

Kapitel VI. Quasistationäre Felder

Wir untersuchen in diesem Kapitel Felder, welche sich innerhalb der Zeit wenig ändern, die eine elektromagnetische Welle braucht, um das Gebiet der Ladungs- Stromverteilung mit der Geschwindigkeit c zu durchqueren. In diesem Fall kann man für Punkte, die nicht zu weit von den Quellen entfernt sind die Retardierung in den (retardierten) Feldern vernachlässigen.

Wir arbeiten in der Coulomb-Erdnung $\text{div } \underline{A} = 0$.
Dann ist (siehe Anhang)

$$\Delta \varphi = -4\pi \rho, \quad \varphi(\underline{x}, t) = \int \frac{\rho(\underline{x}', t)}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x', \quad (\text{VI.1})$$

$$\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \underline{A} = -\frac{4\pi}{c} \underline{J} + \frac{1}{c} \text{grad}(\partial_t \varphi). \quad (\text{VI.2})$$

Den "transversalen" Strom auf der rechten Seite der letzten Gleichung (siehe auch (A.9-13)) bezeichnen wir jetzt mit $\underline{g}(\underline{x}, t)$. Wieder nehmen wir die Zerlegung (A.15) vor (mit etwas anderen Bezeichnungen):

$$\underline{E} = \underline{E}_c + \underline{E}_i, \quad \underline{E}_c = -\text{grad} \varphi, \quad \underline{E}_i = -\frac{1}{c} \dot{\underline{A}}. \quad (\text{VI.3})$$

\underline{E}_c ist das momentane Coulombfeld der Ladungen $\rho(\underline{x}, t)$.
 \underline{E}_i nennen wir das induzierte Feld. Offensichtlich gilt

$$\text{rot } \underline{E}_c = 0, \quad \text{div } \underline{E}_i = 0,$$

$$\text{rot } \underline{E}_i + \frac{1}{c} \dot{\underline{B}} = 0. \quad (\text{VI.4})$$

Für \underline{g} haben wir auch die Zerlegung

$$\underline{\mathcal{J}} = \underline{J} + \frac{1}{4\pi} \dot{\underline{E}}_c . \quad (\text{VI.5})$$

Natürlich gilt

$$\text{div } \underline{\mathcal{J}} = 0 ,$$

aber $\underline{\mathcal{J}}$ ist kein eigentlicher Ladungsstrom.

Sehr weit weg von den Quellen sind die elektromagnetischen Felder allein durch das Vektorpotential bestimmt: $\underline{B} \approx \text{rot } \underline{A}$, $\underline{E} \approx -\frac{1}{c} \dot{\underline{A}}$.

Für quasi-stationäre Situationen gilt aber in der Nähe, insbesondere innerhalb der Ladungs-Stromverteilung, bei Vernachlässigung der Retardierung:

$$\underline{A}(\underline{x}, t) \approx \frac{1}{c} \int \frac{\underline{\mathcal{J}}(\underline{x}', t)}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d\underline{x}' . \quad (\text{VI.6})$$

Damit gelten insgesamt die folgenden Feldgleichungen für quasi-stationäre Felder:

$$\underline{E} = \underline{E}_c + \underline{E}_i ,$$

$$\text{rot } \underline{E}_c = 0 , \quad \text{div } \underline{E}_c = 4\pi \rho ,$$

$$\text{div } \underline{E}_i = 0 , \quad \text{rot } \underline{E}_i + \frac{1}{c} \dot{\underline{B}} = 0 ,$$

(VI.7)

$$\text{rot } \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \left(\underline{J} + \frac{1}{4\pi} \dot{\underline{E}}_c \right) , \quad \text{div } \underline{B} = 0 .$$

Umgekehrt folgt aus diesen

$$\underline{E}_c = -\text{grad } \varphi , \quad \Delta \varphi = -4\pi \rho ,$$

$$\underline{B} = \text{rot } \underline{A} , \quad \text{div } \underline{A} = 0 ,$$

$$\Delta \underline{A} = -\frac{4\pi}{c} \left(\underline{J} + \frac{1}{4\pi} \dot{\underline{E}}_c \right) = -\frac{4\pi}{c} \underline{\mathcal{J}} ,$$

(VI.8)

$$\underline{E}_i = -\frac{1}{c} \dot{\underline{A}} .$$

Gegenüber den vollen Maxwell-Gleichungen ist auf der rechten Seite für $\text{rot } \underline{B}$ das Glied $\frac{1}{c} \dot{\underline{E}}_i$ in (VI.7) vernachlässigt. Die Gleichungen (VI.7) haben den grossen praktischen Vorteil, dass man zunächst \underline{E}_c wie in der Elektrostatik berechnen kann, dann \underline{B} aufgrund von \underline{I} wie in der Magnetostatik und schliesslich \underline{E}_i mitgeteilt bekommt als $-\frac{1}{c} \dot{\underline{A}}$.

Für die Praxis zulegen wir noch ρ und \underline{I} in der bekannten Weise:

$$\rho = \rho_e - \text{div } \underline{P} ,$$

$$\underline{I} = \underline{I}_e + \dot{\underline{P}} + c \text{rot } \underline{M} .$$

Es wäre nun inkonsequent, wenn wir den ganzen Anteil von $\dot{\underline{P}}$ zum Strom auf der rechten Seite für $\text{rot } \underline{B}$ mitnehmen würden. Wir zulegen auch $\dot{\underline{P}}$ in transversale und longitudinale Anteile, was sich für eine Materialgleichung $\underline{P} = \chi \underline{E}$ trivial bewerkstelligen lässt:

$$\underline{P} = \underline{P}_c + \underline{P}_i , \quad \underline{P}_c = \chi \underline{E}_c , \quad \underline{P}_i = \chi \underline{E}_i .$$

