

Kap. V. Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

5.1. Maxwell'sche Gleichungen in Medien

Die Felder \underline{E} und \underline{B} in makroskopischen Körpern sind räumliche Mittelwerte der mikroskopischen Felder, welche ihrerseits die Maxwell'schen Gleichungen mit den mikroskopischen Ladungen und Strömen (ρ, \underline{J}) erfüllen. Durch Mittelwertbildung erhalten wir aus diesen Gleichungen wie in den Abschnitten I.10 und III.4:

$$\operatorname{div} \underline{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \underline{E} + \frac{1}{c} \dot{\underline{B}} = 0, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \underline{E} = 4\pi \langle \rho \rangle, \quad \operatorname{rot} \underline{B} - \frac{1}{c} \dot{\underline{E}} = \frac{4\pi}{c} \langle \underline{J} \rangle.$$

Im stationären Fall hatten wir $\langle \underline{J} \rangle = \underline{J}_e + c \operatorname{rot} \underline{H}$, $\langle \rho \rangle = \rho_e - \operatorname{div} \underline{P}$ ($\underline{J}_e =$ Stromdichte der Leitungs Ladungen, $\rho_e =$ Leitungs Ladungsdichte, $\underline{H} =$ Magnetisierungsdichte, $\underline{P} =$ Polarisationsladungsdichte).

\underline{J}_e und ρ_e erfüllen separat die Kontinuitätsgleichung. Da überdies die Magnetisierungsdichte $c \operatorname{rot} \underline{H}$ divergenzfrei ist, erwarten wir im zeitabhängigen Fall bei der Mittelung

$$\langle \rho \rangle = \rho_e - \operatorname{div} \underline{P}, \quad \langle \underline{J} \rangle = \underline{J}_e + c \operatorname{rot} \underline{H} + \dot{\underline{P}}. \quad (1.2)$$

Dann ist die Kontinuitätsgleichung auch für die Zusatzgrößen ρ_e, \underline{J}_e erfüllt. Diese Gleichungen kann man auch durch eine Wiederholung unserer früheren Überlegungen in I.10 und III.4 bekommen.

Bemerken wir wieder die Hilfsfelder

$$\underline{D} = \underline{E} + 4\pi \underline{P}, \quad \underline{H} = \underline{B} - 4\pi \underline{M}, \quad (1.3)$$

so können wir die inhomogenen Maxwell-Gl. in folgender Form schreiben

$$\operatorname{div} \underline{D} = 4\pi \rho_e, \quad \operatorname{rot} \underline{H} = \frac{4\pi}{c} \underline{J}_e + \frac{1}{c} \dot{\underline{D}}. \quad (1.4)$$

Für räumlich und zeitlich nicht zu rasch veränderliche und nicht zu starke Felder sind die Beziehungen zwischen $\underline{P}, \underline{M}$ und $\underline{E}, \underline{B}$ linear

$$\underline{P} = \chi_e \underline{E}, \quad \underline{M} = \chi_m \underline{B}$$

und somit auch zwischen $\underline{D}, \underline{H}$ und $\underline{E}, \underline{B}$:

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu} \underline{B}, \quad \underline{D} = \epsilon \underline{E}. \quad (1.5)$$

(Für eine Verallgemeinerung siehe Kap. VI.)

Wir diskutieren an dieser Stelle auch noch den Energie-satz. Aus den Maxwell'schen Gleichungen für $\operatorname{rot} \underline{E}$ und $\operatorname{rot} \underline{H}$ erhält man

$$\underline{E} \cdot \operatorname{rot} \underline{H} - \underline{H} \cdot \operatorname{rot} \underline{E} = \frac{4\pi}{c} \underline{E} \cdot \underline{J}_e + \frac{1}{c} \underline{E} \cdot \dot{\underline{D}} + \frac{1}{c} \underline{H} \cdot \dot{\underline{B}}. \quad (1.6)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist nach einer bekannten Identität gleich $-\operatorname{div} \underline{E} \wedge \underline{H}$. Mit der Abkürzung

$$\underline{S} = \frac{c}{4\pi} \underline{E} \wedge \underline{H} \quad (1.7)$$

erhält man aus den Maxwell'schen Gleichungen also

$$\left[\frac{1}{4\pi} (\underline{E} \cdot \dot{\underline{D}} + \underline{H} \cdot \dot{\underline{B}}) + \operatorname{div} \underline{S} = - \underline{J}_e \cdot \underline{E} \right. \quad (1.8)$$

Diese Beziehung gilt allgemein und hat folgende Inter-

pretation. Ein gegebenes System (z.B. ein Dielektrikum zwischen Kondensatorplatten) sei in einem Gebiet G (∂G befinde sich im materiellen Vakuum). Durch Integration von (1.8) über G erhalten wir

$$-\delta t \int_{\partial G} \underline{S} \cdot d\underline{\sigma} = \int_G \left[\frac{1}{4\pi} (\underline{E} \cdot \delta \underline{D} + \underline{H} \cdot \delta \underline{B}) + \underline{J}_e \cdot \underline{E} \delta t \right] dV. \quad (1.9)$$

Die linke Seite gibt die Energie an, welche in der kleinen Zeit δt in das System fließt. Diese teilt sich auf in die Arbeit, welche das \underline{E} -Feld an der Stromdichte \underline{J}_e in der Zeit δt leistet und die Arbeit δA , die für die Änderungen $\delta \underline{D}$ und $\delta \underline{B}$ von \underline{D} und \underline{B} benötigt wird. Letztere ist nach (1.9)

$$\delta A = \int \frac{1}{4\pi} [\underline{E} \cdot \delta \underline{D} + \underline{H} \cdot \delta \underline{B}] dV. \quad (1.10)$$

Dies ist i.a. kein exaktes Differential (was z.B. in der Thermodynamik wichtig ist). Wenn aber die instantanen phänomenologischen Beziehungen (1.5) gültig sind, ist δA das Differential

$$\delta A = \delta \int u dV, \quad u = \frac{1}{8\pi} (\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{B} \cdot \underline{H}). \quad (1.11)$$

Ferner können wir dann (1.8) in folgender Form schreiben

$$\dot{u} + \text{div} \underline{S} = - \underline{J}_e \cdot \underline{E}, \quad (1.12)$$

welche den Energiesatz (II.3.7) der mikroskopischen Theorie verallgemeinert.

s.2 Elektrodynamik bewegter Körper

Die Gleichungen des letzten Abschnitts beziehen sich auf ruhende Körper. Nach dem Vorbild von Hunkovskii wollen wir nun auch die makroskopische Elektrodynamik bewegter Körper formulieren.

Die Gleichungen (1.2) können wir vierdimensional zusammenfassen:

$$\langle j^{\mu} \rangle = j_{el}^{\mu} + j_{pol}^{\mu} \quad , \quad (2.1)$$

$$j_{el}^{\mu} = (c \rho_e, \underline{J}_e), \quad j_{pol}^{\mu} = (c \rho_{pol}, \underline{J}_{pol}), \quad (2.2)$$

wo $\rho_{pol} = -\operatorname{div} \underline{P}$, $\underline{J}_{pol} = c \operatorname{rot} \underline{M} + \dot{\underline{P}}$ den Polarisationsstrom j_{pol}^{μ} ausmachen. Diese Ausdrücke zeigen, dass j_{pol}^{μ} eine Vierdivergenz ist:

$$j_{pol}^{\mu} = c \partial_{\nu} M^{\mu\nu} \quad , \quad M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu} \quad , \quad (2.3)$$

$$\text{wo} \quad (M^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -P_1 & -P_2 & -P_3 \\ \cdot & 0 & H_3 & -H_2 \\ \cdot & \cdot & 0 & H_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$M^{\mu\nu}$ ist der Polarisationstensor. Seine Antisymmetrie zeigt

-V.5-

die Divergenzfreiheit des Potentialsstromes nach sich

$$\partial_\mu j^{\mu 4} = c \partial_\mu \partial_\nu H^{\mu\nu} = 0. \quad (2.5)$$

Die Hilfsfelder \underline{D} und \underline{H} können wir ebenfalls zu einem streifen Kürschakow-Tensor zusammenfassen:

$$(G^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -D_1 & -D_2 & -D_3 \\ \cdot & 0 & -H_3 & H_2 \\ \cdot & \cdot & 0 & H_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Die Gl. (1.3) sind dann äquivalent zu

$$G^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + 4\pi H^{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

und die inhomogenen Maxwell-Gl. (1.4) können so geschrieben werden:

$$\partial_\nu G^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^{\mu 4}, \quad (2.8)$$

woraus sich auch unmittelbar die Erhaltung von $j^{\mu 4}$ ergibt.

Die homogenen Gl. laufen natürlich gleich wie im Vakuum

$$\partial_\nu *F^{\mu\nu} = 0. \quad (2.9)$$

Nun müssen wir auch noch die konstitutiven Gl. (1.5) kovariant schreiben. Bezeichnet u^μ wieder die Vierergeschwindigkeit des Körpers, dann lauten die gesuchten Beziehungen

$$G^{\mu\nu} u_\nu = \epsilon F^{\mu\nu} u_\nu, \quad *G^{\mu\nu} u_\nu = \frac{1}{\mu} *F^{\mu\nu} u_\nu. \quad (2.10)$$

In der Tat reduzieren sich diese Gl. im Ruhesystem des Körpers auf (1.5).

In einem bewegten System spaltet man j_μ^k zweifach in konvektive und Leitungsanteile auf, denn für einen Nichtleiter ist zwar im Ruhesystem $\underline{I}_L = 0$, aber in einem bewegten System ist die räumliche Komponente von j_μ^k gleich $\rho \underline{v}$. Den Leitungsstrom definiert man zweifach durch

$$J^\mu = j_\mu^k - (j_\mu^0 u_\nu) u^\mu. \quad (2.11)$$

Im Ruhesystem ist $J^\mu = (0, \underline{I}_L)$. Deshalb reduziert sich die folgende Gl.

$$J^\mu = \sigma F^{\mu\nu} u_\nu \quad (2.12)$$

im Ruhesystem auf das Ohm'sche Gesetz

$$\underline{I}_L = \sigma \underline{E}. \quad (2.13)$$

Die $(3+1)$ -Zerlegung von (2.12) haben wir schon früher

angegeben (s. (III.5.24)).

Die Grundgleichungen (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) und (2.12) der Elektrodynamik bewegter Körper sind offensichtlich lorentzkovariant. Bis auf die folgende Anwendung wollen wir diese nicht weiter diskutieren.

Aus dem Transformationsgesetz für \underline{M} folgt (Üb.)

$$\begin{aligned}\underline{P}' &= \gamma \left[\underline{P} + \underline{v} \wedge \underline{M} + \frac{(\underline{v} \cdot \underline{P}) \underline{v}}{v^2} \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \right], \\ \underline{M}' &= \gamma \left[\underline{M} - \underline{v} \wedge \underline{P} + \frac{(\underline{v} \cdot \underline{M}) \underline{v}}{v^2} \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \right].\end{aligned}\quad (2.14)$$

Davon besagt die zweite Gl., dass ein bewegter polarisierter Körper auch magnetisiert ist. Dies ist nicht besonders überraschend, da bewegte Ladungsverteilungen Ströme erzeugen. Überraschender ist vielmehr, dass nach (2.14) ein magnetisierter bewegter Körper auch elektrisch polarisiert ist. Es ist jedoch zu beachten, dass nach dem Transf. Gesetz für $\underline{j}'_{\text{pol}}$ folgendes gilt

$$\underline{j}'_{\text{pol}} = \gamma \left(\underline{j}_{\text{pol}} + \underline{J}_{\text{rot}} \underline{v} / c \right). \quad (2.15)$$

Daraus folgt, dass auch für $\underline{j}_{\text{pol}} = 0$ trotzdem $\underline{j}'_{\text{pol}} \neq 0$ ist. Aufgrund dieses Resultates müsste ein bewegter Stab von magnetisiertem Material eine elektrische Kraft senkrecht zu \underline{H} und \underline{v} ausüben. Das hat man tatsächlich beobachtet.

