q}(X), \mathcal{Q}(Y)] = [X_{-F}, X_{-G}] \\ &= X_{-\{F, G\}}. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass  $K$  und  $\{F, G\}$  in derselben Klasse sind, d.h.

$$\underline{\tilde{K}} = \underline{\mathcal{Q}([X, Y])} = \underline{\widetilde{\{F, G\}}} = \underline{[\tilde{F}, \tilde{G}]} = \underline{[\mathcal{Q}(X), \mathcal{Q}(Y)]}. \quad \square$$

Wir halten nochmals schematisch die Definition von  $\mathcal{Q}$  fest:

$$\left\{ \begin{array}{l} X \in \mathcal{G}, \quad g(s) = \exp(sX), \quad \tau_{g(s)} \text{ definiert } X^*, \\ X^* = X_F, \quad \mathcal{Q}: X \longmapsto \tilde{F}. \end{array} \right. \quad (8.36)$$

Nun sei  $X_1, \dots, X_n$  eine Basis von  $\mathcal{G}$ . Dann gilt

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k, \quad c_{ij}^k = -c_{ji}^k. \quad (8.37)$$

Die Konstanten  $c_{ij}^k$  sind die Strukturkonstanten der Liealgebra  $\mathcal{G}$  (oder der Gruppe  $G$ ) relativ zur Basis  $X_1, \dots, X_n$ . Nun sei  $\mathcal{Q}(X_k) = \tilde{F}_k$ ; dann gilt nach Satz 8.2

$$[\tilde{F}_i, \tilde{F}_j] = \sum_k c_{ij}^k \tilde{F}_k. \quad (8.38)$$

Daraus ergibt sich für die Poissonklammern von Repräsentanten

$$F_i \in \tilde{F}_i: \quad \left\{ F_i, F_j \right\} = \sum_k c_{ij}^k F_k + a_{ij} \quad (8.39)$$

(Beachte, dass  $X_{F_i} = X_i^*$  ist.) Die Konstanten  $a_{ij}$  sind nicht unabhängig voneinander. Da die Poissonklammer schief ist, folgt zunächst  $a_{ij} = -a_{ji}$ . Aus der Jacobi-Identität erhält man ferner

$$\sum_k (c_{ij}^k a_{lk} + c_{jl}^k a_{ik} + c_{li}^k a_{jk}) = 0. \quad (8.40)$$

Im allgemeinen kann man die Koeffizienten  $a_{ij}$  nicht durch eine andere Wahl der Repräsentanten  $F_i$  von  $\tilde{F}_i$  zum Verschwinden bringen. \*) Dann spricht man von einer projektiven Realisierung der Liealgebra  $\mathfrak{g}$  im Raume der  $C^\infty$ -Funktionen über dem Phasenraum. Eine ganz analoge Situation trifft man in der Quantenmechanik.

\* \* \*

Wir spezialisieren nun die obige Diskussion auf die folgende wichtige Situation. Der Phasenraum  $M$  sei  $M = N \times \mathbb{R}^f$ , wobei  $N \subset \mathbb{R}^f$  der Konfigurationsraum ist. Jeder Transformation  $\varphi: q \mapsto \varphi(q)$  des Konfigurationsraumes können wir die folgende kanonische Transformation  $T^*(\varphi)$  des Phasenraumes  $M$  zuordnen:

$$T^*(\varphi): (q, p) \longmapsto (\varphi(q), [(D\varphi)^T]^{-1} \cdot p). \quad (8.41)$$

(Diese lässt sich geometrisch deuten.) In Komponenten geschrieben: Sei  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_f)$  und  $T^*(\varphi)(q, p) = (\bar{q}, \bar{p})$ , so gilt

$$\bar{q}_i = \varphi_i(q), \quad p_i = \sum_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i}(q) \bar{p}_j. \quad (8.42)$$

[Die  $p_i$  transformieren sich kontragradiert zu den  $\dot{q}_i$  bei der Tangentialabbildung  $T(\varphi)$ .]  $T^*(\varphi)$  ist eine kanonische Transformation. Dies sieht man daraus, dass sie aus der folgenden erzeugenden Funktion 2. Art entsteht:

$$S(q, \bar{p}) = \sum_j \varphi_j(q) \bar{p}_j. \quad (8.43)$$

---

\*) Für eine vertiefte Diskussion siehe: Abraham + Marsden, "Foundations of Mechanics", Benjamin 1978, § 4.2.

Tatsächlich stimmen die Gleichungen

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad , \quad \bar{q}_i = \frac{\partial S}{\partial p_i} \quad (8.44)$$

mit (8.42) überein. Man verifiziert leicht die Kompositionsregel

$$T^*(\varphi \circ \psi) = T^*(\varphi) \circ T^*(\psi) \quad . \quad (8.45)$$

Ist speziell  $\varphi_t$  der Fluss zu einem Vektorfeld  $X$  auf  $N$ , dann ist  $T^*(\varphi_t)$  nach (8.45) eine 1-parametrische Gruppe von kanonischen Transformation des Phasenraumes. Deshalb ist  $T^*(\varphi_t)$  der Fluss zu einem Hamiltonschen Vektorfeld, welches wir mit  $T^*(X)$  bezeichnen. Die zugehörige Hamiltonfunktion bezeichnen wir mit  $H_X$ . Wir wollen  $T^*(X)$  und  $H_X$  explizit bestimmen.

Dazu differenzieren wir die Gleichungen (8.42) - mit  $\varphi$  durch  $\varphi_t$  ersetzt - nach  $t$  an der Stelle  $t = 0$ . Wir erhalten ( $X_i$  seien die Komponenten des Vektorfeldes)

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial t} \right|_{t=0} &= X_i(q) \\ 0 &= \sum_j \frac{\partial X_j}{\partial q_i} p_j + \left. \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial t} \right|_{t=0} \quad , \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } T^*(X) = (X_i(q), - \sum_j \frac{\partial X_j(q)}{\partial q_i} \cdot p_j) \quad . \quad (8.46)$$

Die Hamiltonfunktion  $H_X$  dieses Vektorfeldes ist

$$\boxed{H_X = \sum_{i=1}^f p_i X_i(q) \quad .} \quad (8.47)$$

Operiert nun allgemeiner eine (lineare) Liesche Gruppe  $G$  auf dem Konfigurationsraum,  $g \longmapsto \tau_g$ , dann gehört dazu

die kanonische Operation

$$g \longmapsto T^*(\tau_g)$$

auf dem Phasenraum. Jedem Element  $\xi$  der Liealgebra  $\mathfrak{g}$  von  $G$  wird ein Vektorfeld  $X_\xi = \xi^*$  des Konfigurationsraumes zugeordnet. Wir wissen, dass diese Zuordnung ein Antihomomorphismus ist,

$$[X_\xi, X_\eta] = -X_{[\xi, \eta]} \quad (8.48)$$

Die Hamiltonfunktion des Hamiltonschen Feldes  $T^*(X_\xi)$  bezeichnen wir mit  $J(\xi)$ ,

$$J(\xi) = H_{X_\xi} \quad (8.49)$$

Wir zeigen anschliessend durch eine direkte Rechnung, dass allgemein für (8.47) folgendes gilt

$$\{H_X, H_Y\} = -H_{[X, Y]} \quad (8.50)$$

Zusammen mit (8.48) und (8.49) folgt daraus

$$\begin{aligned} \{J(\xi), J(\eta)\} &= \{H_{X_\xi}, H_{X_\eta}\} = -H_{[X_\xi, X_\eta]} = H_{X_{[\xi, \eta]}} \\ &= J([\xi, \eta]) \end{aligned}$$

d.h. 
$$\{J(\xi), J(\eta)\} = J([\xi, \eta]) \quad (8.51)$$

Beweis von (8.50): Nach (8.47) ist

$$\begin{aligned} \{H_X, H_Y\} &= \{p_k X_k, p_j Y_j\} = \frac{\partial}{\partial q_i} (p_k X_k) \frac{\partial}{\partial p_i} (p_j Y_j) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial p_i} (p_k X_k) \frac{\partial}{\partial q_i} (p_j Y_j) = p_k \frac{\partial X_k}{\partial q_i} Y_j - X_i p_j \frac{\partial Y_j}{\partial q_i} \\ &= -p_k \left( X_i \frac{\partial Y_k}{\partial q_i} - Y_i \frac{\partial X_k}{\partial q_i} \right) = -p_k [X, Y]_k \\ &= -H_{[X, Y]} \end{aligned}$$

Man mache sich klar, dass die Beziehungen (8.28) und (8.30) unter dieses Schema fallen. Im Unterschied zu (8.39) treten in (8.51) keine Konstanten auf.

Beispiel. Kanonische Formulierung von klassischen Spinsystemen

Der Phasenraum eines klassischen Spins (Vektor mit Länge 1) ist die 2-Sphäre  $S^2$  mit der symplektischen Form  $\omega = dq \wedge dp$ , wobei  $q = \varphi$ ,  $p = \cos \vartheta$  ( $\vartheta, \varphi$ : Polarwinkel).  $SO(3)$  operiert in natürlicher Weise auf  $S^2$  und lässt dabei  $\omega$  invariant, denn  $\omega$  ist die Volumenform auf  $S^2$ . Deshalb ist die Gruppenoperation symplektisch (vgl. Satz 5.5).

Wir bestimmen nun nach dem Schema (8.36) die Hamiltonfunktionen zur Gruppenaktion. Zunächst betrachten wir die Drehungen um die z-Achse:  $(q,p) \mapsto (q+t,p)$ . Das Hamiltonsche Vektorfeld  $I^*_3$  ist also  $I^*_3 = (1,0)$ , d.h.

$$I^*_3 = X_{S_3} \quad \text{mit} \quad S_3 = -p. \quad (8.52)$$

Nun bestimmen wir die übrigen Komponenten von  $S_i$  in  $I^*_i = X_{S_i}$

Die Richtungsableitung des Vektorfeldes  $(\underline{I} \cdot \underline{e})^*$  ist in Cartesischen Koordinaten gleich

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} f(R(\underline{e}, \alpha)\underline{x}) = \nabla f \cdot (\underline{e} \wedge \underline{x}) = \underline{e} \cdot (\underline{x} \wedge \nabla) f.$$

Speziell

$$D_{I^*_1} f = \left( x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) f$$

$$D_{I^*_2} f = \left( x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) f.$$

In Polarkoordinaten ist dies (Übung, vgl. auch QMI)

$$\begin{aligned} D_{I_1^*} &= -\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \operatorname{ctg} \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ D_{I_2^*} &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \operatorname{ctg} \vartheta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ D_{I_3^*} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} . \end{aligned} \quad (8.53)$$

Also ist z.B.

$$I_1^* = \left( -\frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \cos q, \sqrt{1-p^2} \sin q \right) .$$

Offensichtlich gilt

$$I_1^* = X_{S_1}, \quad S_1 = \sqrt{1-p^2} \cos q . \quad (8.54)$$

Analog findet man

$$I_2^* = X_{S_2}, \quad S_2 = \sqrt{1-p^2} \sin q . \quad (8.55)$$

Nach dem allgemeinen Resultat (8.39) muss für die Spinkomponenten gelten:

$$\boxed{\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k} . \quad (8.56)$$

Hier treten keine zusätzlichen Konstanten auf, wovon man sich leicht überzeugt.

Wählen wir als Hamiltonfunktion für die Bewegung eines Spins

$$H = - \underline{\omega} \cdot \underline{S} , \quad (8.57)$$

so ergibt sich als Bewegungsgleichung für die Spinkomponenten

$$S_j : \quad \dot{S}_i = \{S_i, H\} = -\omega_j \{S_i, S_j\} = -\varepsilon_{ijk} \omega_j S_k ,$$

d.h.

$$\boxed{\dot{\underline{S}} = \underline{S} \wedge \underline{\omega} .} \quad (8.58)$$

Nun betrachten wir eine lineare Kette von Spins  $\underline{S}_\ell$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}$ , mit periodischen Randbedingungen nach  $N$  Spins ( $\underline{S}_{\ell+N} = \underline{S}_\ell$ ). Wir können uns auch vorstellen, dass  $N$  Spins regelmässig auf dem Kreis  $S^1$  angeordnet sind. \*)

Als Hamiltonfunktion wählen wir

$$H = -J \sum_{\ell} \underline{S}_\ell \cdot \underline{S}_{\ell+1} = \sum H_\ell, \quad (8.59)$$

$$H_\ell = -\omega_\ell \cdot \underline{S}_\ell, \quad \omega_\ell = J(\underline{S}_{\ell-1} + \underline{S}_{\ell+1}).$$

Nach (8.58) befolgen die Spins  $\underline{S}_\ell$  die folgenden gekoppelten nichtlinearen Bewegungsgleichungen:

$$\dot{\underline{S}}_\ell = + \underline{S}_\ell \wedge \omega_\ell = J \underline{S}_\ell \wedge (\underline{S}_{\ell-1} + \underline{S}_{\ell+1}). \quad (8.60)$$

Diese Gleichungen sind für uns zu schwierig. Wir untersuchen lediglich den Fall, wo die Spins fast vollständig in der (-z)-Richtung ausgerichtet sind (tiefe Temperaturen). Es sei also für alle  $\ell \in \mathbb{Z}$

$$|s_\ell^x|, |s_\ell^y| \ll |s_\ell^z| = \sqrt{1 - (s_\ell^x)^2 - (s_\ell^y)^2}. \quad (8.61)$$

Dann sind  $s_\ell^x$  und  $s_\ell^y$  von 1. Ordnung klein,  $s_\ell^z$  weicht aber erst in 2. Ordnung vom Wert  $-1$  ab. Die linearisierten Bewegungsgleichungen (8.60) lauten deshalb

$$\begin{aligned} \dot{s}_\ell^x &= -J [2 s_\ell^y - s_{\ell-1}^y - s_{\ell+1}^y] \\ \dot{s}_\ell^y &= J [2 s_\ell^x - s_{\ell-1}^x - s_{\ell+1}^x] \\ \dot{s}_\ell^z &= 0. \end{aligned} \quad (8.62)$$

Die z-Komponente jedes Spins bleibt also während der Bewegung konstant. Für die beiden ersten Gleichungen setzen wir Bloch-Wellen an:

---

\*) Der zugehörige Phasenraum ist  $S^2 \times \dots \times S^2$  ( $N$  mal) und die symplektische Form ist offensichtlich.



$$\begin{aligned} s_{\ell}^x &= s^x e^{i(k\ell - \omega t)} \\ s_{\ell}^y &= s^y e^{i(k\ell - \omega t)} \end{aligned} \quad (8.63)$$

mit noch unbekanntem Amplituden  $s^x$ ,  $s^y$ , Wellenzahlen  $k$  und Frequenzen  $\omega$ . Die Wellenzahlen  $k$  kann man auf die erste Brillouinzone

$$-\pi < k \leq \pi \quad (8.64)$$

beschränken und wegen der Randbedingungen  $s_{\ell+N} = s_{\ell}$  ( $N = \text{gerade}$ ) gilt:

$$kN = 2\pi n, \quad n \in \left\{ 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{N}{2} \right\}. \quad (8.65)$$

Da  $N$  beliebig gross gewählt werden kann, darf  $k$  als kontinuierliche Variable behandelt werden. Einsetzen von (8.63) in (8.62) gibt die beiden homogenen linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} i\omega s^x - \beta s^y &= 0 \\ \beta s^x + i\omega s^y &= 0 \end{aligned} \quad (8.66)$$

mit

$$\beta = 2J(1 - \cos k).$$

Diese haben nur nichttriviale Lösungen, wenn die Determinante von

$$\begin{pmatrix} i\omega - \beta & \\ \beta & i\omega \end{pmatrix}$$

verschwindet. Aus dieser Forderung ergibt sich das Dispersionsgesetz  $\omega^2 = \beta^2$ , d.h., wenn wir nur positive  $\omega$  zulassen,

$$\omega = 2J(1 - \cos k). \quad (8.67)$$

Dieses beschreibt, wie die Frequenz vom Wellenvektor  $k \in (-\pi, \pi]$  abhängt. In der Nähe von  $k = 0$  gilt  $\omega \simeq Jk^2$ .

Einsetzen von (8.67) in (8.66) gibt das Amplituden-

verhältnis

$$s^y = i s^x$$

$$|s^y| = |s^x| \equiv s^\perp, \quad (8.68)$$

d.h.  $s^x$  und  $s^y$  sind vom gleichen Betrag  $s^\perp$  und um  $-\pi/2$  phasenverschoben. Jeder Vektor  $\underline{s}_\ell$  präzediert um die  $(-z)$ -Achse mit der Frequenz  $\omega$ , wobei die Amplitude  $s^\perp$  konstant bleibt. Wegen

$$s_{\ell+1}^x = s_\ell^x e^{ik}, \quad s_{\ell+1}^y = s_\ell^y e^{ik} \quad (8.69)$$

sind zwei benachbarte Spins in ihrer Präzession um den Winkel  $-k$  gegeneinander phasenverschoben.

Der Neigungswinkel  $\vartheta$  zwischen Nachbarspins ist dann gegeben durch

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = s^\perp \sin \frac{|k|}{2},$$

so dass

$$\cos \vartheta = 1 - 2 (s^\perp)^2 \sin^2 \frac{k}{2}. \quad (8.70)$$

Für Weiterführungen der Spinwellen-Theorie verweise ich auf Festkörperbücher.

#### 8.4 Projektive Realisierungen der Galileigruppe

Wir bestimmen zunächst die Liealgebra der Galileigruppe, sowie deren Strukturkonstanten für eine geeignete Basis. Die Galileigruppe  $G_+^\uparrow$  können wir nach § 1.2 (p. 11) mit der Gruppe aller 5x5 Matrizen der Form

$$g(R, \underline{v}, \underline{a}, s) = \begin{pmatrix} R & \underline{v} & \underline{a} \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R \in SO(3), \quad (8.71)$$

identifizieren:  $g(R, \underline{v}, \underline{a}, s): (\underline{x}, t) \mapsto (R\underline{x} + \underline{v}t + \underline{a}, t + s)$ .

Wir erhalten die folgende Basis der Liealgebra  $\mathfrak{g}$  von  $G_+^4$ :

$$\underline{l}_k = \left( \begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) : \text{ infinitesimale Drehungen}$$

$$\underline{a}_1 = \left( \begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad \underline{a}_2 = \left( \begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad \underline{a}_3 = \left( \begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

: infinitesimale spezielle Galileitransf.,

$$\underline{\kappa}_1 = \left( \begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad \underline{\kappa}_2 = \left( \begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad \underline{\kappa}_3 = \left( \begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

: infinitesimale Translationen,

$$\underline{h} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) : \text{ infinitesimale Zeittranslation.}$$

(8.72)

Die zugehörigen Vertauschungsrelationen kann man einfach berechnen. Das Resultat ist:

$$\begin{aligned} [\underline{\kappa}_i, \underline{\kappa}_j] &= 0 & [\underline{\kappa}_i, \underline{l}_j] &= \varepsilon_{ijk} \underline{\kappa}_k \\ [\underline{\kappa}_i, \underline{a}_j] &= 0 & [\underline{l}_i, \underline{l}_j] &= \varepsilon_{ijk} \underline{l}_k \\ [\underline{a}_i, \underline{a}_j] &= 0 & [\underline{a}_i, \underline{l}_j] &= \varepsilon_{ijk} \underline{a}_k \\ [\underline{a}_i, \underline{h}] &= \underline{\kappa}_i & [\underline{h}, \underline{l}_k] &= 0 \\ [\underline{\kappa}_i, \underline{h}] &= 0 \\ [\underline{h}, \underline{h}] &= 0 \end{aligned}$$

(8.73)

Nun betrachten wir ein galileiinvariantes System. Dies bedeutet, dass die Galileigruppe  $G_+^4$  auf dem Phasenraum kanonisch operiert:  $g \mapsto \tau_g$  (vgl. (8.32)). Zu den Basis-elementen  $\{X_i\} = \{\underline{l}, \underline{a}, \underline{\kappa}, \underline{h}\}$  gehören gemäss (8.36) Funktionen  $F_i$  mit  $X_i^* = X_{F_i}$ . Wir wissen, dass die Lie-

produkte der Vektorfelder  $X_{F_i}$  ebenfalls die Relationen (8.73) erfüllen. Dasselbe gilt nach (8.39) für die Poissonklammern der  $F_i$ , bis auf additive Konstanten.

Die  $F_i$  interpretieren wir auf Grund der Ergebnisse von Abschnitt 8.2 als die 10 klassischen Integrale:

$$l_k \longrightarrow L_k, \quad r_k \longrightarrow P_k, \quad a_k \longrightarrow A_k, \quad h \longrightarrow -H \quad (8.74)$$

Das Minuszeichen bei  $H$  entspricht der Tatsache <sup>\*)</sup>, dass die 1-parametrische Untergruppe  $\exp(sh) = g(1,0,0,s)$  durch  $\phi_{-s}$ , und nicht durch  $\phi_s$  dargestellt wird:  $\tau_{g(1,0,0,s)} = \phi_{-s}$ .

\*) Davon kann man sich folgendermassen überzeugen. Damit die Gruppeneigenschaft  $\tau_{g_1} \circ \tau_{g_2} = \tau_{g_1 \cdot g_2}$  erfüllt ist, muss auf Grund der Relation

$$g(R, \underline{v}, \underline{a}, 0) g(1, 0, 0, s) = g(1, 0, 0, s) g(R, \underline{v}, \underline{a} + s\underline{v}, 0)$$

folgendes gelten

$$\tau_{g(R, \underline{v}, \underline{a}, 0)} \circ \tau_{\exp(sh)} = \tau_{\exp(sh)} \circ \tau_{g(R, \underline{v}, \underline{a} + s\underline{v}, 0)},$$

oder äquivalent dazu

$$\tau_{\exp(-sh)} \circ \tau_{g(R, \underline{v}, \underline{a}, 0)} = \tau_{g(R, \underline{v}, \underline{a} + s\underline{v}, 0)} \circ \tau_{\exp(-sh)}. \quad (8.75)$$

Dies gilt in der Tat für die Wahl  $\tau_{\exp(-sh)} = \phi_s$ . Um dies zu beweisen, wenden wir beide Seiten auf einen festen Punkt  $(\underline{x}_i, \underline{p}_i)$  an und zeigen, dass die resultierenden Funktionen von  $s$  dieselbe Differentialgleichung erfüllen. Da für  $s = 0$  beide Seiten übereinstimmen, folgt dann die Behauptung auf Grund des Eindeutigkeitssatzes für gewöhnliche Differentialgleichungen.

Für die linke Seite,  $\alpha(s)$ , erhält man sofort die Gleichung

$$\dot{\alpha}(s) = X_H(\alpha(s)).$$

Die rechte Seite  $\beta(s)$  ist

$$\beta(s) = (R\underline{x}(s) + \underline{v}t + \underline{a} + s\underline{v}, R\underline{p}(s) + m\underline{v}), \quad (\underline{x}(s), \underline{p}(s)) = \phi_s(\underline{x}, \underline{p}).$$

Daraus folgt

$$\dot{\beta}(s) = (R\dot{\underline{x}}(s) + \underline{v}, R\dot{\underline{p}}(s)).$$

\*) Fortsetzung:

Ist abkürzend  $\psi_t := \tau_{g(R, \underline{v}, \underline{a} + s\underline{v}, 0)}$ , so gilt wegen  
 $\beta(s) = \psi_t(\phi_s(\underline{x}, \underline{p}))$  und

$$\tau_{g(R, \underline{v}, \underline{a}, 0)} : (\underline{x}_i, \underline{p}_i) \longmapsto (R\underline{x}_i + \underline{v}t + \underline{a}, R\underline{p}_i + m_i \underline{v}) \quad (8.76)$$

für  $\dot{\beta}$  :

$$\dot{\beta}(s) = \mathcal{D}\psi_t X_H(\phi_s(\underline{x}, \underline{p})) + \frac{\partial \psi_t}{\partial t} = \psi_* X_H(\beta(s)).$$

Wegen  $(\tau_g)_* X_H = X_H$  für  $g \in G_+^A$  folgt für  $\beta(s)$  dieselbe Differentialgleichung wie für  $\alpha(s)$ .

Die Konstanten  $a_{ij}$  in (8.39) kann man nicht allgemein angeben. Für das Hamiltonsche N-Körperproblem in § 8.2 sind die erzeugenden Funktionen  $F_i$  :

$$\underline{P} = \sum_{i=1}^N p_i, \quad \underline{L} = \sum_{i=1}^N \underline{x}_i \wedge p_i, \quad \underline{A} = t\underline{P} - M\underline{X},$$

$$H: \text{ Ausdruck (8.24), mit Eigenschaft (8.25)}. \quad (8.77)$$

Aus diesen Ausdrücken erhält man durch direkte Rechnung die folgenden Poissonklammern, welche mit (8.39) in Einklang sind (vgl. (8.73)):

$$\begin{array}{ll} \{p_i, p_j\} = 0 & \{p_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} p_k \\ \{p_i, A_j\} = \delta_{ij} M & \{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k \\ \{A_i, A_j\} = 0 & \{A_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} A_k \\ \{A_i, H\} = -p_i & \{H, L_k\} = 0 \\ \{p_i, H\} = 0 & \\ \{H, H\} = 0 & \end{array} \quad (8.78)$$

Bemerkungen:

1) In  $\{P_i, A_j\}$  tritt ein konstanter Zusatz auf, welcher durch die Gesamtmasse bestimmt ist. Wir haben also nach (8.73) eine projektive Realisierung von  $\mathcal{G}$ . Eine völlig analoge Situation findet man in der Quantenmechanik wieder vor.

a) Obschon  $\{A_i, H\} \neq 0$ , ist  $A_i$  ein Integral der Bewegung, weil  $A_i$  explizite von der Zeit abhängt:

$$\dot{A}_i = \{A_i, H\} + \frac{\partial A_i}{\partial t} = -P_i + P_i = 0.$$

Dies beruht darauf, dass für  $\underline{v} \neq 0$   $\tau_{\mathfrak{g}(R, \underline{v}, \underline{a}, 0)}$  ein zeitabhängiger Diffeomorphismus ist (vgl. (8.76)).

In der Quantenmechanik gewinnt die Rolle von Symmetriegruppen noch an Bedeutung, weil dort die Symmetriegruppen im Raum der Zustände linear dargestellt sind. Deshalb kommt die Darstellungstheorie von Gruppen zu fruchtbarer Anwendung.

\* \* \*



Kapitel 9. Die Hamilton-Jacobi Theorie

---

Es sei  $X_H$  ein Hamiltonsches Vektorfeld mit Fluss  $\phi_{t,s}$ . Wir halten nun nach einer kanonischen Transformation Ausschau, welche  $X_H$  in das triviale Vektorfeld überführt. Dies ist i.a. nur lokal möglich, und deshalb sind alle folgenden Betrachtungen lokaler Natur.

Nun ist  $\phi_{t,s}$  in einer Umgebung eines beliebigen Punktes ein kanonischer Diffeomorphismus, falls  $|t-s|$  genügend klein ist. Der inverse Diffeomorphismus  $\phi_{t,s}^{-1} = \phi_{s,t}$  - mit  $s$  als festem Parameter - transformiert aber gerade  $X_H$  in das Nullfeld:  $(\phi_{s,t})_* X_H = 0$ . Da nämlich eine Integralkurve  $\gamma(t)$  von  $X_H$  von der Form  $\phi_{t,s}(x_0)$  ist, mit  $x_0$  als Anfangsbedingung für  $t = s$ , verschwinden die Tangentialvektoren an die transformierte Kurve  $t \mapsto \phi_{t,s}^{-1}(\gamma(t)) \equiv x_0$ .

Da  $\phi_{s,s} = \text{Id}$  und  $\phi_{t,s}$  in  $t$  stetig differenzierbar ist, gilt für die Abbildung  $\phi_{s,t}: (q,p) \mapsto (q^0, p^0)$  für genügend kleine  $|t-s|$

$$\text{Det} \frac{\partial(p_1^0, \dots, p_f^0)}{\partial(p_1, \dots, p_f)} \neq 0,$$

d.h. die zeitabhängige kanonische Transformation  $\phi_{s,t}$  ist vom Typ 2. Deshalb gibt es eine erzeugende Funktion  $S(q, p^0, t)$  mit (vgl. (7.71))

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q, p^0, t), \quad q_i^0 = \frac{\partial S}{\partial p_i^0}(q, p^0, t). \quad (9.1)$$

Die transformierte Hamiltonfunktion  $K$  ist nach (7.72) allgemein



bestimmt durch

$$K(q^0, p^0, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q, p^0, t), \quad (9.2)$$

Nach dem Gesagten ist die rechte Seite eine Funktion von  $t$  allein (da  $\chi_K = 0$ ) und durch einen additiven Zusatz zu  $S$ , der eine Funktion von  $t$  allein ist (die durch  $S$  definierte kanonische Transformation also nicht verändert), kann man erreichen, dass gilt

$$H(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q, p^0, t), t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q, p^0, t) = 0.$$

Dies ist die Hamilton-Jacobische Gleichung. In dieser partiellen Differentialgleichung spielen die  $p_i^0$  die Rolle von  $f$  Parametern.