Entsprechend definieren wir (VI.9)

$$\underline{D}_c = \underline{E}_c + 4\pi \underline{P}_c = \epsilon \underline{E}_c ,$$

$$\underline{D}_i = \underline{E}_i + 4\pi \underline{P}_i = e \underline{E}_i . \quad \text{(VI.10)}$$

In (VI.7) setzen wir nun statt der obigen Werte für ρ und \underline{I} nur die Ausdrücke

$$\rho = \rho_e - \text{div } \underline{P}_c ,$$

$$\underline{I} = \underline{I}_e + \dot{\underline{P}}_c + c \text{rot } \underline{M} \quad \text{(VI.11)}$$

ein und erhalten (mit $\underline{H} = \underline{B} - 4\pi \underline{M}$):

$$\begin{aligned} \text{rot } \underline{E}_c &= 0, \quad \text{div } \underline{D}_c = 4\pi \rho_l, \\ \text{div } \underline{E}_i &= 0, \quad \text{rot } \underline{E}_i + \frac{1}{c} \dot{\underline{B}} = 0, \\ \text{rot } \underline{H} &= \frac{4\pi}{c} \left(\underline{J}_l + \frac{1}{4\pi} \dot{\underline{D}}_c \right), \quad \text{div } \underline{B} = 0. \end{aligned} \tag{VI.12}$$

Daraus folgt

$$\text{div} \left(\underline{J}_l + \frac{1}{4\pi} \dot{\underline{D}}_c \right) = 0. \tag{VI.13}$$

Zu diesen Gleichungen gesellen sich noch die Materialgleichungen

$$\begin{cases} \underline{D}_c = \epsilon \underline{E}_c, \quad \underline{B} = \mu \underline{H}, \\ \underline{J}_l = \sigma \underline{E} = \sigma (\underline{E}_i + \underline{E}_c). \end{cases} \tag{VI.14}$$

A. Schaltweise

Als Anwendung dieser Grundgleichungen diskutieren wir nun Schaltweise. (Ich hoffe, dass diese Darstellung, welche ich von Abkürzend sei Ludwig entlehnt habe, klarer ist als was man sonst in den Lehrbüchern findet.)

$$\underline{g}_l = \underline{J}_l + \frac{1}{4\pi} \dot{\underline{D}}_c. \tag{VI.15}$$

Gl. (VI.13) lautet

$$\text{div } \underline{g}_l = 0. \tag{VI.16}$$

Langs einer "Stromröhre" zu \underline{g}_l ist deshalb der "Strom"

$$I_l = \int_{\text{Querschnitt}} \underline{g}_l \cdot d\underline{s} \tag{VI.17}$$

durch einen Querschnitt einer solchen Stromröhre für alle Querschnitte dasselbe.

Daneben gilt noch für geschlossene Wege (wegen $\text{rot } \underline{E}_c = 0$)

$$\oint \underline{E}_c \cdot d\underline{s} = 0. \tag{VI.18}$$

(Natürlich gilt dies nicht für ganz $\underline{E} = \underline{E}_i + \underline{E}_c$!)

Die beiden letzten "integralen" Eigenschaften nutzt man nun aus, um das Verhalten eines Schaltkreises zu studieren. Ein Schaltkreis besteht aus Leitern, Ohmschen Widerständen, Kondensatoren, Induktivitäten, Transistoren, etc, und "Spannungsquellen". Unter einer Spannungsquelle versteht man dabei einen solchen Teil des Schaltkreises, für den das ihm entsprechende Teilstück des Integrals (VI.18) durch eine vorgegebene Spannung $U(t)$ als Funktion der Zeit zu beschreiben ist:

$$-\int_{\text{Spannungsquelle}} \underline{E}_c \cdot d\underline{s} = U(t) \quad (= \text{Änderung von } \varphi). \quad (\text{VI.19})$$

Auf dessen physikalischen Aufbau kommt es uns nicht an; z.B. kann es die von einem Atomkraftwerk (!) gelieferte Wechselspannung sein.

Zur Illustration wollen wir nun das in der folgenden Figur skizzierte Schaltkreise in Detail untersuchen. Es kommt uns vor allem darauf an, das resultierende System von Differentialgleichungen (VI.38) konsequent abzuleiten.

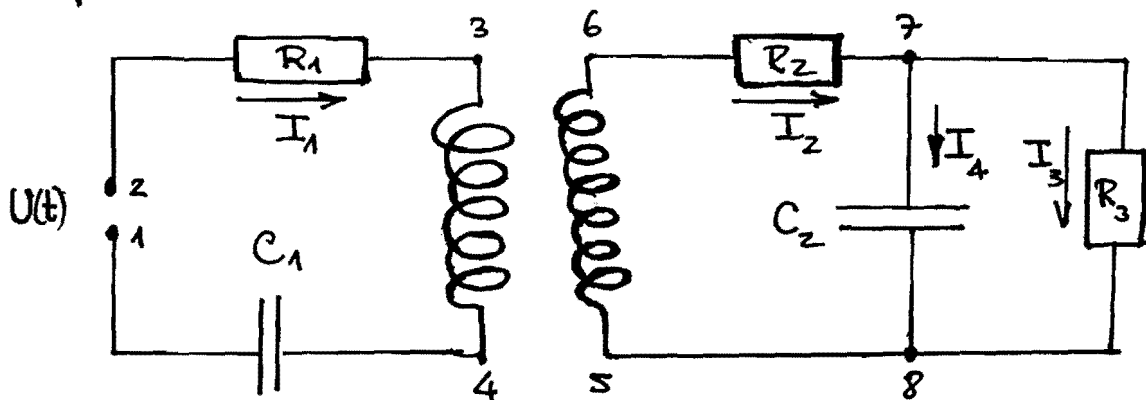
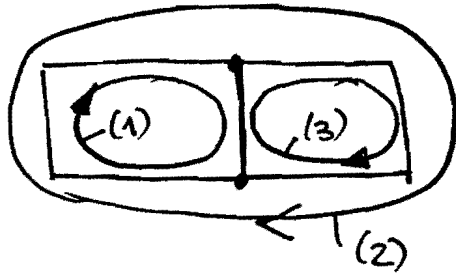


Fig. Beispiel eines Schaltkreises. I_i : Ströme, R_i : Widerstände, C_i : Kapazitäten, $U(t)$: Spannungsquelle.