→ Fortsetzung des Skript -202- -V.8-

S. 3

§ 32. Cherenkov Strahlung (elementare Theorie)

Ein Teilchen, das sich im Vakuum frei bewegt strahlt natürlich nicht (s. (31.22)). Falls sich aber ein Teilchen gleichförmig in einem Medium bewegt, so wird es strahlen, sobald seine Geschwindigkeit grösser ist als die Phasengeschwindigkeit des Lichtes im betreffenden Medium. Diese Strahlung wurde 1934 von Cherenkov entdeckt und 1937 von Frank und Tamm theoretisch erklärt. (Diese drei Physiker erhielten dafür 1958 den Nobelpreis.)

Die Cherenkov-Strahlung hat heute eine grosse praktische Bedeutung, insbesondere für die Identifizierung von hochenergetischen Elementarteilchen (Cherenkov-Zähler).

Ich gebe in diesem Abschnitt nur die elementaren Aspekte der Theorie und werde später nochmals auf das Thema zurückkommen.

Wir betrachten ein homogenes, isotropes und unendlich ausgedehntes Medium mit $\mu = 1$. Frequenzabhängigkeiten der DK ϵ (Dispersion) werden in diesem Abschnitt weggelassen. In diesem Medium bewege sich rein translatorisch eine kleine Ladung (mit der Ladungsverteilung ρ_0) in der x -Richtung. Ladungs- und Stromdichte sind dann

$$\begin{aligned} \rho(\underline{x}, t) &= \rho_0(\underline{x} - \underline{v}t), \\ \underline{J}(\underline{x}, t) &= \rho(\underline{x}, t) \underline{v}, \quad \underline{v} = (v, 0, 0). \end{aligned} \quad (32.1)$$

Da ϵ konstant ist, lauten die Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{B} &= 0, \quad \operatorname{rot} \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0, \\ \operatorname{div} \underline{E} &= 4\pi\rho/\epsilon, \quad \operatorname{rot} \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{J} + \frac{\epsilon}{c} \dot{\underline{E}}. \end{aligned} \quad (32.2)$$

Die homogenen Gleichungen gestatten uns wieder Potentiale einzuführen:

$$\underline{B} = \text{rot } \underline{A}, \quad \underline{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \dot{\underline{A}}. \quad (32.3)$$

Setzen wir diese Darstellungen in die inhomogenen Gleichungen ein, so kommt jetzt

$$\Delta \varphi + \frac{1}{c} \text{div } \dot{\underline{A}} = -4\pi \rho / \epsilon, \quad (32.4)$$

$$\Delta \underline{A} - \frac{\epsilon}{c^2} \ddot{\underline{A}} - \text{grad} \left(\text{div } \underline{A} + \frac{\epsilon}{c} \dot{\varphi} \right) = -\frac{4\pi}{c} \underline{J}.$$

Die Lorenzbedingung lautet hier

$$\text{div } \underline{A} + \frac{\epsilon}{c} \dot{\varphi} = 0. \quad (32.5)$$

Damit erhalten wir aus (32.4)

$$\left(\Delta - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = -4\pi \rho / \epsilon, \quad (32.6)$$

$$\left(\Delta - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \underline{A} = -\frac{4\pi}{c} \underline{J}.$$

Die Phasengeschwindigkeit der Wellen ist jetzt c/n , $n = \sqrt{\epsilon}$: Brechungsindex.

Da die Inhomogenitäten in (32.6) nach (32.1) in der Form $f(x-vt, y, z)$ von (x, t) abhängen, mache ich auch für \underline{A} und φ diesen Ansatz:

$$\underline{A}, \varphi \sim f(x-vt, y, z). \quad (32.7)$$

Nun ist

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$J_y = J_z = 0.$$

Deshalb ist

$$\left(\Delta - \frac{n^2 v^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) A_{y,z} = 0.$$

Die homogene Lösung, die man immer zur retardediten addieren kann, setzen wir gleich Null. Dann ist

$$A_y = A_z = 0, \quad (32.8)$$

Für A_x folgt

$$(1 - v^2/c^2) \partial_x^2 A_x + \partial_y^2 A_x + \partial_z^2 A_x = - \frac{4\pi \rho}{c} v \quad (32.9)$$

und für φ

$$(1 - v^2/c^2) \partial_x^2 \varphi + \partial_y^2 \varphi + \partial_z^2 \varphi = - \frac{4\pi}{h^2} \rho, \quad (32.10)$$

Die Lorenzbedingung (32.5) lautet

$$\partial_x A_x - \frac{v^2}{c} v \partial_x \varphi = 0, \quad (32.11)$$

Diese ist erfüllt für

$$\boxed{A_x = v^2 \frac{v}{c} \varphi.} \quad (32.12)$$

Die Gleichung (32.9) für A_x wird damit überflüssig. Es verbleibt uns die Gleichung (32.10) für φ . Mit der Bezeichnung

$$\beta = \frac{v}{c/n} \quad (32.13)$$

lautet diese:

$$\boxed{(1 - \beta^2) \partial_x^2 \varphi + \partial_y^2 \varphi + \partial_z^2 \varphi = - \frac{4\pi}{v^2} \rho.} \quad (32.14)$$

Für $\beta < 1$ ist diese Gleichung elliptisch und beschreibt ein etwas zusammengedrücktes Coulomb-Potential. Bei $\beta = 1$ ändert sich der Charakter der Gleichung; sie wird für $\beta > 1$ hyperbolisch. Diesen Fall wollen wir jetzt untersuchen.

Wir machen die folgende Variablentransformation: $x \mapsto \pi$,

$$\pi = \frac{-x + vt}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \implies \partial_x = - \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \partial_\pi. \quad (32.15)$$

Aus (32.14) wird dann

$$\left[\partial_y^2 \varphi + \partial_z^2 \varphi - \partial_\tau^2 \varphi = -\frac{4\pi}{v^2} \rho_0(-\tau \sqrt{\beta^2 - 1}, y, z), \quad (32.16) \right.$$

Dies ist eine inhomogene Wellengleichung in zwei Raumdimensionen.

Nun suchen wir die retardierte Green-Funktion, definiert durch

$$(\partial_y^2 + \partial_z^2 - \partial_\tau^2) G = -4\pi \delta, \quad (32.17)$$

$$G(\tau) = 0 \quad \text{für } \tau < 0. \quad (32.18)$$

Die Bedingung (32.18) besagt: für $x > vt$ ist $G = 0$. Deshalb erhalten wir mit G die retardierten Felder der bewegten Ladung.

Wir geben unten zwei Herleitungen von G . Das Resultat ist

$$G(y, z, \tau) = \begin{cases} \frac{z}{\sqrt{\tau^2 - y^2 - z^2}} & \text{für } \tau > \sqrt{y^2 + z^2}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (32.19)$$

Herleitungen von (32.19).

Erste Methode: Die Formel (28.15) gilt in beliebigen Dimensionen, d.h.

$$G(x, t) = 4\pi \theta(t) F_{\underline{k}}^{-1} \left[\frac{\sin|\underline{k}|t}{|\underline{k}|} \right]. \quad (32.20)$$

In zwei Dimensionen ($\underline{x} \in \mathbb{R}^2$) ist

$$\begin{aligned} F_{\underline{k}}^{-1} \left[\frac{\sin|\underline{k}|t}{|\underline{k}|} \right] &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\underline{k} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} \frac{\sin kt}{k} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi e^{i kt \cos \varphi}}_{2\pi J_0(kt)} \sin kt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \sin(kt) J_0(kt), \quad (32.21)$$

Diese Fourier-Bessel Transformation schaut man in einer Tabelle nach und findet damit das Resultat (32.19).

Zweite Methode: Wir besprechen jetzt eine andere Methode, welche auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden kann.

Wir fassen die retardierte Greenfunktion für die Wellengleichung in \mathbb{R}^3 , $D_{\text{ret}} = \frac{1}{c} \delta(t - r/c)$, bei festem t als Distribution in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ auf. Für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ ist dann

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) D_{\text{ret}} * u = -4\pi \delta^{(4)} * u = -4\pi u \delta(t). \quad (32.22)$$

Explizit ist

$$D_{\text{ret}} * u = \langle D_{\text{ret}}, u(\underline{x} - \cdot) \rangle = \theta(t) \, ct \int d\Omega_{\underline{n}} u(\underline{x} + ct \underline{n}). \quad (32.23)$$

Die rechte Seite ist natürlich nicht nur für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ erklärt und erfüllt (32.22). Wir betrachten jetzt ein u , das nicht von x_3 abhängt und zeigen, dass die rechte Seite von (32.23) in diesem Fall durch folgenden Ausdruck gegeben ist

$$\theta(t) \, ct \int d\Omega_{\underline{n}} u(\underline{x} + ct \underline{n}) = \mathcal{G} * u, \quad (32.24)$$

wobei \mathcal{G} mit (32.19) übereinstimmt und rechts die Faltung (bei festem t) im \mathbb{R}^2 gemeint ist. Da $\mathcal{G} * u$ nach Konstruktion die Gleichung (32.22) erfüllt und \mathcal{G} für $t < 0$ verschwindet, ist damit (32.19) bewiesen.

Es bleibt die Herleitung von (32.24). Für die folgenden Rechnungen bezeichnen wir zweidimensionale Vektoren mit $\underline{x} = (x_1, x_2)$, etc. Für $t > 0$ lautet die linke Seite von (32.24)

$$4\pi \, ct M(u)(\underline{x}, t) = \frac{1}{ct} \int_{|\underline{y} - \underline{x}| = ct} u(\underline{y}) \, d\sigma. \quad (32.25)$$

Auf der Kugeloberfläche $|\underline{y} - \underline{x}| = ct$ ist

$$y_3 = x_3 \pm \sqrt{c^2 t^2 - (\bar{y} - \bar{x})^2}.$$

Betrachten wir (y_1, y_2) als Parameter für die nördliche Halbkugel so ist dort (Übungsaufgabe):

s. HMTD

$$d\Omega = \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - (\bar{x} - \bar{y})^2}}. \quad (32.26)$$

Für die nördliche Halbkugel durchläuft \bar{y} alle Werte mit $|\bar{y} - \bar{x}| \leq ct$. Die südliche Halbkugel berücksichtigen wir mit einem Faktor 2. Damit wird aus (32.25)

$$4\pi ct H(u)(x, t) = 2 \int_{|\bar{y} - \bar{x}| \leq ct} \frac{u(\bar{y})}{\sqrt{c^2 t^2 - (\bar{x} - \bar{y})^2}} d\bar{y}.$$

Dies beweist (32.24).

Bemerkung:

Aus (32.19) sieht man, dass

$$\text{supp } G = \{ \bar{x}, t \mid \bar{x} \in \mathbb{R}^2, t \geq 0, |\bar{x}| \leq t \}. \quad (32.27)$$

Während für die Wellengleichung im 3-dimensionalen Raum $\text{supp } \text{Det}$ gleich dem Mantel des Vorwärts-Lichtkegels ist (siehe p. 169), ist der Träger von G nach (32.27) gleich dem vollen (abgeschlossenen) Vorwärts-Lichtkegel. Man würde sich klar was dieser Unterschied anschaulich bedeutet.