Unsere Ueberlegungen beweisen den

Satz 9.1: Die Hamilton-Jacobische Gleichung

$$H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (9.3)$$

besitzt lokal (d.h. in der Umgebung von jedem  $(q_0, p_0, t_0)$ ) ein vollständiges Integral  $S(q_1, \dots, q_f, \alpha_1, \dots, \alpha_f, t)$ , d.h. eine Lösung, die von  $f$  Parametern  $\alpha_1, \dots, \alpha_f$  abhängt und die Bedingung

$$\text{Det} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right) \neq 0 \quad (9.4)$$

erfüllt.

Ist  $S(q, \alpha)$  ein vollständiges Integral, dann wird durch

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \quad (9.5)$$

eine kanonische Transformation (2. Art) definiert, mit der

Eigenschaft, dass die zu  $H$  transformierte Hamiltonfunktion identisch verschwindet. Die kanonischen Gleichungen in den neuen Variablen  $(\beta, \alpha)$  sind deshalb trivial:

$$\dot{\beta}_i = 0, \quad \dot{\alpha}_i = 0, \quad (9.6)$$

d.h. die  $\{\alpha_i\}$  und  $\{\beta_i\}$  sind konstant. Die Bewegung ergibt sich aus (9.5). Die Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  sind durch die Anfangsbedingungen festgelegt.

Bemerkungen:

In Abschnitt 2.1 haben wir allgemein gesehen, dass durch einen zeitabhängigen Diffeomorphismus jedes dynamische System lokal in ein triviales System der Form (9.6) transformiert werden kann. Die Ueberlegungen dieses Abschnitts zeigen, wie dies für kanonische Systeme mit Hilfe von kanonischen Transformationen erreicht werden kann. Im allgemeinen wird es nicht leichter sein, ein vollständiges Integral der nicht-linearen, partiellen Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung zu finden, als die Aufgabe, die gewöhnlichen Hamiltonschen Differentialgleichungen direkt zu integrieren. Es gibt aber wichtige Ausnahmen (vgl. Uebungen). Ausserdem ist die Hamilton-Jacobi Methode sehr geeignet zur Entwicklung von systematischen Störungsreihen, wie wir in Kap. 10 sehen werden.

Zur Illustration betrachten wir nun ein einfaches

Beispiel: Harmonischer Oszillator,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2.$$

Die Hamilton-Jacobische Gleichung lautet

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (9.7)$$

Um ein vollständiges Integral zu finden, machen wir den Ansatz:  $S(q,t) = W(q) - \alpha t$ . Dies gibt für  $W$  die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{1}{2m}(W')^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 - \alpha = 0,$$

d.h.

$$W' = m\omega \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2}.$$

Dies gibt

$$S(q,\alpha,t) = m\omega \int_0^q dq' \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q'^2} - \alpha t. \quad (9.8)$$

Da

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \alpha} = m\omega \frac{\partial}{\partial \alpha} \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha}{m\omega^2} - q^2}} \neq 0,$$

ist  $S(q,\alpha,t)$  in (9.8) ein vollständiges Integral.

Die Bewegung ergibt sich aus

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad \beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha},$$

d.h.

$$p = m\omega \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2}, \quad \beta = \frac{1}{\omega} \int_0^q \frac{dq'}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q'^2}} - t. \quad (9.9)$$

Die Anfangsbedingungen seien  $q(0) = q_0$ ,  $p(0) = p_0$ . Aus (9.9) erhalten wir die folgende Beziehung zwischen  $(\beta, \alpha)$

und  $(q_0, p_0)$ :

$$\alpha = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q_0^2, \quad \beta = \frac{1}{\omega} \arcsin \left( q_0 \sqrt{\frac{p_0^2}{m^2 \omega^2} + q_0^2} \right).$$

Die Bewegung des mechanischen Systems erhält man aus der

2. Gleichung von (9.9):

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \omega \beta) = \sqrt{\frac{p_0^2}{m^2 \omega^2} + q_0^2} \sin \left( \omega t + \arcsin \left( q_0 \sqrt{\frac{p_0^2}{m^2 \omega^2} + q_0^2} \right) \right)$$

Interessantere Beispiele werden wir später, sowie in den Übungen behandeln.

Die verkürzte HJ - Gleichung

Wir betrachten jetzt ein autonomes Hamiltonsches System.

Wenn es uns gelingen würde, etwa mit Hilfe einer erzeugenden Funktion 2. Art,  $S(q,P)$ , eine kanonische Transformation zu finden, so dass die neue Hamiltonfunktion  $K$  nur von den neuen Impulskoordinaten  $P_1, \dots, P_f$  abhängt, dann ist die Lösung des transformierten kanonischen Systems

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = 0 \quad (9.10)$$

trivial. Auf Grund von

$$P_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} \quad (9.11)$$

erfüllt  $S$  notwendigerweise die verkürzte HJ-Gleichung

$$H(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q,P)) = K(P). \quad (9.12)$$

In dieser spielen die  $P_i$  wieder die Rolle von Parametern.

Nun beweisen wir den folgenden

Satz 9.2: Die verkürzte HJ-Gleichung besitzt in der Umgebung eines Nichtgleichgewichtspunktes ein vollständiges Integral  $S(q,P)$ , d.h. eine Lösung, welche von Parametern  $P_1, \dots, P_f$  so abhängt, dass gilt

$$\text{Det} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial P_j} \neq 0. \quad (9.13)$$

Beweis: Wir führen die Behauptung auf Satz 9.1 zurück. Dazu verwandeln wir das autonome Hamiltonsche System in der Nähe einer Nichtgleichgewichtslage in ein nichtautonomes System von  $f-1$  Freiheitsgraden. Durch eine elementare kanonische Transformation kann man  $\partial H / \partial p_f \neq 0$  erreichen und deshalb lokal die Gleichung

$$H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f) = E \quad (9.14)$$

in einem genügend kleinen Energieintervall nach  $p_f$  auflösen,

$$p_f = -h(q_1, \dots, q_{f-1}, p_1, \dots, p_{f-1}, \tau; E), \quad \tau \equiv q_f. \quad (9.15)$$

Die Phasenbahn auf der Energiefläche  $\{H = E\}$  (ohne zeitlichen Verlauf) ist, wie wir gleich sehen werden, durch die folgenden Gleichungen beschrieben

$$\frac{dq_k}{d\tau} = \frac{\partial h}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{d\tau} = -\frac{\partial h}{\partial q_k}, \quad 1 \leq k \leq f-1. \quad (9.16)$$

Der zeitliche Verlauf ergibt sich durch eine Quadratur von

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_f}(q_1(\tau), \dots, q_{f-1}(\tau), \tau, p_1(\tau), \dots, p_{f-1}(\tau), p_f(\tau)) \quad (9.17)$$

wobei  $p_f(\tau)$  durch (9.15) bestimmt ist.

Die beiden Gleichungen (9.16) und (9.17) ergeben sich leicht aus den kanonischen Gleichungen zu  $H$  und den Regeln der impliziten Differentiation. \*)

\*) Nach Definition haben wir

$$H(q_1, \dots, q_{f-1}, \tau, p_1, \dots, p_{f-1}, -h(q_1, \dots, q_{f-1}, p_1, \dots, p_{f-1}, \tau; E)) = E.$$

Durch Differentiation nach  $p_k$ ,  $k = 1, \dots, f-1$ , erhalten wir

$$\underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_k}}_{\dot{q}_k} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_f}}_{\dot{q}_f (\neq 0)} \left(-\frac{\partial h}{\partial p_k}\right) = 0,$$

d.h.

$$\frac{dq_k}{d\tau} = \frac{\dot{q}_k}{\dot{q}_f} = \frac{\partial h}{\partial p_k}.$$

Differenzieren wir andererseits nach  $q_k$ , so kommt

Fortsetzung \*)

$$\underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_k}}_{-\dot{p}_k} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_f}}_{\dot{q}_f} \left( -\frac{\partial h}{\partial q_k} \right) = 0 \Rightarrow \frac{dp_k}{d\tau} = \frac{\dot{p}_k}{\dot{q}_f} = -\frac{\partial h}{\partial q_k} .$$

Die Gl. (9.17) folgt unmittelbar aus  $\dot{q}_f = \frac{\partial H}{\partial p_f}$  .

Die zu (9.16) gehörige HJ-Gleichung lautet ( $\tau \equiv q_f$ ) :

$$\frac{\partial W}{\partial q_f} + h(q_1, \dots, q_{f-1}, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_{f-1}}, q_f ; E) = 0 . \quad (9.18)$$

Diese hat nach Satz 9.1 ein vollständiges Integral  $W(q_1, \dots, q_f, \alpha_1, \dots, \alpha_{f-1} ; E)$  , welches also

$$\text{Det} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right)_{1 \leq i, j \leq f-1} \neq 0 \quad (9.19)$$

erfüllt. Aus (9.13) und (9.14) folgt, dass (9.18) äquivalent ist zur verkürzten HJ-Gleichung:

$$\boxed{H(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_f}) = E .} \quad (9.20)$$

Sei  $\alpha_f := E$  , dann gilt auch

$$\text{Det} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right) \neq 0 . \quad (9.21)$$

Um dies zu sehen, leiten wir (9.20) nach  $\alpha_j$  ab,

$$\sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_j \partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} = \delta_{jf} . \quad (9.22)$$

Da  $W$  ein vollständiges Integral von (9.18) ist, sind die ersten  $f-1$  Zeilen der Matrix  $\partial^2 W / \partial \alpha_i \partial q_k$  linear unabhängig. Wäre die letzte Zeile eine Linearkombination der  $(f-1)$  ersten Zeilen, so könnte die Komponente  $j = f$  in (9.22) nicht  $\neq 0$  sein.

□

Im Beweis dieses Satzes ist  $K(\alpha_1, \dots, \alpha_f) = \alpha_f = E$  (Energie). Anstelle der Bezeichnung  $(Q, P)$  verwenden wir von nun an die gebräuchlichere Notation  $(\beta, \alpha)$ . Speziell für  $K(\alpha) = \alpha_f = E$  lauten die Bewegungsgleichungen in den neuen Koordinaten

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_s &= 0 \quad (s = 1, \dots, f-1), \quad \dot{\beta}_f = 1, \\ \dot{\alpha}_j &= 0 \quad (j = 1, \dots, f). \end{aligned} \quad (9.23)$$

Daraus folgt  $\alpha_j = \text{const}$ ;  $\beta_1, \dots, \beta_{f-1}$  sind ebenfalls konstant und  $\beta_f = t - t_0$ . Die Gleichungen (9.11) bestimmen die Bahn gemäss

$$\left\{ \begin{aligned} p_k &= \frac{\partial W}{\partial q_k}(q, \alpha), \quad \beta_s = \frac{\partial W}{\partial \alpha_s}, \quad t - t_0 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_f} = \frac{\partial W}{\partial E}. \\ &(k=1, \dots, f; s=1, \dots, f-1) \end{aligned} \right. \quad (9.24)$$

Die beiden ersten Gleichungen geben die Phasenbahn (ohne zeitlichen Verlauf), während die letzte Gleichung den zeitlichen Durchlauf bestimmt.

Die erzeugende Funktion  $W$  (vollständiges Integral von (9.20)) bewirkt also die in § 2.1 besprochene Glättung des autonomen kanonischen Systems (vgl. Satz 2.1). Wir haben gezeigt, dass ausserhalb von kritischen Punkten alle autonomen Hamiltonschen Systeme lokal kanonisch äquivalent sind.

Die interessanten lokalen Probleme betreffen deshalb das Verhalten des Flusses in der Nähe von Gleichgewichtslagen. Dazu haben wir in Kap. 6 einiges ausgeführt und insbesondere auf die Bedeutung und die Schwierigkeit des Zentrumsproblems hingewiesen. Globale Probleme sind natürlich von einem ganz anderen Schwierigkeitsgrad.

Beispiel: Zur Illustration betrachten wir das 1-dimensionale autonome kanonische System zur Hamiltonfunktion

$$H = p^2/2m + V(q) . \quad (9.25)$$

Die verkürzte HJ-Gleichung lautet

$$\frac{1}{2m} W'(q)^2 + V(q) = E . \quad (9.26)$$

Wir erhalten sofort das vollständige Integral

$$W(q, E) = \int_{q_0}^q \sqrt{2m(E-V(x))} dx . \quad (9.27)$$

Die Form der Bahn ist nach (9.24) bestimmt durch

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m(E-V(q))}$$

und der zeitliche Verlauf ergibt sich aus

$$t(q) - t(q_0) = \int_{q_0}^q \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}} \quad (= \frac{\partial W}{\partial E}) .$$

Dies sind natürlich bekannte Ergebnisse.

### Lösung der HJ-Gleichung durch Separation der Variablen

Wir führen diese Methode zunächst an einem wichtigen Beispiel vor, nämlich für die Bewegung in einem zentralsymmetrischen Feld  $V(r)$  .

In Polarkoordinaten findet man für die Hamiltonfunktion nach kurzer Rechnung

$$H = \frac{1}{2m} (p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\vartheta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} p_\varphi^2) + V(r) \quad (9.28)$$

und deshalb lautet die verkürzte HJ-Gleichung

$$\frac{1}{2m} [ (\frac{\partial W}{\partial r})^2 + \frac{1}{r^2} (\frac{\partial W}{\partial \vartheta})^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} (\frac{\partial W}{\partial \varphi})^2 ] + V(r) = E . \quad (9.29)$$



Die Variablen  $r, \vartheta, \varphi$  erscheinen alle nur in der Form  $f(\frac{\partial}{\partial q}, q)$  ( $q = r, \vartheta, \varphi$ ). Wir sagen, die Variablen seien separabel. In dieser Situation führt der folgende Separationsansatz zum Ziel:

$$W(r, \vartheta, \varphi) = W_r(r) + W_\vartheta(\vartheta) + W_\varphi(\varphi) . \quad (9.30)$$

Eingesetzt gibt

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{dW_r}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{dW_\vartheta}{d\vartheta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left( \frac{dW_\varphi}{d\varphi} \right)^2 \right] + V(r) = E . \quad (9.31)$$

Denkt man sich diese Gleichung so geordnet, dass auf der rechten Seite  $(dW_\varphi/d\varphi)^2$  allein steht, so hängt die rechte Seite nur von  $\varphi$  und die linke nur von  $r$  und  $\vartheta$  ab. Deshalb müssen beide Seiten gleich einer Konstanten sein. Wir setzen  $dW_\varphi/d\varphi = \alpha_\varphi$ . Die Variable  $\varphi$  ist damit separiert. Um die Trennung der Variablen  $r$  und  $\vartheta$  durchzuführen, schreiben wir (9.31) in der Form

$$r^2 \left( \frac{dW_r}{dr} \right)^2 + 2mr^2 V(r) - 2m E r^2 = - \left[ \left( \frac{dW_\vartheta}{d\vartheta} \right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} \right] .$$

Hier steht links eine Funktion von  $r$  allein, rechts eine solche von  $\vartheta$  allein. Folglich müssen beide Seiten gleich einer Konstanten sein. Wir setzen deshalb

$$\left( \frac{dW_\vartheta}{d\vartheta} \right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} = \alpha_\vartheta^2 ,$$

und damit folgt

$$\left( \frac{dW_r}{dr} \right)^2 = - 2m V(r) + 2m E - \frac{\alpha_\vartheta^2}{r^2} .$$

Die erste Gleichung von (9.24) lautet also hier

$$\begin{aligned}
 p_r &= \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{dW_r}{dr} = \sqrt{2m(E-V(r)) - \frac{\alpha_\vartheta^2}{r^2}} \\
 p_\vartheta &= \frac{\partial W}{\partial \vartheta} = \frac{dW_\vartheta}{d\vartheta} = \sqrt{\alpha_\vartheta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}} \\
 p_\varphi &= \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \frac{dW_\varphi}{d\varphi} = \alpha_\varphi .
 \end{aligned} \tag{9.32}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
 W_r(r) &= \int \sqrt{2m(E-V) - \frac{\alpha_\vartheta^2}{r^2}} dr \\
 W_\vartheta(\vartheta) &= \int \sqrt{\alpha_\vartheta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta \\
 W_\varphi(\varphi) &= \alpha_\varphi \varphi .
 \end{aligned} \tag{9.33}$$

Die übrigen Gleichungen in (9.24) lauten

$$\begin{aligned}
 t-t_0 &= \frac{\partial W}{\partial E} = \frac{\partial W_r}{\partial E} = \int \frac{m dr}{\sqrt{2m(E-V) - \alpha_\vartheta^2/r^2}} , \\
 \beta_\vartheta &= \frac{\partial W}{\partial \alpha_\vartheta} = \frac{\partial W_r}{\partial \alpha_\vartheta} + \frac{\partial W_\vartheta}{\partial \alpha_\vartheta} = \dots \text{ (aus (9.33))} , \\
 \beta_\varphi &= \frac{\partial W}{\partial \alpha_\varphi} = \frac{\partial W_\vartheta}{\partial \alpha_\varphi} + \varphi = \dots \text{ (aus (9.33))} .
 \end{aligned} \tag{9.34}$$

Wir führen hier die Diskussion dieser Resultate nicht weiter, da wir in der Störungstheorie des Kepler-Problems nochmals darauf zurückkommen werden.

\* \* \*

Der Separationsansatz

$$W(q, \alpha) = \sum_{i=1}^f W_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_f) \tag{9.35}$$

führt immer zum Ziel, wenn sich  $H(q, p)$  in der Form

$$H(p, q) = F(g_1(q_1, p_1), \dots, g_f(q_f, p_f)) , \tag{9.36}$$

mit Funktionen  $g_i$  schreiben lässt. In dieser Situation betrachte man die "einzelnen" HJ-Gleichungen:

$$g_i(q_i, \frac{dW_i}{dq_i}) = \alpha_i \quad (i=1, \dots, f), \quad (9.37)$$

mit Lösungen  $W_i(q_i, \alpha_i)$ . Dann ist (9.35) offensichtlich eine Lösung der verkürzten HJ-Gleichung.

Die folgende, etwas allgemeinere Form als (9.36) lässt sich ebenfalls durch Separation lösen:

$$H(q, p) = h_f(q_f, p_f, h_{f-1}), \quad (9.38)$$

mit

$$\begin{aligned} h_{f-1} &= h_{f-1}(q_{f-1}, p_{f-1}, h_{f-2}) \\ &\vdots \\ h_1 &= h_1(q_1, p_1). \end{aligned} \quad (9.39)$$

Man erhält rekursiv folgende "einzelne" HJ-Gleichungen:

$$\begin{aligned} h_1(q_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_1}) &= \alpha_1 \\ h_2(q_2, \frac{\partial W_2}{\partial q_2}, \alpha_1) &= \alpha_2 \\ &\vdots \\ h_f(q_f, \frac{\partial W_f}{\partial q_f}, \alpha_{f-1}) &= \alpha_f, \end{aligned} \quad (9.40)$$

mit Lösungen  $W_i = W_i(q_i, \alpha_i, \alpha_{i-1})$ . Wieder ist dann (9.35) eine Lösung der verkürzten HJ-Gleichung, welche von  $f$  Parametern  $\alpha_i$  abhängt. Im generischen Fall wird sie ein vollständiges Integral sein.

Zeitabhängige Störungstheorie (Variation der Konstanten)

Wir illustrieren nun die Nützlichkeit der Hamilton-Jacobi-Methode zur Gewinnung von approximativen Lösungen.

Eine Hamiltonfunktion  $H$  habe die Form

$$H = H_0 + H_1, \quad (9.41)$$

wobei es möglich sei,  $H_0$  exakt zu lösen. Ferner soll  $H_1$  eine kleine Störung sein. Offensichtliche Beispiele für diese Situation hat man in der Himmelsmechanik.

Nun sei  $S_0(q, \alpha, t)$  ein vollständiges Integral der HJ-Gleichung zu  $H_0$ . Dieses ist die erzeugende Funktion einer kanonischen Transformation, definiert durch

$$p_k = \frac{\partial S_0}{\partial q_k}, \quad \beta_k = \frac{\partial S_0}{\partial \alpha_k}. \quad (9.42)$$

Für  $H_1 \rightarrow 0$  sind die  $\alpha$  und  $\beta$  Integrale der Bewegung (vgl. (9.6)). "Schalten wir die Störung  $H_1$  ein", so werden die  $\alpha$  und  $\beta$  Funktionen der Zeit. Für diese gelten die kanonischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_k &= \{ \alpha_k, H \} = \{ \alpha_k, H_1 \} = - \frac{\partial H_1}{\partial \beta_k}(\beta, \alpha) \\ \dot{\beta}_k &= \{ \beta_k, H \} = \{ \beta_k, H_1 \} = + \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_k}(\beta, \alpha), \end{aligned} \quad (9.43)$$

da  $\{ \alpha_k, H_0 \} = \{ \beta_k, H_0 \} = 0$ . Auf der rechten Seite darf man jetzt in 1. Ordnung Störungstheorie die ungestörte Bewegung einsetzen. Dabei steht es einem frei, die Poissonklammern in den  $(\beta, \alpha)$ , oder den  $(q, p)$  auszurechnen.

Beispiele werden wir später besprechen (siehe S.265f).

\* \* \*



Kapitel 10. Integrable Systeme, kanonische Störungstheorie

---

"... ich forme z.B. die Differentialgleichungen für das Problem der  $N$  Körper so um, dass sie eine beliebig weit fortzusetzende Integration in Reihenform formell gestatten, aber meine Versuche, die Konvergenz der Entwicklung zu erweisen, scheitern an einem Hindernis, das ich nicht zu bewältigen im Stande bin".

Weierstrass

10.1 Integrable Systeme

In Abschnitt 2.3 haben wir am Beispiel des 2-Körperproblems gesehen, wie die 10 klassischen Erhaltungssätze dazu führen können, dass ein Problem "integrabel" wird. Die bekannten integrablen Probleme haben alle eine gemeinsame Struktur, die wir in diesem Abschnitt aufdecken wollen.

Es sei  $M \subset \mathbb{R}^{2f}$  der Phasenraum und  $C^\infty(M)$  bezeichne wie immer die  $C^\infty$ -Funktionen über  $M$ .

Definition: Wir sagen die Funktionen  $H_1, \dots, H_r \in C^\infty(M)$  seien in Involution, falls  $\{H_i, H_j\} = 0$  für alle  $1 \leq i, j \leq r$ .

Zunächst führen wir eine lokale Diskussion durch. Der folgende Satz von Jacobi gibt Bedingungen an, unter denen sich die Integration der kanonischen Gleichungen lokal auf Quadraturen zurückführen lässt.

Satz 10.1 (Jacobi): Falls  $H_1, \dots, H_f \in C^\infty(M)$  in Involution sind und die Linearformen  $dH_1, \dots, dH_f$  lokal linear

unabhängig sind, dann kann man durch Quadraturen Funktionen  $G_1, \dots, G_f \in C^\infty(M)$  so finden, dass die Abbildung

$$(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f) \longmapsto (\beta_1, \dots, \beta_f, \alpha_1, \dots, \alpha_f):$$

$$\beta_i = G_i(q, p), \quad \alpha_i = H_i(q, p) \quad (10.1)$$

lokal kanonisch ist, d.h. (10.1) ist ein lokaler Diffeomorphismus mit

$$\{H_i, H_j\} = \{G_i, G_j\} = 0, \quad \{G_i, H_j\} = \delta_{ij}. \quad (10.2)$$

Beweis: Da mit  $(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$  auch  $(p_1, q_2, \dots, q_f, -q_1, p_2, \dots, p_f)$  kanonische Koordinaten sind, können wir immer erreichen, dass lokal die Matrix

$$H_p := \left( \frac{\partial H_i}{\partial p_j} \right) \quad (10.3)$$

nicht singulär ist. Damit können wir lokal die Gleichungen  $\alpha_i = H_i(q, p)$  nach  $p$  auflösen und wir schreiben  $p_i = f_i(q, \alpha)$ .

Im folgenden sei

$$F := \left( \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \right), \quad H_q := \left( \frac{\partial H_i}{\partial q_j} \right). \quad (10.4)$$

Differenzieren wir die Identität  $\alpha_i = H_i(q, f(q, \alpha))$  nach  $q_j$ , so erhalten wir

$$0 = H_q + H_p F. \quad (10.5)$$

Die involutive Eigenschaft  $\{H_i, H_j\} = 0$  können wir in Matrixform schreiben

$$H_p H_q^T - H_q H_p^T = 0. \quad (10.6)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$H_p F H_p^T + H_q H_p^T = H_p F H_p^T + H_p H_q^T = 0. \quad (10.7)$$

Da  $H_p$  nicht singulär ist, erhält man daraus

$$F H_p^T + H_q^T = 0 \implies H_p F^T + H_q = 0. \quad (10.8)$$

Durch Vergleich mit (10.5) sieht man, dass  $F^T = F$  ist, d.h.

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j} - \frac{\partial f_j}{\partial q_i} = 0. \quad (10.9)$$

Dies sind die Integrabilitätsbedingungen für die lokale Existenz einer Funktion  $S$  mit

$$f_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}. \quad (10.10)$$

Weiter gilt

$$\text{Det} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right) = \text{Det} \left( \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j} \right) = (\text{Det } H_p)^{-1} \neq 0. \quad (10.11)$$

$S$  erzeugt daher lokal eine kanonische Transformation (2. Art) durch

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \quad (10.12)$$

auf die kanonischen Koordinaten  $\beta, \alpha$ . Die Funktionen  $G_i$  erhält man durch Auflösen von (10.12) nach  $\beta_i$  als Funktion der  $q, p$ . Die Funktion  $S(q, \alpha)$  gewinnt man durch eine Quadratur:

$$S(q, \alpha) = \int_{q_0}^q \sum_i f_i(q', \alpha) dq'_i, \quad (10.13)$$

wobei das Integral rechts vom Weg zwischen  $q_0$  und  $q$  unabhängig ist.

Die erzeugende Funktion  $S$  ist eindeutig bis auf eine Funktion  $F(\alpha)$ . Ein solcher Zusatz bedeutet:  $\beta_i \rightarrow \beta_i + \partial F / \partial \alpha_i$ .

Nun können wir sagen, was "integrabel" bedeutet.

**Definition:** Ein autonomes kanonisches System mit Hamiltonfunktion  $H$  heisst integrabel, falls es  $f-1$  autonome  $H$ -Integrale  $H_2, \dots, H_f$  gibt, die in Involution sind und die



Eigenschaft haben, dass ausserhalb einer niederdimensionalen Teilmenge im Phasenraum  $dH_1, \dots, dH_f$  ( $H_1 \equiv H$ ) linear unabhängig sind.

Wir wissen bereits: Für ein autonomes Hamiltonsches System kann man lokal, falls  $dH \neq 0$  ist, das Hamiltonsche Feld  $X_H$  durch eine kanonische Transformation glätten (vgl. Satz 9.2, sowie S. 248). Für integrable Systeme lässt sich sogar durch eine Quadratur eine erzeugende Funktion  $S(q, \alpha)$  finden, derart, dass die kanonischen Gleichungen in den Variablen

$\beta, \alpha$ , definiert durch (10.12), geglättet sind ( $\alpha_1$  ist die neue Hamiltonfunktion):

$$\dot{\alpha}_i = 0, \dot{\beta}_1 = 1, \dot{\beta}_s = 0 \quad (i=1, \dots, f, s=2, \dots, f). \quad (10.14)$$

Beispiel: Von den 10 klassischen Integralen eines abgeschlossenen Systems sind 7 autonom, nämlich  $\underline{p}$ ,  $H$ ,  $\underline{L}$ , bzw.  $\underline{p}$ ,  $H_{rel}$ ,  $\underline{L}_{rel}$ , und die folgenden 6

$$\underline{p}, H_{rel}, |\underline{L}_{rel}|, \underline{L}_{rel}^3$$

sind in Involution. Daher ist das abgeschlossene 2-Körperproblem (wegen  $f = 6$ ) integrabel, dagegen das N-Körperproblem für  $N \geq 3$  nicht, falls nicht "zufällig" weitere Integrale vorkommen.