Im selben Teil gibt es drei Stromkreise, die wir in der nachstehenden Figur andeuten. Alle drei sind im



Uhrzeigersinn als positiv gerechnet. Bezeichnen wir die drei Gesamtströme dieser drei Stromkreise mit $I_2^{(1)}$, $I_2^{(2)}$, $I_2^{(3)}$, so gilt für die in der vorausgegangenen Figur angegebenen Gesamtströme

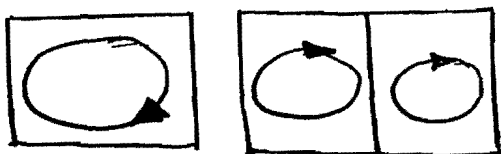
$$I_2 = I_2^{(1)} + I_2^{(2)}, \quad I_3 = I_2^{(2)} + I_2^{(3)}, \quad I_4 = I_2^{(1)} - I_2^{(3)}.$$

An den Verzweigungsstellen 7 und 8 gilt dann

$$I_2 = I_3 + I_4, \quad I_3 + I_4 = I_2, \quad (\text{VI.20})$$

was nichts anderes bedeutet, als dass an jeder Verzweigungsstelle der hinfließende Strom gleich dem wegfließenden Strom ist (entsprechend Gl. (VI.16)).

Nun wenden wir (VI.18) auf die folgenden geschlossenen Wege an:



Zur Auswertung der Wegintegrale müssen wir verschiedene Beiträge von Teilströmen näherungsweise berechnen.

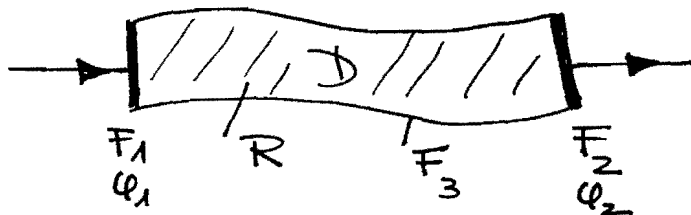
- (i) In den "Drahten" aussenhalb der Ohmschen Widerstände R_i sei die Leitfähigkeit σ so gross, dass wir dort $\underline{E} = \underline{E}_c + \underline{E}_i = 0$ setzen dürfen (auch

für die Spulendraht).

(ii) Die Ohmschen Widerstände seien örtlich so eingebaut, dass man in ihnen $\underline{E}_i = 0$ setzen darf.

(iii) Auch die Kondensatoren seien so eingebaut, dass zwischen den Kondensatorplatten $\underline{E}_i = 0$ gesetzt werden darf. Wir können dann die Formeln der Elektrostatik mit \underline{E}_c statt \underline{E} verwenden.

Mit der Annahme (ii) können wir die Ohmschen Widerstände fast genau wie in §III.5 für stationäre Ströme behandeln. In der nachstehenden Fig. sind die



Flächen an denen die "Zuleitungen" sitzen praktisch Äquipotentialflächen für φ (mit den Werten φ_1, φ_2). In D gelten die aus (VI.12) folgenden Gleichungen

$$\operatorname{div} \underline{D}_c = 4\pi \rho_{el} \quad , \quad \underline{E}_c = -\operatorname{grad} \varphi \quad , \quad \underline{J}_e = \sigma \underline{E}_c$$

und die Kontinuitätsgleichung $\nabla \cdot \underline{J} = 0$. Zu den bereits erwähnten Randbedingungen (VI.21)

$$\varphi|_{F_i} = \varphi_i \quad \text{(VI.22)}$$

kommt noch

$$\underline{J}_{\text{normal}} = 0 \quad \text{auf den freien Oberflächen } F_3 \quad \text{(VI.23)}$$

hinzu. Nun nehmen wir zusätzlich noch an, dass in den Widerständen σ^{-1} immer noch so klein und damit \underline{J}_e so gross ist, dass näherungsweise

$$\underline{J}_e = \underline{J}_e \quad (\text{VI.24})$$

gilt. Dann spricht man von einem Rein-Ohmschen Widerstand. Der Unterschied $\frac{1}{4\pi} \dot{\underline{D}}_c$ der beiden Ströme \underline{J}_e und \underline{J}_e bedeutet einen "kapazitiven" Anteil des Schaltelementes R . Dieser sei also vernachlässigbar. Damit erhalten wir jetzt

$$\underline{E}_c = -\text{grad } \varphi, \quad \underline{J}_e = \sigma \underline{E}_c, \quad \text{div } \underline{J}_e = 0. \quad (\text{VI.25})$$

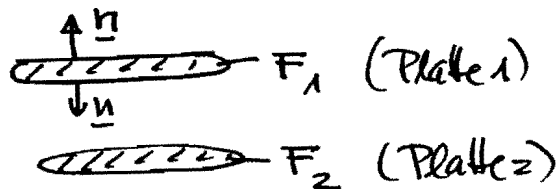
Das sind aber dieselben Gleichungen wie in § III.5, wenn man dort \underline{E} durch \underline{E}_c und \underline{J} durch \underline{J}_e ersetzt. Insbesondere erhalten wir mit (III.5.12) für das Teilstück durch R

$$\int_1^2 \underline{E}_c \cdot d\underline{s} = \varphi_1 - \varphi_2 = V = IR. \quad (\text{VI.26})$$

Für ein Teilstück durch einen Kondensator erhalten wir

$$\int_1^2 \underline{E}_c \cdot d\underline{s} = \varphi_1 - \varphi_2 = V \quad (\text{VI.27})$$

und als "Strom" I durch den Kondensator folgt



$$\begin{aligned} I &= \int_{F_1} \underline{n} \cdot \underline{J} \, d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_{F_1} \underline{n} \cdot \dot{\underline{D}}_c \, d\sigma = \frac{d}{dt} \frac{1}{4\pi} \int_{F_1} \underline{n} \cdot \underline{D}_c \, d\sigma \\ &= \frac{d}{dt} \int_{F_1} \rho_e^* \, d\sigma = \dot{Q}_1 \end{aligned}$$

mit Q_1 als Ladung auf der Platte 1. Außerdem wurde in der Elektrostatik die Beziehung

$$Q_1 = CV \quad (\text{VI.28})$$

abgeleitet. Somit ergibt sich die bekannte Beziehung

$$I = C \dot{V}, \quad (\text{VI.29})$$

welche meist intuitiv erhalten wird.