Nun wählen wir in (32.16) $\varphi_0 = e^{\delta(z)}$, und damit lautet die rechte Seite

$$-\frac{4\pi}{n^2} e^{\delta(\tau \sqrt{\beta^2 - 1})} \delta(y) \delta(z) = -4\pi \delta(\tau) \delta(y) \delta(z) \cdot \frac{e}{n^2 \sqrt{\beta^2 - 1}}.$$

In diesem Fall ist also

$$\varphi = \frac{e}{n^2 \sqrt{\beta^2 - 1}} G, \quad (32.28)$$

d.h.

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{ze}{n^2} \frac{1}{\sqrt{(x-vt)^2 - (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2)}} \quad (32.29)$$

$$\text{für } vt - x > \sqrt{(\beta^2 - 1)(y^2 + z^2)}$$

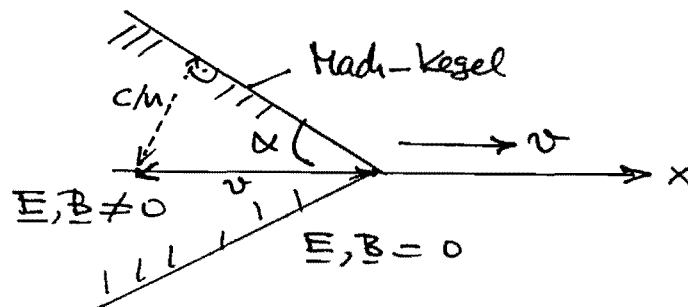
und $\varphi = 0$ sonst.

Für φ erhalten wir also eine Diskontinuitätsfläche, welche durch die Nullstellen der Wurzel in (32.29) bestimmt ist:

$$x = vt - \sqrt{\beta^2 - 1} \rho, \quad \rho = \sqrt{y^2 + z^2}. \quad (32.30)$$

Diese Fläche bewegt sich mit der Geschwindigkeit v .

Für $t=0$ ist $x/\rho = -\sqrt{\beta^2 - 1}$. Die Diskontinuitätsfläche ist also ein Kegel mit (s. Fig.) $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}}$, oder



$$\sin \alpha = 1/\beta = \frac{c/n}{v} = \frac{\text{Phasengeschw. der Wellen}}{\text{Geschwind. des Teilchens}}$$

(32.31)

Dies ist genau wie beim Überschall. Darum nennt man α den Mach'schen Winkel. Ausserhalb des Mach'schen Kegels sind die Felder gleich Null und auf dem Mantel werden diese singulär. Diese Singularität ist unphysikalisch. Sie verschwindet, wenn man die Frequenzabhängigkeit von ϵ berücksichtigt. (Siehe dazu § 35)

Im Vakuum ($\epsilon = 1$) funktioniert für $v > c$ diese Aussage nicht. Dies ist ein Hinweis, dass $v > c$ nicht möglich ist (siehe spez. Relativitätstheorie).

5.4.

§ 33. Reflexion und Brechung in der Maxwell'schen Theorie

33.1. Allgemeines

In diesem Paragraphen betrachten wir Felder in isotropen Nicht-Leitern ($\underline{J}_e, \rho_e = 0$). Frequenzabhängigkeiten von ϵ und μ werden vernachlässigt. Ferner lassen wir, bis auf unsterbliche Grenzflächen, nur homogene Medien zu. Für die Felder \underline{E} und \underline{H} gelten dann die Maxwell'schen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{H} &= 0 & , & \operatorname{rot} \underline{E} + \frac{\mu}{c} \dot{\underline{H}} = 0 & , \\ \operatorname{div} \underline{E} &= 0 & , & \operatorname{rot} \underline{H} - \frac{\epsilon}{c} \dot{\underline{E}} = 0 & . \end{aligned} \quad (33.1)$$

An den Grenzflächen zwischen zwei Medien folgen in bekannter Weise (s. § 5) die Stetigkeitsbedingungen:

$$\underline{E}_{\parallel}, \underline{H}_{\parallel}, \epsilon \underline{E}_{\perp}, \mu \underline{H}_{\perp} \quad \text{stetig.} \quad (33.2)$$

(33.1) und (33.2) sind invariant unter

$$\underline{E} \rightarrow \underline{H}, \quad \underline{H} \rightarrow -\underline{E}, \quad \epsilon \rightarrow \mu, \quad \mu \rightarrow \epsilon. \quad (33.3)$$

(Dies ist der hauptsächlichste Grund für die Wahl von \underline{E} und \underline{H} .)

Setzen wir $\underline{E}' = \sqrt{\epsilon} \underline{E}$, $\underline{H}' = \sqrt{\mu} \underline{H}$, so gelten für \underline{E}' und \underline{H}' die freien Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum, bis auf eine andere Ausbreitungsgeschwindigkeit, nämlich

$$c' = \frac{c}{n}, \quad n = \sqrt{\epsilon \mu} : \text{Brechungsindex.} \quad (33.4)$$

Speziell für $\mu = 1$ erhalten wir die Maxwell-Beziehung

$$n = \sqrt{\epsilon}. \quad (33.4')$$

Diese Beziehung, mit ϵ gemäß der stationären DK, gilt nur für hinreichend lange Wellen, da ϵ frequenzabhängig ist (s. § 34).

Bsp. H_2O : $n \approx 4/3$, $\sqrt{\epsilon} \approx 9$.

Für die gestrichelten Größen können wir die Ergebnisse von § 26 verwenden. Speziell ist für ebene Wellen der Fortpflanzungsrichtung \underline{n} : $\underline{H}' = \underline{n} \wedge \underline{E}'$, d.h.,

$$\sqrt{\mu} \underline{H} = \sqrt{\epsilon} \underline{n} \wedge \underline{E}, \quad (33.5)$$

Sind die Wellen ausserdem noch monodirektional, so sind die Felder in einem festen Punkt

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \text{Re} \left((\underline{A}_1 + i \underline{A}_2) e^{-i\omega t} \right), \\ \underline{H} &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \underline{n} \wedge \underline{E}. \end{aligned} \quad (33.6)$$

(Die Realteile schreiben wir in folgenden meistens nicht.)

Dabei sind die \underline{A}_i , $i=1,2$, reell und senkrecht auf \underline{n} .

Die Energiedichte \underline{S} ist nach (25.2):

$$\underline{S} = \frac{c}{4\pi} \underline{E} \wedge \underline{H} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \underline{n} \left(\underline{A}_1^2 \cos^2 \omega t + \underline{A}_2^2 \sin^2 \omega t + 2 \underline{A}_1 \underline{A}_2 \sin \omega t \cos \omega t \right).$$

Interessant ist nur das Zeitmittel von \underline{S} (mittlere Intensität)

$$\bar{\underline{S}} \equiv \underline{I} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\underline{A}_1^2 + \underline{A}_2^2).$$

Dafür können wir auch schreiben:

$$\underline{I} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \underline{E}^* \cdot \underline{E} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \underline{H}^* \cdot \underline{H} \quad (33.7)$$

(\underline{E} ohne Re!).

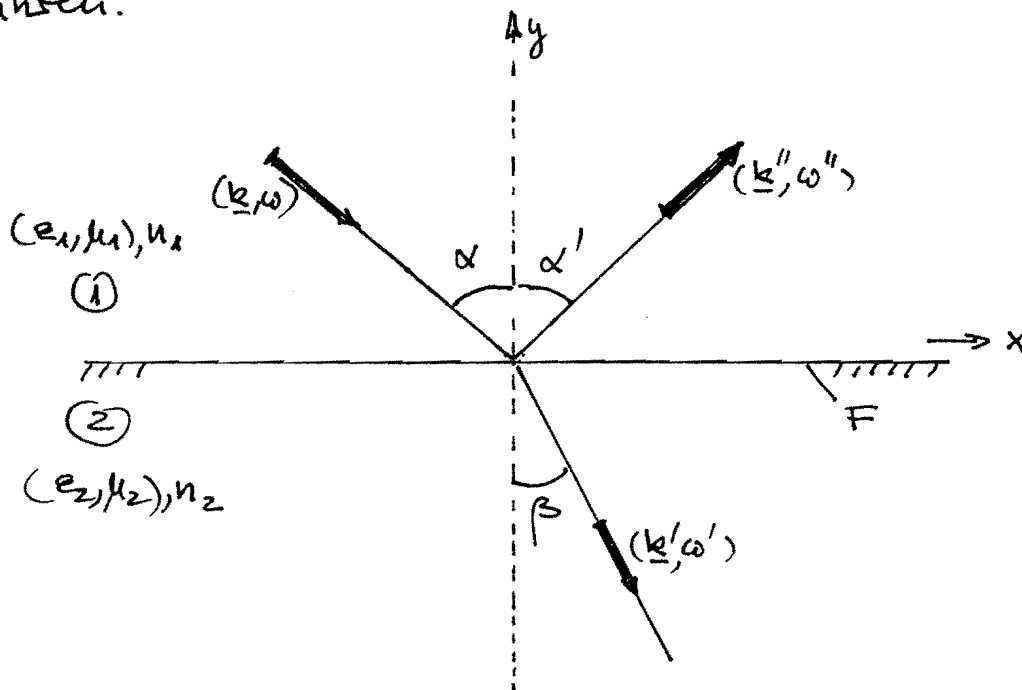
Speziell für $\mu=1$ ist

$$\underline{I} = \frac{c}{8\pi} \underline{n} \underline{E}^* \cdot \underline{E} = \frac{c}{8\pi} \frac{1}{n} \underline{H}^* \cdot \underline{H}. \quad (33.7')$$

Die Polarisationsverhältnisse von ebenen Wellen wurden bereits in §26 besprochen.

33.2. Die Fresnel'schen Formeln

Mit Hilfe der Grenzbedingungen (33.2) berechnen wir nun den Durchgang einer ebenen Welle durch eine ebene Grenzfläche F zweier Medien (s. Fig.). Zur Lösung dieser Randwertaufgabe werden wir neben der gegebenen Welle im zweiten Medium auch eine reflektierte ebene Welle einführen.



Zuerst betrachten wir irgendeine Komponente von \underline{E} oder \underline{H} (eventuell multipliziert mit ϵ oder μ ; siehe (33.2)), für die der einfallende "Strahl" (\underline{k}, ω) nicht verschwindet. Die Stetigkeitsbedingung ist dann von der Form

$$A e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)} + A'' e^{i(\underline{k}'' \cdot \underline{x} - \omega'' t)} = A' e^{i(\underline{k}' \cdot \underline{x} - \omega' t)} \quad \text{für alle } \underline{x} \in F,$$

d.h.

$$A e^{i(\tilde{\underline{k}} \cdot \underline{x} - \omega t)} + A'' e^{i(\tilde{\underline{k}}'' \cdot \underline{x} - \omega'' t)} = A' e^{i(\tilde{\underline{k}}' \cdot \underline{x} - \omega' t)}, \quad (33.8)$$

wobei $\underline{\tilde{k}}, \underline{\tilde{k}'}, \underline{\tilde{k}''}$ die Projektionen von $\underline{k}, \underline{k}', \underline{k}''$ auf die Ebene F bezeichnen. Die Gl. (33.8) gilt natürlich für alle x, t . Da $A \neq 0$ ist, müssen die drei Exponentenfaktoren in (33.8) linear abhängig sein. Deshalb sind alle $\underline{\tilde{k}}$ gleich und alle Wellen haben die gleiche Frequenz ω . Das bedeutet, dass $\underline{k}, \underline{k}'$ und \underline{k}'' in einer Ebene liegen und, da

$$|\underline{\tilde{k}}| = \frac{\omega}{c/n_1} \sin \alpha, \quad |\underline{\tilde{k}'}| = \frac{\omega}{c/n_2} \sin \beta, \quad |\underline{\tilde{k}''}| = \frac{\omega}{c/n_1} \sin \alpha',$$

dass

$$\boxed{\alpha' = \alpha, \quad n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta.} \quad (33.9)$$

Wir erhalten also das Brechungs- und das Reflexionsgesetz. Da (33.9) aus der Stetigkeit einer einzigen Komponente folgt, kann man diese Gesetze schon in der skalaren Wellenoptik erhalten. Die Elektrodynamik liefert aber auch die Polarisations- und Intensitätsverhältnisse.