Weitere integrable Probleme werden wir später besprechen. Dazu gehören der kräftefreie Kreisel und der schwere symmetrische Kreisel mit Fixpunkt.

\* \* \*

## 10.2 Winkel- und Wirkungsvariable

Wir betrachten als Beispiel zunächst ein autonomes kanonisches System mit  $f = 1$ . In einem Energieintervall  $[E_1, E_2]$  seien alle Bahnen periodisch. Als Beispiel betrachte man etwa

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (10.15)$$

und  $E_1, E_2$  wie in Fig. 10.1 (vgl. § 2.2).

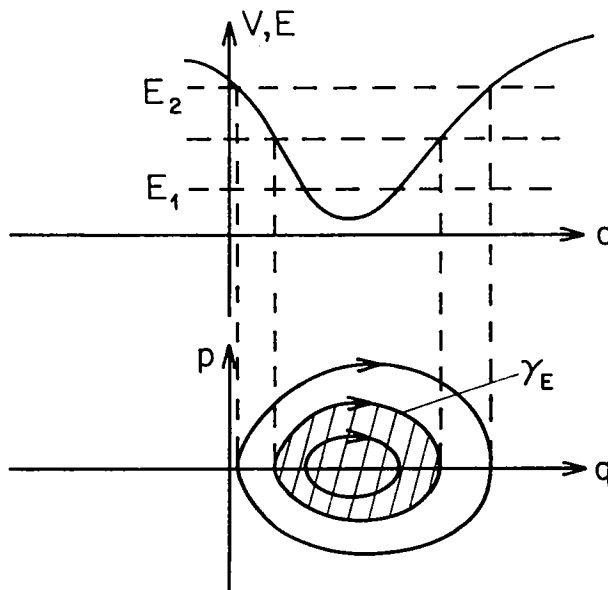


Fig. 10.1

Ausserdem liege im beobachteten Bereich des Phasenraumes kein Gleichgewichtspunkt. Die verkürzte HJ-Gleichung lautet

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E. \quad (10.16)$$

Es sei  $W(q, E)$  ein vollständiges Integral. Dann ist nach (9.24)

$$t - t_0 = \frac{\partial W}{\partial E} . \quad (10.17)$$

Nun bilden wir längs einer periodischen Phasenbahn  $\gamma_E$  zur Energie  $E$  das Umlaufsintegral

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_E} p dq . \quad (10.18)$$

$J(E)$  ist gleich dem Inhalt der schraffierten Fläche in Fig. 10.1, dividiert durch  $2\pi$ . Mit  $T(E)$  als Periode zur Energie  $E$  gilt

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0+T(E)} p \dot{q} dt .$$

Mit  $p = \partial W / \partial q$  haben wir

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W}{\partial q}(q, E) dq . \quad (10.19)$$

Da nach Voraussetzung  $\partial H / \partial p \neq 0$ , kann (10.16) nach  $\partial W / \partial q$  aufgelöst werden:  $p = \partial W / \partial q = G(q, E)$ . Dabei muss man das Vorzeichen so wählen, dass  $p = \partial W / \partial q$  zum Vorzeichen von  $\dot{q} = \partial H / \partial p$  passt (vgl. Fig. 10.1). Damit hat das Integral (10.19) einen wohldefinierten Sinn.

An Stelle des Parameters  $E$  wählen wir nun  $J$ . Es sei  $W(q, E) =: S(q, J)$ .  $S(q, J)$  erzeugt die kanonische Transformation  $(q, p) \longmapsto (w, J)$  durch

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}(q, J) , \quad w = \frac{\partial S}{\partial J}(q, J) . \quad (10.20)$$

$J$  wird Wirkungsvariable genannt und die kanonisch konjugierte Variable  $w$  ist die sog. Winkelvariable.

Die neue Hamiltonfunktion ist die Funktion  $E(J)$ ; sie hängt nicht von  $w$  ab ! Auf Grund der kanonischen Gleichungen gilt

$$\dot{w} = \frac{\partial E}{\partial J}(J) = \text{const}, \quad \text{d.h.} \quad w = \frac{\partial E}{\partial J} t + \delta,$$

wobei  $\delta$  als Phasenkonstante bezeichnet wird. Während einer Periode wächst  $w$  um den Betrag  $T \cdot \partial E / \partial J$ . Diese Änderung von  $w$  kann man aber auch anders ausdrücken. Aus (10.19) folgt

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial S}{\partial q}(q, J) dq.$$

Durch Ableiten nach  $J$  erhalten wir daraus

$$1 = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dJ} \oint \frac{\partial S}{\partial q}(q, J) dq = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dJ} \int_{q_1(J)}^{q_2(J)} \frac{\partial S}{\partial q} dq,$$

wobei  $q_1(J)$  und  $q_2(J)$  die beiden Umkehrpunkte sind, bei denen  $p$  das Vorzeichen wechselt. Da dort  $\partial S / \partial q$  gleich Null ist, verschwindet die Ableitung  $d/dJ$  des Integrals in bezug auf die obere und untere Grenze, so dass wir erhalten

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{\pi} \int_{q_1(J)}^{q_2(J)} \frac{\partial^2 S}{\partial J \partial q} dq = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial^2 S}{\partial J \partial q} dq = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial w}{\partial q} dq \\ &= \frac{\Delta w}{2\pi}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\underline{\Delta w = 2\pi}, \quad \text{d.h.} \quad T \frac{\partial E}{\partial J} = 2\pi. \quad (10.21)$$

Die Grösse  $\omega := \partial E / \partial J$  bezeichnet man als Kreisfrequenz der Bewegung. Wir erhalten

$$T = 2\pi / \omega. \quad (10.22)$$

Zusammenfassend haben wir in  $(w, J)$  die folgenden kanonischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \frac{\partial E}{\partial J} = \omega \implies w = \omega t + \delta, \\ \dot{J} &= 0. \end{aligned} \tag{10.23}$$

Der betrachtete Bereich des Phasenraumes ist das direkte Produkt eines Intervalls (für  $J$ ) mit dem 1-dimensionalen Torus  $S^1$  (für  $w$ ), d.h. ein Kreisring (Fig. 10.2).

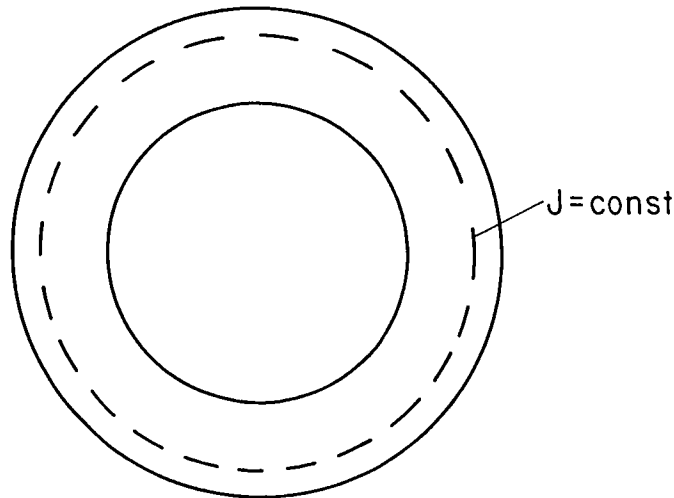


Fig. 10.2

Zu jedem  $J$  ist die Phasenbahn ein Kreis, der mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\partial E / \partial J$  durchlaufen wird.

Die Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen bringt der folgende

Satz 10.2 (Arnold, Jost): Es seien Funktionen  $H_1, \dots, H_f$  in Involution. Auf

$$T(c) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{2f} \mid H_1(x) = c_1, \dots, H_f(x) = c_f \right\}$$

seien  $dH_1, \dots, dH_f$  linear unabhängig. Falls  $T(c)$  zusammenhängend und kompakt ist, so ist  $T(c)$  diffeomorph zu einem  $f$ -dimensionalen Torus. Ausserdem gibt es ein  $\epsilon > 0$

und in  $\bigcup_{|c-c'| < \epsilon} T(c')$  kanonische Koordinaten  $J_1, \dots, J_f$

(Wirkungsvariable) und  $w_1, \dots, w_f$  (Winkelvariable mod  $2\pi$ )

derart, dass die  $H_i$  sich als Funktionen von  $J_1, \dots, J_f$  allein ausdrücken lassen.

Beweis: Siehe R. Jost, Helv. Phys. Acta, 41, 965 (1968);  
oder Abraham + Marsden, loc. cit., p. 393 ff.

Folgerung: Ist  $H = H_1$  die Hamiltonfunktion des Systems, so gilt in den neuen Koordinaten

$$H = H(J_1, \dots, J_f) \quad (10.24)$$

und deshalb lauten die kanonischen Gleichungen

$$\dot{J}_k = 0 \implies J_k = \text{const}$$

$$\dot{w}_k = \frac{\partial H}{\partial J_k}(J) = \text{const} \implies w_k(t) = \omega_k t + \delta_k,$$

$$\omega_k := \frac{\partial H}{\partial J_k}(J), \quad k = 1, \dots, f. \quad (10.25)$$

### Bemerkungen

1. Der Fluss (10.25) für konstant gehaltene  $J_k$  ( $k = 1, \dots, f$ ) ist eine quasiperiodische Bewegung auf dem  $f$ -dimensionalen Torus. Die Bewegung ist genau dann periodisch, wenn alle Frequenzen  $\omega_i$  ganzzahlige Vielfache einer Frequenz  $\omega$  sind. Das andere Extrem liegt dann vor, wenn alle Frequenzen inkommensurabel sind, d.h. wenn  $\sum n_i \omega_i = 0$ , mit ganzzahligen  $f$ -Tupeln  $(n_1, \dots, n_f) \neq 0$ , unmöglich ist. Letzteres ist ein Beispiel für eine ergodische Strömung (siehe Anhang zu Kap. 5).

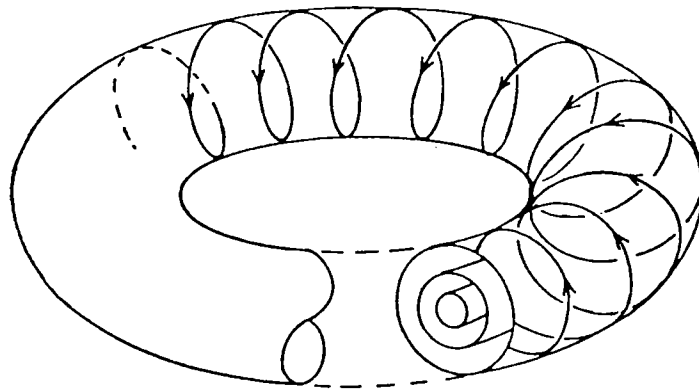


Fig. 10.3

2. Winkel- und Wirkungsvariable werden weiter unten für die sog. mehrfach periodischen Systeme konstruiert.

### 10.3 Störungstheorie

Viele mechanische Systeme kann man als "leicht gestörte" integrable Systeme auffassen. Das "ehrwürdigste" Beispiel ist das Planetensystem. Die Planeten bewegen sich, in 1. Näherung, bei Vernachlässigung ihrer gegenseitigen Wechselwirkung, nach den Keplerschen Gesetzen um die Sonne. Diese quasiperiodische Bewegung wird aber durch die Gravitationskräfte zwischen den Planeten gestört. In der Störungstheorie bemüht man sich, die relativ kleinen Störungen systematisch in Rechnung zu stellen. Im 18. und 19. Jahrhundert wurden verschiedene Reihendarstellungen für die gestörten Bewegungen entwickelt, welche den Bewegungsgleichungen formal genügen. Um die Konvergenz der Reihen kümmerte man sich zunächst nicht.

In der Praxis wurden diese früh abgebrochen, sobald die einzelnen Glieder hinreichend klein erschienen. Selbst Gauss folgte dem allgemeinen Brauch und brach seine Reihen für die Störungen des zu den Asteroiden gehörigen Planeten Pallas ohne Fehlerabschätzungen ab.

Wir werden uns in diesem Abschnitt ebenfalls bloss mit formaler Störungstheorie befassen. Zu neueren Entwicklungen, welche darüber hinausführen, werde ich in Abschnitt 10.5 einige Bemerkungen machen. Formale störungstheoretische Methoden sind auch in der heutigen Physik, insbesondere in der Quantenfeldtheorie, oft die einzigen praktikablen Rechenverfahren, die uns zur Verfügung stehen.

Es sei  $H_0$  die Hamiltonfunktion eines autonomen integrablen Systems. Für dieses denken wir uns Winkel- und Wirkungsvariablen eingeführt.  $H_0$  ist dann eine Funktion der  $J = (J_1, \dots, J_f)$  allein und der zugehörige Fluss ist für jeden Wert von  $J$  eine quasiperiodische Bewegung auf dem Torus, welcher durch die Winkelvariablen  $w = (w_1, \dots, w_f)$  parametrisiert wird.

Nun werde das System leicht gestört und die gesamte Hamiltonfunktion sei

$$H = H_0(J) + H_1(w, J) . \quad (10.26)$$

Darin ist  $H_1$  eine mehrfach periodische Funktion der Winkelvariablen  $w : H_1(J, w + 2\pi e_j) = H_1(J, w)$ , wobei  $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $j = 1, \dots, f$ .



A. Zeitabhängige Störungstheorie (Variation der Konstanten)

Die Idee dieser Methode wurde bereits früher besprochen (S.253).

In erster Ordnung setzt man in den Hamiltonschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{J}_k &= \{J_k, H\} = \{J_k, H_1\} = - \frac{\partial H_1}{\partial w_k} \\ \dot{w}_k &= \{w_k, H\} = \frac{\partial H_0}{\partial J_k} + \frac{\partial H_1}{\partial J_k} = \omega_k(J) + \frac{\partial H_1}{\partial J_k} \end{aligned} \quad (10.27)$$

rechts die "Nullte Näherung":  $w_k = w_k(t + \tau_k)$ ,  $J_k = \text{const}$ , ein.

Um weiterzukommen, entwickeln wir  $H_1$  in einer Fourier-Reihe:

$$H_1(w, J) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^f} h_m(J) e^{i(m, w)} \quad (10.28)$$

In der betrachteten Näherung erhalten wir rechts in (10.27) Fourierreihen mit e-Funktionen

$$e^{i(m, \omega)t - i \sum m_k \omega_k \tau_k} \quad .$$

Integriert man nun die rechten Seiten von (10.27) nach der Zeit, um  $J_k$  und  $w_k$  in nächster (erster) Näherung zu erhalten, so erhält man für  $(m, \omega) \neq 0$  Summanden, die den Faktor

$$\frac{e^{i(m, \omega)t}}{(m, \omega)} \quad (10.29)$$

enthalten und damit entsprechend der Kleinheit von  $H_1$  ebenfalls über alle Zeiten klein bleiben, wenn nicht  $(m, \omega)$  Null oder fast Null ist. Ist dagegen  $(m, \omega) = 0$ , so erhält man Summanden, die proportional zur Zeit anwachsen (säkulare Störungen).

Nicht entartete Systeme

Der Beitrag dieser säkularen Störungen in (10.28) ist besonders einfach für nichtentartete Systeme, für welche

$$\sum m_i \omega_i = 0, \quad m_i \in \mathbb{Z} \iff m_1 = \dots = m_f = 0.$$

Behalten wir in (10.27) nur den säkularen Term  $m = 0$ , so wird daraus

$$\dot{J}_k = 0, \quad \dot{\omega}_k = \omega_k(J) + \frac{\partial \langle H_1 \rangle}{\partial J_k} \quad (10.30)$$

mit \*)

$$\langle H_1 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^f} \int_{T^f} H_1(\omega, J) d\omega_1 \dots d\omega_f. \quad (10.31)$$

Die  $J_k$  bleiben also weiterhin konstant, während die Frequenzen der  $\omega_k$  sich ändern

$$\underline{\bar{\omega}_k} = \omega_k + \frac{\partial \langle H_1 \rangle}{\partial J_k}. \quad (10.32)$$

Beispiel: Anharmonischer Oszillator.

Die Hamiltonfunktion lautet

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_1 \\ H_0 &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m \omega_0^2}{2} q^2 \\ H_1 &= \lambda q^4, \quad \lambda \ll 1. \end{aligned} \quad (10.33)$$

Zunächst bestimmen wir die Winkel- und Wirkungsvariablen für  $H_0$ . Die Wirkungsvariable ist für 1-dimensionale autonome Systeme nach (10.18)

---

\*) Im nichtentarteten Fall ist nach dem Satz von Weyl (p.153) das räumliche Mittel (10.31) auch gleich dem zeitlichen Mittel.

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \oint p dq = \frac{\sqrt{2m}}{2\pi} \oint \sqrt{E - \frac{m\omega_0^2}{2} q^2} dq$$

$$= \frac{m\omega_0}{2\pi} \int \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2} - q^2} dq .$$

Die Umkehrpunkte sind  $q_{1,2} = \pm \sqrt{2E/m\omega_0^2} \equiv \pm a$ , und deshalb

$$J(E) = \frac{m\omega_0}{\pi} \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{m\omega_0}{\pi} \frac{a^2 \pi}{2} ,$$

d.h.

$$J(E) = E/\omega_0 . \quad (10.34)$$

Also ist

$$H_0(J) = \omega_0 J . \quad (10.35)$$

Die HJ-Gleichung zu  $H_0$  lautet

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} q^2 = E .$$

Die Lösung ist

$$W(q, E) = \sqrt{2m} \int \sqrt{E - \frac{m\omega_0^2}{2} q^2} dq .$$

Mit (10.34) führt dies zu

$$S(q, J) = \sqrt{2m} \int \sqrt{\omega_0 J - \frac{m\omega_0^2}{2} q^2} dq . \quad (10.36)$$

Die Winkelvariable ist

$$w = \frac{\partial S}{\partial J} = \sqrt{\frac{m}{2}} \omega_0 \int \frac{dq}{\left( \omega_0 J - \frac{m\omega_0^2}{2} q^2 \right)^{1/2}} ,$$

d.h.  $w = \arcsin \left( \sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2J}} q \right)$ , oder

$$q = q_0 \sin w , \quad q_0 = \sqrt{\frac{2J}{m\omega_0^2}} . \quad (10.37)$$

Nach (10.35) ist

$$\dot{w} = \frac{\partial H_0}{\partial J} = \omega_0 \implies w = \omega_0 t + \delta .$$

In (10.37) eingesetzt gibt

$$q = q_0 \sin(\omega_0 t + \delta) . \quad (10.38)$$

Daraus folgt

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2m\omega_0 J} \sqrt{1 - \frac{m\omega_0^2}{2\omega_0 J} q^2} = \sqrt{2m\omega_0 J} \cos(\omega_0 t + \delta) . \quad (10.39)$$

In den Winkel- und Wirkungsvariablen ausgedrückt lautet  $H_1$  nach (10.37)

$$H_1(\omega, J) = \lambda \frac{4J^2}{m^2 \omega_0^2} \sin^4 \omega = \frac{3}{2} \frac{\lambda J^2}{m^2 \omega_0^2} - \frac{\lambda J^2}{4m^2 \omega_0^2} (e^{2i\omega} + e^{-2i\omega}) + \frac{\lambda J^2}{4m^2 \omega_0^2} (e^{4i\omega} + e^{-4i\omega}) . \quad (10.40)$$

Deshalb ist

$$\langle H_1 \rangle (J) = \frac{3}{2} \frac{\lambda J^2}{m^2 \omega_0^2} \quad (10.41)$$

und damit die gestörte Frequenz (10.32)

$$\bar{\omega} = \omega_0 + 3 \lambda J / m^2 \omega_0^2 . \quad (10.42)$$

Setzen wir  $\omega = \bar{\omega}(t - \tau)$  in (10.37) ein, so ergibt sich für  $q$  :

$$q(t) = \sqrt{\frac{2J}{m\omega_0}} \sin [\omega_0 (1 + 3 \lambda J / m^2 \omega_0^3) (t - \tau)] . \quad (10.43)$$

Bei derselben Amplitude  $\sqrt{2J/m\omega_0}$  verläuft die Bewegung mit der neuen, etwas abgeänderten Frequenz (10.42). Die ungestörte und die gestörte Bewegung stimmen deshalb bei gleichen Anfangsbedingungen für grosse Zeiten auch nicht mehr annähernd überein. Die nächste Näherung bringt lediglich für alle Zeiten (!) kleinbleibende oszillatorische Abweichungen. Auf höhere Ordnungen und Konvergenzfragen gehen wir an dieser Stelle nicht ein.

## B. Zeitunabhängige Störungstheorie

Die Idee der zeitunabhängigen kanonischen Störungstheorie besteht darin, eine Folge von kanonischen Transformationen so durchzuführen, dass die transformierte Hamiltonfunktion bis auf zunehmend höhere Ordnungen nur eine Funktion der Impulsvariablen ist.

Wir führen nun nach dem Vorbild von Poincaré (1892) und Von Zeipel (1916) die beiden ersten Schritte in diesem Programm durch.

Die gesamte Hamiltonfunktion (10.26) schreiben wir jetzt in der Form

$$H(w, J) = H_0(J) + \varepsilon H_1(w, J) + \varepsilon^2 H_2(w, J) + \dots, \quad (10.44)$$

wobei  $\varepsilon$  ein kleiner Parameter ist ( $\varepsilon \ll 1$ ). Wir suchen eine Reihendarstellung in  $\varepsilon$  einer kanonischen Transformation  $(w, J) \mapsto (\bar{w}, \bar{J})$ , so dass die transformierte Hamiltonfunktion  $\bar{H}$  nur eine Funktion von  $\bar{J}$  ist. Für kleine  $\varepsilon$  wird diese in der Nähe der Identität, und damit von 2. Art sein. Für die erzeugende Funktion  $S(w, \bar{J})$  setzen wir deshalb die folgende Potenzreihe an:

$$S(w, \bar{J}) = (w, \bar{J}) + \varepsilon S_1(w, \bar{J}) + \varepsilon^2 S_2(w, \bar{J}) + \dots \quad (10.45)$$

Diese muss, wegen  $J = \partial S / \partial w$ , die HJ-Gleichung

$$H\left(w, \frac{\partial S}{\partial w}\right) = \bar{H}(\bar{J}) \quad (10.46)$$

erfüllen. In dieser entwickeln wir beide Seiten nach Potenzen von  $\varepsilon$  und verlangen Gleichheit der beiden (formalen) Potenzreihen. Konvergenzfragen werden dabei vorläufig ignoriert.

Wir führen dieses Programm hier nur für die Terme bis und mit  $\varepsilon^2$  durch. In dieser Näherung wird aus (10.46) zunächst

$$\begin{aligned} H_0\left(\frac{\partial S}{\partial w}\right) + \varepsilon H_1\left(w, \frac{\partial S}{\partial w}\right) + \varepsilon^2 H_2\left(w, \frac{\partial S}{\partial w}\right) \\ = \bar{H}_0(\bar{J}) + \varepsilon \bar{H}_1(\bar{J}) + \varepsilon^2 \bar{H}_2(\bar{J}), \end{aligned} \quad (10.47)$$

wobei in der betrachteten Näherung nach (10.45)

$$J = \frac{\partial S}{\partial w} = \bar{J} + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial w} + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial w}. \quad (10.48)$$

Dies setzen wir in (10.47) ein und entwickeln überall bis zur 2. Ordnung in  $\varepsilon$ . In Matrixschreibweise gilt

$$\begin{aligned} H_0\left(\frac{\partial S}{\partial w}\right) = H_0(\bar{J}) + \left(\varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial w} + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial w}\right) \frac{\partial H_0}{\partial \bar{J}}(\bar{J}) \\ + \frac{1}{2} \left(\varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial w}\right) \frac{\partial^2 H_0(\bar{J})}{\partial \bar{J} \partial \bar{J}} \left(\varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial w}\right) \end{aligned} \quad (10.49)$$

$$H_1\left(w, \frac{\partial S}{\partial w}\right) = H_1(w, \bar{J}) + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial w} \frac{\partial H_1}{\partial \bar{J}}(\bar{J}). \quad (10.50)$$

Aus (10.47) erhalten wir damit die folgenden drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : \quad \bar{H}_0(\bar{J}) &= H_0(\bar{J}) \\ \varepsilon^1 : \quad \bar{H}_1(\bar{J}) &= \omega_0(\bar{J}) \frac{\partial S_1}{\partial w} + H_1(w, \bar{J}) \\ \varepsilon^2 : \quad \bar{H}_2(\bar{J}) &= \omega_0(\bar{J}) \frac{\partial S_2}{\partial w} + K_2(w, \bar{J}). \end{aligned} \quad (10.51)$$

Darin sind  $\omega_0(\bar{J})$  die ungestörten Frequenzen,

$$\omega_0(\bar{J}) = \frac{\partial H_0(\bar{J})}{\partial \bar{J}} \quad (10.52)$$

und

$$K_2(w, \bar{J}) = H_2(w, \bar{J}) + \frac{\partial S_1}{\partial w} \frac{\partial H_1(w, \bar{J})}{\partial \bar{J}} + \frac{1}{2} \frac{\partial S_1}{\partial w} \frac{\partial^2 H_0(\bar{J})}{\partial \bar{J} \partial \bar{J}} \frac{\partial S_1}{\partial w}. \quad (10.53)$$

Die Beziehung zwischen  $\bar{w}$  und  $w$  ist

$$\bar{w} = \frac{\partial S}{\partial \bar{J}}(w, \bar{J}) = w + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \bar{J}}(w, \bar{J}) + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial \bar{J}}(w, \bar{J}) + \dots \quad (10.54)$$

Nun mitteln wir die Gleichungen (10.51) über den Torus.

Für eine Funktion  $f : T^f \rightarrow \mathbb{R}$  sei

$$\langle f \rangle := \frac{1}{(2\pi)^f} \int_{T^f} f(w) dw_1 \dots dw_f. \quad (10.55)$$

Wir erhalten

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{H}_0(\bar{J}) = H_0(\bar{J}) \\ \bar{H}_1(\bar{J}) = \langle H_1(w, \bar{J}) \rangle \\ \bar{H}_2(\bar{J}) = \langle K_2(w, \bar{J}) \rangle \end{array} \right. \quad (10.56)$$

Benutzen wir dies in (10.51), so erhalten wir für die Abweichungen von den Mittelwerten

$$w_0(\bar{J}) \frac{\partial S_1}{\partial w}(w, \bar{J}) = \langle H_1(w, \bar{J}) \rangle - H_1(w, \bar{J}),$$

$$w_0(\bar{J}) \frac{\partial S_2}{\partial w}(w, \bar{J}) = \langle K_2(w, \bar{J}) \rangle - K_2(w, \bar{J}). \quad (10.57)$$

Aus (10.56) und (10.53) sehen wir, dass die 2. Ordnung  $\bar{H}_2$  die Kenntnis von  $S_1$  verlangt, welches durch die 1. Gleichung von (10.57) bestimmt ist. Diese lässt sich mittels Fourier-Reihen lösen. Es sei

$$H_1(w, \bar{J}) - \langle H_1(w, \bar{J}) \rangle = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^f \\ (m \neq 0)}} H_{1m}(\bar{J}) e^{i(m, w)} \quad (10.58)$$

und

$$s_1(\omega, \bar{J}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^f} s_{1m}(\bar{J}) e^{i(m, \omega)} \quad (10.59)$$

Dann ergibt sich aus (10.57)

$$s_1(\omega, \bar{J}) = i \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^f \\ (m \neq 0)}} \frac{H_{1m}(\bar{J})}{(m, \omega_0(\bar{J}))} e^{i(m, \omega)}, \quad (10.60)$$

falls wir uns wiederum auf den nichtentarteten Fall beschränken.

In den transformierten Variablen  $(\bar{\omega}, \bar{J})$  liegt nach Konstruktion eine quasiperiodische Bewegung vor, deren Frequenzen  $\bar{\omega}$  nach (10.56) bis zur 2. Ordnung folgendermassen lauten

$$\bar{\omega}(\bar{J}) = \omega_0(\bar{J}) + \varepsilon \frac{\partial \langle H_1 \rangle}{\partial \bar{J}} + \varepsilon^2 \frac{\partial \langle K_2 \rangle}{\partial \bar{J}}. \quad (10.61)$$

Die erste Korrektur stimmt mit (10.32) überein.

### Bemerkungen

Auch im nichtentarteten Fall, d.h. wenn  $\omega_0$  ein rational unabhängiger Vektor aus  $\mathbb{R}^f$  ist, können die Nenner in (10.60) beliebig klein werden, und zwar kann eine Teilfolge von ihnen mit wachsendem  $|m|$  so rasch abnehmen, dass die Reihe (10.60) divergiert. Daher spricht man auch vom Problem der "kleinen Nenner". Es lässt sich aber zeigen, dass unter gewissen Annahmen für die ungestörten Frequenzen  $\omega_0$  (diese müssen "sehr irrational" sein) die Reihe (10.60) konvergiert.