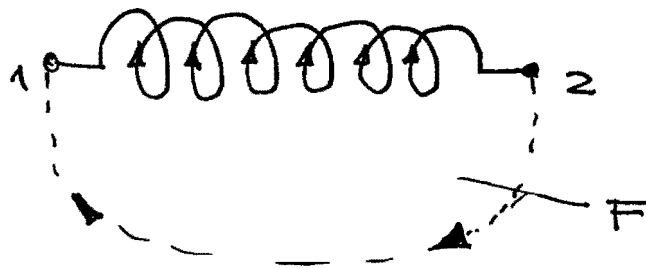
Schlusslich bleibt noch das Integral durch die Spulen

$$\int_1^2 \underline{E}_i \cdot d\underline{s} = \varphi_1 - \varphi_2,$$

welches über einen Weg im Spulendraht ausgeführt wird. Im Draht gilt nach unseren Annahmen $\underline{E}_c + \underline{E}_i \approx 0$, also

$$\varphi_1 - \varphi_2 = - \int_1^2 \underline{E}_i \cdot d\underline{s}. \quad (\text{VI.30})$$

Für eine ruhige Spule dürfen wir den Integrationsweg durch eine weit aussen laufende Kurve zu einem geschlossenen Weg ergänzen, da diese keinen merklichen Beitrag liefert (s. Fig.). Somit gilt



$$\varphi_1 - \varphi_2 = - \oint \underline{E}_i \cdot d\underline{s}.$$

Nun ist nach (VI.12) $\text{rot } \underline{E}_i = - \frac{1}{c} \dot{\underline{B}}$ und somit

$$\varphi_1 - \varphi_2 = - \int_F \underline{n} \cdot \text{rot } \underline{E}_i \, d\sigma = \frac{1}{c} \int_F \dot{\underline{B}} \cdot d\underline{s},$$

oder

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{c} \dot{\Phi}, \quad (\text{VI.31})$$

so Φ der magnetische Fluss durch die Fläche F ist:

$$\Phi = \int_{\mathbb{F}} \underline{B} \cdot \underline{n} \, d\mathbb{S}. \quad (\text{VI.32})$$

Schlüsselschlüssel benötigen wir noch eine Beziehung zwischen dem Fluss Φ_k in der k -ten Spule und den Strömen in allen Spulen. Wegen der Linearität der Feldgleichungen muss diese linear sein:

$$\frac{1}{c} \Phi_k = \sum_l L_{kl} I_l. \quad (\text{VI.33})$$

Die sog. Induktionskoeffizienten L_{kl} werden wir in Abschnitt B näher untersuchen.

Jetzt können wir alle drei Wegintegrale in der Fig. auf S. bestimmen. Für das erste haben wir

$$\oint \underline{E}_c \cdot d\underline{s} = \int_1^2 \underline{E}_c \cdot d\underline{s} + \int_2^3 \underline{E}_c \cdot d\underline{s} + \int_3^4 \underline{E}_c \cdot d\underline{s} + \int_4^1 \underline{E}_c \cdot d\underline{s} = 0.$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \underbrace{\hspace{10em}} & \underbrace{\hspace{10em}} & \underbrace{\hspace{10em}} \\ -U(t) & R_1 I_1 & \frac{1}{c} \dot{\Phi}_1 = L_{11} \dot{I}_1 + L_{12} \dot{I}_2 \\ \text{(nach (VI.19))} & \text{(nach (I.26))} & \text{(nach (VI.31), (VI.33))} \end{array} \right]$$

Nach Gleichung (VI.29) ist dann das letzte Integral

$$\int_4^1 \underline{E}_c \cdot d\underline{s} = \frac{1}{C_1} \cdot \int^t I_1(t') dt'.$$

Insgesamt ergibt sich

$$-U(t) + R_1 I_1 + L_{11} \dot{I}_1 + L_{12} \dot{I}_2 + \frac{1}{C_1} \int^t I_1(t') dt' = 0. \quad (\text{VI.34})$$

Für die beiden anderen Kreise findet man analog sofort

$$L_{22} \dot{I}_2 + L_{21} \dot{I}_1 + R_2 I_2 + \frac{1}{C_2} \int^t I_2 dt' = 0, \quad (\text{VI.35})$$

$$R_3 I_3 - \frac{1}{C_2} \int^t I_2 dt' = 0. \quad (\text{VI.36})$$

Um die letzten drei Gleichungen in ein System von Differentialgleichungen zu verwandeln, führen wir statt I_1 und I_4 die Größen

$$Q_1 = \int^t I_1(t') dt', \quad Q_4 = \int^t I_4(t') dt' \quad (\text{VI.37})$$

ein und erhalten

$$\frac{1}{C_1} Q_1 + R_1 \dot{Q}_1 + L_{11} \ddot{Q}_1 + L_{12} \dot{I}_2 = U(t),$$

$$L_{21} \ddot{Q}_1 + R_2 I_2 + L_{22} \dot{I}_2 + \frac{1}{C_2} Q_4 = 0,$$

$$R_3 I_2 - \frac{1}{C_2} Q_4 - R_3 \dot{Q}_4 = 0.$$

(VI.38)