Um diese zu bestimmen, unterscheiden wir zwei Fälle.

(a) \underline{E} sei senkrecht zur Einfallsebene (x-y-Ebene; s.Fzg.)

Dann hat \underline{E} nur eine z-Komponente und $\underline{H}_{||}$ also nur eine x-Komponente. Für $\underline{n}, \underline{n}', \underline{n}''$ ($\underline{n} = \underline{k}/|\underline{k}|$, etc.) lauten die Komponentendarstellungen:

$$\underline{n} = (\sin \alpha, -\cos \alpha, 0), \quad \underline{n}' = (\sin \beta, -\cos \beta, 0), \quad \underline{n}'' = (\sin \alpha, \cos \alpha, 0).$$

Da $H_x = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} n_y E_z$, etc., ist, haben wir die folgende

Tabelle für (E_z, H_x) :

" E_z "	" H_x "
E_z	$-(\epsilon_1/\mu_1)^{1/2} E_z \cos \alpha$
E_z'	$-(\epsilon_2/\mu_2)^{1/2} E_z' \cos \beta$ (33.10)
E_z''	$(\epsilon_1/\mu_1)^{1/2} E_z'' \cos \alpha$

Die Stetigkeitsbedingungen für E_z und H_x liefern deshalb:

$$E_z + E_z'' = E_z', \quad E_z - E_z'' = E_z' \cdot \left(\frac{\epsilon_2 \mu_1}{\epsilon_1 \mu_2} \right)^{1/2} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha},$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} E_z \\ E_z'' \end{pmatrix} = \frac{E_z'}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_1}{\epsilon_1 \mu_2}} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right). \quad (33.11)$$

(b) H sei senkrecht zur Einfallsebene

Diesen Fall erhält man einfach durch die Substitution (33.3):

$$\begin{pmatrix} H_z \\ H_z'' \end{pmatrix} = \frac{H_z'}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_2 \mu_1}} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right). \quad (33.12)$$

Praktisch wichtig ist nur der Fall $\mu=1$; dann ist nach (33.9)

$$\frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad (33.13)$$

und alle Amplituden-Verhältnisse lassen sich durch die Winkel α, β allein ausdrücken:

$$\begin{aligned} \text{Fall (a):} \quad & \left. \begin{aligned} \frac{E_z''}{E_z} &= \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}, \\ \frac{E_z'}{E_z} &= \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\beta + \alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (33.14a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fall (b):} \quad & \left. \begin{aligned} \frac{H_z''}{H_z} &= \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}, \\ \frac{H_z'}{H_z} &= \frac{2 \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} \end{aligned} \right\} \quad (33.14b) \end{aligned}$$

Die sind die sog. Fresnelschen Formeln. Sie wurden 1875 durch H. A. Lorentz aus der elektromagnetischen Lichttheorie hergeleitet.

zu Fresnel'sche Formeln ($\mu_1 = \mu_2 = 1$)

(a) $\underline{E} \perp$ Einfallsebene:

Die Verhältnisse der Amplituden der elektrischen Felder sind in (33.14a) gegeben. Diese sind in der folgenden Figur gezeigt.

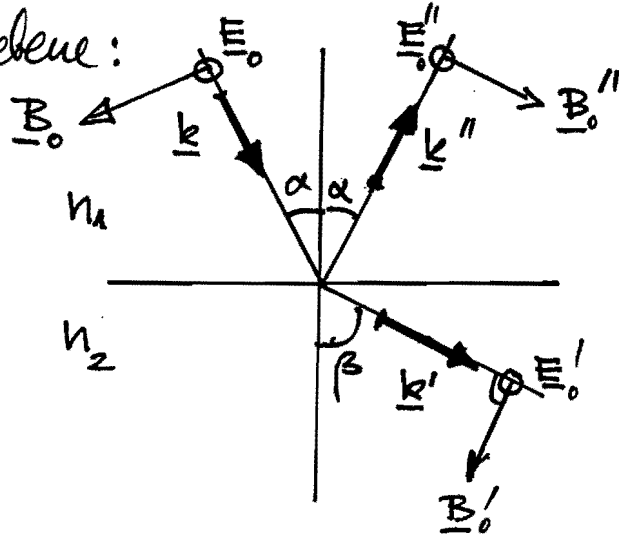


Fig. 1

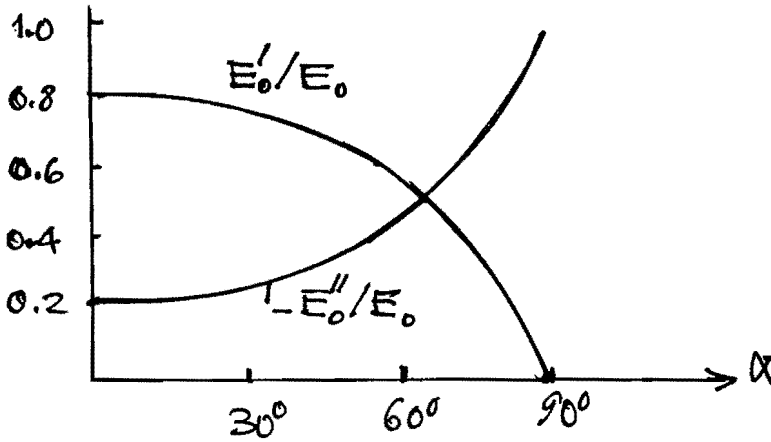


Fig. 2a
($n_1 = 1, n_2 = 1.5$)

(b) $\underline{E} \parallel$ Einfallsebene (vertausche in Fig. 1 \underline{E}_0 und \underline{B}_0)

Die Verhältnisse in (33.14b) sind auch gleich den Amplitudenverhältnissen der elektrischen Felder, E''_0 verschwindet beim Brewster-Winkel.

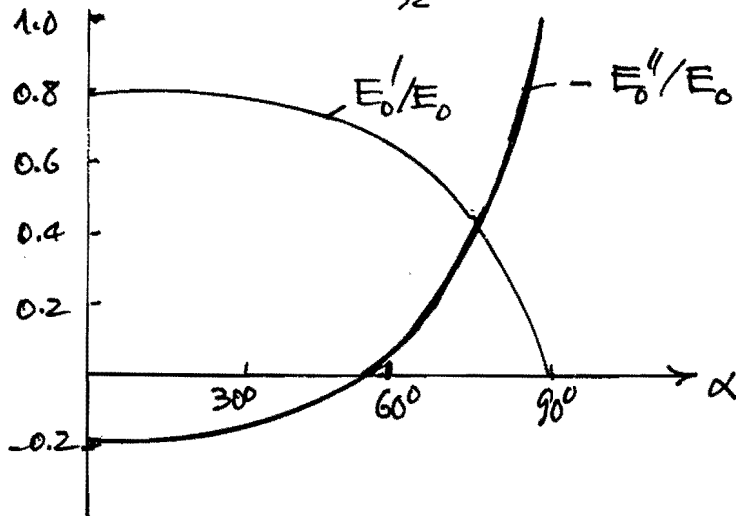


Fig. 2b

Bemerkung: Die Randbedingungen $\epsilon \underline{E}_\perp$ stetig, $\mu \underline{H}_\perp$ stetig werden nicht verwendet. Man prüft aber leicht nach, dass sie auch erfüllt sind.

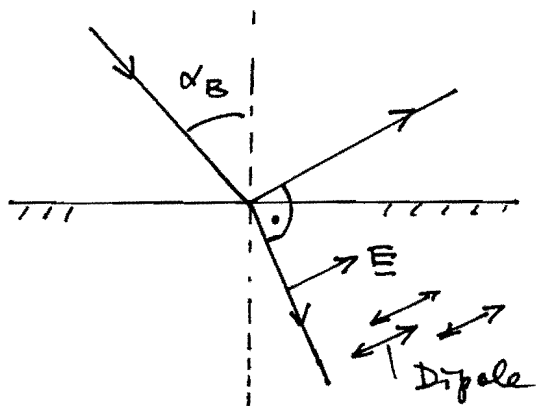
Im Fall (a) gibt es stets einen reflektierten Strahl wenn $n_1 \neq n_2$ ist. Im Fall (b), hingegen, verschwindet \underline{H}'' für $\alpha + \beta = \pi/2$. Dies bedeutet für α : $\sin \beta = \cos \alpha = (n_1/n_2) \sin \alpha$, d.h.

$$\boxed{\tan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}} \quad (33.15)$$

Dieser Winkel α_B ist der sog. Brewster'sche Winkel. Unpolarisiertes Licht, welches im Winkel α_B einfällt, liefert einen linear polarisierten reflektierten Strahl (\underline{E} senkrecht zur Einfallsebene), dessen Intensität allerdings infolge des Faktors $\sin^2(\beta - \alpha)$ (s. (33.14a)) klein ist (s. Übungen).

Dieses Phänomen hat die folgende mikroskopische Erklärung:

Der reflektierte Strahl entsteht durch die Schwingung der elektrischen Dipole (Atome, Moleküle) im Material. In Richtung der Dipolmomente verschwindet aber die Ausbreitung (s. (30.12)). Der reflektierte Strahl hat deshalb eine verschwindende Intensität, wenn \underline{E} im Material (!) parallel zum reflektierten Strahl ist (s. Fig.).



* * *

33.3. Totalreflexion

Diese tritt bei einem Übergang $n_1 > n_2$ auf. Dann hat die Gleichung

$$\sin \beta = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha$$

keine reelle Lösung falls $\alpha > \alpha_T$ ist, wobei

$$\sin \alpha_T = \frac{n_2}{n_1}.$$

Da $\sin \beta$ reell ist muss $\beta = \frac{\pi}{2} + i\gamma$ sein, und

$$\sin \beta = \cos i\gamma = \underline{\underline{\operatorname{Ch} \gamma}} = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha. \quad (33.16)$$

Dadurch ist γ bis auf das Vorzeichen bestimmt. Der Wellenvektor der gebrochenen Welle ist jetzt komplex:

$$\begin{aligned} \underline{k}' &= \frac{n_2 \omega}{c} (\sin \beta, -\cos \beta, 0) \\ &= \frac{n_2 \omega}{c} (\operatorname{Ch} \gamma, i \operatorname{Sh} \gamma, 0). \end{aligned}$$

Die Phase der gebrochenen Welle ist somit

$$e^{i(\underline{k}' \cdot \underline{x} - \omega t)} = \exp \left[i \frac{n_2 \omega}{c} x \operatorname{Ch} \gamma - \frac{n_2 \omega}{c} y \operatorname{Sh} \gamma - i \omega t \right]. \quad (33.17)$$

Damit dieser Ausdruck für $y \rightarrow -\infty$ (exponentiell) abfällt, muss γ negativ sein. Die Welle (33.17) pflanzt sich in der x -Richtung fort und ist für negative y stark gedämpft (Oberflächenwelle).

Für den Fall (a) erhalten wir aus (33.14a)

$$\frac{E_z''}{E_z} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha + i\gamma)}{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha + i\gamma)} = \frac{\cos \alpha \operatorname{Ch} \gamma + i \sin \alpha \operatorname{Sh} \gamma}{\cos \alpha \operatorname{Ch} \gamma - i \sin \alpha \operatorname{Sh} \gamma}.$$

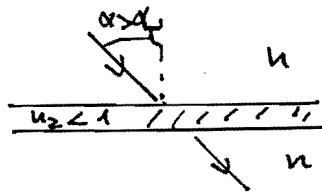
Da dies das Verhältnis von zwei konjugiert komplexen

Zahlen ist, gilt

$$\underline{I'' = I.} \quad (33.18)$$

Dasselbe gilt für den Fall (b).