Für  $S_2$ , und alle höheren  $S_n$ , erhält man ähnliche Summen wie in (10.60). Auch wenn die Reihen für jedes  $S_n$  einzeln konvergieren, wird die Summe über alle  $S_n$  im allgemeinen aber divergieren. Ansonsten wäre die Bewegung quasi-periodisch und man weiss von interessanten Beispielen, dass dies nicht immer der Fall ist.

Als erster bemühte sich Weierstrass um die Konvergenz der Störungsreihen in der Himmelsmechanik. Das Zitat am Anfang des Kapitels, welches von einem Brief an seine Schülerin Sonja Kowalesvki vom 15. August 1878 stammt, zeigt, dass er mit diesem Problem nicht fertig geworden ist. Weierstrass äusserte sich auch gegenüber seinem Schüler Mittag-Leffler über das Konvergenzproblem und seine Schwierigkeiten. Dieser veranlasste darauf den schwedischen König Oscar II, für die Lösung dieses Problems einen Preis zu stiften. Die von Weierstrass formulierte Preisfrage hatte folgenden Wortlaut [Mittag-Leffler, G.: Mitteilung, einen von König Oscar II gestifteten mathematischen Preis betreffend. Acta Math. 7, I-VI (1885)]:

"Es sollen für ein beliebiges System materieller Punkte, die einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen, unter der Annahme, dass niemals ein Zusammentreffen zweier Punkte stattfindet, die Koordinaten jedes einzelnen Punktes in unendliche, aus bekannten Funktionen der Zeit zusammengesetzte und für einen Zeitraum von unbegrenzter Dauer gleichmässig konvergente Reihen entwickelt werden.

Dass die Lösung dieser Aufgabe, durch deren Erledigung unsere Einsicht in den Bau des Weltsystems auf das wesentlichste würde gefördert werden, nicht nur möglich, sondern auch mit dem gegenwärtig uns zu Gebote stehenden analytischen Hilfsmitteln erreichbar sei, dafür spricht

die Versicherung Lejeune-Dirichlet's, der kurz vor seinem Tode einem befreundeten Mathematiker \* mitgeteilt hat, dass er eine allgemeine Methode zur Integration der Differentialgleichungen der Mechanik entdeckt habe, sowie auch, dass es ihm durch Anwendung dieser Methode gelungen sei, die Stabilität unseres Planetensystems in vollkommen strenger Weise festzustellen. Leider ist uns von diesen Untersuchungen Dirichlets, ausser der Andeutung, dass zur Auffindung seiner Methode die Theorie der kleinen Schwankungen einen gewissen Anhalt biete, nichts erhalten worden; es darf aber als gewiss angenommen werden, dass sie nicht in schwierigen und verwickelten Rechnungen bestanden haben, sondern in der Durchführung eines einfachen Grundgedankens, den wiederaufzufinden ernster und beharrlicher Forschung wohl gelingen möchte.

Sollte indessen die gestellte Aufgabe Schwierigkeiten darbieten, die zur Zeit nicht zu überwinden wären, so könnte der Preis auch erteilt werden für eine Arbeit, in der irgendein anderes bedeutendes Problem der Mechanik in der oben angedeuteten Weise vollständig erledigt würde."

---

\* Lejeune-Dirichlet (1805-1859), der befreundete Mathematiker war Kronecker (1823-1891).

Aufgrund des letzten Absatzes der Preisausschreibung wurde der Preis im Jahre 1889 Poincaré zuerkannt, obschon er die gestellte Aufgabe nicht gelöst hatte. Tatsächlich deutete seine Arbeit darauf hin, dass die Störungsreihen entgegen allen damaligen Erwartungen divergieren. Poincarés Preisschrift enthielt aber eine Fülle von Ideen, die für die weitere Entwicklung der Himmelsmechanik von grosser Bedeutung waren und auch andere Teile der Mathematik befruchteten.

Auf die weitere Entwicklung, welche schliesslich zur KAM-Theorie führte, werde ich zurückkommen (vgl. Abschnitt 10.5).

#### 10.4 Adiabatische Invarianten

Die Näherung (10.30) der Hamiltonschen Gleichungen zur Hamiltonfunktion (10.26) ist ein Spezialfall der folgenden allgemeinen Mittelungsmethode.

Es seien  $(w, J)$  wieder die Winkel- und Wirkungsvariablen des integrablen Systems zur Hamiltonfunktion  $H_0(J)$ . Das betrachtete Stück des Phasenraumes sei  $T^f \times \Delta$ ,  $\Delta \subset \mathbb{R}^f$ .

Die ungestörten kanonischen Gleichungen

$$\dot{w} = \omega(J), \quad \dot{J} = 0 \quad (\omega(J) = \frac{\partial H_0}{\partial J}) \quad (10.62)$$

seien nun in folgender Weise gestört

$$\dot{w} = \omega(J) + \varepsilon f(w, J), \quad \dot{J} = \varepsilon g(w, J), \quad (10.63)$$

wobei die Funktionen  $f$  und  $g$  in den Winkelvariablen mehrfach periodisch sind. Die Störungen in (10.63) brauchen nicht Hamiltonsch zu sein.

Unter gewissen Umständen wird nun  $J(t)$  durch das folgende gemittelte System approximativ beschrieben:

$$\dot{I} = \varepsilon \langle g \rangle (I), \quad (10.64)$$

wobei  $\langle g \rangle$  wie in (10.55) durch Mittelung über den  $f$ -dimensionalen Torus  $T^f$  definiert ist.

Dieser Approximation liegt die folgende Vorstellung zugrunde. Für viele Beispiele sind die charakteristischen Zeiten  $2\pi/\omega$  des ungestörten Problems wesentlich kürzer als die Zeiten über welche die Wirkungsvariablen wesentlich variieren. Etwa für das Planetensystem ist  $\varepsilon$  das Verhältnis der Planetenmassen zur Sonnenmasse, d.h. von der Größenordnung

1/1000. Während Umlaufzeiten typisch Jahre betragen, wird sich die Gestalt der Planetenbahnen frühestens in Tausenden von Jahren ändern. Tatsächlich dauert dies noch viel länger, sonst würden sich in kurzer Zeit schreckliche Klimaveränderungen abspielen.

Betrachten wir nun eine Zeit  $T$ , die lang ist im Vergleich zu  $2\pi/\omega$ , aber kurz, verglichen mit  $\frac{1}{\varepsilon}(\frac{2\pi}{\omega})$ . In der Zeit  $T$  ist die Änderung der  $J$  natürlich klein. Auf Grund von (10.63) erwarten wir

$$\Delta J \simeq \varepsilon T \left[ \frac{1}{T} \int_0^T g(\omega(t), J) dt \right],$$

wobei rechts die ungestörte Bewegung zu (10.62) eingesetzt werden darf. Da die Zeit  $T$  gross ist im Vergleich zu  $2\pi/\omega$ , steht in der eckigen Klammer ungefähr das Zeitmittel der ungestörten Bewegung. Für die langsame Zeitvariable  $\tau := \varepsilon t$  bekommen wir deshalb

$$\frac{\Delta J}{\Delta \tau} \simeq \frac{dJ}{d\tau} \simeq \text{ungestörtes Zeitmittel von } g.$$

Im nichtentarteten Fall ist aber nach dem Satz von Weyl (p. 153) das Zeitmittel gleich dem räumlichen Mittel über den Torus, und deshalb erwarten wir  $dJ/d\tau \simeq \langle g \rangle$ , was der gemittelten Gleichung (10.64) entspricht. Dieser systematischen Änderung werden natürlich kurzzeitige Oszillationen auf Zeitskalen  $2\pi/\omega$  überlagert sein (vgl. Fig. 10.4).

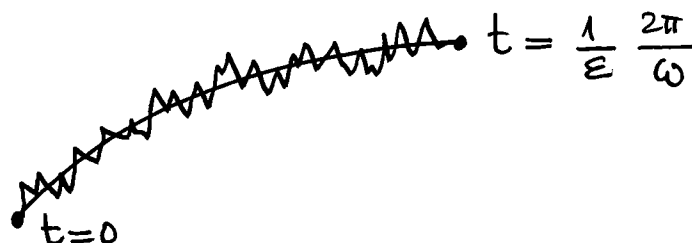


Fig. 10.4

Dieses Bild ist intuitiv besonders gut verständlich, wenn man die Änderung der  $J$  als Bild der Projektion  $\pi: T^f \times \Delta \longrightarrow \Delta$ ,  $(\omega, J) \longmapsto J$  der Phasenbahnen zum nicht ganz vertikalen Vektorfeld

$$X = \begin{pmatrix} \omega + \varepsilon f \\ \varepsilon g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \equiv X_0 + \varepsilon X_1 \quad (10.65)$$

auffasst (vgl. Fig. 10.5).

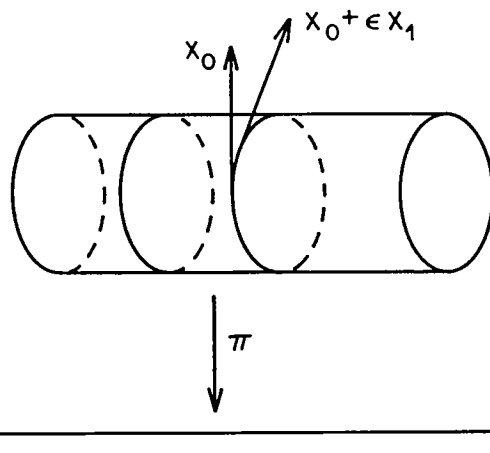


Fig. 10.5. Projektion des Phasenraumes auf den Variationsbereich  $\Delta$  der Wirkungsvariablen.

Beispiel: Für  $f = 1$  betrachten wir die gestörte Gleichung  $\dot{\omega} = \omega$ ,  $\dot{J} = \varepsilon (a + b \cos \omega)$ . (10.66)

Die gemittelte Gleichung ist

$$\dot{I} = \varepsilon a \implies I(t) = \varepsilon at + I_0.$$

Für die Lösung der exakten Gleichung findet man

$$J(t) = I(t) + \frac{b \sin \omega t}{\omega}$$

Der Unterschied zur gemittelten Lösung ist also ein kleiner oszillierender Term.

Für ein Hamiltonsches System mit Hamiltonfunktion  $H_0(J) + \varepsilon H_1(\omega, J)$  ist  $g(\omega, J) = -\partial H_1 / \partial \omega$  und folglich  $\langle g \rangle = 0$ . Das gemittelte System ist deshalb

$$\dot{I} = 0, \quad (10.67)$$

d.h. die Wirkungsvariablen erleiden keine säkulare Änderung.

Für  $f = 1$  lässt sich nun relativ leicht der folgende Satz beweisen.

Satz 10.3 (Mittelungssatz): Falls  $\omega(J)$  in  $\Delta$  nirgends verschwindet, so gibt es für alle hinreichend kleinen  $\varepsilon$  eine  $\varepsilon$ -unabhängige Konstante  $C$ , derart, dass

$$|J(t) - I(t)| < C\varepsilon \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Beweis: Siehe [8], p.294, oder [5], p. 147 ff.

Bemerkung: Für  $f > 1$  ist die Situation viel schwieriger, weil die Resonanzpunkte  $\{J \in \Delta : (m, \omega(J)) = 0 \text{ für ein } m \in \mathbb{Z}^f \setminus \{0\}\}$  i.a. in  $\Delta$  dicht liegen. Für eine sehr lesbare Diskussion verweise ich auf [5], § 18.

\* \* \*

Nun betrachten wir Hamiltonsche Systeme mit langsamer zeitlicher Veränderung:  $H(q,p; \varepsilon t)$ . Zum Beispiel werde die Pendellänge im Vergleich zur Periode langsam verändert (Fig. 10.6).

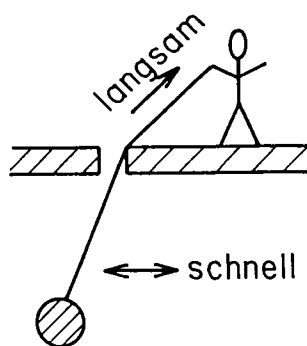


Fig. 10.6

Eine Grösse  $J(q,p,\lambda)$  heisst adiabatische Invariante der H-Dynamik, falls für Lösungskurven  $(q(t), p(t))$  zu jedem  $\delta > 0$  ein  $\varepsilon_0$  existiert, so dass für alle  $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\left| J(q(t), p(t); \varepsilon t) - J(q(0), p(0); 0) \right| < \delta \quad \text{für alle} \\ 0 < t < 1/\varepsilon \quad . \quad (10.68)$$

Physikalischer ausgedrückt, ändert sich eine adiabatische Invariante über Zeiten der Ordnung  $\frac{1}{\omega} \frac{2\pi}{\omega}$  nur um  $O(\varepsilon)$ .

Für  $f = 1$  betrachten wir nun ein solches Gebiet des Phasenraumes, in welchem die Phasenbahnen  $H(q,p;\lambda) = E$  für jeden Wert von  $\lambda$  geschlossen sind. Dann können wir für jedes feste  $\lambda$  wie in §10.2 Winkel- und Wirkungsvariablen einführen. Sei  $S(q,J;\lambda)$  die erzeugende Funktion für die  $\lambda$ -abhängige kanonische Transformation  $q,p \mapsto w,J$ , so gilt nach (10.20)

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}(q,J;\lambda) \quad , \quad w = \frac{\partial S}{\partial J}(q,J;\lambda) \quad . \quad (10.69)$$

Wir erinnern an (10.18), wonach

$$J(q,p;\lambda) = \frac{1}{2\pi} \oint pdq \quad (10.70)$$

ist, wobei sich die Integrale für festes  $\lambda$  um die geschlossene Phasenbahn durch den Punkt  $(q,p)$  erstreckt.

Es sei  $H_0(J;\lambda) = H(q,p;\lambda)$ . Ist nun  $\lambda = \varepsilon t$ , so liegt eine zeitabhängige kanonische Transformation vor, mit der neuen Hamiltonfunktion (siehe (7.72))

$$K = H_0 + \frac{\partial S}{\partial t} = H_0 + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \lambda} \quad . \quad (10.71)$$

Die zugehörigen Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned}\dot{w} &= w(J, \lambda) + \varepsilon f(w, J; \lambda) \quad , \quad f = \frac{\partial^2 S}{\partial J \partial \lambda} \\ \dot{J} &= \varepsilon g(w, J; \lambda) \quad , \quad g = -\frac{\partial^2 S}{\partial w \partial \lambda} \\ \dot{\lambda} &= \varepsilon \quad .\end{aligned}\tag{10.72}$$

Das dazugehörige gemittelte System ist

$$\dot{I} = \varepsilon \langle g \rangle \quad , \quad \dot{\Lambda} = \varepsilon \quad .\tag{10.73}$$

Falls  $w(J, \lambda)$  nirgends verschwindet, dürfen wir das Mittelungstheorem 10.3 verwenden. Da  $\langle g \rangle$  offensichtlich verschwindet, gilt der

Satz 10.4 (Adiabatensatz): Die Wirkungsvariable ist eine adiabatische Invariante.

Beispiele:

1. Harmonischer Oszillator mit langsam variierender Frequenz. Nach (10.35) ist für einen harmonischen Oszillator das Verhältnis Energie/Frequenz eine adiabatische Invariante.

2. Bewegung eines Elektrons in einem fast homogenen Feld. Die Bewegungsgleichung lautet nach (3.12)

$$\dot{\underline{v}} = \underline{\omega}_c \wedge \underline{v} \quad , \quad \underline{\omega}_c = -\frac{e}{m c} \underline{B} \quad .\tag{10.74}$$

Man sieht leicht, dass dies die Euler-Gleichung zur Lagrange-funktion

$$L = \frac{m}{2} \dot{\underline{x}}^2 + \underline{\mu} \cdot \underline{B}\tag{10.75}$$

ist, wobei  $\underline{\mu}$  das magnetische Moment der Teilchenbewegung ist,

$$\underline{\mu} = \frac{e}{2mc} \underline{L} \quad (\underline{L}: \text{ Bahndrehimpuls}) \quad .\tag{10.76}$$

In Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$  wird daraus



$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{2c} B r^2 \dot{\varphi} . \quad (10.77)$$

Za  $\varphi$  zyklisch ist, gilt

$$p_{\varphi} = m r^2 \dot{\varphi} + \frac{eBr^2}{2c} = \text{const.} \quad (10.78)$$

Die radiale Gleichung lautet ferner

$$m \ddot{r} - r \dot{\varphi} \left( m \dot{\varphi} + \frac{eB}{c} \right) = 0 . \quad (10.79)$$

Für eine stationäre Lösung mit  $r, \dot{\varphi}$  konstant gilt

$$\dot{\varphi} = \omega_c = - \frac{eB}{mc} \quad (\text{Larmor-Frequenz}) . \quad (10.80)$$

Dann gilt  $p_{\varphi} = - eBr^2/2c$  und die Wirkungsvariable ist deshalb

$$J_{\varphi} = \oint p_{\varphi} d\varphi = - \frac{reBr^2}{c} . \quad (10.81)$$

Aber aus (10.76) folgt  $\mu = \frac{e}{2c} r^2 \dot{\varphi}$ , oder mit (10.80)

$$\frac{e r^2}{c} = + 2\mu / \omega_c . \quad (10.82)$$

Deshalb erhalten wir

$$J_{\varphi} = \frac{-2\pi\mu B}{\omega_c} = \frac{2\pi mc}{e} \mu . \quad (10.83)$$

Nach dem Adiabatenansatz ist deshalb  $\mu$  für genügend langsame Variationen des Magnetfeldes eine adiabatische Invariante. Nach (10.81) bedeutet dies auch, dass  $B$  mal die Fläche der Bahn invariant ist unter adiabatischen Störungen. Dies hat wichtige Anwendungen (magnetische Flaschen, etc.).

### 10.5 Qualitatives Verhalten von autonomen kanonischen Systemen in der Nähe von integrablen Systemen

---

Ich erinnere zunächst an die Situation, welche bei einem integrablen System vorliegt. Der Phasenraum ist  $T^f \times \Delta$ ,  $\Delta \subset \mathbb{R}^f$ . Die Winkelvariablen  $w_1, \dots, w_f \pmod{2\pi}$  parametrisieren den  $f$ -dimensionalen Torus und die Wirkungsvariablen  $J$  das Gebiet  $\Delta$ . Zusammen bilden sie ein kanonisches Koordinatensystem, d.h. die symplektische Form ist gleich  $\sum dw_i \wedge dJ_i$ . Die Hamiltonfunktion ist nur eine Funktion  $H_0(J)$  der Wirkungsvariablen. Deshalb sind  $J_1, \dots, J_f$  Integrale der Bewegung und für jeden festen Wert  $J \in \Delta$  verläuft die Bewegung auf einem  $f$ -dimensionalen Torus, d.h. der Fluss zu  $X_{H_0}$  ist

$$\phi_t: (w, J) \longmapsto (w + tw(J), J), \quad \omega(J) = \frac{\partial H_0}{\partial J}. \quad (10.84)$$

Die Eigenschaften dieses Flusses sind sehr unterschiedlich, je nach dem ob die Frequenzen  $\omega(J)$  rational unabhängig sind oder nicht. Im ersten Fall umspinnt die Bahn durch jeden Punkt den Torus dicht und die quasiperiodische Bewegung auf dem Torus ist ergodisch (siehe p. 152 ff). Man spricht dann von nichtresonanten Tori. Diese haben für den nichtentarteten Fall

$$\det \left( \frac{\partial \omega}{\partial J} \right) \neq 0 \quad (10.85)$$

das volle Lebesguesche Mass. Die resonanten Tori liegen aber i.a. dicht.

Nun stören wir das Hamiltonsche System leicht:

$$H = H_0(J) + \varepsilon H_1(w, J) \quad , \quad \varepsilon \ll 1 \quad (10.86)$$

Poincaré bezeichnete die Untersuchung der Störungen von quasi-periodischen Bewegungen als fundamentales Problem der Dynamik.

Die formalen Störungsmethoden des 18. und des 19. Jahrhunderts hatten zwar grosse quantitative Erfolge \*) zu verzeichnen, konnten aber keine Information der Bewegung über unendlich lange Zeitintervalle geben. In seiner Preisschrift zeigte Poincaré, dass diese Methoden i.a. zu divergenten Störungsreihen führen, deren Ursache in den kleinen auftauchenden Nennern liegt (vgl. die Diskussion auf S. 272), und er bewies einen ziemlich allgemeinen Satz in dieser Richtung. Jedoch schon Weierstrass erkannte, dass der Poincarésche Beweis die Existenz von quasiperiodischen Lösungen nicht ausschliesst. Wie recht er hatte, zeigten erst die neueren Entwicklungen in den 60iger Jahren dieses Jahrhunderts, welche als KAM-Theorie bezeichnet werden. (Das Akronym KAM steht für Kolmogorov, Arnold und Moser.)

---

\*)

Auf besonders eindrückliche Weise dokumentiert dies die Entdeckung des Planeten Neptun. 1781 hatte F.W. Herschel entdeckt, dass der Planet Uranus nicht die berechnete Bahn einhielt. Dies führte 1840 Bessel dazu, die Existenz eines weiteren Planeten zu postulieren. Adams und Le Verrier führten daraufhin die dazugehörigen Rechnungen aus. Nachdem J. Galle 1846 die Rechnungen von Le Verrier erhielt, fand er schon nach etwa einer Stunde den vorausgesagten Planeten Neptun.

Das Hauptresultat der KAM-Theorie garantiert die Existenz von quasiperiodischen Lösungen für gewisse Klassen von Differentialgleichungen, die das  $N$ -Körperproblem einschließen. Eine passende Störungsreihe stellt sich nämlich für bestimmte Wahlen der Frequenzen als konvergent heraus, während sie für andere Frequenzen sinnlos wird. Die Bahnen, die eine solche Darstellung zulassen, sind solche, für welche in einem starken Sinne (siehe unten) keine Resonanz eintritt. Da aber solche Bahnen beliebig nahe an anderen liegen können, ist es durchaus möglich, dass eine beliebig kleine Störung der Anfangswerte einer quasiperiodischen Bahn diese in eine un stabile verwandelt. Jedoch kann man zeigen, dass die un stabilen Bahnen sehr viel seltener sind.

Etwas genauer besagt das

KAM-Theorem: Falls ein ungestörtes System nichtentartet ist, dann werden für genügend kleine autonome Hamiltonsche Störungen die meisten nichtresonanten Tori lediglich leicht deformiert, so dass auch im Phasenraum des gestörten Systems invariante Tori existieren, welche von den Phasenbahnen dicht und quasiperiodisch umspunnen werden, wobei die Frequenzen rational unabhängig sind.

Diese invarianten Tori bilden die Mehrheit in dem Sinne, dass das Mass des Komplements ihrer Vereinigung klein ist, wenn die Störung schwach ist.

Die Beweisidee dieses Satzes geht auf Kolmogorov zurück und beruht, grob gesprochen, auf der folgenden Strategie.

Zunächst wählt man die Frequenzen  $\omega$  so, dass sie

nicht nur rational unabhängig sind, sondern auch die folgenden Bedingungen erfüllen: es existieren Konstanten  $C$  und  $\nu$ , so dass

$$|(\omega, k)| > C |k|^{-\nu} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}^f \setminus \{0\}. \quad (10.87)$$

Man kann zeigen, dass solche Frequenzen für genügend großes  $\nu$  (z.B.  $\nu = f+1$ ) das volle Mass haben.

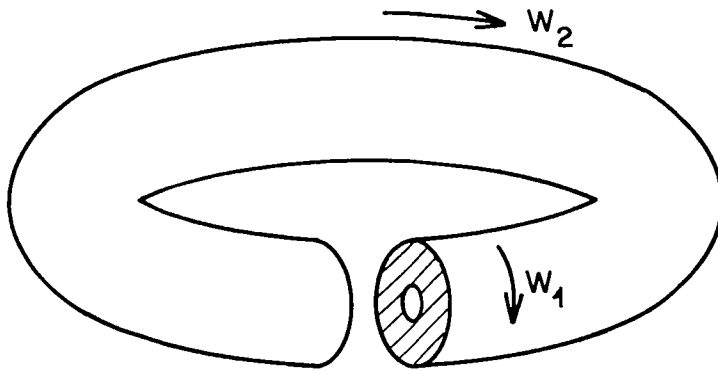
Als nächstes sucht man nun nach invarianten Tori des gestörten Systems, auf welchen die quasiperiodische Bewegung mit denselben Frequenzen verläuft. (In der üblichen Störungstheorie ändern sich die Frequenzen in jeder Ordnung; vgl.

§ 10.3.) Dabei verwendet man anstelle der üblichen Störungsreihen einen ausserordentlich stark konvergierenden Iterationsprozess, der den Einfluss der kleinen Nenner kompensiert. Dieser gleicht dem Newtonschen Verfahren zur Berechnung von Nullstellen einer reellen Funktion.

Auf Umwegen beweist dies dann die Konvergenz einer passenden Störungsreihe (modifizierte Lindstedt Reihe), welche erstmals bei Poincaré vorkommt (Band 2 der "mécanique céleste").

Die Umsetzung der Ideen von Kolmogorov in wirkliche Beweise erforderte eine ausgefeilte Abschätzungstechnik und wurde in analytischer Schwerarbeit erstmals im Jahre 1963 von Kolmogorovs Schüler Arnold ausgeführt. Dies stellt die Lösung der ursprünglichen Preisaufgabe (siehe S. 273) dar.

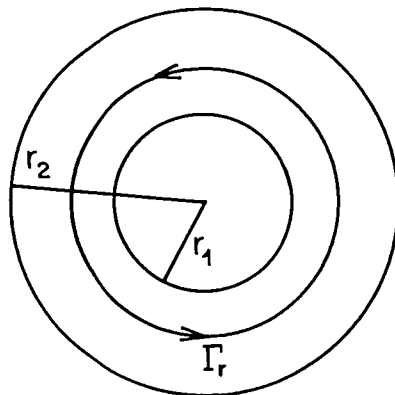
Wir wollen uns dem Fall  $f = 2$  noch näher zuwenden. Zunächst betrachten wir nochmals das ungestörte Problem.



Die Energiefläche ist dann eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit, die von invarianten Tori gefasert ist. Jede Bahn bleibt auf einem festen Torus und durchdringt den Querschnitt  $w_2 = 0$  mit der Frequenz  $\omega_2$ . Die Bahnen definieren also eine sog. Transversalabbildung  $T$  eines Kreisringes auf sich: Sei  $\vartheta = w_1$ ,  $r = \sqrt{J_1}$ , dann ist  $T$  von der Form

$$T: (\vartheta, r) \longmapsto (\vartheta + a(r), r) \quad (0 \leq r_1 < r < r_2) .$$

Falls  $a'(r) \neq 0$  nennt man  $T$  eine Twist-Abbildung. Die Kreise sind unter  $T$  invariant.



Für  $a(r)/2\pi = p/q$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $(p, q) = 1$ , besteht ein invarianter Kreis  $\Gamma_r$  aus periodischen Punkten, welche periodischen Bahnen entsprechen. Ist hingegen  $a(r)/2\pi$  irrational, dann ist jede Bahn dicht, d.h.

$$\Gamma_r = \overline{\bigcup_{h \in \mathbb{Z}} T^h(x)}, \quad x \in \Gamma_r,$$

und  $T$  ist ergodisch auf  $\Gamma_r$ .

Nun werde wieder das integrable System "leicht gestört". Wir betrachten wieder die Transversalabbildung restringiert auf die Energiefläche. Diese ist, wie man zeigen kann, immer symplektisch. Sie hat die Form

$$\varphi : \begin{cases} \vartheta \longmapsto \vartheta + a(r) + f(\vartheta, r) \\ r \longmapsto r + g(\vartheta, r) \end{cases}$$

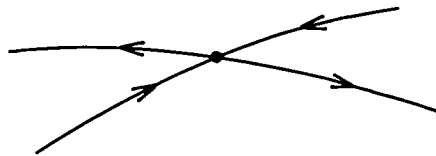
Was passiert jetzt mit den invarianten Kreisen unter der gestörten Twist-Abbildung? Nach Birkhoff und der KAM-Theorie kann man dazu folgendes sagen.