Wir wollen dieses System nicht weiter diskutieren. Statt dessen beobachten wir den Sonderfall, dass in dem Netzwerk auf S. 5 nur der erste Schwingungskreis vorhanden ist. Dann ergibt sich statt (VI.34), wenn wir den Index 1 weglassen,

$$\frac{1}{C} Q + R \dot{Q} + L \ddot{Q} = U(t). \quad (\text{VI.39})$$

Die homogene Gl. ($U=0$) hat die Lösungen

$$Q(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}$$

mit

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - 1/LC}.$$


Die erzwungene Schwingung mit $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$ lautet

$$Q = \frac{U_0}{C^{-1} + i\omega R - \omega^2 L} e^{i\omega t}.$$

-VI.12-

B. Die Induktionskoeffizienten

Die Induktionskoeffizienten L_{ik} werden in (VI.33) definiert. Dabei ist der Fluss Φ_i zu jedem Leiter L_i definiert durch

$$\Phi_i = \int_{F_i} \underline{B} \cdot \underline{n} \, d\sigma, \quad \text{wobei } \begin{array}{c} \text{I}_i \\ \text{L}_i \\ \text{F}_i \end{array} \quad \text{(VI.40)}$$


wobei jedem Stromkreis eine Umlaufrichtung zugeordnet wird, in der I_i positiv gezählt wird und die Normale für eine eingespinnnte Fläche F_i im Rechtsschraubensinn definiert ist (vgl. Fig.).

Φ_i können wir mit $\underline{B} = \text{rot } \underline{A}$ folgendermaßen umformen

$$\Phi_i = \int_{F_i} \underline{B} \cdot \underline{n} \, d\sigma = \int_{F_i} \text{rot } \underline{A} \cdot \underline{n} \, d\sigma = \int_{L_i} \underline{A} \cdot d\underline{s}. \quad \text{(VI.41)}$$

Betrachtet man speziell für \underline{A} dasjenige Feld \underline{A}_j , welches von einem Strom I_j im j -ten Stromkreis hervorgerufen wird, so erhält man aus (VI.41) und (VI.33)

$$L_{ij} I_j = \frac{1}{c} \oint_{L_j} \underline{A}_j \cdot d\underline{s}, \quad \text{(VI.42)}$$

oder durch Multiplikation mit I_i

$$I_i L_{ij} I_j = \frac{1}{c} I_i \oint_{L_j} \underline{A}_j \cdot d\underline{s}. \quad \text{(VI.43)}$$

Beachte, dass die Ströme immer mit der divergenzfreien Dichte \underline{j} gebildet werden. Deshalb gilt auch

$$I_i = \int \underline{j}_i \cdot \underline{n} \, d\sigma,$$

wobei über einen beliebigen Querschnitt durch den i -ten Stromkreis zu integrieren ist. Damit können wir (VI.43) auch so schreiben:

$$I_i L_{ij} I_j = \frac{1}{c} \int \underline{J}_i \cdot \underline{A}_j dV, \quad (\text{VI.44})$$

wobei über den ganzen Raum integriert werden kann, da \underline{J}_i nur im i -ten Stromkreis von Null verschieden ist. Ist \underline{H}_i das von I_i hervorgerufene Feld, so ist nach (VI.12)

$$\text{rot } \underline{H}_i = \frac{4\pi}{c} \underline{J}_i.$$

In (VI.44) eingesetzt gilt

$$\begin{aligned} I_i L_{ij} I_j &= \frac{1}{4\pi} \int \underline{A}_j \text{rot } \underline{H}_i dV \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \underline{H}_i \cdot \text{rot } \underline{A}_j dV = \frac{1}{4\pi} \int \underline{H}_i \cdot \underline{B}_j dV \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \mu \underline{H}_i \cdot \underline{H}_j dV \end{aligned} \quad (\text{VI.45})$$

für ein Materialgesetz $\underline{B} = \mu \underline{H}$.

Da der letzte Ausdruck in i und j symmetrisch ist, gilt

$$L_{ij} = L_{ji}.$$

Für $i=j$ erhalten wir speziell

$$L_{ii} I_i^2 = \frac{1}{4\pi} \int \mu \underline{H}_i^2 dV \geq 0. \quad (\text{VI.46})$$

Deshalb sind die Selbstinduktionskoeffizienten L_{ii} positiv.

Schlusslich behandeln wir noch die magnetische Feldenergie:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mu \underline{H}^2 dV = \frac{1}{8\pi} \int \left(\sum_i \underline{H}_i \right) \left(\sum_j \underline{B}_j \right) dV$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_i L_{ij} I_j \geq 0. \quad (\text{VI.47})$$

Die L_{ij} bilden also die Koeffizienten einer positiv definiten quadratischen Form.

Setzen wir in (VI.44) den Integralausdruck

$$\underline{A}_j = \frac{1}{c} \int \frac{\underline{J}(x',t)}{|x-x'|} d\vec{x}'$$

ein, so ergibt sich auch

$$I_i L_{ij} I_j = \int \frac{\underline{J}(x,t) \cdot \underline{J}(x',t)}{|x-x'|} d\vec{x} d\vec{x}'. \quad (\text{VI.48})$$

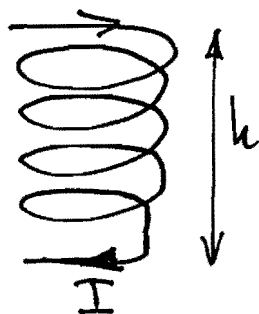
In guter Näherung ist

$$\underline{J}(x,t) = I_i(t) \underline{s}_i(x), \quad \underline{s}_i(x): \text{stationäre Ströme,} \quad (\text{VI.49})$$

und damit gilt auch

$$L_{ij} = \int \frac{\underline{s}_i(x) \cdot \underline{s}_j(x')}{|x-x'|} d\vec{x} d\vec{x}'. \quad (\text{VI.50})$$

Beispiel. Selbstinduktion einer Spule



Das Feld ist nach (III.2.5) $\underline{B} = \frac{4\pi N}{h} \frac{I}{c}$.