Wir sehen, dass auch bei Totalreflexion im 2. Medium eine Welle existiert. Dies kann experimentell bestätigt werden. Durch eine dünne Unterbedung mit $n_2 < 1$ (s. Fig.) geht immer Licht hindurch, auch wenn nach der Strahlentheorie Totalreflexion auftreten sollte (Tunnel Effekt).



Durch die Grenzfläche fließt im Mittel ^{aber} kein Energiestrom (s. Übungen).

33.4. Intensitätsverhältnisse

Wir betrachten zuerst zwei Grenzfälle.

Steifende Inzidenz, $\alpha = \pi/2$. Dann ist nach (33.13)

$$\sin \beta = n_1/n_2 \quad (n_1 < n_2),$$

$$\sin(\alpha \mp \beta) = \cos \beta,$$

also nach (33.14) für beide Fälle $I''/I = 1$. Bei steifender Inzidenz ist die Reflexion vollkommen. "daher das schöne Spiegelbild des gegenüberliegenden Ufers unserer Bergseen, daher das Spiegelbild der untergehenden Sonne bei glattem Meer, das an Intensität der Sonne selbst gleichkommt" (A. Sommerfeld, in Optik, Bd. 5).

Senkrechte Inzidenz, $\alpha \approx 0$. Dann ist $n_1 \alpha \approx n_2 \beta$, also

im Fall (a)

$$\frac{E_2''}{E_2} \approx \frac{n_1 n_2 (\beta - \alpha)}{n_1 n_2 (\beta + \alpha)} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2},$$

d.h.

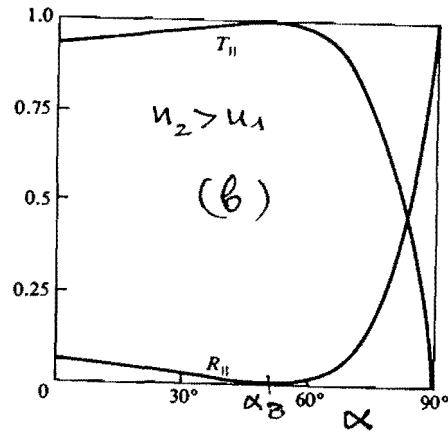
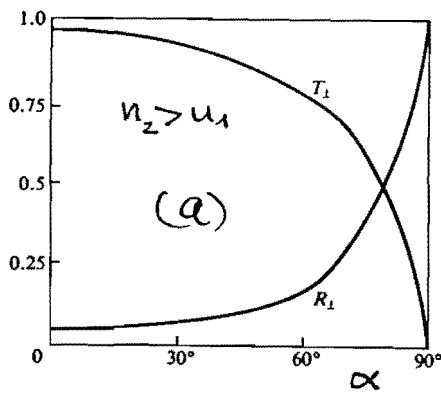
$$\frac{I''}{I} \approx \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad (33.19)$$

Ebenso

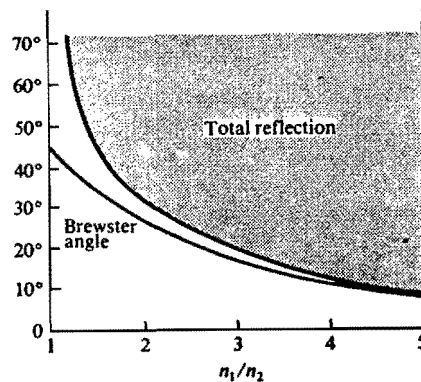
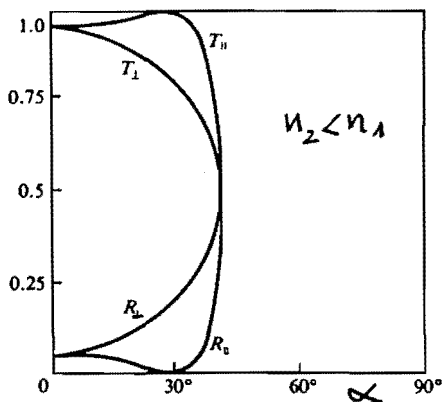
$$\frac{I'}{I} \approx \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (33.20)$$

Dieselben Ergebnisse erhält man für den Fall (b).
Die Resultate für beliebige Einfallswinkel α sind in den folgenden Figuren dargestellt. Für Wasser-Luft ist z.B. $(n_1 - n_2 / n_1 + n_2)^2 \approx 2\%$, merkliche Spiegelung findet also erst bei gladem Einfall statt.

Für $\alpha \rightarrow \alpha_T$ hat I''/I' eine senkrechte Tangente (s. Figuren), deshalb ist α_T durch Beobachtung der reflektierten Intensität sehr gut messbar. Das kann man zur praktischen Bestimmung von n_1/n_2 verwenden.



(R: Reflexion, T: Transmission)



33.5. Metalloptik

Wir betrachten jetzt Leiter. Da ein elektrisches Feld an den Stromen Arbeit leistet, wird dieses für hohe Leitfähigkeiten σ verdrängt (Joulesche Wärme) und deshalb sind Metalle undurchsichtig. Die hohe Leitfähigkeit hat aber auch zur Folge, dass Metalle das Licht intensiv spiegeln.

A. Allgemeines

Wir nehmen an, dass $\mu \approx 1$ ist und vernachlässigen die Dispersion von ϵ und σ . Mit dem Ohm'schen Gesetz $\underline{J} = \sigma \underline{E}$ lauten die Maxwell-Gleichungen:

$$\operatorname{div} \underline{H} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \underline{E} + \frac{1}{c} \dot{\underline{H}} = 0 \quad , \quad (33.21)$$

$$\operatorname{div} \underline{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho_e \quad , \quad \operatorname{rot} \underline{H} - \frac{\epsilon}{c} \dot{\underline{E}} = \frac{4\pi\sigma}{c} \underline{E} \quad .$$

Aus der letzten Gleichung folgt durch Divergenzbildung

$$\frac{\epsilon}{c} \operatorname{div} \dot{\underline{E}} + \frac{4\pi\sigma}{c} \operatorname{div} \underline{E} = 0$$

oder, mit dem Coulombschen Gesetz,

$$\dot{\rho} + \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \rho = 0 \quad . \quad (33.22)$$

Also gilt

$$\rho = \rho_0 e^{-t/\tau} \quad , \quad \tau = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma} \text{ : Relaxationszeit.} \quad (33.23)$$

Für grosse σ ist die Relaxationszeit klein. Ist zu irgendeiner Zeit das Feld im Inneren gleich Null, so auch die Ladungsdichte und diese bleibt dann dauernd gleich Null. Hittin können wir für elektromagnetische Störungen, die von aussen auf einen Leiter fallen $\operatorname{div} \underline{E} = 0$ setzen. Eliminiert man aus den beiden Gl. rechts in (33.21) das \underline{H} -Feld, so folgt:

$$\left(\Delta - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \underline{E} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \dot{\underline{E}}. \quad (33.24)$$

Die rechte Seite wirkt als Dämpfung.

Im monochromatischen Fall $\sim e^{i\omega t}$, $\frac{\partial}{\partial t} \sim -i\omega$ lautet die beiden rot-Gleichungen in (33.21)

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot } \underline{E} - \frac{i\omega}{c} \underline{H} = 0, \\ \text{rot } \underline{H} + i\frac{\omega\epsilon'}{c} \underline{E} = 0, \end{array} \right\} \quad (33.25)$$

wobei

$$\underline{\epsilon}' = \epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (33.26)$$

Wir setzen

$$n'^2 = \epsilon', \quad n' = n(1+i\chi) \quad (33.27)$$

und finden

$$\left. \begin{array}{l} n'^2(1-\chi^2) = \epsilon, \\ n'^2\chi = \frac{2\pi\sigma}{\omega}. \end{array} \right\} \quad (33.28)$$

Gl. (33.24) lautet

$$\Delta \underline{E} + \frac{\omega^2 \epsilon'}{c^2} \underline{E} = 0. \quad (33.29)$$

Daneben haben wir

$$\left. \begin{array}{l} \text{div } \underline{E} = 0, \\ \text{div } \underline{H} = 0. \end{array} \right\} \quad (33.30)$$

Die Maxwell'schen Gleichungen (33.25) und (33.30) sind formal dieselben wie für Nichtleiter, nur steht jetzt an Stelle von ϵ die komplexe DK ϵ' .

Wir erwähnen noch, dass die Vernachlässigung der Dispersion im sichtbaren Bereich nicht erfüllt ist. Hingegen ist dies eine vernünftige Näherung im infraroten Gebiet.

Alle früheren Lösungen für Nichtleiter gelten auch hier, da die Probleme linear sind. Für ebene Wellen ist aber jetzt der Wellenzahlvektor \underline{k} im allgemeinen komplex. Es gilt

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon' = \frac{\omega^2}{c^2} n'^2, \quad (33.31)$$

$$\underline{k} = \frac{\omega}{c} n' \underline{n}, \quad \underline{n}: \text{komplexer Einheitsvektor.}$$

Deshalb ist

$$\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)} = \underline{E}_0 e^{-\alpha n x / c} e^{i(n \frac{\omega}{c} \underline{n} \cdot \underline{x} - \omega t)}. \quad (33.32)$$

Für ein reelles n repräsentiert dies eine gedämpfte ebene Welle (gedämpft in der Fortpflanzungsrichtung) mit der Dämpfungskonstanten $\alpha n x = \Gamma n x$. Die Intensität klingt ab wie $\langle \underline{E}^2 \rangle$, also

$$I = I_0 e^{-\chi(\underline{n} \cdot \underline{x})}, \quad \chi = 2 \frac{\omega}{c} n x. \quad (33.33)$$

Die Grösse $d = 1/\chi$ ist die Eindringtiefe. Für Kupfer erhält man

λ_0 (Vakuum)	$1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$	$1 \mu = 10^{-4} \text{ cm}$	1 cm
d	$0.18 \times 10^{-4} \text{ cm}$	$0.18 \times 10^{-2} \text{ cm}$	0.18 cm

Deshalb ist man im Auto sicher vor einem Blitzschlag!

Für sehr hohe Leitfähigkeiten erhält man aus (33.28):

$$\alpha \simeq 1, \quad n \simeq \sqrt{2\pi\sigma/\omega}. \quad (33.34)$$

* * *

B. Reflexion des Lichtes an einer Metalloberfläche

Da die Maxwell-Gleichungen formal dieselben sind wie für Nichtleiter, bleiben alle früher gezogenen Schlüsse bestehen, soweit es sich um lineare Relationen zwischen den Komponenten der Feldstärken handelt. Insbesondere gelten auch dieselben Grenzbedingungen beim Übergang von einem Medium zu einem anderen und daher sämtliche Formeln für Reflexion und Brechung (insbesondere die Fresnel'schen Formeln).

Im Brechungsgesetz

$$\sin \alpha = n' \sin \beta \quad (33.35)$$

ist mit n' auch β komplex. Dies hat interessante Konsequenzen. Wir betrachten zuerst die gebrochene Welle:

Zunächst beachte man, dass für hohe Leitfähigkeiten (s. (33.26)):

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n'^2}} \approx 1$$

ist. Für die gebrochene Welle ist

$$\underline{k}' = \frac{\omega}{c} n' \underline{n}', \quad \underline{n}' = (\sin \beta, -\cos \beta, 0) \approx (\sin \beta, -1, 0),$$

d.h.
$$\underline{k}' = k_0 n' \left(\frac{\sin \alpha}{n'}, -1, 0 \right), \quad k_0 = \frac{\omega}{c}.$$

↑
Wellenzahl im Vakuum

besteht ist

$$e^{i(\underline{k}' \cdot \underline{x} - \omega t)} = \exp \left\{ i [k_0 (x \sin \alpha - y) - \omega t] + n k_0 z \right\}. \quad (33.36)$$

Diese Welle wird für negative y gedämpft.