- 1) Falls  $a(r)/2\pi$  rational ist, dann löst sich der Kreis von periodischen Fixpunkten allgemein zu reden in eine endliche gerade Zahl von abwechselnd elliptischen und hyperbolischen periodischen Punkten auf.
- 2) Falls  $a(r)/2\pi$  im Sinne von (10.87) sehr irrational ist (und das ist für hinreichend kleine Störungen für sehr viele Zahlen der Fall), dann erleidet der Kreis nur eine kleine Deformation.

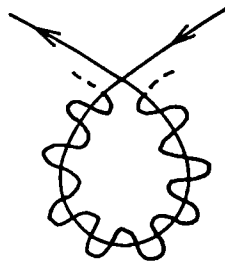
Damit erhalten wir das folgende Bild:

- (i) Die meisten Kreise (im Sinne des Lebesgue-Masses) werden durch eine kleine Störung nur schwach deformiert.
- (ii) Eine überall dichte Menge von Kreisen wird vollständig in isolierte elliptische und hyperbolische periodische Punkte aufgelöst.

- (iii) In der Umgebung jedes elliptischen periodischen Punktes treten die Phänomene (i) und (ii) allgemein zu reden erneut auf.
- (iv) Jeder hyperbolische Fixpunkt trägt mit sich eine expandierende und eine kontrahierende "Mannigfaltigkeit".



Diese "Mannigfaltigkeiten" werden sich im allgemeinen schneiden und geben Anlass zu sog. homozyklischen Punkten, in deren Nähe die Bahnen sehr kompliziert sind.



Ähnliche Verhältnisse bestehen bei periodischen hyperbolischen Punkten.

All dies ist in der folgenden berühmten Skizze von Arnold dargestellt.



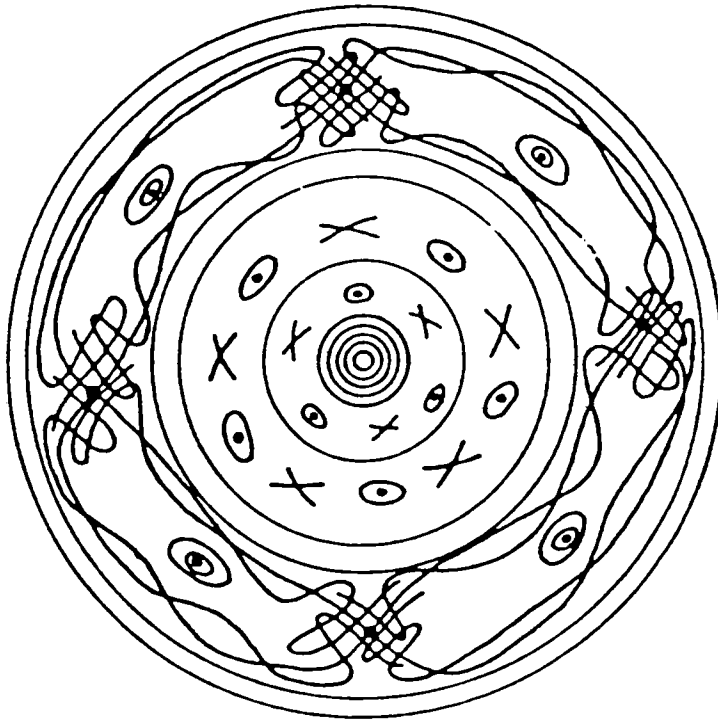


Fig. 10.7. Arnold-Skizze

Die Analyse liefert überdies noch eine quantitative Dividende: Wenn die Eigenwerte von  $D\varphi(p)$  für einen elliptischen Fixpunkt  $p$  keine 3. oder 4. Einheitswurzeln sind, dann gibt es eine kanonische Invariante von Birkhoff, deren Nichtverschwinden Stabilität zur Folge hat (Moser'sches Twisttheorem). Moser hat dieses Kriterium auf die Verteilung der Asteroiden angewandt und damit das Auftreten von verbotenen Zonen plausibel gemacht.

Bekanntlich laufen ausser den grossen Planeten mehrere tausend Planetoiden um die Sonne; ihre Bahnen befinden sich vor allem zwischen Mars und Jupiter. Ihre Massen sind winzig

und haben deshalb praktisch keinen Einfluss auf die Planeten. Andererseits werden die Planetoiden von Jupiter sehr wesentlich gestört. Evidenz dafür ist eine Beobachtung von Kirkwood.\*) Er bemerkte, dass die Frequenzen der Planetoiden nicht gleichmässig über ein Intervall verteilt sind, sondern gewisse Lücken, die sog. Kirkwoodschen Lücken, aufweisen. Man kann sich die Situation ähnlich wie die (gröbsten) Lücken im Saturnring vorstellen. Wird die Frequenz der Planetoiden mit  $\omega_p$  und die des Jupiters mit  $\omega_J$  bezeichnet, so sind die stärksten Lücken durch die Formel

$$\frac{\omega_J}{\omega_p} = \frac{n}{m}, \quad |n - m| = 1, 2, 3, 4, \quad n, m \text{ relativ prim,}$$

gegeben. Genau diese Lücken erwartet man auf Grund des Moerserschen Twisttheorems, wenn man die Bewegung der Planetoiden als restringiertes 3-Körperproblem modelliert.

Mit diesen wenigen Hinweisen muss ich mich begnügen.

---

\*)

aus dem Jahre 1866.

## 10.6 Winkel- und Wirkungsvariable für mehrfach periodische Systeme

---

Wir betrachten nun autonome Systeme, für welche die verkürzte HJ-Gleichung ein vollständiges Integral der Form (9.35),

$$W(q, \alpha) = \sum_{i=1}^f W_i(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_f), \quad (10.88)$$

hat. (Wieder sei  $\alpha_f = E$ .) Für eine Separationslösung dieser Art zerfallen die Phasenbahnen auf Grund von

$$p_i = \frac{\partial W_i}{\partial q_i}(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_f), \quad i=1, \dots, f, \quad (10.89)$$

in ein direktes Produkt von Kurven in den  $(q_i, p_i)$  - Phasenebenen, welche durch die Gl. (10.89) bestimmt sind. Für diese Projektionen soll eine der folgenden beiden Möglichkeiten zutreffen:

- (i) Die Phasenbahn ist geschlossen. In diesem Fall nennt man die Koordinate  $q$  einfach.
- (ii) Die Phasenbahn ist in der Koordinate  $q$  periodisch mit einer kleinsten Periode  $q_0$ , wobei  $(q, p)$  und  $(q+q_0, p)$  den gleichen Zustand beschreiben. In diesem Fall ist  $q$  eine winkelartige, sog. mehrfache Koordinate.

Ein System mit diesen Eigenschaften nennen wir ein mehrfach periodisches System.

Ein Beispiel, welches je nach Energie beide Fälle (i) und (ii) enthält, ist das ebene Pendel mit  $q =$  Auslenkungs-

winkel  $\varphi$ . Für kleine Energien pendelt  $\varphi$  zwischen zwei Werten  $\varphi_0$  und  $-\varphi_0$  hin und her (vgl. Fig. 10.8); für grosse Energien überschlägt sich das Pendel und  $\varphi$  wächst mit der Zeit laufend an, aber  $q = \varphi$  und  $q = \varphi + 2\pi$  sind zu identifizieren. (Statt der Phasenebene sollte man den Mantel eines Zylinders betrachten.)

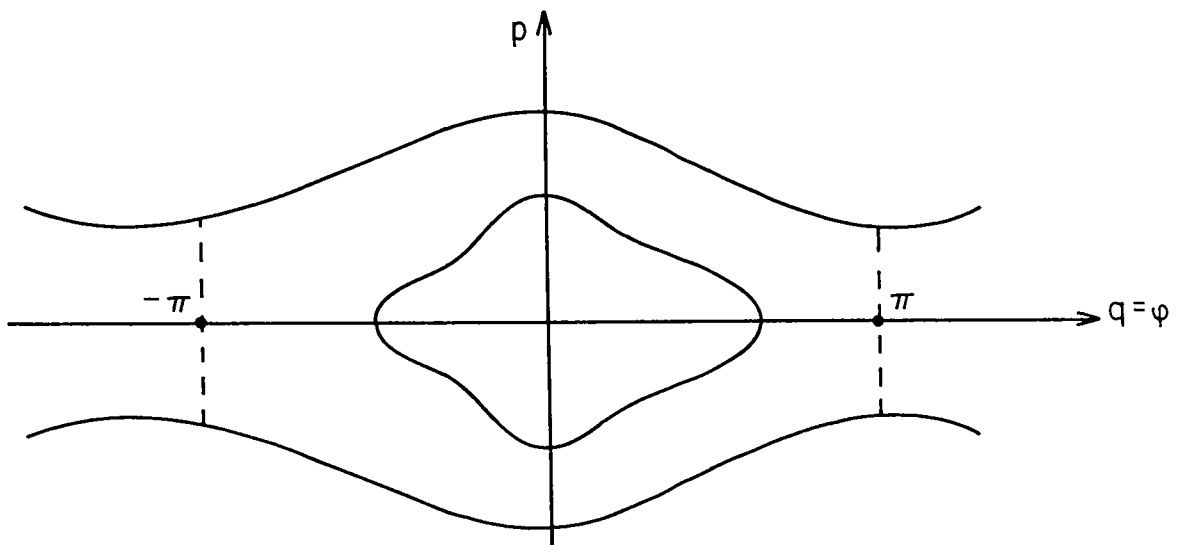


Fig. 10.8

Wir können nun die Ueberlegungen von S. 259 ff auf die mehrfach periodischen Systeme übertragen. Wie in (10.18) definieren wir die Wirkungsvariablen  $J_k$  durch

$$J_k(\alpha_1, \dots, \alpha_f) = \frac{1}{2\pi} \oint p_k dq_k = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W_k}{\partial q_k}(q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_f) dq_k. \quad (10.90)$$

Das Integral ist über die geschlossene Phasenbahn, bzw. über eine Periode von  $q_k$  zu erstrecken.

Im allgemeinen wird es möglich sein, die Funktionen  $J_k(\alpha_1, \dots, \alpha_f)$  ( $k = 1, \dots, f$ ) nach  $\alpha_1, \dots, \alpha_f$  aufzulösen. Es sei dann

$$S(q, J) := W(q, \alpha(J)) = \sum_{i=1}^f S_i(q_i, J_1, \dots, J_f) . \quad (10.91)$$

Die zu den  $J_k$  kanonisch konjugierten Winkelvariablen ergeben sich aus

$$w_k = \frac{\partial S}{\partial J_k} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial S_i}{\partial J_k}(q_i, J_1, \dots, J_f) . \quad (10.92)$$

Die neue Hamiltonfunktion ist dann  $E(J_1, \dots, J_f) = \alpha_f(J_1, \dots, J_f)$ . Wieder gilt

$$\dot{w}_k = w_k := \frac{\partial E}{\partial J_k} = \text{const.} \quad (10.93)$$

Aus (10.92) folgt

$$\frac{\partial w_k}{\partial q_i}(q, J) = \frac{\partial^2 S_i}{\partial q_i \partial J_k} \quad (10.94)$$

Andererseits folgt aus (10.90)

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial S_i}{\partial q_i} dq_i \quad (10.95)$$

und daraus durch Differentiation

$$\delta_{ik} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial^2 S_i}{\partial q_i \partial J_k} dq_i . \quad (10.96)$$

Nun betrachten wir im Raum der  $(q_1, \dots, q_f)$  irgend eine glatte Kurve  $\gamma$ , die so verläuft, dass jedes  $q_i$  einzeln eine Anzahl  $n_i$  ( $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) seiner eigenen Perioden durchläuft. Die Änderung  $\Delta w_k$  beim

Durchlaufen einer solchen Kurve ergibt sich aus (10.94) und (10.96) zu

$$\Delta w_k = \int_{\gamma} \sum_{i=1}^f \frac{\partial^2 S_i}{\partial q_i \partial J_k} dq_i = 2\pi \sum_{i=1}^f \delta_{ik} n_i = 2\pi n_k. \quad (10.97)$$

Dies zeigt: Ist  $q_k$  eine einfache Variable, so ist  $q_k(w, J)$  als Auflösung von (10.92) eine mehrfach periodische Funktion in den Winkelvariablen:

$$q_k(w_1 + 2\pi n_1, \dots, w_f + 2\pi n_f, J_1, \dots, J_f) = q_k(w_1, \dots, w_f, J_1, \dots, J_f). \quad (10.98)$$

Ist  $q_k$  eine mehrfache Variable mit einer Periode  $q_k^0$ , so folgt entsprechend

$$q_k(w + 2\pi n, J) = q_k(w, J) + n q_k^0, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (10.99)$$

Beispiel: Die Keplerbewegung

Für dieses Beispiel haben wir bereits ein vollständiges Integral der HJ-Gleichung der Form (10.88) gefunden (siehe 9.33)).

Nach (10.90) und (9.33) sind die Wirkungsvariablen

$$\begin{aligned} J_\varphi &= \frac{1}{2\pi} \oint p_\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi = \alpha_\varphi \\ J_\vartheta &= \frac{1}{2\pi} \oint p_\vartheta d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{\alpha_\vartheta^2 - \alpha_\varphi^2 / \sin^2 \vartheta} d\vartheta \\ J_r &= \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2m(E-V) - \alpha_\vartheta^2 / r^2} dr. \end{aligned} \quad (10.100)$$

Wir betrachten nur  $E < 0$  (gebundene Bahnen) für das Keplerpotential  $V(r) = -k/r$ . Die Integrale in (10.100) lassen sich mit funktionentheoretischen Methoden elegant berechnen.

Man erhält (siehe Anhang III)

$$J_{\vartheta} = \alpha_{\vartheta} - \alpha_{\varphi}$$

$$J_r = \frac{mk}{\sqrt{-2m E'}} - \alpha_{\vartheta} . \quad (10.101)$$

Daraus erhalten wir für die Energie als Funktion der Wirkungsvariablen:

$$E(J) = - \frac{mk^2}{2(J_r + J_{\vartheta} + J_{\varphi})^2} . \quad (10.102)$$

Für die Bestimmung der Winkelvariablen  $w_k$  müssen wir  $W$  durch  $(r, \vartheta, \varphi)$  und  $(J_r, J_{\vartheta}, J_{\varphi})$  ausdrücken. Aus (9.33), (10.100) und (10.101) erhalten wir sofort

$$S = S_r + S_{\vartheta} + S_{\varphi} ,$$

mit

$$S_{\varphi} = J_{\varphi} \varphi$$

$$S_{\vartheta} = \int \sqrt{(J_{\varphi} + J_{\vartheta})^2 - J_{\varphi}^2 / \sin^2 \vartheta} \, d\vartheta$$

$$S_r = \int \sqrt{2m [E(J_r, J_{\vartheta}, J_{\varphi}) + \frac{k}{r}] - \frac{(J_{\vartheta} + J_{\varphi})^2}{r^2}} \, dr . \quad (10.103)$$

Die Winkelvariablen bestimmen sich aus

$$w_{\varphi} = \frac{\partial S}{\partial J_{\varphi}} = \frac{\partial S_r}{\partial J_{\varphi}} + \frac{\partial S_{\vartheta}}{\partial J_{\varphi}} + \varphi$$

$$w_{\vartheta} = \frac{\partial S_r}{\partial J_{\vartheta}} + \frac{\partial S_{\vartheta}}{\partial J_{\vartheta}}$$

$$w_r = \frac{\partial S_r}{\partial J_r} . \quad (10.104)$$

Auf die anschauliche Bedeutung der Winkelvariablen kommen wir zurück. An dieser Stelle wollen wir die Ausdrücke (10.104)

nicht weiter auswerten.

Die neue Hamiltonfunktion (10.102) hängt nur von der Summe  $(J_r + J_\vartheta + J_\varphi)$  ab. Deshalb sind die Frequenzen  $\omega_k = \partial E / \partial J_k$  einander gleich,

$$\omega_k = \omega := \frac{mk^2}{(J_r + J_\vartheta + J_\varphi)^3} . \quad (10.105)$$

Die zugehörige Periode ist mit (10.102)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi k \sqrt{-\frac{m}{2E}} , \quad (10.106)$$

entsprechend dem 3. Keplerschen Gesetz (die grosse Halbachse  $a$  ist gleich  $-k/2E$ ) .

Die Gleichheit der Frequenzen rührt davon her, dass die Ellipsenbahnen geschlossen sind und also nur eine einzige Periode vorliegt. Man sagt, das System sei entartet. Der Entartungsgrad ist allgemein  $f$  minus die Zahl der unabhängigen Frequenzen. In unserem Beispiel ist der Entartungsgrad gleich 2.

## 10.7 Störungstheorie für entartete Systeme

Für entartete Systeme gibt es ein  $m \in \mathbb{Z}^f \setminus \{0\}$  mit  $(m, \omega) = 0$ , wie dies z.B. bei der Kepler-Bewegung der Fall ist. In dieser Situation empfiehlt es sich, durch eine geeignete lineare kanonische Transformation zu neuen Winkel- und Wirkungsvariablen  $(w', J')$  überzugehen, so dass  $\omega'_1, \dots, \omega'_m$  rational unabhängig sind und die übrigen Frequenzen verschwinden.



Dies lässt sich immer erreichen, wie wir als nächstes ausführen wollen.

Die Frequenzen  $\{ (m, \omega) \mid m \in \mathbb{Z}^f \}$  bilden einen Modul  $\mathcal{M}$  mit den ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  als Koeffizientenbereich. Im entarteten Fall sind die  $\omega_1, \dots, \omega_f$  linear abhängig. Es sei  $\omega'_1, \dots, \omega'_m$ ,  $m < f$ , eine Basis von  $\mathcal{M}$ . (Die  $\omega'_1, \dots, \omega'_m$  sind also rational unabhängig.) Dann gibt es eine Darstellung der  $\omega_k$  von der Form

$$\omega_k = \sum_{\alpha=1}^m a_{k\alpha} \omega'_\alpha, \quad a_{k\alpha} \in \mathbb{Z}.$$

Der Rang der  $f \times m$ -Matrix  $(a_{k\alpha})$  ist natürlich gleich  $m$ . Sie lässt sich deshalb zu einer ganzzahligen  $f \times f$ -Matrix  $A = (a_{k\ell})$  so erweitern, dass deren (ganzzahlige) Determinante nicht verschwindet. Damit ist  $\omega = A\omega'$ ,  $\omega' = (\omega'_1, \dots, \omega'_m, 0, \dots, 0)$ . Umgekehrt ist  $\omega' = A^{-1}\omega$  und deshalb muss auch  $A^{-1}$  aus lauter ganzzahligen Matrixelementen bestehen. Da  $\det A \det A^{-1} = 1$  und beide Faktoren ganzzahlig sind, so müssen sie gleich 1 sein. Also ist  $A$  eine ganzzahlige unimodulare Matrix ( $\det A = 1$ ).

Es gibt also eine ganzzahlige unimodulare Matrix  $A$  derart, dass  $A\omega = (\omega'_1, \dots, \omega'_m, 0, \dots, 0)$ , wobei die  $\omega'_1, \dots, \omega'_m$  rational unabhängig sind. Damit sind auch die Matrizen  $A^{-1}$  und  $A^{-1T}$  ganzzahlig und unimodular.

Nun ist die Transformation

$$\omega' = A\omega, \quad J' = (A^T)^{-1} J \quad (10.107)$$

kanonisch, da  $\sum J_k d\omega_k = \sum J'_k d\omega'_k$ . Weil die  $\omega$  und  $\omega'$  sich durch ganzzahlige Transformationen auseinander

berechnen lassen, sind die  $(w', J')$  zu den  $(w, J)$  gleichberechtigte Winkel- und Wirkungsvariable.

Nach dieser kanonischen Transformation eines  $(f-m)$ -fach entarteten Systems lassen wir die Striche wieder weg. Die Verallgemeinerung der störungstheoretischen Näherung (10.30) auf den entarteten Fall wird nun darin bestehen, dass  $H_1$  nur über den Torus  $T^m$  zu den ersten  $m$  Winkelvariablen gemittelt wird. Nach dem Satz von Weyl (p. 153) ist dieses Mittel  $\langle H_1 \rangle$  auch gleich dem zeitlichen Mittel über die ungestörte Bewegung. Im allgemeinen ist  $\langle H_1 \rangle$  dann noch eine Funktion von  $(J_1, \dots, J_f, w_{m+1}, \dots, w_f)$ .

Die säkularen Störungsgleichungen zerfallen damit in zwei Teile:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \dot{w}_k = w_k(J) + \frac{\partial \langle H_1 \rangle}{\partial J_k}, \quad \dot{J}_k = 0 \quad \text{für } k=1, \dots, m, \quad (10.108) \\ \text{(ii)} \quad \dot{w}_k = \frac{\partial \langle H_1 \rangle}{\partial J_k}, \quad \dot{J}_k = - \frac{\partial \langle H_1 \rangle}{\partial w_k} \quad \text{für } k = m+1, \dots, f. \end{array} \right\} (10.109)$$

Aus (10.108) folgt, dass die  $J_1, \dots, J_m$  konstant sind. Berücksichtigt man dies in (10.109), so wird dies ein reduziertes Hamiltonsches System in  $f-m$  Variablen ( $f-m =$  Entartungsgrad). Nach dem dieses gelöst ist, ist die rechte Seite von (10.108) bekannt, so dass man durch eine einfache Zeitintegration auch die  $w_1, \dots, w_m$  findet.

### Beispiel: Störungen des Keplerproblems

Zunächst üben wir auf die in § 10.6 eingeführten Winkel- und Wirkungsvariable eine kanonische Transformation der Form

(10.107) aus. Es sei

$$\begin{aligned} J_1 &= J_\varphi = \alpha_\varphi \\ J_2 &= J_\vartheta + J_\varphi = \alpha_\vartheta \\ J_3 &= J_r + J_\vartheta + J_\varphi . \end{aligned} \tag{10.110}$$

Diese Transformation ist, wie man leicht sieht, unimodular. Die Hamiltonfunktion hängt jetzt nur noch von  $J_3$  ab. Nach (10.102) ist

$$E(J) = - \frac{mk^2}{2J_3^2} . \tag{10.111}$$

Die Wirkungsvariablen, welche zu den neuen  $J_k$  gehören, bezeichnen wir mit  $w_1, w_2, w_3$ . Natürlich ist jetzt  $w_1 = w_2 = 0$  und  $w_3$  ist die mittlere Umlauffrequenz in (10.106).

Die kanonischen Koordinaten  $(w_1, w_2, w_3, J_1, J_2, J_3)$  sind die sog. Delaunayschen Bahnelemente. Für ihre anschauliche Interpretation erinnern wir an die Gl. (2.49) und (2.50) der Keplerbewegung:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \frac{\mathbf{p}}{1 + \varepsilon \cos \varphi} , & p &= \frac{L^2}{mk} = a(1 - \varepsilon^2) , \\ \varepsilon^2 &= 1 + \frac{2EL^2}{mk^2} . \end{aligned} \tag{10.112}$$

Nun ist  $\underline{L}^2 = \underline{x}^2 p^2 - (\underline{x} \cdot \underline{p})^2 = r^2(p^2 - p_r^2)$ , d.h.

$$p^2 = p_r^2 + \frac{L^2}{r^2} .$$

Andererseits gilt (siehe (9.28))

$$p^2 = p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left( p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} \right)$$

und damit

$$L^2 = p_\vartheta^2 + p_\varphi^2 / \sin^2 \vartheta . \tag{10.113}$$

Nach (9.32) ist deshalb  $L^2 = \alpha_{\varphi}^2$  und folglich nach (10.110)

$$J_2 = L. \quad (10.114)$$

Damit erhalten wir aus (10.112) mit (10.111)

$$\begin{aligned} p &= \frac{J_2^2}{mk}, & \varepsilon^2 &= 1 - \frac{J_2^2}{J_3^2} \\ a &= \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{J_3^2}{mk}, & b &= a \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{J_2 J_3}{mk}. \end{aligned} \quad (10.115)$$

Da ferner  $L_z = p_{\varphi} = \alpha_{\varphi} = J_1$  ist, erhalten wir für den Inklinationswinkel  $i = \angle$  (z-Achse,  $\underline{L}$  : Normale zur Bahnebene)

$$\cos i = \frac{L_z}{L} = \frac{J_1}{J_2}. \quad (10.116)$$

Etwas weniger direkt ist die Interpretation von  $w_1$  und  $w_2$ . Ihre Bedeutung ist die folgende (siehe Fig. 10.9):

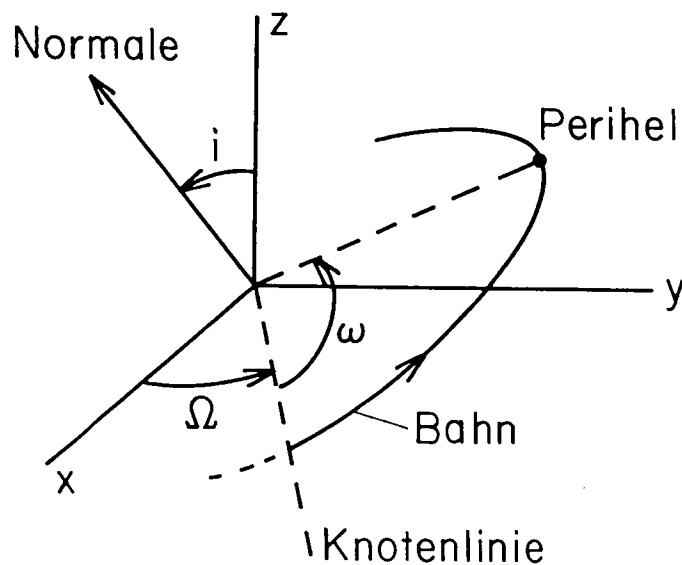


Fig. 10.9

$w_1$  : Winkel zwischen der x-Achse und der Knotenlinie  
(Schnittgerade der Bahnebene mit der xy-Ebene des  
Inertialsystems);

$\omega_2$  : Winkelabstand des Perihels von der Knotenlinie.

Mit den Bezeichnung in Fig. 10.9 ist also

$$\omega_1 = \Omega, \quad \omega_2 = \omega. \quad (10.117)$$

Für einen Beweis verweise ich auf [10], Abschnitt 10.7.

Die Winkelvariable  $\omega_3$  bezeichnet man auch als die mittlere Anomalie. Sie bedeutet den Winkelabstand eines gedachten Punktes vom Perihel, der gleichförmig umläuft und jedesmal gleichzeitig mit dem Planeten das Perihel passiert.

Nun werde das Keplerproblem leicht gestört,

$$H = H_0 + H_1, \quad H_0 = - \frac{mk^2}{2 J_3^2}. \quad (10.118)$$

Als Beispiel betrachten wir hier ein störendes Potential  $\delta V(r)$ . Zunächst wählen wir

$$H_1 = \delta V = \beta/r^2. \quad (10.119)$$

Für die Gl. (10.109) benötigen wir den zeitlichen Mittelwert

$$\begin{aligned} \langle \delta V \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \delta V dt = \beta \frac{\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2 \dot{\varphi}} d\varphi}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{\dot{\varphi}} d\varphi} = \beta \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi}{\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi} \\ &= \beta \frac{1}{ab}. \end{aligned}$$

Nach (10.115) ist deshalb

$$\langle \delta V \rangle = \frac{\beta m^2 k^2}{J_2 J_3^3}. \quad (10.120)$$

Daraus folgt zunächst, dass alle  $J_k$  konstant bleiben.

Für die Frequenz der Perihelbewegung ergibt sich mit (10.117)

$$\dot{\omega}_2 = \frac{\partial \langle \delta V \rangle}{\partial J_2} = - \beta \frac{m^2 k^2}{J_2^2 J_3^3}.$$

Die Umlauffrequenz der ungestörten Bahn ist andererseits

$$\omega = \frac{\partial H_0}{\partial J_3} = m \frac{k^2}{J_3^3} \quad (T = \frac{2\pi}{\omega}) .$$

Damit ist die Periheldrehung pro Umlauf

$$\delta = \dot{\omega}_2 T = - \frac{2\pi \beta m}{J_2^2} = - 2\pi \frac{\beta m}{L^2} . \quad (10.121)$$

Als Übungsaufgabe zeige man analog, dass für  $\delta V = \gamma / r^3$  gilt

$$\delta = - \gamma \frac{6\pi m^2 k}{L^4} . \quad (10.122)$$

Diese Ergebnisse haben wir in den Übungen auch auf andere Weise erhalten.