Es sei a der Radius der Spule. Nach (VI.47) ist (es sei $\mu=1$):

$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{8\pi} \int \underline{B}^2 dV = \frac{1}{8\pi} \underbrace{\pi a^2 h}_{\text{Volumen}} \cdot \frac{16\pi^2 N^2}{h^2} \frac{I^2}{c^2}.$$

Also gilt

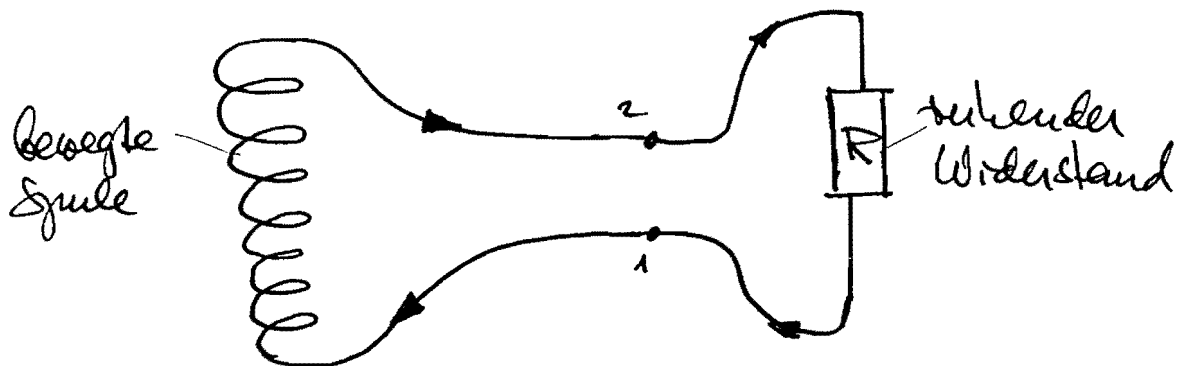
$$L = \frac{1}{c^2} \frac{\Lambda^2}{h}, \quad \Lambda = 2\pi a N = \text{Gesamtlänge des Drahtes.} \quad (\text{VI.51})$$

Selbstind.: LL Bd VIII, §33

C. Das Dynamo-Prinzip

Als Methode zur Erzeugung von elektrischen Spannungen wollen wir nun auch das Dynamo-Prinzip im Rahmen der quasistationären Näherung sorgfältig diskutieren, da dies oft nicht korrekt getan wird (s. unten).

Um dieses Prinzip zu verstehen, betrachten wir eine Spule aus gut leitendem Material, welche sich im Vergleich zu c langsam bewegt; dann ist die quasistationäre Näherung erlaubt. An die Spule sei noch ein "Verbraucher" in Form eines Ohmschen Widerstandes R geschaltet (s. Fig.).



Wird ein Stück des Leiters mit der Geschwindigkeit \underline{v} bewegt, so wirkt auf die im Leiter befindlichen Ladungen die Kraft $\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \wedge \underline{B}$. Wir werden deshalb für bewegte Leiter das Ohmsche Gesetz folgendermassen verallgemeinern:

$$\underline{J} = \sigma \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \wedge \underline{B} \right). \quad (\text{VI.52})$$

Mit der Zerlegung $\underline{E} = \underline{E}_c + \underline{E}_s$ und der Abkürzung $\underline{E}_s = \frac{1}{c} \underline{v} \wedge \underline{B}$ ("Schiebfeld") schreiben wir auch

$$\underline{J} = \sigma (\underline{E}_c + \underline{E}_i + \underline{E}_s) \equiv \sigma \underline{E}^* \quad (\text{VI.53})$$

Für den in der Figur dargestellten Stromkreis mit der bewegten Spule und dem "Verdrahtet" R sei

$$\Phi = \int_{F_t} \underline{B}(\underline{x}, t) \cdot d\underline{s}$$

der Fluss des \underline{B} -Feldes durch eine in den Stromkreis hineingedeckte und mit der Bewegung der Spule mitgeführte Fläche F_t . Nach dem Satz auf S. II.45 und $\text{div } \underline{B} = 0$ gilt

$$\frac{1}{c} \dot{\Phi} = \frac{1}{c} \int_{F_t} \partial_t \underline{B} \cdot d\underline{s} - \oint_{\partial F_t} \underline{E}_s \cdot d\underline{s} \quad (\text{VI.54})$$

Wird mit $\underline{E}_i = -\frac{1}{c} \dot{\underline{B}}$ ergibt sich

$$\frac{1}{c} \dot{\Phi} = - \oint_{\partial F_t} (\underline{E}_i + \underline{E}_s) \cdot d\underline{s} = - \frac{1}{c} \int_{\partial F_t} \underline{E}^* \cdot d\underline{s} \quad (\text{VI.55})$$

In diesem Wegintegral dürfen wir den Anteil von 2 über R nach 1 vernachlässigen, da dort \underline{E}_s verschwindet und \underline{E}_i sehr klein ist. Somit gilt

$$- \int_1^2 (\underline{E}_i + \underline{E}_s) \cdot d\underline{s} = \frac{1}{c} \dot{\Phi} \quad ,$$

wobei von 1 über die Spule nach 2 integriert wird. Für eine grosse Leitfähigkeit in der Spule ist dort annähernd nach (VI.53)

$$\underline{E}_c + \underline{E}_i + \underline{E}_s \approx 0 \quad (\text{in der Spule}).$$

Dies bedeutet, dass die von \underline{E}_s ausgeübte Kraftwirkung auf die Ladungen im Leiter zu Verschiebungen führt, welche ein Coulomb'sches Gefüge aufbauen.