Im Fall (a) gilt nach den Fresnel'schen Formeln (33.14a)

für die Amplituden

$$\begin{aligned} \underline{E'_z} &= E_z \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\beta + \alpha)} = E_z \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha} \\ &\approx E_z \frac{(2/n') \sin \alpha \cos \alpha}{(\sin \alpha \cos \alpha / n' + \sin \alpha)} \approx E_z \frac{2 \cos \alpha}{n'} \end{aligned} \quad (33.37)$$

Mit $n' \rightarrow \infty$ geht deshalb E'_z auch für $y=0$ gegen Null.
Für H_x finden wir aus (33.10)

$$H'_x = -\sqrt{\epsilon'} E'_z \cos \beta.$$

Die Amplitude von H'_x wird deshalb gegenüber derjenigen von E'_z mit $-\sqrt{\epsilon'} \cos \beta \approx -\sqrt{\epsilon'}$ multipliziert. Sie bleibt demnach

$$H'_x = -E_z 2 \cos \alpha \quad (33.38)$$

und bleibt also bei $y=0$ für $n' \rightarrow \infty$ ($\sigma \rightarrow \infty$) endlich.
 H'_y wird hingegen auch Null, wie man leicht nachrechnet.
Analoges gilt für Fall (b).

Die gesuchte Welle ist nicht weiter interessant. Hingegen wollen wir jetzt die reflektierte Welle genauer ansehen.

Da β komplex ist treten charakteristische Phasenänderungen auf. Aus Zeitgründen beobachten wir hier nur die

Intensitätsverhältnisse:

Ich beschränke mich auf senkrechte Incidenz ($\alpha=0$).

Dann gilt wie auf S. 216:

$$I''/I = \left| \frac{E''_z}{E_z} \right|^2 = \left| \frac{n'-1}{n'+1} \right|^2, \quad (33.39)$$

$$\text{d.h.} \quad \frac{I''}{I} = \frac{(n-1)^2 + n^2 \kappa^2}{(n+1)^2 + n^2 \kappa^2}, \quad (33.40)$$

Daraus folgt die wichtige Formel:

$$1 - I''/I = \frac{4n}{(n+1)^2 + n^2 \chi^2} \underset{\substack{\approx \\ \sigma \text{ gross } (\chi \approx 1)}}{\approx} \frac{2}{n} \approx 2 \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}},$$

d.h.

$$\boxed{1 - I''/I \approx 2 \sqrt{\frac{c}{\lambda \sigma}}}. \quad (33.41)$$

Für $\sigma \rightarrow \infty$ strebt also I''/I gegen 1. Deshalb sind Metalle ideale Reflektoren.

Das Gesetz (33.41) wurde 1903 von Rubens & Hagen für ultrarote Wellen $\lambda > 12 \mu$ geprüft (σ : stationäre(!) Leitfähigkeit). Das Beispiel von Rubens & Hagen gab das folgende Resultat

$$1 - I''/I \Big|_{\text{exp.}} = 1.6 \times 10^{-2} \quad \text{für } \lambda = 12 \mu,$$

$$1 - I''/I \Big|_{(33.41)} = 1.4 \times 10^{-2} \quad \text{"}$$

* * *

5.5
§ 34. Dispersion

Bisher haben wir die elektromagnetischen Eigenschaften der Materie durch konstante Materialgrößen ϵ, μ, σ beschrieben. Ich habe aber bereits mehrfach darauf hingewiesen, dass diese Näherung oft unzureichend ist. Dies geht schon daraus hervor, dass ein konstanter Brechungsindex mit der prismatischen Zerlegung des weissen Lichtes unverträglich ist.

Zunächst muss betont werden, dass wir solange von mittleren Feldern $\underline{E}, \underline{B}$ sprechen können, als die Wellenlängen sehr viel grösser sind als die interatomaren Abstände. Dies ist für sichtbares Licht sicher der Fall (nicht aber für Röntgenstrahlen). Nun wird aber etwa die Polarisationsdichte \underline{P} in einem festen Punkt bei genügend hohen Frequenzen nicht unabhängig der gerade dort herrschenden Feldstärke folgen. Wir wollen aber im folgenden immer noch annehmen, dass die funktionale Abhängigkeit der Dichte \underline{P} von \underline{E} linear ist. (Dies ist bei Ferroelektrika, oder bei sehr starken Feldern nicht mehr wahr.)

Der "allgemeinste" lineare Zusammenhang hat die Form

$$P_i(\underline{x}, t) = \int K_{ij}(\underline{x}, t; \underline{x}', t') E_j(\underline{x}', t') d^3x' dt'. \quad (34.1)$$

Wenn die Eigenschaften des Mediums zeitunabhängig sind, so kann der Tensor K_{ij} nur von der Zeitdifferenz $t-t'$ abhängen. (Das Aufheizen durch Joule'sche Wärme ist ein nichtlinearer Effekt.) Ist das Medium ausserdem homogen und unendlich ausgedehnt, so hängt K_{ij} nur von $\underline{x}-\underline{x}'$ ab:

$$K_{ij}(\underline{x}, t; \underline{x}', t') = K_{ij}(\underline{x}-\underline{x}'; t-t'). \quad (34.2)$$

Merktens ist eine lokale Abhängigkeit,

$$P_i(\underline{x}, t) = \int K_{ij}(t-t') E_j(\underline{x}, t') dt' \quad (34.3)$$

eine gute Näherung. Wir schreiben (34.3) kürzer so:

$$\boxed{\underline{P} = K * \underline{E}.} \quad (34.4)$$

Die Operation $*$ bezeichnet die Faltung in der Zeit. Auf diesen Fall wollen wir uns in folgenden beschränken. Weiter sehen wir immer $\underline{H} = \underline{B}$ ($\mu=1$) und betrachten in folgenden nur Dielektrika.

34.1. Allgemeine Eigenschaften der DK

Für die verschiedenen Raum-Zeit-Funktionen führen wir bezüglich der Zeitabhängigkeit die Fouriertansformationen ein, z.B.,

$$\underline{E}(\underline{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{\underline{E}}(\underline{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (34.5)$$

mit der Umkehrung

$$\hat{\underline{E}}(\underline{x}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \underline{E}(\underline{x}, t) e^{i\omega t} dt. \quad (34.5')$$

Wir nehmen an, dass $K(t) \in L^1(\mathbb{R})$ ist. Aus der Faltung (34.4) wird bei Fourier-Transformation*) ein Produkt:

$$\boxed{\hat{P}_i(\underline{x}, \omega) = \hat{K}_{ij}(\omega) \hat{E}_j(\underline{x}, \omega).} \quad (34.6)$$

Entsprechend lautet der Zusammenhang zwischen \underline{D} und \underline{E}

$$\boxed{\hat{D}_i(\underline{x}, \omega) = \epsilon_{ij}(\omega) \hat{E}_j(\underline{x}, \omega),} \quad (34.7)$$

*) Es gilt der Satz: Für zwei Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ist $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ und es gilt,

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

(Reverse dies; siehe MHP)

wobei

$$\epsilon_{ij}(\omega) = \delta_{ij} + 4\pi \hat{K}_{ij}(\omega) \quad (34.8)$$

ist; $\epsilon_{ij}(\omega)$ ist die frequenzabhängige (dynamische) DK. Die Frequenzabhängigkeit von ϵ_{ij} ist eine Frage der Quantenmechanik. (Wir werden darauf im Abschnitt 34.4 eingehen.) Aus allgemeinen Gründen muss aber $\hat{K}(\omega)$ schon gewissen Bedingungen genügen, welche wir nun diskutieren wollen.

(a) Kausalität: Die Polarisationsdichte $\underline{P}(\underline{x}, t)$ im Punkte \underline{x} zur Zeit t darf nur von den elektrischen Feldstärken in diesem Punkte zu früheren Zeiten abhängen, d.h.,

$$K_{ij}(t) = 0 \quad \text{für } t < 0. \quad (34.9)$$

(b) Symmetrie: Liegen keine äußeren Magnetfelder vor, so kann man aus der Zeitumkehrinvarianz mechanischer Systeme auf die Symmetrie

$$K_{ij}(t) = K_{ji}(t) \Rightarrow \epsilon_{ij}(\omega) = \epsilon_{ji}(\omega) \quad (34.10)$$

Schließen.

Der Beweis (Beweis) dieser Aussage würde den Rahmen dieser Vorlesung sprengen. Er gehört in das Gebiet der irreversiblen Prozesse. (Siehe z.B. Landau-Lifschitz, Statistische Physik, Band V, S 125.)

(c) Dissipativität: Die Polarisierung der Materie erfordert eine positive Arbeitsleistung. Diese ist*)

$$\text{Leistung} = \int \underline{E} \cdot \dot{\underline{P}} \, d\underline{x}, \quad (34.11)$$

*) Der Energiesatz für ein Dielektrikum lautet (mit $\mu=1$; s. (V.1.8)):

$$\text{div } \underline{S} + \frac{1}{8\pi} \frac{d}{dt} (\underline{E}^2 + \underline{H}^2) = - \underline{E} \cdot \dot{\underline{P}}.$$

Wir betrachten \underline{E} -Felder, die für $t \rightarrow \pm\infty$ ununterbrochen schnell verschwinden, dass sie quadratintegrierbar sind. Die von der Materie absorbierte Energie

$$A = \int \underline{E} \cdot \dot{\underline{P}} d\vec{x} dt \geq 0 \quad (34.12)$$

ist nach der Parseval-Gleichung^{*)}:

$$\begin{aligned} A &= \int d\omega \int d\vec{x} \hat{\underline{E}}^*(\underline{x}, \omega) (-i\omega) \cdot \dot{\underline{P}}(\underline{x}, \omega) \\ &= \int d\vec{x} \int d\omega (-i\omega) \hat{E}_i^*(\underline{x}, \omega) \hat{K}_{ij}(\omega) \hat{E}_j(\underline{x}, \omega). \end{aligned}$$

Da $K_{ij}(t)$ reell ist, gilt

$$\hat{K}_{ij}(\omega)^* = K_{ij}(-\omega) \quad (34.13)$$

und analog für $\hat{\underline{E}}(\underline{x}, \omega)$. Damit, und mit der Symmetrie von ϵ_{ij} folgt

$$\begin{aligned} A &= \int d\vec{x} \left\{ \int_0^\infty d\omega (-i\omega) \hat{E}_i(\underline{x}, \omega)^* \hat{K}_{ij}(\omega) \hat{E}_j(\underline{x}, \omega) + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty d\omega (i\omega) E_i(\underline{x}, \omega) \hat{K}_{ij}(\omega)^* \hat{E}_j^*(\underline{x}, \omega) \right\} \\ &= \int d\vec{x} \int_0^\infty d\omega 2\omega \hat{E}_i(\underline{x}, \omega)^* \text{Im} \hat{K}_{ij}(\omega) \hat{E}_j(\underline{x}, \omega) \geq 0. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $\text{Im} \hat{K}_{ij}(\omega) = \text{Im} \epsilon_{ij}(\omega)$ eine symmetrische positive Matrix ist. Offensichtlich ist die Absorption (Dissipation) durch den Imaginärteil von $\hat{K}(\epsilon)$ bestimmt.

Jeder nicht-stationäre Prozess in einem realen Körper

*) Beachte die folgenden Fakten (siehe z.B.: Hewitt & Stromberg, Springer, §21)

(i) Aus $f \in L^1, g \in L^2$ folgt $f \cdot g \in L^2$.