## Kapitel 11. Der starre Körper

---

In diesem Kapitel studieren wir die Kinematik und die Dynamik des starren Körpers. Besondere Aufmerksamkeit werden wir dem kräftefreien und dem schweren symmetrischen Kreisel mit Fixpunkt widmen. Beide Systeme sind integrabel im Sinne von §10.1. Besonderer Wert wird auf eine gruppentheoretische Analyse des Kreiselproblems gelegt werden (§11.5). Letztere lässt sich völlig parallel in die Quantenmechanik übertragen. Wir beschliessen das Kapitel mit der Konstruktion von Wirkungs- und Winkelvariablen für den schweren symmetrischen Kreisel mit Fixpunkt.

### 11.1 Kinematik des starren Körpers

Wir leiten die Kinematik und die Dynamik eines starren Körpers aus dem N-Teilchenmodell in §1.3 mit äusseren Kräften  $\underline{F}_i^{ex}$  und inneren Zentralkräften  $\underline{F}_{ij}$  durch einen Grenzübergang ab.

Das N-Teilchensystem ist starr, wenn nach Einführung der Schwerpunkts- und Relativkoordinaten,

$$\underline{q}_i = \underline{Q} + \underline{x}_i, \quad \underline{Q} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \underline{q}_i \quad (\sum m_i \underline{x}_i = 0), \quad (11.1)$$

der allgemeine Bewegungszustand eingeschränkt ist auf eine Schwerpunktsbewegung  $\underline{Q}(t)$  und eine Rotation:



$$\underline{x}_i(t) = R(t) \underline{x}'_i, \quad R(t) \in SO(3), \quad \underline{x}'_i = \text{const.} \quad (11.2)$$

Die Zwangskräfte, welche die Relativkoordinaten bis auf eine gemeinsame Rotation festhalten, denken wir uns durch Zentralkräfte realisiert, die um eine Gleichgewichtslage stark rücktreibend wirken. Dies ist ein grobes Modell für einen Festkörper.

Die Konfiguration  $\{ \underline{x}'_i, i = 1, \dots, N \}$  der Massen  $m_i$  bestimmt für  $N \geq 3$  ein körperfestes Koordinatensystem  $K'$ . Die kinematischen Freiheitsgrade sind  $(R(t), \underline{Q}(t))$ , d.h. Elemente der Euklidischen Bewegungsgruppe (vgl. § 1.1). Aus (11.1) und (11.2) folgt

$$\underline{q}_i = \underline{Q}(t) + R(t) \underline{x}'_i. \quad (11.3)$$

Also gilt nach (2.81) (mit  $\dot{\underline{x}}' = 0$ )

$$\dot{\underline{q}}_i = \dot{\underline{Q}} + R (\underline{\omega}' \wedge \underline{x}'_i) = \dot{\underline{Q}} + \underline{\omega} \wedge \underline{x}_i. \quad (11.4)$$

Falls  $K'$  um  $\underline{a}$  translatiert wird,  $\underline{x}'_i = \underline{x}''_i + \underline{a}$ , so gilt

$$\dot{\underline{q}}_i = (\dot{\underline{Q}} + \underline{\omega} \wedge R \underline{a}) + \underline{\omega} \wedge R \underline{x}''_i. \quad (11.5)$$

Zu jeder Zeit kann aber  $\underline{a}$  so gewählt werden, dass  $\dot{\underline{Q}} + \underline{\omega} \wedge R \underline{a}$  proportional zu  $\underline{\omega}$  ist. Dies zeigt (Euler):

Ein starrer Körper führt immer eine Schraubenbewegung aus, d.h., zu jeder Zeit ist der allgemeinste Bewegungszustand eines starren Körpers eine Rotation um eine Achse und eine Translation parallel zu dieser Achse.

Die kinetische Energie  $T$  ist mit (11.1) und (11.4)

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\underline{q}}_i^2 = \frac{1}{2} M \dot{\underline{Q}}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i (\underline{\omega} \wedge \underline{x}_i)^2 ,$$

d.h.

$$T = T_t + T_r \quad (11.6)$$

mit

$$T_t = \frac{M}{2} \dot{\underline{Q}}^2 \quad (11.7)$$

und

$$T_r = \frac{1}{2} \sum m_i (\underline{\omega} \wedge \underline{x}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (\underline{\omega}' \wedge \underline{x}'_i)^2 . \quad (11.8)$$

Da  $(\underline{a} \wedge \underline{b})^2 = |\underline{a}|^2 |\underline{b}|^2 - (\underline{a} \cdot \underline{b})^2$  ergibt sich

$$\boxed{T_r = \frac{1}{2} \sum \theta_{ik} \omega_i \omega_k = \frac{1}{2} \sum \theta'_{ik} \omega'_i \omega'_k} , \quad (11.9)$$

wobei

$$\theta_{ik} = \sum_{n=1}^N m_n \{ |\underline{x}_n|^2 \delta_{ik} - (\underline{x}_n)_i (\underline{x}_n)_k \} \quad (11.10)$$

und

$$\theta'_{ik} = \sum_{n=1}^N m_n \{ |\underline{x}'_n|^2 \delta_{ik} - (\underline{x}'_n)_i (\underline{x}'_n)_k \} \quad (11.11)$$

der Trägheitstensor im Inertialsystem  $K$ , bzw. im körperfesten System  $K'$  ist. In Matrixschreibweise gilt die Beziehung

$$\theta(t) = R(t) \theta' R^{-1}(t) . \quad (11.12)$$

Für  $\theta'$  gilt der

Satz 11.1 (Steiner): Bezüglich einer Euklidischen Bewegung

$(\underline{a}, R)$  transformiert sich  $\theta'_{ke}$  gemäss

$$\begin{aligned} \theta'_{ke} (R\underline{x}'_k + \underline{a}, \dots, R\underline{x}'_N + \underline{a}) &= M \{ |\underline{a}|^2 \delta_{ke} - a_k \cdot a_e \} \\ &+ \sum_{k', e'} R_{kk'} R_{ee'} \theta'_{k'e'} (\underline{x}'_1, \dots, \underline{x}'_N) . \end{aligned} \quad (11.13)$$

Beweis: Da  $\sum_{n=1}^N m_n \underline{x}'_n = 0$  liefert die Ausmultiplikation der linken Seite von (11.13)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N m_n \left\{ |R\underline{x}'_n + \underline{a}|^2 \delta_{kl} - (R\underline{x}'_n + \underline{a})_k (R\underline{x}'_n + \underline{a})_l \right\} \\ &= \sum_n m_n \left\{ (|\underline{x}'_n|^2 + |\underline{a}|^2) \delta_{kl} - (R\underline{x}'_n)_k (R\underline{x}'_n)_l - a_k a_l \right\} \end{aligned}$$

und dies ist wegen

$$(R\underline{x}'_n)_k = \sum_{k'} R_{kk'} (\underline{x}'_n)_{k'}, \quad \sum_{k'} R_{kk'} R_{\ell\ell'} \delta_{k'\ell'} = \delta_{k\ell}, \quad (RR^T = 1)$$

gleich der rechten Seite von (11.13).  $\square$

Speziell für  $R = 1$  erhalten wir aus (11.13)

$$\Theta'_{kl}(\underline{x}'_1 + \underline{a}, \dots, \underline{x}'_N + \underline{a}) = M \left\{ |\underline{a}|^2 \delta_{kl} - a_k a_l \right\} + \Theta'_{kl}(\underline{x}'_1, \dots, \underline{x}'_N). \quad (11.14)$$

Für  $\underline{a} = 0$  transformiert sich  $\Theta'_{kl}$  wie ein Tensor 2. Stufe:

$$\Theta'_{kl}(R\underline{x}'_1, \dots, R\underline{x}'_N) = \sum_{k'\ell'} R_{kk'} R_{\ell\ell'} \Theta'_{k'\ell'}(\underline{x}'_1, \dots, \underline{x}'_N). \quad (11.15)$$

Nun betrachten wir den Drehimpuls des N-Teilchensystems.

Mit (11.1) und (11.4) erhalten wir

$$\underline{L} = \sum m_n \underline{q}_n \wedge \dot{\underline{q}}_n = \underline{L}_t + \underline{L}_r, \quad (11.16)$$

mit

$$\underline{L}_t = M \underline{Q} \wedge \dot{\underline{Q}} \quad (11.17)$$

und

$$\underline{L}_r = \sum_{n=1}^N m_n \underline{x}_n \wedge (\underline{\omega} \wedge \underline{x}_n) = \sum_{n=1}^N m_n [|\underline{x}_n|^2 \underline{\omega} - \underline{x}_n (\underline{x}_n \cdot \underline{\omega})], \quad (11.18)$$

d.h.

$$\boxed{\underline{L}_r = \Theta \underline{\omega} = \frac{\partial T_r}{\partial \underline{\omega}}}. \quad (11.19)$$

Nach (11.9) gilt damit auch

$$\boxed{T_r = \frac{1}{2} \underline{L}_r \cdot \underline{\omega}} \quad (11.20)$$

Wir definieren den körperfesten (relativen) Drehimpuls  $\underline{L}'_r$  durch

$$\underline{L}_r =: R \underline{L}'_r \quad (11.21)$$

Für diesen gilt analog

$$\underline{L}'_r = R^{-1} \underline{L}_r = R^{-1} \theta \underline{\omega} = (R^{-1} \theta R) (R^{-1} \underline{\omega}) = \theta' \underline{\omega}' ,$$

d.h.

$$\boxed{\underline{L}'_r = \theta' \underline{\omega}' = \frac{\partial T_r}{\partial \underline{\omega}'}} \quad (11.22)$$

Im Grenzfall einer kontinuierlichen Massenverteilung mit Massendichte  $\rho'(\underline{x}')$  im körperfesten System wird

$$\theta'_{kl} = \int \rho'(\underline{x}') \{ |\underline{x}'|^2 \delta_{kl} - x'_k x'_l \} d^3 x' \quad (11.23)$$

Da  $\theta'$  eine symmetrische Matrix ist, die sich unter Drehungen gemäss (11.15) transformiert ( $\theta' \rightarrow R \theta' R^{-1}$ ), lässt sie sich stets durch eine Rotation  $R' \in SO(3)$  auf Diagonalf orm bringen (Hauptachsen-Transf.):

$$\theta' = R' \begin{pmatrix} \theta'_1 & & 0 \\ & \theta'_2 & \\ 0 & & \theta'_3 \end{pmatrix} R'^T \quad (11.24)$$

( $R'$  ist natürlich zeitunabhängig.) Die  $\theta'_i$  sind die Hauptträgheitsmomente. Im allgemeinen sind alle  $\theta'_i$  voneinander verschieden. Dann ist der Körper unsymmetrisch und sonst symmetrisch. Für eine Kugel und einen Würfel ist  $\theta'_1 = \theta'_2 = \theta'_3$ .

## 11.2 Die Eulerschen Gleichungen für den starren Körper

Als Ausgangspunkt für die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers benutzen wir den Impulssatz (1.38),

$$\boxed{M \ddot{\underline{Q}} = \underline{F}^{ex}} \quad : \quad \text{gesamte äussere Kraft ,} \quad (11.25)$$

sowie den Drehimpulssatz (1.56),

$$\dot{\underline{L}} = \underline{D} \quad , \quad (11.26)$$

wobei  $\underline{D} = \sum \underline{q}_n \wedge \underline{F}_n^{ex}$  das Drehmoment der äusseren Kräfte ist. Aus (11.17) und (11.25) folgt

$$\dot{\underline{L}}_t = M \underline{Q} \wedge \dot{\underline{Q}} = \underline{Q} \wedge \underline{F}^{ex} =: \underline{D}_t \quad (11.27)$$

und daher aus (11.26) und (11.16)

$$\boxed{\dot{\underline{L}}_r = \underline{D}_r} \quad , \quad \underline{D}_r = \sum_{n=1}^N \underline{x}_n \wedge \underline{F}_n^{ex} \quad . \quad (11.28)$$

Die Gleichungen (11.25) und (11.28) stellen ein System von sechs Differentialgleichungen für die kinematischen Variablen  $(\underline{Q}(t), R(t))$  dar. Da  $\underline{L}_r = \underline{\Theta}(t) \underline{\omega}(t)$  und  $\underline{\Omega}(t) = \dot{R}(t) R^{-1}(t)$ , sind diese von 2. Ordnung.

Bemerkung: Damit der Drehimpulssatz in der Form (11.28) gilt, braucht man an die Schwerpunktsbewegung keinerlei Bedingungen zu stellen. Beim schweren Kreisel mit Fixpunkt ist es aber beispielsweise nützlich, den Bezugspunkt des körperfesten Systems zu verschieben. Dies ändert an (11.28) nichts, wenn in  $\underline{q}_n = \underline{a} + \underline{x}_n$  (anstelle von (11.1))  $\ddot{\underline{a}} = 0$  ist. Dann folgt nämlich aus

$$\underline{L} = \sum_n m_n \underline{q}_n \wedge \dot{\underline{q}}_n \quad , \quad \underline{L}_r := \sum m_n \underline{x}_n \wedge \dot{\underline{x}}_n$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} \dot{\underline{L}} &= \sum m_n \underline{a}_n \wedge \ddot{\underline{q}}_n = \underline{a} \wedge \sum m_n \ddot{\underline{q}}_n + \sum_i m_n \underline{x}_n \wedge \ddot{\underline{x}}_n \\ &= \dot{\underline{L}}_r + \underline{a} \wedge \sum m_n \ddot{\underline{q}}_n . \end{aligned}$$

Da ferner

$$\underline{D} = \sum \underline{x}_n \wedge \underline{F}_n^{\text{ex}} + \underline{a} \wedge \sum \underline{F}_n^{\text{ex}} = \underline{D}_r + \underline{a} \wedge \sum \underline{F}_n^{\text{ex}}$$

folgt mit (11.25) wieder die Gl. (11.28).

Nun schreiben wir (11.28) in das körperfeste System um.

Es sei  $\underline{D}_r =: R \underline{D}'_r$ , dann folgt aus (2.80)

$$\dot{\underline{L}}_r = R(\dot{\underline{L}}'_r + \underline{\omega}' \wedge \underline{L}'_r) = R \underline{D}'_r ,$$

d.h.

$$\dot{\underline{L}}'_r + \underline{\omega}' \wedge \underline{L}'_r = \underline{D}'_r , \quad (11.29)$$

oder mit (11.22)

$$\theta'_1 \dot{\underline{\omega}}'_1 + \underline{\omega}'_2 \wedge \theta'_3 \underline{\omega}'_1 = \underline{D}'_r . \quad (11.30)$$

Dies sind die Eulerschen Gleichungen. In Komponenten lauten sie

$$\begin{aligned} \theta'_1 \dot{\omega}'_1 + \omega'_2 \omega'_3 (\theta'_3 - \theta'_2) &= D'_{r1} , \\ &\text{und zyklisch.} \end{aligned} \quad (11.31)$$

Selbst für  $\underline{D}_r = 0$  (kräftefreier Kreisel) stellt (11.31) ein nichtlineares (!) Differentialgleichungssystem dar. Die Körpereigenschaften gehen über die Hauptträgheitsmomente ein.

### 11.3 Der kräftefreie Kreisel

Für diesen ist die Schwerpunktsbewegung trivial:  $\ddot{\underline{Q}} = 0$ .

Um die Rotation um den Schwerpunkt zu bestimmen, müssen wir die kräftefreien Eulerschen Gleichungen

$$\theta'_1 \dot{\omega}'_1 = \omega'_2 \omega'_3 (\theta'_2 - \theta'_3) \quad \text{und zyklisch} \quad (11.32)$$

lösen. Die Bewegung ergibt sich sodann aus der Lösung von

$$\underline{\Omega}'(t) = R(t)^{-1} \dot{R}(t). \quad (11.33)$$

Dieses Problem ist integrabel im Sinne von § 10.1. Wir werden nämlich auf gruppentheoretischem Wege in § 11.5 sehen, dass in der kanonischen Formulierung  $H = T$ ,  $L_1$  und  $L_3$  drei unabhängige Integrale in Involution sind.

Zunächst betrachten wir den einfachen Fall des kräftefreien symmetrischen Kreisels mit  $\theta'_1 = \theta'_2 \neq \theta'_3 \neq 0$ . Dann werden die Eulerschen Gleichungen trivial: Zunächst ist

$$\theta'_3 \dot{\omega}'_3 = 0 \quad \implies \quad \omega'_3 = \text{const.} \quad (11.34)$$

Mit  $\omega'_0 := \omega'_3(\theta'_3 - \theta'_1)/\theta'_1 = \text{const}$ , lauten die verbleibenden Gleichungen

$$\dot{\omega}'_1 = -\omega'_0 \omega'_2, \quad \dot{\omega}'_2 = \omega'_0 \omega'_1 \quad (11.35)$$

mit der Lösung

$$\omega'_1 = \omega'_\perp \cos(\omega'_0 t + \tau), \quad \omega'_2 = \omega'_\perp \sin(\omega'_0 t + \tau), \quad (11.36)$$

wobei  $\omega'_\perp$  und  $\tau$  weitere Integrationskonstanten sind. Deshalb gilt

$$|\underline{\omega}'|^2 = (\omega'_\perp)^2 + (\omega'_3)^2 = \text{const}, \quad (11.37)$$

und  $\underline{\omega}'$  führt um die Figurenachse (d.h. in  $\underline{e}'_3$ -Richtung)

eine "reguläre Präzession" mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega'_0$  aus.

Wir schliessen weiter

$$L'_3 = \theta'_3 \omega'_3 = \text{const}$$

$$L'_1(t) = \theta'_1 \omega'_\perp \cos(\omega'_0 t + \tau) , \quad L'_2(t) = \theta'_1 \omega'_\perp \sin(\omega'_0 t + \tau) .$$

Man sieht daraus, dass  $\underline{f}' := \underline{e}'_3$  ,  $\underline{\omega}'(t)$  und  $\underline{L}'(t)$  stets in einer Ebene liegen. Dasselbe gilt natürlich auch für die entsprechenden Grössen  $\underline{f}$  ,  $\underline{\omega}$  ,  $\underline{L}$  im raumfesten System.

Die reguläre Präzession sieht deshalb sehr einfach aus:

Im körperfesten System rotieren  $\underline{L}'$  und  $\underline{\omega}'$  um die feste Figurenachse  $\underline{f}'$  und im raumfesten System rotieren  $\underline{f}$  und  $\underline{\omega}$  um die feste  $\underline{L}$  - Achse. Alle Vektoren bewegen sich auf Kreisen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Die Winkel zwischen  $\underline{L}$  ,  $\underline{\omega}$  und  $\underline{f}$  sind zeitlich konstant, denn für die Zwischenwinkel gilt

$$\cos \vartheta_1 := \frac{\underline{L} \cdot \underline{\omega}}{|\underline{L}| |\underline{\omega}|} = \frac{2T}{|\underline{L}| |\underline{\omega}|} > 0$$

$$\underline{\omega} \cdot \underline{f} = \underline{\omega}' \cdot \underline{f}' =: |\underline{\omega}| \cos \vartheta_2 = \omega'_3 \implies \cos \vartheta_2 = \frac{\omega'_3}{|\underline{\omega}|}$$

$$\underline{L} \cdot \underline{f} = \underline{L}' \cdot \underline{f}' = L'_3 = \theta'_3 \omega'_3 \implies \cos \vartheta := \frac{\underline{L} \cdot \underline{f}}{|\underline{L}|} = \frac{\theta'_3 \omega'_3}{|\underline{L}|} \quad (11.38)$$

Daraus sieht man auch, dass  $\cos \vartheta_2$  und  $\cos \vartheta$  das gleiche Vorzeichen haben. Die möglichen Konfigurationen sind in den Fig. 11.1 und 11.2 skizziert. Die Bedeutung der verschiedenen Kegel wird aus der Poinsot-Konstruktion weiter unten klar werden.

Wir drücken noch die Integrationskonstanten  $\omega'_3$  und  $\omega'_\perp$  durch die Integrale  $T$  und  $|\underline{L}|^2$  aus. Es ist



$$2 T = \theta'_1 (\omega'_\perp)^2 + \theta'_3 (\omega'_3)^2$$

und

$$|\underline{L}|^2 = (\theta'_1)^2 (\omega'_\perp)^2 + (\theta'_3)^2 (\omega'_3)^2 . \quad (11.39)$$

Daraus folgt

$$(\omega'_\perp)^2 = \frac{|\underline{L}|^2 - 2T \theta'_3}{\theta'_1 (\theta'_1 - \theta'_3)} , \quad (\omega'_3)^2 = \frac{2T \theta'_1 - |\underline{L}|^2}{\theta'_3 (\theta'_1 - \theta'_3)} . \quad (11.40)$$

Die Integration von (11.33) für die Lösung (11.34) und (11.36) werden wir am Schluss von § 11.4 besprechen

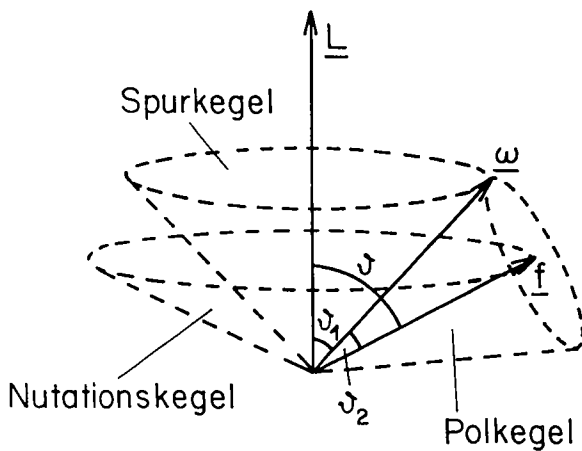


Fig. 11.1

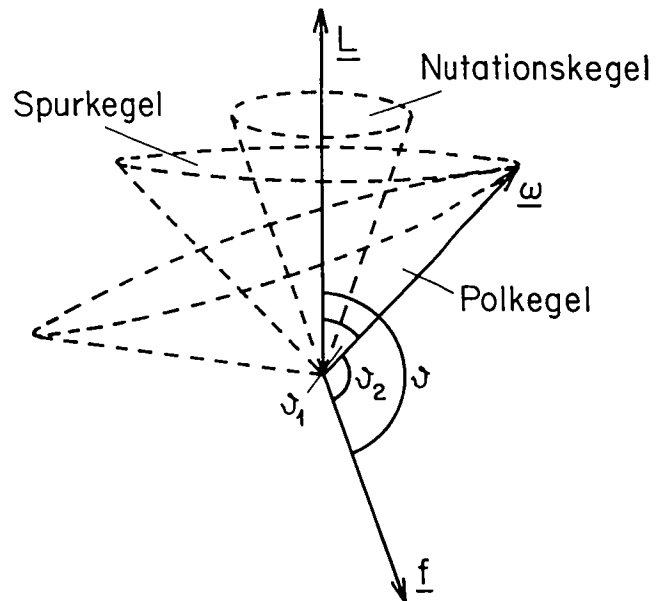


Fig. 11.2

Anwendung (Euler): In der Näherung, dass die Erde als kräftefreier symmetrischer Kreisel angesehen werden kann, rotiert der kinematische Nordpol (in Richtung  $\underline{\omega}'$ ) um die Figuren-achse (geometrischer Nordpol) mit der Periode

$$T = \frac{2\pi}{\omega'_0} = \frac{2\pi \theta'_1}{(\theta'_3 - \theta'_1) \omega'_3} \approx 300 \text{ Tage} , \quad (11.41)$$

da  $(\theta'_3 - \theta'_1) / \theta'_1 \approx 1/300$ .

Etwas Aehnliches wird auch beobachtet. Die Amplitude der Präzession ist sehr klein; die Drehachse wandert niemals mehr als etwa 4.5 m vom Nordpol weg. Die Bahn ist aber sehr unregelmässig, und die Grundperiode ist  $\simeq$  430 Tage. Diese Abweichungen werden verschiedenen Störungen zugeschrieben (atmosphärische Bewegungen, Erde nicht starr).

### Geometrische Diskussion nach Poincot

Die beiden Erhaltungssätze

$$\begin{aligned}\underline{L} &= \frac{\partial T}{\partial \underline{\omega}} = \text{const} \\ \underline{\omega} \cdot \underline{L} &= 2 T = \text{const}\end{aligned}\tag{11.42}$$

lassen sich in folgender Weise deuten. Die Kurve  $t \mapsto \underline{\omega}(t)$ , welche wir uns vom ruhenden Schwerpunkt aus gezeichnet denken, liegt in der raumfesten Ebene, definiert durch die 2. Gleichung von (11.42) (invariable Ebene) und gleichzeitig auf dem Energieellipsoid:

$$\sum \theta_{ik}(t) \omega_i(t) \omega_k(t) = 2 T .\tag{11.43}$$

Die invariable Ebene ist raumfest, da  $T$  und  $\underline{L}$  konstant sind und steht senkrecht auf  $\underline{L}$ . Das Energieellipsoid verändert zeitlich seine Lage ( $\theta$  ist zeitabhängig), aber die Hauptachsen sind zeitlich konstant gleich  $(2T/\theta'_i)^{\frac{1}{2}}$ , denn  $\sum \theta'_i (\omega'_i)^2 / 2T = 1$ . Wegen der 1. Gleichung in (11.42) steht  $\underline{L}$  senkrecht auf der Tangentialebene im Punkte  $\underline{\omega}$  des Energieellipsoides. Also ist die invariable Ebene in  $\underline{\omega}$  Tangentialebene des Energieellipsoides (vgl. Fig. 11.3). Da die momentane

Drehachse von  $R(t)$  durch  $\underline{\omega}(t)$  geht, ist  $\underline{\omega}(t)$  momentan in Ruhe. Daher rollt das (körperfeste) Energieellipsoid ab, ohne zu gleiten. Ausserdem ist der Abstand des Mittelpunktes des Energieellipsoids von der invariablen Ebene konstant, denn  $\underline{\omega} \cdot \underline{L} / |\underline{L}| = 2 T / |\underline{L}| = \text{const.}$

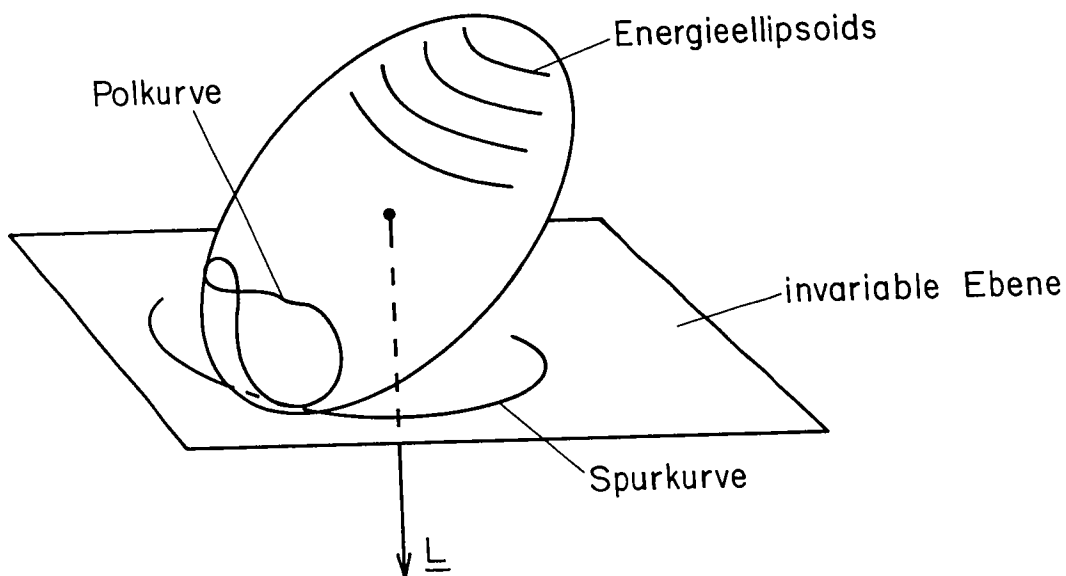


Fig. 11.3

Die Kurve, die durch den Berührungspunkt auf dem Energieellipsoid beschrieben wird, heisst Polkurve oder Polhodie. Die entsprechende Kurve auf der invariablen Ebene nennt man Spurkurve oder Herpolhodie.

Bei gegebenen Anfangsbedingungen ist es ein rein geometrisches Problem, die Spurkurve und die Polkurve zu bestimmen. Damit kennt man die Bahn  $t \mapsto \underline{\omega}(t)$  ohne zeitlichen Verlauf. Ausserdem gibt die Orientierung des Energie-

ellipsoides auch die Orientierung des Körpers, da die Hauptträgheitsrichtungen übereinstimmen.