besser: im Anschluss an (0.55)

mit

$$\frac{1}{c} \dot{\phi} = - \int_{\partial F_t} \underline{E}^* \cdot d\underline{s} \quad , \quad \underline{E}^* = \underline{E} + \underline{E}_s$$

$$\equiv - \text{EMK}$$

in Spule: $\underline{E}^k \approx 0$, $\text{EMK} = IR$

\Rightarrow

$$IR = - \frac{1}{c} \dot{\phi}$$

Damit haben wir jetzt ^{-VI.17-}

$$\int_{\text{Spule}} \underline{E}_c \cdot d\underline{s} = \frac{1}{c} \dot{\Phi}. \quad (\text{VI.56})$$

Die Spannung U zwischen 1 und 2 ist nun

$$U = - \int_1^2 \underline{E}_c \cdot d\underline{s} \quad (\text{VI.57})$$

und somit gilt nach (VI.56)

$$U = - \frac{1}{c} \dot{\Phi}. \quad (\text{VI.58})$$

(Eine naive Beobachtung führt oft gerade zum falschen Verständnis!)

Benutzen wir jetzt auch (VI.26), so gilt auch

$$U = \int \underline{E}_c \cdot d\underline{s} = IR.$$

Widerstand ($z \rightarrow 1$)

Die beiden Beziehungen

$$\boxed{U = IR = - \frac{1}{c} \dot{\Phi}} \quad (\text{VI.59})$$

beschreiben die experimentellen Erfahrungen des Stromes und der von der "Dynamomaschine" erzeugten Spannung U .

Ergänzend sei auch folgendes beigefügt. Der Fluss Φ setzt sich aus zwei Anteilen zusammen

$$\Phi = \Phi_a + \Phi_I, \quad (\text{VI.60})$$

wobei Φ_a der Fluss zu einem von aussen vorgegebenen Feld \underline{B}_a ist,

$$\Phi_a(t) = \int_{F_t} \underline{B}_a \cdot d\underline{\sigma}, \quad (\text{VI.61})$$

und Φ_I den Fluss des durch den Strom I durch die Spule selbst erzeugten Feldes \underline{B}_I bezeichnet. Nun ist nach (VI.33)

$$\frac{1}{c} \Phi_I = L(t) I, \quad (\text{VI.62})$$

wobei der Selbstinduktionskoeffizient $L(t)$ wegen der Bewegung der Spule von der Zeit abhängen wird. Somit gilt

$$\Phi(t) = c L(t) I(t) + \Phi_a(t). \quad (\text{VI.63})$$

Es ist natürlich,

$$U_a(t) = - \frac{1}{c} \dot{\Phi}_a \quad (\text{VI.64})$$

als eine "fest vorgegebene" Spannung einzuführen. Aus (VI.59) wird dann

$$U(t) = U_a(t) - \frac{d}{dt} [L(t) I(t)],$$

oder

$$\boxed{R I(t) + \frac{d}{dt} [L(t) I(t)] = U_a(t)}. \quad (\text{VI.65})$$

Die "Dynamomaschine" kann also nur dann als vorgegebene Spannung $U(t) = U_a(t)$ beobachtet werden, wenn das Glied $(L I)$ vernachlässigbar ist. Dies ist dann der Fall, wenn der "Aussenwiderstand" R gross ist.

Anhang: Coulomb-Erdung

Nach (II.1.28) können wir die elektromagnetischen Felder folgender Massen durch Potentiale φ , \underline{A} darstellen:

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \dot{\underline{A}}, \quad \underline{B} = \underline{\nabla} \wedge \underline{A}. \quad (\text{A.1})$$

Neben der früher benutzten Lorenzbedingung ist gelegentlich auch die Coulomb-Erdung üblich, bei der

$$\operatorname{div} \underline{A} = 0 \quad (\text{A.2})$$

verlangt wird. Da bei einer Umwertung (II.1.16) $\operatorname{div} \underline{A}$ in $\operatorname{div} \underline{A} + \Delta \Lambda$ übergeht, lässt sich (A.2) immer erreichen.

In einer beliebigen Erdung lauten die inhomogenen Feldgleichungen (II.1.20) in Raum und Zeit zerfallen

$$\Delta \varphi + \frac{1}{c} \operatorname{div} \dot{\underline{A}} = 4\pi \rho, \quad (\text{A.3})$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{A} - \Delta \underline{A} + \frac{1}{c} \operatorname{grad} \dot{\varphi} + \frac{1}{c^2} \ddot{\underline{A}} = \frac{4\pi}{c} \underline{J}. \quad (\text{A.4})$$

In der Coulombbedingung wird daraus

$$\Delta \varphi = -4\pi \rho, \quad (\text{A.5})$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \underline{A} = -\frac{4\pi}{c} \underline{J} + \frac{1}{c} \underline{\nabla} \dot{\varphi}. \quad (\text{A.6})$$

Nach (A.5) ist φ das instantane Coulombpotential

$$\varphi(\underline{x}, t) = \int \frac{\rho(\underline{x}', t)}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x' \quad (\text{A.7})$$

(daher der Name "Coulomb-Erdung"). Der letzte Term rechts in (A.4) ist damit und der Kontinuitätsgleichung

$$\underline{\nabla} \dot{\varphi} = \underline{\nabla} \int \frac{\dot{\rho}(\underline{x}', t)}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x' = -\underline{\nabla} \int \frac{\underline{\nabla}' \cdot \underline{J}(\underline{x}', t)}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x'. \quad (\text{A.8})$$

Nun zerlegen wir den Strom in einen "longitudinalen" und in einen "transversalen" Teil:

$$\underline{J} = \underline{J}_{\parallel} + \underline{J}_{\perp} \quad , \quad (\text{A.9})$$

sodass

$$\text{rot } \underline{J}_{\parallel} = 0, \quad \text{div } \underline{J}_{\perp} = 0. \quad (\text{A.10})$$