(ii) Für $f \in L^1 \cap L^2$ folgt $\hat{f} \in L^2$ und

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx.$$

(oder HMP)

ist in irgend einem Teil thermodynamisch irreversibel. Daher treten in einem veränderlichen elektromagnetischen Feld immer (wenn auch vielleicht kleine) elektrische und magnetische Verluste auf. Mit anderen Worten, die Funktion $\operatorname{Im} \epsilon(\omega)$ wird bei keinem von Null verschiedenen Frequenzwert exakt gleich Null sein. Die Frequenzgebiete, in denen $\operatorname{Im} \epsilon$ sehr klein ist (im Vergleich zu $\operatorname{Re} \epsilon$) nennt man Transparenzgebiete des Stoffes.

34.2. Die Dispersionsrelationen von Kramers und Kronig

Wir übersehen nun die Kausalitätsbedingung (34.9) in Eigenschaften der Fourier-Transformierten der Matrixfunktion $K(t)$

$$\hat{K}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} K(t) e^{i\omega t} dt. \quad (34.14)$$

In dieser Gleichung können wir ω als komplexe Veränderliche ansehen. Wir nehmen an, dass

$$\int_0^{\infty} \|K(t)\| dt < \infty \quad (34.15)$$

($\|\cdot\|$: irgendeine Matrixnorm; es sind alle äquivalent!). Dann ist die rechte Seite von (34.14) für alle $\omega \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} \omega \geq 0$ wohl definiert, da $|e^{i\omega t}| = e^{-\operatorname{Im} \omega \cdot t}$ ist. Die durch (34.14) definierte Funktion ist für $\operatorname{Im} \omega > 0$ offensichtlich eine holomorphe Funktion. Dies ist eine direkte Folge der Kausalitätsbedingung (34.9).

Weiter gilt: $\hat{K}(\omega)$ ist stetig und beschränkt in der abgeschlossenen Halbebene $\operatorname{Im} \omega \geq 0$ und $|\hat{K}(\omega)| \rightarrow 0$ für $|\omega| \rightarrow \infty$ gleichmässig in allen Richtungen mit $\operatorname{Im} \omega \geq 0$. Dies schliesst man leicht aus dem

Lemma (Riemann-Lebesgue):

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n) =$ Raum der stetigen Funktionen über \mathbb{R}^n mit der Eigenschaft, dass für jedes $\varepsilon > 0$

eine kompakte Menge in \mathbb{R}^4 (wobei von \hat{f} und ε abhängt) existiert, ausserhalb welcher $|\hat{f}| < \varepsilon$ ist.

(Für einen Beweis siehe z.B. Hewitt & Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer 1965, S. 401.) \rightarrow (MMP)

Nach diesem Lemma ist $\hat{K}(\omega)$ auf der reellen Achse in $C_0(\mathbb{R})$. Für $\gamma \omega > 0$ liefert ausserdem der Dämpfungsfaktor $\exp(-\gamma \omega t)$.

Insgesamt haben wir die folgenden Eigenschaften der Matrixfunktion $\hat{K}(\omega)$:

(i) $\hat{K}(\omega)$ ist analytisch in ω in der oberen Halbebene $\gamma \omega > 0$;

(ii) $\hat{K}(\omega)$ ist stetig und beschränkt in $\gamma \omega \geq 0$ und $\|\hat{K}(\omega)\| \rightarrow 0$ für $|\omega| \rightarrow \infty$ gleichmässig in allen Richtungen mit $\gamma \omega \geq 0$;

(iii) $\hat{K}(\omega)^* = \hat{K}(-\omega^*)$;

(iv) $\hat{K}(\omega)$ ist symmetrisch;

(34.16)

(v) $\gamma \omega \hat{K}(\omega) > 0$ für $0 < \omega < \infty$;

(vi) $\hat{K}(0) = \int_0^\infty K(t) dt$ ist reell und positiv.

Die Eigenschaft (vi) folgt daraus, dass die statische Polarisierung Arbeit erfordert. Nach (34.11) ist diese Arbeit für $\underline{E}(\underline{x}, t) = \theta(t) \underline{E}(\underline{x})$ gleich

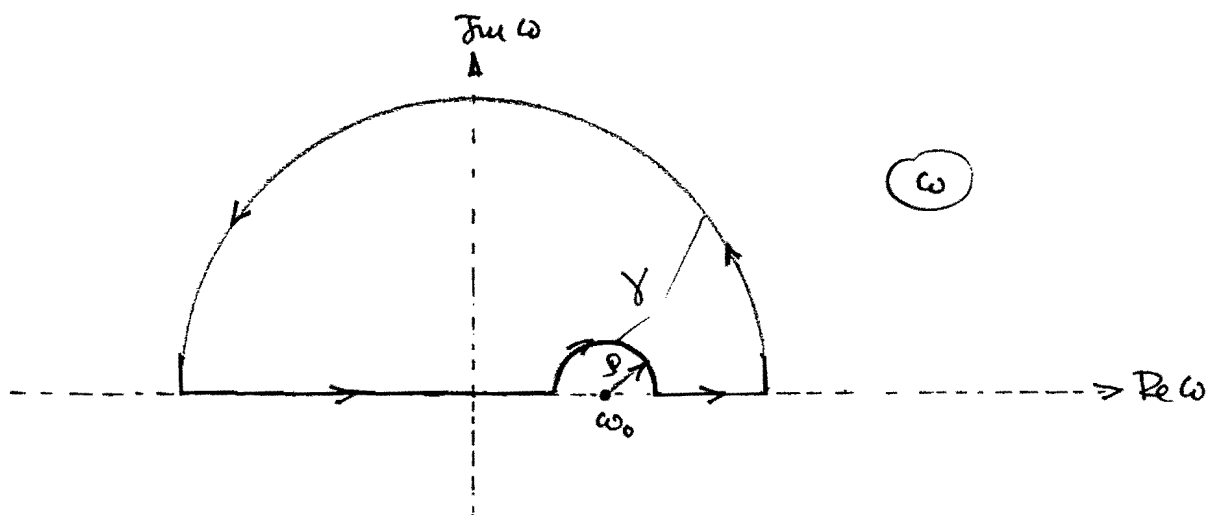
$$\int d^3x \int_0^{\underline{P}(\underline{x})} \underline{E} \cdot d\underline{P} = \int_0^\infty K_{ij}(\tau) d\tau \int E_i(\underline{x}) E_j(\underline{x}) d^3x$$

$$\stackrel{\text{Zr}}{\Rightarrow} \hat{K}_{ij}(0) \int E_i(\underline{x}) E_j(\underline{x}) d^3x > 0. \quad (34.17)$$

Nun integrieren wir die Funktion

$$\frac{\hat{K}(\omega)}{\omega - \omega_0}, \quad \omega_0 \in \mathbb{R},$$

längs des geschlossenen Integrationsweges γ , welcher in der folgenden Fig. gezeigt ist.



Da für diese Funktion im Inneren des von γ begrenzten Gebietes keine Singularitäten sind, folgt nach dem Satz von Cauchy

$$\int_{\gamma} \frac{\hat{K}(w)}{w-w_0} dw = 0. \quad (34.18)$$

Im Limes $\rho \rightarrow 0$, wo ρ den Radius des kleinen Halbkreises bedeutet (s. Fig.), gilt

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma} \frac{\hat{K}(w)}{w-w_0} dw = -i\pi \hat{K}(w_0), \quad (34.19)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{w_0-\rho} + \int_{w_0+\rho}^{\infty} \right\} \frac{\hat{K}(w)}{w-w_0} dw = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{K}(w)}{w-w_0} dw, \quad (34.20)$$

wobei \mathcal{P} das Hauptwert-Integral bezeichnet (s. S. 158). Lassen wir den grossen Halbkreis von γ unendlich gross werden, so liefert dieser im Grenzfall nach (ii) keinen Beitrag und wir erhalten aus (34.19) und (34.20)

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{K}(w)}{w-w_0} dw + (-i\pi) \hat{K}(w_0) = 0, \quad (34.21)$$

Nehmen wir davon die Real- und die Imaginärteile, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \hat{K}(\omega_0) &= \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \hat{K}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega, \\ \operatorname{Im} \hat{K}(\omega_0) &= -\frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} \hat{K}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (34.22)$$

Aus (iii) folgt für reelle ω

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \hat{K}(\omega) &= \operatorname{Re} \hat{K}(-\omega), \\ \operatorname{Im} \hat{K}(\omega) &= -\operatorname{Im} \hat{K}(-\omega). \end{aligned} \right\} \quad (34.23)$$

Deshalb können wir (34.22) auch in folgender Form schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \hat{K}(\omega) &= \frac{2}{\pi} \text{P} \int_0^{\infty} \frac{\omega' \operatorname{Im} \hat{K}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega', \\ \operatorname{Im} \hat{K}(\omega) &= -\frac{2}{\pi} \omega \text{P} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \hat{K}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \end{aligned} \right\} \quad (34.24)$$

Wir schreiben die erste dieser Gleichungen noch auf den Dielektrizitätstensor $\epsilon_{ij}(\omega)$ um:

$$\left. \operatorname{Re} \epsilon(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \text{P} \int_0^{\infty} \frac{\omega' \operatorname{Im} \epsilon(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \right\} \quad (34.25)$$

Im isotropen Fall ist $\epsilon_{ij}(\omega) = \epsilon(\omega) \delta_{ij}$ und die Gl. (34.25) wird eine skalare Gleichung.

Die Gl. (34.22), (34.24) und (34.25) sind sog. Dispersionsrelationen. Diese spielen auch in anderen Gebieten der Physik (insbesondere in der Elementarteilchen-Physik) eine Rolle. Dispersionsrelationen sind zuerst von Kramers (1927) und Kronig (1926) für den Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon}$ angegeben worden. Ihre Bedeutung liegt darin, dass sie die Berechnung des Realteils von ϵ aus dem

Imaginärteil gestatten und umgekehrt. (Die Relationen (34.22) lassen sich übrigens auch für den Fall begründen, wo $K(t)$ eine Distributionsverteilung ist.)

Um (im isotropen Fall) eine Dispersionsrelation ^{für $n(\omega)$} zu gewinnen, müssen wir die analytischen Eigenschaften von $\sqrt{\epsilon(\omega)}$ diskutieren.

Wir setzen

$$\hat{K}_{ij}(\omega) = \chi(\omega) \delta_{ij}, \quad \chi(\omega): \text{elektrische Suszeptibilität.} \quad (34.26)$$

Dann ist

$$\epsilon(\omega) = 1 + 4\pi \chi(\omega). \quad (34.27)$$

Nun gilt der

Satz: Aus den Eigenschaften (34.16) folgt, dass $\chi(\omega)$ ausserhalb der imaginären Achse in der oberen Halbebene (für $\omega \geq 0$) in keinem endlichen Punkt einen reellen Wert annimmt. Ferner fällt $\chi(\omega)$ von $\chi(0) > 0$ monoton auf $\chi(i\infty) = 0$ ab. Insbesondere gibt es in der oberen Halbebene keine reellen Nullstellen.