Für einen symmetrischen Körper ist das Energieellipsoid ein Rotationsellipsoid. Deshalb ist die Polkurve offensichtlich ein Kreis um die Symmetrieachse. Entsprechend bewegt sich  $\underline{\omega}$  auf der Fläche eines Kegels, d.h.  $\underline{\omega}$  präzessiert im Laufe der Zeit sowohl um die Symmetrieachse als auch um  $\underline{L}$ . Ebenso präzessiert die Symmetrieachse um  $\underline{L}$ . Beim gestreckten symmetrischen Kreisel ( $\theta'_1 = \theta'_2 > \theta'_3$ ) rollt der Polkegel aussen auf dem Spurkegel ab (vgl. Fig. 11.1). Beim abgeplatteten Kreisel erhält man die Situation in Fig. 11.2 mit einem inneren Abrollen. Man spricht von epizykloidischer, bzw. perizykloidischer Bewegung.

#### Zur analytischen Lösung

Im unsymmetrischen Fall ( $\theta'_1 > \theta'_2 > \theta'_3$ ) führt die analytische Lösung auf elliptische Funktionen. Wir begnügen uns hier mit einigen Andeutungen.

Aus den Integralen

$$\sum \theta'_k (\omega'_k)^2 = 2 T$$

$$\sum (\theta'_k \omega'_k)^2 = |\underline{L}|^2 \quad (11.44)$$

können wir  $(\omega'_2)^2$  und  $(\omega'_3)^2$  als Funktionen von  $x := \omega'_1$  darstellen:

$$(\omega'_2)^2 = \beta_1 - \beta_2 x^2, \quad (\omega'_3)^2 = \beta_3 - \beta_4 x^2. \quad (11.45)$$

Aus der Eulerschen Gleichung für  $\dot{\omega}'_1$  erhalten wir dadurch eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung für  $x(t)$  :

$$\theta'_1 \dot{x} = (\theta'_2 - \theta'_3) \sqrt{(\beta_1 - \beta_2 x^2)(\beta_3 - \beta_4 x^2)} . \quad (11.46)$$

Dadurch ist die Integration auf eine Quadratur zurückgeführt, die wir aber nicht weiter diskutieren. (Für Einzelheiten siehe den Mechanik-Band von Landau u. Lifschitz.)

Geometrisches zu (11.44), Stabilität

Die beiden Gleichungen (11.44) kann man auch als Gleichungen für  $\underline{L}'(t)$  schreiben:

$$\sum_k \frac{1}{\theta'_k} (L'_k)^2 = 2 T \quad (11.47)$$

$$\sum_k (L'_k)^2 = |\underline{L}'|^2 . \quad (11.48)$$

Die Integrale  $T$  und  $|\underline{L}'|$  sind eingeschränkt gemäss

$$\theta'_1 2T \geq |\underline{L}'|^2 \geq \theta'_3 2T . \quad (11.49)$$

Die Gleichung (11.47) beschreibt die Oberfläche eines Ellipsoids mit den Halbachsen

$$\sqrt{2 T \theta'_1} \geq \sqrt{2 T \theta'_2} \geq \sqrt{2 T \theta'_3} \quad (11.50)$$

und (11.48) beschreibt die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius  $|\underline{L}'|$  , welcher nach (11.49) zwischen der grössten und der kleinsten Halbachse variiert. Bei Richtungsänderungen von  $\underline{L}'$  bezüglich der Trägheitsachsen des Kreisels bewegt

sich sein Ende entlang der Schnittlinie der erwähnten Flächen (vgl. Fig. 11.4, in welcher eine Reihe solcher Schnittlinien eines Ellipsoids mit Kugeln verschiedener Radien dargestellt sind). Aus den Einschränkungen (11.49) folgt, dass die Flächen (11.47) und (11.48) immer einen ein- oder nulldimensionalen Durchschnitt haben.

Wie ändert sich der Charakter der Bahnen, wenn  $|\underline{L}|$  variiert? Falls  $|\underline{L}|$  nur wenig grösser als die kleinste Halbachse ist, schneidet die Kugel das Ellipsoid in zwei geschlossene Kurven, welche die 3'-Achse in der Nähe der entsprechenden zwei Pole des Ellipsoids umlaufen. (Für  $|\underline{L}|^2 \rightarrow 2T \theta'_3$  schrumpfen diese Kurven auf die Pole zusammen.) Bei Vergrößerung von  $|\underline{L}|$  weiten sich die Kurven aus und gehen für  $|\underline{L}| = (2T \theta'_2)^{\frac{1}{2}}$  in zwei ebene Kurven (Ellipsen) über, die sich in den Polen des Ellipsoids auf der 2'-Achse schneiden. Bei weiterem Anwachsen von  $|\underline{L}|$  entstehen wieder zwei getrennte geschlossene Kurven, die nun aber die Pole der 1'-Achse umgeben; für  $|\underline{L}|^2 \rightarrow 2T \theta'_1$  schrumpfen sie auf diese Punkte zusammen.

Die Geschlossenheit der Kurven bedeutet eine Periodizität des Vektors  $\underline{L}'(t)$  bezüglich des Kreiselkörpers; während einer Periode beschreibt der Vektor eine Kegeloberfläche und kehrt in die Ausgangslage zurück.

Besonders erwähnenswert ist der qualitativ unterschiedliche Charakter der Bahnen in der Nähe der verschiedenen Pole des Ellipsoids. Bahnen in der Nähe der 1'- und der 3'-Achse verbleiben in der Nähe der Pole; dagegen entfernen

sich die Bahnen, die dicht an den Polen der 2'-Achse vorbeigehen in ihrem weiteren Verlauf weit von den Polen. Deshalb sind die Rotationen um die 1'- und die 3'-Achsen stabil, hingegen um die 2'-Achse (mit dem mittleren Trägheitsmoment) instabil. Im letzteren Fall genügt eine kleine Auslenkung, um eine Bewegung hervorzurufen, die den Kreisel weit von seinem ursprünglichen Zustand entfernt. (Bestätige dies durch ein Experiment.) Dieses Ergebnis erhält man auch durch eine lineare Stabilitätsanalyse (Uebung).

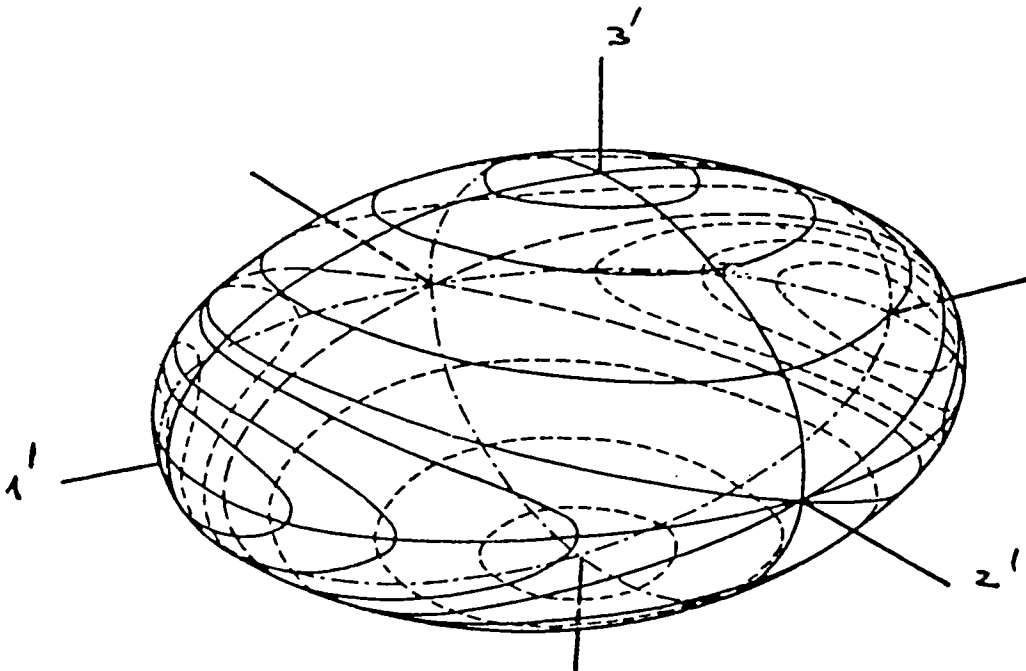


Fig. 11.4

11.4 Die Eulerschen Winkel

Das Ziel dieses Abschnittes ist die Verwandlung der Gleichung  $\dot{\Omega}' = R^{-1} \dot{R}$  in ein geeignetes Differentialgleichungssystem. Dazu führen wir nach Euler passende Koordinaten für die Gruppe  $SO(3, R)$  ein.

Das raumfeste Bezugssystem  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  lässt sich durch die drei folgenden sukzessiven Drehungen in das körperfeste Bezugssystem  $(\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3)$  überführen (vgl. Fig. 11.5):

1. Drehung im Gegenuhrzeigersinn um  $\underline{e}_3$  mit dem Winkel  $\varphi$ .  
Es entsteht das Bezugssystem  $(\underline{f}, \dots, \underline{e}_3)$ .
2. Drehung um  $\underline{f}$  (Knotenlinie) im Gegenuhrzeigersinn mit dem Winkel  $\vartheta$ . Es entsteht das Koordinatensystem  $(\underline{f}, \dots, \underline{e}'_3)$ .
3. Drehung im Gegenuhrzeigersinn um  $\underline{e}'_3$  mit dem Winkel  $\psi$ .  
Es entsteht das körperfeste Bezugssystem  $(\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3)$ .

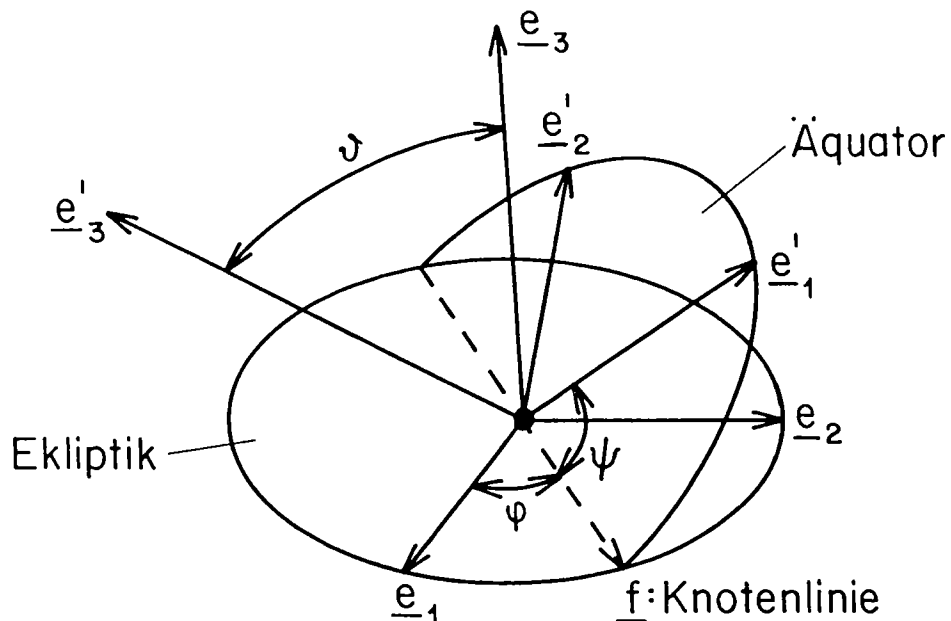


Fig. 11.5. Definition der Eulerschen Winkel  $(\varphi, \vartheta, \psi)$ .

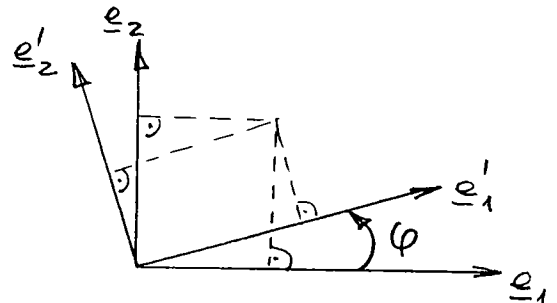


Zur Herleitung von expliziten Formeln für die gesamte Drehung als Funktion von  $\varphi, \vartheta, \psi$  (Eulersche Winkel) notieren wir zunächst folgendes (um Vorzeichenfehler zu vermeiden).

Betrachten wir eine Drehung des Koordinatensystems in der Ebene im Gegenuhrzeigersinn, welche die orthonormierte Basis  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$  in  $(\underline{e}'_1, \underline{e}'_2)$  überführt, so gilt für die Koordinaten  $(x_1, x_2), (x'_1, x'_2)$ , wenn  $\varphi$  der Drehwinkel ist,

$$x'_1 = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi$$

$$x'_2 = -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi .$$



Nun seien  $S_\varphi$  und  $\tilde{S}_\vartheta$  die folgenden 1-parametrischen Untergruppen von  $SO(3)$

$$S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}_\vartheta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (11.51)$$

Sind  $\underline{x}$  wie üblich die Koordinaten eines Punktes bezüglich des raumfesten Systems und  $\underline{x}'$  die Koordinaten bezüglich des körperfesten Systems, so gilt nach Definition der Eulerschen Winkel

$$\underline{x}' = S_\psi \tilde{S}_{-\vartheta} S_{-\varphi} \underline{x}, \quad (11.52)$$

oder

$$\underline{x} = R(\varphi, \vartheta, \psi) \underline{x}', \quad R(\varphi, \vartheta, \psi) = S_\varphi \tilde{S}_\vartheta S_\psi . \quad (11.53)$$

Nach (2.67) gilt

$$S_\varphi = e^{\varphi I_3}, \quad \tilde{S}_\vartheta = e^{\vartheta I_1}. \quad (11.54)$$

Wir hatten

$$\dot{\underline{x}} = \dot{R} \underline{x}' = \dot{R} R^{-1} \underline{x} = \underline{\Omega} \underline{x} = \underline{\omega} \wedge \underline{x},$$

mit

$$\underline{\Omega} = \dot{R} R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.55)$$

Ferner war

$$\underline{\Omega} = R \underline{\Omega}' R^{-1}, \quad \underline{\Omega}' = \begin{pmatrix} 0 & -\omega'_3 & \omega'_2 \\ \omega'_3 & 0 & -\omega'_1 \\ -\omega'_2 & \omega'_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (11.56)$$

mit

$$\underline{\omega} = R \underline{\omega}', \quad (11.57)$$

denn  $\underline{\omega} \wedge \underline{x} = \underline{\Omega} \underline{x} = R \underline{\Omega}' R^{-1} \underline{x} = R \underline{\Omega}' \underline{x}' = R(\underline{\omega}' \wedge \underline{x}') = (R \underline{\omega}') \wedge \underline{x}$ .

Nun gilt

$$\begin{aligned} \underline{\Omega}' &= R^{-1} \dot{R} = S_{-\psi} \tilde{S}_{-\vartheta} S_{-\varphi} (\dot{S}_\varphi \tilde{S}_\vartheta S_\psi + S_\varphi \dot{\tilde{S}}_\vartheta S_\psi + S_\varphi \tilde{S}_\vartheta \dot{S}_\psi) \\ &= S_{-\psi} \dot{S}_\psi + S_{-\psi} \tilde{S}_{-\vartheta} \dot{\tilde{S}}_\vartheta S_\psi + S_{-\psi} \tilde{S}_{-\vartheta} S_{-\varphi} \dot{S}_\varphi \tilde{S}_\vartheta S_\psi. \end{aligned} \quad (11.58)$$

Aber (vgl. (11.54))

$$S_{-\psi} \dot{S}_\psi = \dot{\psi} I_3, \quad \tilde{S}_{-\vartheta} \dot{\tilde{S}}_\vartheta = \dot{\vartheta} I_1. \quad (11.59)$$

Durch Einsetzen von (11.59) und (11.51) in (11.58) findet man ohne grosse Mühe

$$\underline{\omega}' = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \psi \\ -\dot{\vartheta} \sin \psi + \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (11.60)$$

Durch direkte Rechnung findet man ferner, dass sich  $\underline{\omega} = R \underline{\omega}'$  wie folgt darstellen lässt:

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}_\varphi + \underline{\omega}_\vartheta + \underline{\omega}_\psi \quad (11.61)$$

mit

$$\underline{\omega}_\varphi = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\omega}_\vartheta = \dot{\vartheta} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\omega}_\psi = \dot{\psi} \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (11.62)$$

Dieses Resultat kann man anschaulich aus der Fig. 11.5 verstehen:

$\underline{\omega}_\varphi$  : Winkelgeschwindigkeit zu 1-param. Rotation um  $\underline{e}_3$ -Achse,  
 $\underline{\omega}_\vartheta$  : " " "  $\underline{f}$ -Achse,  
 $\underline{\omega}_\psi$  : " " "  $\underline{e}'_3$ -Achse.

Das Gleichungssystem (11.60) lässt sich leicht auflösen:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{1}{\sin \vartheta} [\omega'_1 \sin \psi + \omega'_2 \cos \psi] \\ \dot{\vartheta} &= \omega'_1 \cos \psi - \omega'_2 \sin \psi \\ \dot{\psi} &= \omega'_3 - \operatorname{ctg} \vartheta [\omega'_1 \sin \psi + \omega'_2 \cos \psi] . \end{aligned} \quad (11.63)$$

Falls  $\underline{\omega}'(t)$  als Lösung der Eulerschen Gleichungen bekannt ist, so stellt (11.63) ein kompliziertes gekoppeltes nicht-lineares (!) Differentialgleichungssystem dar. Im Falle des kräftefreien Kreisels sollte dieses durch Quadraturen lösbar sein. Dies ist aufgrund des Drehimpulssatzes tatsächlich möglich. Da  $\underline{L}$  zeitunabhängig ist, können wir  $\underline{e}_3 = \underline{L}/|\underline{L}|$

wählen. Nun ist  $\underline{L}' = R^{-1} \underline{L} = S_{-\psi} \tilde{S}_{-\vartheta} S_\varphi \underline{L} = S_{-\psi} \tilde{S}_{-\vartheta} \underline{L}$ ,

$$\tilde{S}_{-\vartheta} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

$$S_{-\psi} \tilde{S}_{-\vartheta} \underline{L} = L (\sin \vartheta \sin \psi, \sin \vartheta \cos \psi, \cos \vartheta),$$

d.h.

$$\begin{aligned} L'_1 &= \theta'_1 \omega'_1 = L \sin \vartheta \sin \psi \\ L'_2 &= \theta'_2 \omega'_2 = L \sin \vartheta \cos \psi \\ L'_3 &= \theta'_3 \omega'_3 = L \cos \vartheta . \end{aligned} \quad (11.64)$$

Damit sind  $\cos \mathcal{J}$  und  $\operatorname{tg} \psi$  bekannte Funktionen:

$$\cos \mathcal{J} = \frac{\theta'_3}{L} \omega'_3, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\theta'_1 \omega'_1}{\theta'_2 \omega'_2}. \quad (11.65)$$

Aus (11.64) und (11.63) findet man nach einer einfachen Rechnung

$$\dot{\varphi} = L \cdot \frac{\theta'_1 (\omega'_1)^2 + \theta'_2 (\omega'_2)^2}{(\theta'_1 \omega'_1)^2 + (\theta'_2 \omega'_2)^2}. \quad (11.66)$$

Die rechte Seite ist eine bekannte Kombination von elliptischen Funktionen. Damit ist auch  $\varphi(t)$  durch eine Quadratur bestimmt. Für weitere Einzelheiten verweise ich auf den Mechanik-Band von Landau + Lifschitz.

### 11.5 Kanonische Formulierung und gruppentheoretische Interpretation

---

Wir betrachten wieder den kräftefreien Kreisel. Als verallgemeinerte Koordinaten wählen wir die Eulerschen Winkel  $(\varphi, \mathcal{J}, \psi)$ . Die Lagrangefunktion in diesen Koordinaten lautet nach (11.60)

$$\begin{aligned} L = T = & \frac{1}{2} \theta'_1 (\dot{\mathcal{J}} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \mathcal{J} \sin \psi)^2 + \\ & \frac{1}{2} \theta'_2 (-\dot{\mathcal{J}} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \mathcal{J} \cos \psi)^2 + \\ & \frac{1}{2} \theta'_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \mathcal{J})^2. \end{aligned} \quad (11.67)$$

Bevor wir zur Hamiltonschen Formulierung übergehen, zeigen wir noch, dass aus (11.67) natürlich auch die Euler-

schen Gleichungen folgen. Es ist

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = \frac{\partial L}{\partial \omega'_3} \frac{\partial \omega'_3}{\partial \psi} = \theta'_3 \omega'_3 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \psi} = \theta'_3 \dot{\omega}'_3$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = \frac{\partial L}{\partial \omega'_1} \frac{\partial \omega'_1}{\partial \psi} + \frac{\partial L}{\partial \omega'_2} \frac{\partial \omega'_2}{\partial \psi} = (\theta'_1 - \theta'_2) \omega'_1 \omega'_2 \quad (11.68)$$

Die beiden anderen Eulerschen Gleichungen erhält man ähnlich.

Die kanonisch konjugierten Impulse sind

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \sum \frac{\partial L}{\partial \omega'_i} \frac{\partial \omega'_i}{\partial \dot{\varphi}} = L'_1 \sin \vartheta \sin \psi + L'_2 \sin \vartheta \cos \psi + L'_3 \cos \vartheta$$

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = L'_1 \cos \psi - L'_2 \sin \psi$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = L'_3 \quad (11.67)$$

Diese Gleichungen lösen wir nach  $\underline{L}'$  auf:

$$L'_1 = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \sin \psi + p_\vartheta \cos \psi$$

$$L'_2 = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \cos \psi - p_\vartheta \sin \psi$$

$$L'_3 = p_\psi \quad (11.68)$$

Daraus erhält man für  $\underline{L} = R(\varphi, \vartheta, \psi) \underline{L}'$ :

$$L_1 = -p_\varphi \sin \varphi \operatorname{ctg} \vartheta + p_\vartheta \cos \varphi + p_\psi \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta}$$

$$L_2 = p_\varphi \cos \varphi \operatorname{ctg} \vartheta + p_\vartheta \sin \varphi - p_\psi \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta}$$

$$L_3 = p_\varphi \quad (11.69)$$

Man sieht sofort, dass

$$p_\vartheta = L_1 \cos \varphi + L_2 \sin \varphi = \underline{f} \cdot \underline{L} \quad (\underline{f}: \text{Knotenlinie}) \quad (11.70)$$

Also haben die kanonischen Impulse die folgende Deutung

$$p_\varphi = L_3, \quad p_\psi = L'_3, \quad p_\vartheta = \underline{f} \cdot \underline{L} \quad (11.71)$$

Die Hamiltonfunktion ist

$$H = \sum_i \frac{1}{2 \Theta'_i} (L'_i)^2, \quad (11.72)$$

mit den Ausdrücken (11.68) für  $L'_i$ .

An dieser Stelle notieren wir auch

$$|\underline{L}|^2 = |\underline{L}'|^2 = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} (p_\varphi^2 + p_\psi^2) - \frac{2 p_\varphi p_\psi}{\sin^2 \vartheta} \cos \vartheta + p_\vartheta^2. \quad (11.73)$$

Aus den Formeln (11.68) und (11.69) könnte man durch mühsame Rechnung die Poissonklammern der raumfesten und der körperfesten Drehimpulscomponenten ausrechnen. Diese ergeben sich aber aus einer gruppentheoretischen Betrachtung, wie wir gleich sehen werden.

Als Resultat erhält man

$$\begin{aligned} \{L_i, L_j\} &= \varepsilon_{ijk} L_k, \\ \{L'_i, L'_j\} &= -\varepsilon_{ijk} L'_k \\ \{L_i, L'_j\} &= 0. \end{aligned} \quad (11.74)$$

Wir zeigen zunächst, dass daraus und aus (11.72) wieder die Eulerschen Gleichungen folgen. Es ist

$$\begin{aligned} \dot{L}'_k &= \{L'_k, H\} = \sum_i \underbrace{\frac{1}{\Theta'_i} L'_i}_{\omega'_i} \underbrace{\{L'_k, L'_i\}}_{-\varepsilon_{kil} L'_l} \\ &= -(\underline{\omega}' \wedge \underline{L}')_k, \end{aligned}$$

was wegen  $\underline{L}' = \Theta' \underline{\omega}'$  mit den kräftefreien Eulerschen Gleichungen übereinstimmt.

Die dritte Gleichung von (11.74) impliziert

$$\{H, L_i\} = 0 \quad (11.75)$$

und aus der 1. Gleichung folgt

$$\{ |L|^2, L_k \} = 0. \quad (11.76)$$

Deshalb sind  $H$ ,  $L_3$  und  $|L|^2$  in Involution, weshalb das System im Sinne von §10.1 integrabel ist.

### Gruppentheoretische Betrachtungen

Der Konfigurationsraum des Kreisels ist die Gruppe  $SO(3)$ . (Dieser sieht nur lokal wie der  $\mathbb{R}^3$  aus, global hat er eine andere Struktur.)

Bezüglich der Linksmultiplikation  $R \mapsto \lambda_R: \lambda_R(S) = RS$  ( $R, S \in SO(3)$ ) ist  $SO(3)$  eine Liesche Transformationsgruppe (vgl. Anhang II). Da zwischen raumfesten und körperfesten Koordinaten die Beziehung  $\underline{x}(t) = R(t) \underline{x}'$  besteht, induziert eine Drehung des raumfesten Koordinatensystems eine Linksmultiplikation der "Konfiguration"  $R(t)$ . Entsprechend induziert eine Drehung des körperfesten Systems eine Rechtsmultiplikation der Konfiguration. Für die weitere Diskussion verwenden wir den Inhalt von Anhang II über Liesche Gruppen.

Zu einem Element  $X$  der Liealgebra  $\mathfrak{so}(3)$  von  $SO(3)$  gehört die 1-parametrische Untergruppe  $A(s) = \exp(sX)$  und dazu das rechtsinvariante Vektorfeld  $X^R$  auf  $SO(3)$  mit dem Fluss  $\lambda_{A(s)}$ . Ebenso gehört zu  $X$  das linksinvariante Vektorfeld  $X^L$  zum Fluss  $\rho_{A(s)}$ , wenn  $\rho_R$  die Rechtsmultiplikation mit  $R$  bezeichnet. Für die Basis  $\{I_i\}$  von  $SO(3)$  (vgl. (2.68)) gelten die Vertauschungsrelationen (8.28), d.h.

$$[I_i, I_j] = \varepsilon_{ijk} I_k. \quad (11.77)$$

Für die zugehörigen Vektorfelder  $I_i^R$  und  $I_i^L$  folgen dann die entsprechenden Relationen für die Lieschen Klammern

$$\begin{aligned} [I_i^R, I_j^R] &= - \varepsilon_{ijk} I_k^R && \text{(Antihomomorphismus)} \\ [I_i^L, I_j^L] &= \varepsilon_{ijk} I_k^L && \text{(Homomorphismus)} \\ [I_i^L, I_j^R] &= 0 . && \end{aligned} \quad (11.78)$$

Wir bestimmen zunächst  $I_i^L$  in den Eulerschen Winkeln (Diese Vektorfelder geben für den quantenmechanischen Kreisels die körperfesten Drehimpulsoperatoren.) Für die Drehung

$$R(\varphi, \vartheta, \psi) = S_\varphi \tilde{S}_\vartheta S_\psi \quad (11.79)$$

und die 1-parametrische Schar  $R(\underline{e}, t)$  zu  $X = \underline{I} \cdot \underline{e}$  (vgl. 2.67) sei

$$R(\varphi, \vartheta, \psi) R(\underline{e}, t) =: S_\varphi(t) \tilde{S}_\vartheta(t) S_\psi(t) . \quad (11.80)$$

Wir interessieren uns für  $(\dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi})$  an der Stelle  $t = 0$ . Dieses Trippel ist das Vektorfeld  $X^L$  an der Stelle  $(\varphi, \vartheta, \psi)$ .