Dies lässt sich explizit beweisen. Wir zeigen weiter unten, dass

$$\underline{J}_{\parallel} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int \frac{\nabla' \cdot \underline{J}(\underline{x}', t)}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x' \quad , \quad (\text{A.11})$$

$$\underline{J}_{\perp} = \frac{1}{4\pi} \nabla \wedge \int \frac{\nabla' \wedge \underline{J}(\underline{x}', t)}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x'. \quad (\text{A.12})$$

Nach (A.8) und (A.11) ist also

$$\nabla \dot{\phi} = 4\pi \underline{J}_{\parallel} \quad , \quad (\text{A.13})$$

und folglich wird aus (A.6) mit (A.9)

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \underline{A} = -\frac{4\pi}{c} \underline{J}_{\perp}. \quad (\text{A.14})$$

\underline{B} ist wegen $\text{div } \underline{B} = 0$ transversal. Wir zerlegen auch \underline{E} in $\underline{E}_{\parallel}$ und \underline{E}_{\perp} :

$$\underline{E}_{\parallel} = -\nabla \phi \quad , \quad \underline{E}_{\perp} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}. \quad (\text{A.15})$$

Nun betrachten wir noch die Feldenergie

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (\underline{E}^2 + \underline{B}^2) dV = \frac{1}{8\pi} \int (\underline{E}_{\perp}^2 + \underline{B}^2) dV + \frac{1}{8\pi} \int \underline{E}_{\parallel}^2 dV.$$

Der letzte Term ist nach (A.15)

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \int \underline{E}_{\parallel}^2 dV &= \frac{1}{8\pi} \int |\nabla \phi|^2 dV = -\frac{1}{8\pi} \int \phi \Delta \phi dV = \frac{1}{2} \int \phi \rho dV \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x d^3x' \frac{\rho(\underline{x}) \rho(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|}. \end{aligned}$$

Dieser longitudinale Anteil ist also gleich der Coulombenergie der Ladungsverteilung ρ .

Das Resultat dieser Betrachtung wollen wir festhalten

$$W = W_{\perp} + \text{Coulombenergie} ,$$

$$W_{\perp} = \frac{1}{8\pi} \int (\underline{E}_{\perp}^2 + \underline{B}^2) dV = \frac{1}{8\pi} \int \left[\frac{1}{c^2} \dot{\underline{A}}^2 + |\nabla \wedge \underline{A}|^2 \right] dV. \quad (\text{A.16})$$

Dieses spielt auch in der QM II bei der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes eine wichtige Rolle.

Ergänzung: Zerlegung eines Vektorfeldes in quellenfreie und wirbelfreie Anteile

Im folgenden sollen alle Felder im Unendlichen hinreichend rasch abfallen. Dann gilt der

Satz: Jedes Vektorfeld auf \mathbb{R}^3 , welches im Unendlichen hinreichend rasch verschwindet, kann eindeutig in der Form

$$\underline{w} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \underline{a} \quad (\text{A.17})$$

dargestellt werden. (Spezialfall der Hodge-Zerlegung.)

Beweis. 1. Existenz: Für eine Zerlegung (A.17) gilt notwendigerweise

$$\text{div } \underline{w} = \Delta \varphi. \quad (\text{A.18})$$

Sei nun umgekehrt φ eine Lösung dieser Gleichung (welche immer existiert) und $\underline{v} = \underline{w} - \text{grad } \varphi$, so erfüllt \underline{v} die Gleichung $\text{div } \underline{v} = 0$. Folglich existiert ein Vektorfeld \underline{a} mit $\underline{v} = \text{rot } \underline{a}$ und die Existenz einer Zerlegung (A.17) ist bewiesen. Nach (A.18) ist eine Lösung von φ

$$\varphi(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{div} \underline{w}(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d\underline{x}' \quad (\text{A.19})$$

Ferner erfüllt \underline{a} die Gl.

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{a} = \operatorname{rot} \underline{v} = \operatorname{rot} \underline{w}.$$

Für \underline{a} können wir $\operatorname{div} \underline{a} = 0$ verlangen. Dann gilt

$$\Delta \underline{a} = -\operatorname{rot} \underline{w} \quad (\text{A.20})$$

mit der Lösung

$$\underline{a}(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{rot} \underline{w}(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d\underline{x}' \quad (\text{A.21})$$

2. Eindeutigkeit: Für eine Zerlegung (A.17) ist mit $\underline{v} = \operatorname{rot} \underline{a}$

$$\underline{w} = \operatorname{grad} \varphi + \underline{v}, \quad \operatorname{div} \underline{v} = 0.$$

Da $\operatorname{div}(\varphi \underline{v}) = \underbrace{(\operatorname{div} \underline{v}) \varphi}_{=0} + \underline{v} \cdot \operatorname{grad} \varphi$

gilt mit dem Gauss'schen Satz

$$\int_{\mathbb{R}^3} \underline{v} \cdot \operatorname{grad} \varphi dV = 0. \quad (\text{A.22})$$

Legen nun zwei verschiedene Zerlegungen (mit 1, 2 indiziert) vor, so gilt

$$0 = (\underline{v}_1 - \underline{v}_2) \cdot \operatorname{grad}(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Multiplizieren wir dies mit $(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$, integrieren über \mathbb{R}^3 und benutzen (A.22), so kommt

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\underline{v}_1 - \underline{v}_2|^2 dV = 0 \implies \underline{v}_1 = \underline{v}_2 \implies \operatorname{grad} \varphi_1 = \operatorname{grad} \varphi_2.$$

Der Beweis hat uns auch eine explizite Form für die Zerlegung (A.17) geliefert: □

$$\underline{w}(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad}_{\underline{x}} \int \frac{\operatorname{div} \underline{w}(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d\underline{x}' + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}_{\underline{x}} \int \frac{\operatorname{rot} \underline{w}(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d\underline{x}'. \quad (\text{A.23})$$