Nun ist einerseits

$$\Omega := \left. \frac{d}{dt} R(\underline{e}, t) \right|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (11.81)$$

und andererseits nach (11.80)

$$\Omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} S_{-\psi} \tilde{S}_{-\vartheta} S_{-\psi} S_\varphi(t) \tilde{S}_\vartheta(t) S_\psi(t) .$$

Nach (11.60) gilt also

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi \\ - \dot{\vartheta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi \\ \dot{\psi} + \varphi \cos \vartheta \end{pmatrix} . \quad (11.82)$$

Wie in (11.63) lautet die Auflösung dieser Gleichungen



$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{1}{\sin \vartheta} [e_1 \sin \psi + e_2 \cos \psi] \\ \dot{\vartheta} &= e_1 \cos \psi - e_2 \sin \psi \\ \dot{\psi} &= e_3 - \operatorname{ctg} \vartheta [e_1 \sin \psi + e_2 \cos \psi] .\end{aligned}\quad (11.83)$$

Deshalb ist an der Stelle  $(\varphi, \vartheta, \psi)$ :

$$\begin{aligned}I^L_1 &= \left( \frac{\sin \psi}{\sin \vartheta}, \cos \psi, -\operatorname{ctg} \vartheta \sin \psi \right) \\ I^L_2 &= \left( \frac{\cos \psi}{\sin \vartheta}, -\sin \psi, -\operatorname{ctg} \vartheta \cos \psi \right) \\ I^L_3 &= (0, 0, 1) .\end{aligned}\quad (11.84)$$

Entsprechend könnten wir  $I^R_k$  bestimmen. Es gilt aber

$$\underline{I}^R(\varphi, \vartheta, \psi) = R(\varphi, \vartheta, \psi) \underline{I}^L(\varphi, \vartheta, \psi) .\quad (11.85)$$

Dies sieht man so: Zunächst gilt

$$\begin{aligned}R(\varphi, \vartheta, \psi) R(\underline{e}, t) &= (R(\varphi, \vartheta, \psi) R(\underline{e}, t) R^{-1}(\varphi, \vartheta, \psi)) R(\varphi, \vartheta, \psi) \\ &= R(\underline{e}', t) R(\varphi, \vartheta, \psi) ,\end{aligned}$$

wo

$$\underline{e}' = R(\varphi, \vartheta, \psi) \underline{e} .$$

Deshalb ist die Integralkurve von  $(\underline{I}, \underline{e}')^R$  durch  $(\varphi, \vartheta, \psi)$  gleich der Integralkurve von  $(\underline{I}, \underline{e})^L$  durch  $(\varphi, \vartheta, \psi)$ , d.h.

$$(\underline{I} \cdot \underline{e}')^R(\varphi, \vartheta, \psi) = (\underline{I} \cdot \underline{e})^L(\varphi, \vartheta, \psi) .$$

Daraus folgt (11.85).

Durch eine einfache Rechnung findet man aus (11.85)

und (11.84)

$$\begin{aligned}I^R_1 &= \left( -\sin \varphi \operatorname{ctg} \vartheta, \cos \varphi, \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta} \right) \\ I^R_2 &= \left( \cos \varphi \operatorname{ctg} \vartheta, \sin \varphi, -\frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} \right) \\ I^R_3 &= (1, 0, 0) .\end{aligned}\quad (11.86)$$

Nun knüpfen wir an die allgemeinen Betrachtungen und Ergebnisse von Kap. 8 (speziell p. 229 ff) an.  $SO(3)$  operiert kanonisch auf zwei natürliche Arten im Phasenraum des Kreisels, nämlich durch

$$R \longmapsto T^*(\lambda_R) \quad \text{und} \quad R \longmapsto T^*(\varrho_R) . \quad (11.87)$$

Jedem Element  $\xi$  der Liealgebra  $so(3, \mathbb{R})$  werden dadurch die beiden Hamiltonschen Vektorfelder  $T^*(\xi^R)$  und  $T^*(\xi^L)$  zugeordnet. Die zugehörigen Hamiltonfunktionen seien  $J^R(\xi)$  und  $J^L(\xi)$ . Nach (8.51) gilt, da die beiden Operationen in (11.87) vertauschen <sup>\*)</sup>,

$$\begin{aligned} \{J^R(\xi), J^R(\eta)\} &= J^R([\xi, \eta]) \\ \{J^L(\xi), J^L(\eta)\} &= -J^L([\xi, \eta]) \\ \{J^L(\xi), J^R(\eta)\} &= 0 . \end{aligned} \quad (11.88)$$

Die Funktionen  $J^R(I_i)$ ,  $J^L(I_i)$  interpretieren wir natürlicherweise als die raumfesten, bzw. körperfesten Drehimpulse  $L_i$  und  $L'_i$ . Diese lassen sich aus (8.47), (11.84) und (11.86) berechnen. Z.B. ist

$$\begin{aligned} L'_1 &= p_\varphi \frac{\sin \psi}{\sin \vartheta} + p_\varrho \cos \psi + p_\psi (-\text{ctg} \vartheta \cos \psi) \\ &= \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \sin \psi + p_\varrho \cos \psi , \end{aligned}$$

was mit der ersten Gleichung in (11.68) tatsächlich übereinstimmt. Ebenso erhält man die anderen Komponenten in (11.68) und (11.69). Damit folgen aus (11.88) auch die Poissonklammern (11.74). (Das Minuszeichen in der 2. Gleichung beruht auf der

---

\*)

Diese definieren eine Operation von  $SO(3) \times SO(3)$  auf dem Phasenraum.

"Antihomomorphie" von  $\mathcal{P}_R : \mathcal{P}_{R_1 R_2} = \mathcal{P}_{R_2} \mathcal{P}_{R_1}$  .)

Zusammenfassung: Drehungen des raumfesten, bzw. körperfesten Bezugssystems induzieren kanonische Transformationen im Phasenraum, welche durch die raumfesten, bzw. körperfesten Drehimpulskomponenten  $\underline{L}$  und  $\underline{L}'$  erzeugt werden. Aus allgemeinen (gruppentheoretischen) Gründen erfüllen sie deshalb die Poissonklammern (11.74).

Bemerkungen:

1. Die Diskussion wird noch durchsichtiger, wenn man auch den Phasenraum geometrisch interpretiert (als Kotangentenbündel von  $SO(3)$ .)
2. Eine ganz analoge Diskussion lässt sich auch in der Quantenmechanik durchführen (siehe QM-Skript).

11.6 Der schwere Kreisel mit Fixpunkt

Wir betrachten einen starren Körper im homogenen Schwerfeld mit Fixpunkt  $O$ .  $O$  wird als gemeinsamer Nullpunkt des raumfesten  $(K)$  und des körperfesten  $(K')$  Bezugssystems gewählt. Der körperfeste Trägheitstensor  $\hat{\Theta}'$  bezüglich  $O$  ergibt sich aus  $\Theta'$  bezüglich des Schwerpunkts  $S$  nach Satz 11.1.

Wir wählen die 3'-Achse in Richtung  $\vec{OS}$  und die raumfeste  $\underline{e}_3$ -Achse in Richtung der negativen Erdbeschleunigung  $-\underline{g}$  (vgl. Fig. 11.6). Es sei  $l := |\vec{OS}|$ .

Dann gilt nach Satz 11.1

$$\hat{\theta}'_{kl} = M \left\{ |\underline{a}|^2 \delta_{kl} - a_k a_l \right\} + \theta'_{kl} \quad , \quad (11.89)$$

mit  $\underline{a} = (0, 0, l)$ .

Die Lagrangefunktion lautet

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \hat{\theta}'_{ij} \omega'_i \omega'_j - Mgl \cos \vartheta, \quad (11.90)$$

mit den Ausdrücken (11.60) für die  $\omega'_i$ . Da  $L$  autonom ist, gilt der Energiesatz

$$T + V = E = \text{const.} \quad (11.91)$$

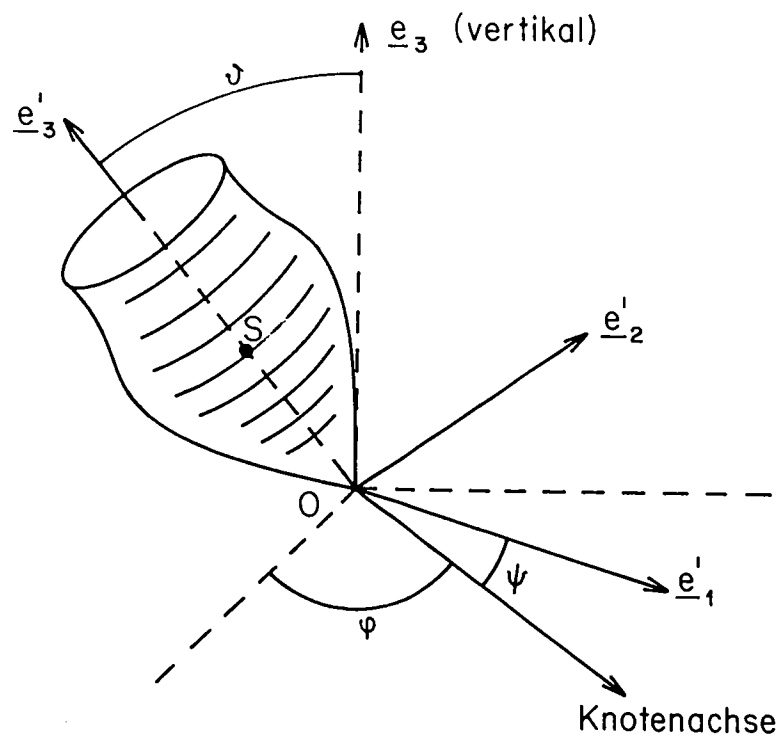


Fig. 11.6

In der Hamiltonschen Formulierung sind im allgemeinen nur  $H$  und  $L_3$  in Involution (Invarianz bezüglich Drehungen um die  $\underline{e}_3$ -Achse) und deshalb ist das Problem im allgemeinen nicht integrabel.

Falls aber der Kreisel symmetrisch ist mit  $\vec{OS}$  als Figurenachse, so ist das System auch invariant unter Drehungen um die  $\underline{e}'_3$ -Achse. Nach der gruppentheoretischen Deutung der  $L'_i$  gilt deshalb  $\{H, L'_3\} = 0$ . Dies sieht man auch formal, denn es ist

$$\begin{aligned} H &= \sum \frac{1}{2\hat{\theta}'_i} (L'_i)^2 + Mg\ell \cos\vartheta \\ &= \frac{1}{2\hat{\theta}'_1} |L'|^2 + \left(\frac{1}{2\hat{\theta}'_3} - \frac{1}{2\hat{\theta}'_1}\right) (L'_3)^2 + Mg\ell \cos\vartheta \end{aligned} \quad (11.92)$$

und

$$L'_3 = p_\psi, \quad L_3 = p_\varphi. \quad (11.93)$$

Daraus entnimmt man, dass  $H$ ,  $L_3$  und  $L'_3$  in Involution sind und damit ist das Problem integrabel.

Nach (11.89) ist

$$A := \hat{\theta}'_1 = \hat{\theta}'_2 = \theta'_1 + M\ell^2, \quad \hat{\theta}'_3 = \theta'_3 =: C. \quad (11.94)$$

und folglich nach (11.60)

$$\begin{aligned} T &= \frac{A}{2} [(\omega'_1)^2 + (\omega'_2)^2] + \frac{C}{2} (\omega'_3)^2 \\ &= \frac{A}{2} (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta \dot{\varphi}^2) + \frac{C}{2} (\dot{\psi} + \cos\vartheta \dot{\varphi})^2. \end{aligned} \quad (11.95)$$

Daraus sieht man, dass  $\varphi$  und  $\psi$  zyklisch sind und folglich sind  $p_\varphi = \partial L / \partial \dot{\varphi}$  und  $p_\psi = \partial L / \partial \dot{\psi}$  konstant, wie wir auch schon auf andere Weise eingesehen haben (vgl. 11.93)).

Nun ist

$$\begin{aligned}
 p_\varphi &= A \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} + C \cos \vartheta (\dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi}) =: Ab \\
 p_\psi &= C(\dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi}) =: Aa \text{ (proportional zu } \omega'_3 \text{)}.
 \end{aligned}
 \tag{11.96}$$

Daraus folgt

$$\dot{\varphi} = \frac{b-a \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta}, \quad \dot{\psi} = \frac{A}{C} a - \cos \vartheta \frac{b-a \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta}.
 \tag{11.97}$$

Damit kann der Energiesatz (11.91) in eine Differentialgleichung 1. Ordnung für  $\vartheta$  übergeführt werden:

$$E - \frac{C}{2} (\omega'_3)^2 =: E' = \frac{1}{2} A \dot{\vartheta}^2 + U(\vartheta) = \text{const} \quad ,
 \tag{11.98}$$

wo

$$U(\vartheta) = \frac{1}{2} A \frac{(b-a \cos \vartheta)^2}{\sin^2 \vartheta} + Mg\ell \cos \vartheta.
 \tag{11.98}$$

Dies hat die Form eines schon mehrfach studierten Problems.

Wir beschränken uns wieder auf eine qualitative Diskussion.

Es sei

$$\begin{aligned}
 u &= \cos \vartheta \implies \dot{u} = -\sin \vartheta \dot{\vartheta} \quad , \\
 \alpha &:= \frac{2E'}{A} \quad , \quad \beta = 2 Mg\ell / A > 0.
 \end{aligned}
 \tag{11.99}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \dot{u}^2 + V(u) = 0 \quad , \\
 &2 V(u) = (b-a \cdot u)^2 - (1-u^2)(\alpha - \beta u).
 \end{aligned}
 \tag{11.100}$$

Daneben haben wir nach (11.97)

$$\dot{\varphi} = \frac{b-au}{1-u^2}.
 \tag{11.101}$$

In Fig. 11.7 zeigen wir den Graphen von  $V(u)$ , sowie die Phasenebene  $(u, \dot{u})$ .

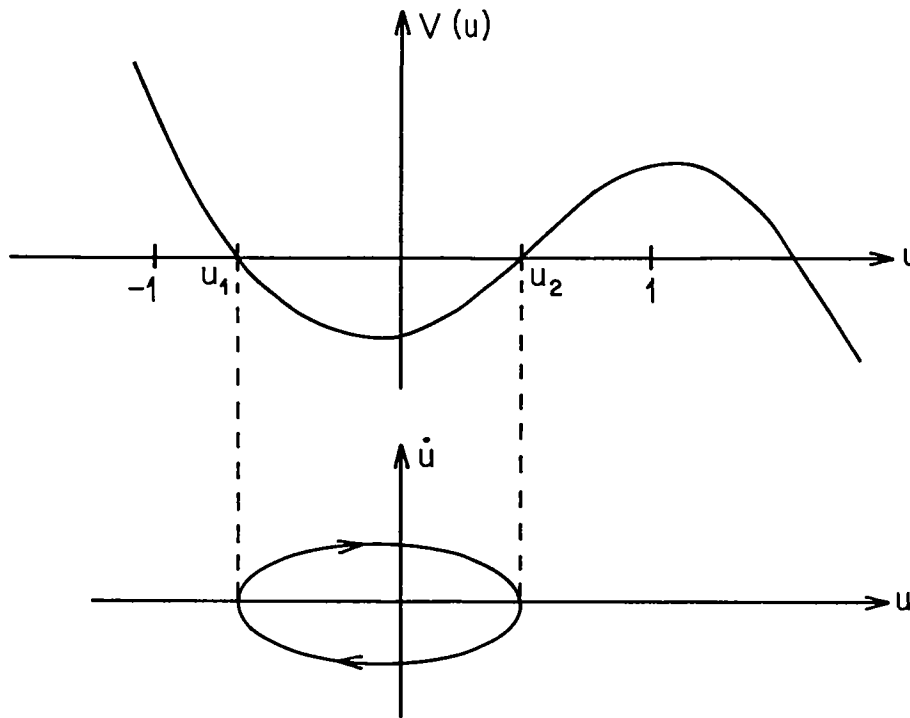


Fig. 11.7

Das physikalische Gebiet ist  $\{u \mid -1 \leq u \leq 1, V(u) \leq 0\}$ .  
 Da  $\beta > 0$  ist, hat  $V(u)$  das in Fig. 11.7 gezeigte asymptotische Verhalten:  $V(u) \rightarrow \mp \infty$  für  $u \rightarrow \pm \infty$ . Für  $u = \pm 1$  ist  $2V(\pm 1) = (b \mp a)^2 \geq 0$ .

Grenzfälle: (i)  $b = a \Rightarrow p_\phi = p_\psi, L_3^I = L_3$  : stehender Kreisel  
 (ii)  $b = -a \Rightarrow L_3 = -L_3^I$  : hängender Kreisel.

Sonst spricht man vom schiefen Kreisel. Das Potential sieht dann wie in Fig. 11.7 aus. Die Librationspunkte  $u_1 \leq u_2$  sind Umkehrpunkte der  $\mathcal{J}$ -Bewegung.

Wir betrachten zunächst  $u_1 < u_2$ . Für die  $\mathcal{J}$ -Bewegung haben wir

$$t - t_0 = \int_{u(t_0)}^u \frac{dx}{\sqrt{-2V(x)}} .$$

Ferner ist

$$\dot{\varphi} = a \frac{u_0 - \cos \mathcal{J}}{\sin^2 \mathcal{J}} = a \frac{u_0 - u}{1 - u^2}, \quad u_0 := b/a. \quad (11.102)$$

Nun betrachten wir der Reihe nach verschiedene Fälle.

1)  $u_0 > u_2$  : In diesem Fall hat  $\dot{\varphi}$  nach (11.102) immer das gleiche Vorzeichen. Die Figurenachse  $\underline{e}'_3(\varphi, \mathcal{J})$  (vgl. Fig. 11.6) führt eine Präzession um die  $\underline{e}_3$ -Achse aus (in positiver Richtung wenn  $a > 0$  ist) mit einer Nutation in  $u = \cos \mathcal{J}$  zwischen  $u_1 = \cos \mathcal{J}_1$  und  $u_2 = \cos \mathcal{J}_2$  (siehe Fig. 11.8).

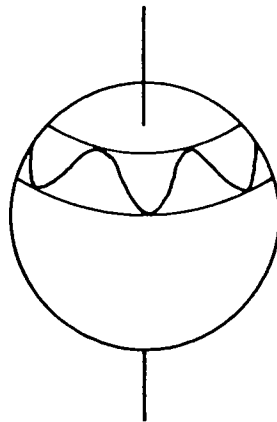


Fig. 11.8

2)  $u_0 = u_2$  : Dann ist  $\dot{\varphi} = 0$  für  $u = u_2$ , aber  $\varphi$  wechselt das Vorzeichen nicht. In diesem Fall fällt der Kreisel aus  $u = u_2$  bis  $u = u_1$  und richtet sich dann wieder auf (vgl. Fig. 11.9). Dieser Fall entspricht der Anfangsbedingung  $\dot{\mathcal{J}}(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$ ,  $\mathcal{J}(0) = \mathcal{J}_2$ ,  $\varphi(0)$  (loslassen des Kreisels ohne Anfangsgeschwindigkeit der Figurenachse). Dann ist  $E' = Mg\ell \cos \mathcal{J}_2$  und der Energiesatz (11.98) lautet mit (11.97)



(siehe auch (11.95)) :

$$Mg l \cos \vartheta_2 = \frac{A}{2} (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + Mg l \cos \vartheta, \quad (11.103)$$

Also ist  $\dot{\vartheta} \neq 0$  oder  $\dot{\varphi} = 0$  nur mit einer Abnahme von  $\vartheta$  verträglich (vgl. Fig. 11.9)

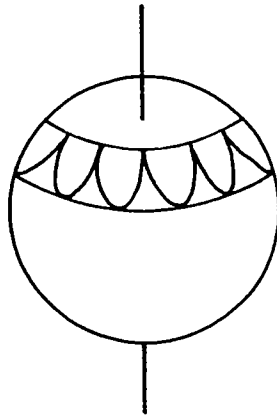


Fig. 11.9

3)  $u_1 < u_0 < u_2$  : Für diesen Fall ändert  $\dot{\varphi}$  bei der Bewegung das Vorzeichen (vgl. Fig. 11.10).

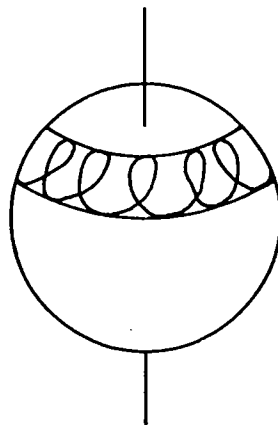


Fig. 11.10

Der Fall  $u_1 = u_2$  (Doppelwurzel von  $V(u)$ ) erfordert natürlich spezielle Anfangsbedingungen. Für eine Diskussion verweise ich auf [10], p. 221.

Interessant ist der stehende Kreisel:  $b = a$ . Dann hat  $V(u)$  eine Wurzel bei  $u = 1$ . Der Kreisel sei anfänglich vertikal,  $\vartheta(0) = 0$ , und es sei  $\dot{\vartheta}(0) = 0$ . Dann ist nach dem Energiesatz (11.98), (11.98')  $E' = Mg\ell$ , also nach (11.99)  $\alpha = \beta$ . Nach (11.100) gilt deshalb

$$\dot{u}^2 - (1-u)^2 [\beta(1+u) - a^2] = 0. \quad (11.104)$$

Die Wurzeln von  $V(u)$  sind für diesen Fall

$$u_{1,2} = 1, \quad u_3 = \frac{a^2}{\beta} - 1. \quad (11.105)$$

Nun muss man zwei Fälle unterscheiden.

a)  $a^2/\beta > 2$  (d.h.  $\frac{(L'_3)^2}{A \cdot 2Mg} > 2$ ): Dann ist  $u_3 > 1$  und das Potential sieht wie in Fig. 11.11 aus.

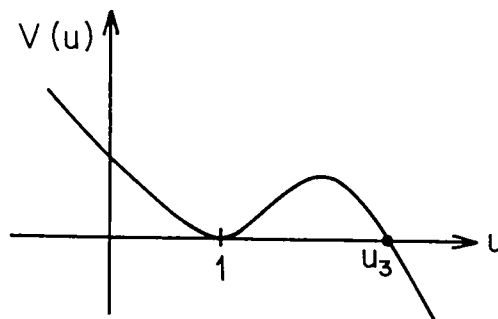


Fig. 11.11

Dies ist ein "schneller" Kreisel und die einzig mögliche Bewegung ist die mit  $u = 1$  (Drehung um die Vertikale). Dieser schlafende Kreisel ist stabil.

b)  $a^2/\beta < 2$  : Da jetzt  $u_3 < 1$  ist, hat  $V(u)$  die Form in Fig. 11.12.

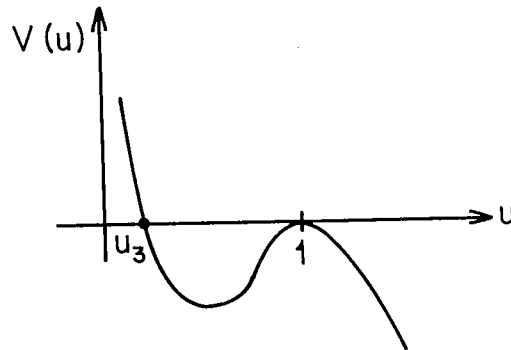


Fig. 11.12

Der Kreisel nutiert dann zwischen  $\mathcal{D} = 0$  und  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_3$   
( $u_3 = \cos \mathcal{D}_3$ ).

Es gibt somit eine kritische Winkelgeschwindigkeit  
 $\omega_c$ , oberhalb der nur eine vertikale Bewegung möglich ist.  
Der Wert von  $\omega_c$  ist gegeben durch  $a^2/\beta = 2$ , d.h.

$$\omega_c^2 = \frac{4 M g \ell A}{c^2} . \quad (11.106)$$

Für  $\omega > \omega_c$  dreht sich der Kreisel um die Vertikale, bis  $\omega$   
durch Reibung unter  $\omega_c$  sinkt. Dann beginnt der Kreisel in  
zunehmend stärkeren Masse zu taumeln.

### 11.7 Winkel- und Wirkungsvariablen für den schweren symmetrischen Kreisel

---

Nach dem allgemeinen Verfahren für mehrfach periodische Systeme konstruieren wir Winkel- und Wirkungsvariablen für den schweren symmetrischen Kreisel mit Fixpunkt.

Nach (11.92) und (11.94) lautet die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2A} [(L'_1)^2 + (L'_2)^2] + \frac{1}{2C} (L'_3)^2 + Mg\ell \cos \mathcal{J} .$$

Nun ist  $L'_3 = p_\psi$  und nach (11.68)

$$(L'_1)^2 + (L'_2)^2 = \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \mathcal{J})^2}{\sin^2 \mathcal{J}} + p_{\mathcal{J}}^2 .$$

Also haben wir

$$H = \frac{1}{2A} \left[ \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \mathcal{J})^2}{\sin^2 \mathcal{J}} + p_{\mathcal{J}}^2 \right] + \frac{1}{2C} p_\psi^2 + Mg\ell \cos \mathcal{J} . \quad (11.107)$$

Zunächst führen wir eine passende kanonische Transformation

$(\mathcal{J}, p_{\mathcal{J}}) \mapsto (u, p_u)$  aus, welche durch die erzeugende Funktion (2. Art)  $S = p_u \cos \mathcal{J}$  definiert ist:

$$u = \frac{\partial S}{\partial p_u} = \cos \mathcal{J} , \quad p_{\mathcal{J}} = \frac{\partial S}{\partial \mathcal{J}} = -\sin \mathcal{J} p_u . \quad (11.108)$$

In den neuen Variablen lautet die Hamiltonfunktion

$$H(\varphi, u, \psi), p_\varphi, p_u, p_\psi = \frac{1}{2A} \left[ \frac{(p_\varphi - p_\psi u)^2}{1-u^2} + (1-u^2) p_u^2 \right] + \frac{1}{2C} p_\psi^2 + Mg\ell u . \quad (11.109)$$

Mit dem Ansatz

$$W = W_\varphi + W_\psi + W_u , \quad W_\varphi = \varphi \alpha_\varphi , \quad W_\psi = \psi \alpha_\psi \quad (11.110)$$

$(\alpha_\varphi, \alpha_\psi = \text{const})$  lautet die verkürzte HJ-Gleichung

$$\frac{1}{2A} \left[ \frac{(\alpha_\varphi - \alpha_\psi u)^2}{1-u^2} + (1-u^2) \left( \frac{\partial W}{\partial u} \right)^2 \right] + \frac{1}{2C} \alpha_\psi^2 + Mg\ell u = E . \quad (11.111)$$

Der Separationsansatz (11.110) ist also erfolgreich.

Die Wirkungsvariablen  $J_\varphi$  und  $J_\psi$  sind

$$J_\varphi = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W}{\partial \varphi} d\varphi = \alpha_\varphi , \quad J_\psi = \alpha_\psi . \quad (11.112)$$

Die Gl. (11.111) hat die Form

$$(1-u^2)^2 \left( \frac{\partial W}{\partial u} \right)^2 = f(u, E, J_\varphi, J_\psi) ,$$

mit

$$f = [2AE - \frac{A}{C} J_\psi^2] (1-u^2) - 2A Mg\ell (1-u^2) u - (J_\varphi - u J_\psi)^2 . \quad (11.113)$$

Damit lautet die 3. Wirkungsvariable

$$J_u = \frac{1}{2\pi} \oint p_u du = \frac{1}{\pi} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{f(u, E, J_\varphi, J_\psi)}}{1-u^2} du . \quad (11.114)$$

Nun sei

$$\begin{aligned} S(\varphi, u, \psi, J_\varphi, J_u, J_\psi) &= W(\varphi, u, \psi, E, J_\varphi, J_\psi) \\ &= J_\varphi \varphi + J_\psi \psi + \int_{u_0}^u \frac{\sqrt{f(u', E, J_\varphi, J_\psi)}}{1-u'^2} du' , \end{aligned} \quad (11.115)$$

wobei  $E$  rechts mit Hilfe von (11.114) durch  $J_\varphi, J_\psi$  und  $J_u$  zu ersetzen ist. Die Wirkungsvariablen sind dann

$$\omega_{\varphi} = \frac{\partial S}{\partial J_{\varphi}} = \varphi, \quad \omega_{\psi} = \psi, \quad \omega_{\mathbf{u}} = \frac{\partial S}{\partial J_{\mathbf{u}}}. \quad (11.116)$$

Die neue Hamiltonfunktion  $E(J_{\varphi}, J_{\mathbf{u}}, J_{\psi})$  ergibt sich grundsätzlich aus (11.114) und aus dieser ergeben sich die Frequenzen

$$\omega_{\varphi} = \frac{\partial E}{\partial J_{\varphi}} : \text{Präzession um die } \underline{e}_3 \text{ - Achse ,}$$

$$\omega_{\mathbf{u}} = \frac{\partial E}{\partial J_{\mathbf{u}}} : \text{Nutation ,}$$

$$\omega_{\psi} = \frac{\partial E}{\partial J_{\psi}} : \text{Präzession um die } \underline{e}'_3 \text{ - Achse .}$$

Für den Fall, dass  $E$  nur sehr wenig grösser ist als  $J_{\psi}^2/2C$  lassen sich alle Rechnungen näherungsweise explizit ausführen. Dies überlassen wir dem Studierenden.

\* \* \*