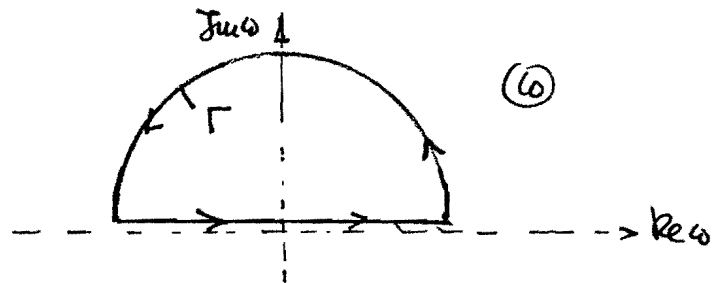
Beweis: Wir benutzen zum Beweis den folgenden bekannten Satz aus der Funktionentheorie: Sei $f(z)$ eine meromorphe und nicht konstante Funktion in einer offenen Menge D , und Γ sei der orientierte Rand einer kompakten Teilmenge K von D . Wir setzen voraus, dass die Funktion f auf Γ weder einen Pol hat noch dort den Wert a annimmt. Unter diesen Voraussetzungen ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz = Z - P. \quad (34.28)$$

Dabei bezeichnet Z die Anzahl der a -Stellen von f im Inneren von K , d.h. die Summe der Ordnungen der

in K liegenden Nullstellen von $f(z)-a$, und P bezeichnet die Gesamtordnung der in K liegenden Pole von f . (Dieses Ergebnis erhält man sofort aus dem Residuensatz, wenn man die Residuen der Funktion $f'(z)/f(z)-a$ berechnet.)

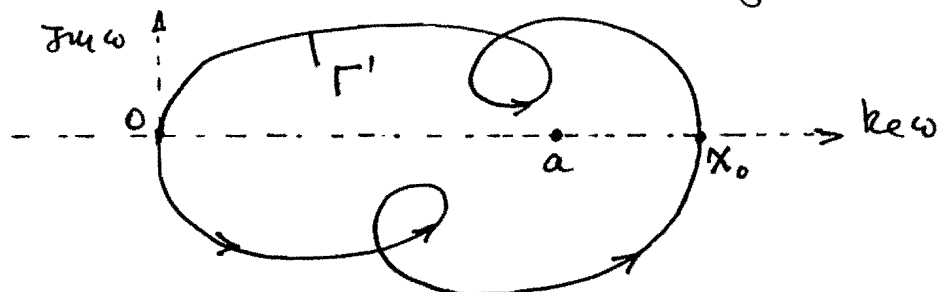
Diesen Satz wenden wir nun auf $X(\omega)$ an, wobei wir für Γ die in der folgenden Fig. eingezeichnete Kurve wählen.



In der oberen Halbebene hat $X(\omega)-a$ keine Pole. Also ist ($a \in \mathbb{R}$):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{X'(\omega)}{X(\omega)-a} d\omega = Z. \quad (34.29)$$

Nun sei Γ' das Bild von Γ unter der Abbildung $\omega \mapsto X(\omega)$, wobei wir den grossen Halbkreis von Γ gegen ∞ gehen lassen. Die positiv reelle Grösse $X(i0)$ bezeichnen wir mit X_0 (= Bild von $i0$). Das Bild des grossen Halbkreises ist im Limes der Nullpunkt. Ausser in 0 und X_0 hat Γ' keine Schnittpunkte mit der reellen Achse, da für reelle $\omega \neq 0$ $X(\omega)$ nach (34.16 (V)) nicht reell ist. Die Kurve Γ' ist in der nächsten Fig. skizziert.



Wir schreiben

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\chi'(\omega)}{\chi(\omega)-a} d\omega &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{d\chi}{\chi-a} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < a < X_0, \\ 0 & \text{sonst } (a \in \mathbb{R}). \end{cases} \end{aligned} \quad (34.30)$$

Also wird nach (34.29) der Wert a , für $0 < a < X_0$, von χ genau einmal angenommen. Aus $\chi(\omega)^* = \chi(-\omega^*)$ (s. (34.16 (iii))) folgt, dass $\chi(\omega)$ auf der imaginären Achse reell ist. Dort kann die Funktion kein Maximum und kein Minimum annehmen (sonst müsste χ gewisse reelle Werte zweimal annehmen). Also ist χ auf der imaginären Achse monoton fallend. Dort und nur dort nimmt sie reelle Werte an und zwar genau diejenigen im Intervall $[0, X_0]$ und diese je nur einmal. \square

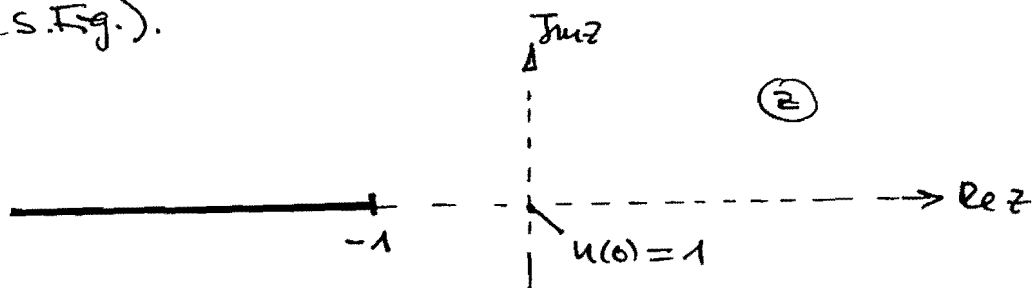
Der Bedingungsindex $\nu(\omega)$ ist definiert durch

$$\nu(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}, \quad (34.31)$$

Also ist für $z(\omega) := 4\pi \chi(\omega)$

$$\nu(z) = \sqrt{1+z}, \quad (34.32)$$

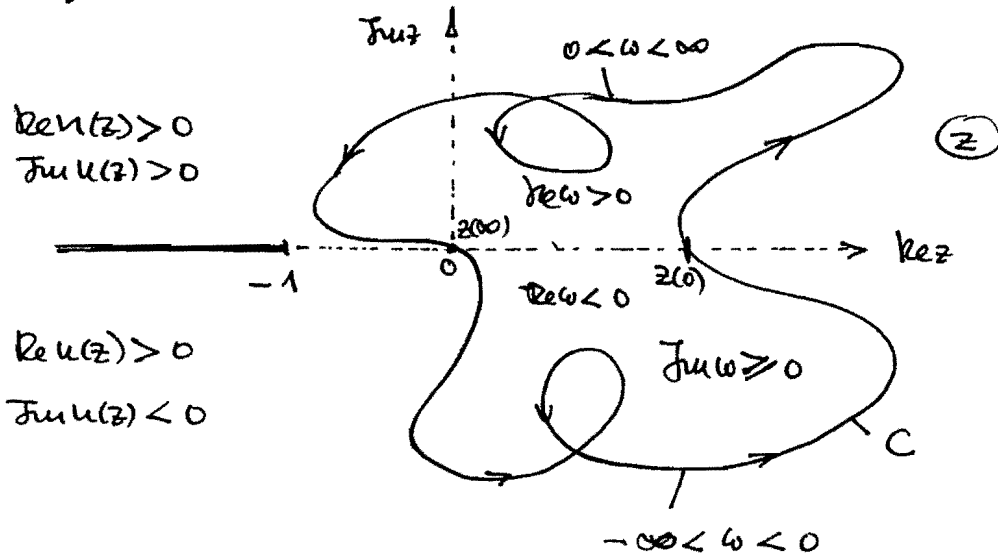
Wir machen $\nu(z)$ eindeutig durch einen Schnitt in der z -Ebene, welcher von der Singularität bei -1 nach $-\infty$ läuft (s. Fig.).



In der geschnittenen Ebene E definieren wir $\nu(z)$ durch

$u(\omega) = 1$. In \mathbb{E} ist dann $\operatorname{Re} u(z) > 0$, $\operatorname{Im} u(z) \geq 0$ für $\operatorname{Im} z \geq 0$.

Nach dem eben bewiesenen Satz wird bei der Abbildung $\omega \mapsto z(\omega)$ die reelle ω -Achse in eine Kurve C abgebildet, die für $0 < \omega < \infty$ ganz in $\operatorname{Im} z > 0$ liegt (s. Fig.). Die positiv imaginäre ω -Achse wird in die Strecke $[0, z(i\omega)]$ auf der reellen Achse abgebildet. Das Bild der Halbebene $\operatorname{Im} \omega \geq 0$ ist also das Innere der Kurve C .



Aus diesen Feststellungen schliessen wir:

- (i) $u(\omega)$ ist analytisch in $\operatorname{Im} \omega > 0$;
 - (ii) $u(\omega)$ ist stetig und beschränkt in $\operatorname{Im} \omega \geq 0$ und $|u(\omega) - 1| \rightarrow 0$ für $|\omega| \rightarrow \infty$, gleichmässig in allen Richtungen;
 - (iii) $u(\omega)^* = u(-\omega^*)$ für $\operatorname{Im} \omega \geq 0$;
 - (iv) $1 < u(\omega) < \infty$;
 - (v) $\begin{cases} \operatorname{Im} u(\omega) > 0 & \text{für } 0 < \omega < \infty, \\ \operatorname{Re} u(\omega) > 0 & \text{für alle } \omega \text{ in } \operatorname{Im} \omega \geq 0. \end{cases}$
- (34.33)

In gleicher Weise wie für $K(\omega)$ (bzw. $X(\omega)$) folgt jetzt

eine Dispersionsrelation für $n(\omega)$:

$$\operatorname{Re} n(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} n(\omega') \omega'}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \quad (34.34)$$

34.3. Wellen in dispersierenden Medien

Wir betrachten ein homogenes und isotropes Dielektrikum mit der dynamischen DK $\epsilon(\omega)$, $\mu=1$, sowie $\rho_L = J_L = 0$. Wie früher zerlegen wir die Felder \underline{E} und \underline{B} nach Fourier und bezeichnen die Fouriertransformaten mit $\hat{\underline{E}}(\underline{x}, \omega)$, $\hat{\underline{B}}(\underline{x}, \omega)$. Diese sind komplex, aber erfüllen die Realitätsbedingungen $\hat{\underline{E}}(\underline{x}, \omega)^* = \hat{\underline{E}}(\underline{x}, -\omega)$, etc., sowie die Maxwell'schen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \hat{\underline{E}} &= 0, & \operatorname{rot} \hat{\underline{E}} - i\frac{\omega}{c} \hat{\underline{B}} &= 0, \\ \operatorname{div} \hat{\underline{B}} &= 0, & \operatorname{rot} \hat{\underline{B}} + i\frac{\omega}{c} \epsilon(\omega) \hat{\underline{E}} &= 0. \end{aligned} \quad (34.35)$$

(Diese sind, wegen $\epsilon(\omega)^* = \epsilon(-\omega)$, mit den Realitätsbedingungen verträglich.)

In bekannter Weise folgt die "Wellengleichung":

$$(\Delta + k^2) \begin{pmatrix} \hat{\underline{E}} \\ \hat{\underline{B}} \end{pmatrix} = 0 \quad (34.36)$$

mit $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n(\omega)$ (komplex!). (34.37)

Für eine ebene Welle ist

$$\hat{\underline{E}}(\underline{x}, \omega) = \underline{A}(\omega) e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}}, \quad (34.38)$$

$$\underline{k} = \frac{\omega}{c} n(\omega) \underline{n}, \quad n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}.$$

Die Wurzel wurde im letzten Abschnitt definiert (siehe S. 234). Ich erinnere daran, dass $\operatorname{Re} n(\omega) > 0$, für reelle ω , und

Für $u(\omega) \geq 0$ für $\omega \geq 0$. In

$$E(\underline{x}, t) = \hat{E}(\underline{x}, \omega) e^{-i\omega t} = \underline{A} e^{i\left(\frac{\omega}{c} \Re n(\omega) \underline{n} \cdot \underline{x} - \omega t\right)} e^{-\frac{\omega \Im n(\omega) \underline{n} \cdot \underline{x}}{c}} \quad (34.39)$$

ist deshalb der letzte Faktor für alle $\omega \in \mathbb{R}$ eine Dämpfung. Wie schon in der Metalloptik erhalten wir, für reelles \underline{n} , eine in Richtung \underline{n} fortschreitende, exponentiell gedämpfte Welle. Die Wellenlänge (Dispersion) ist bestimmt durch $\Re n(\omega)$ und die Dämpfung (Absorption) durch $\Im n(\omega)$.

Falls blaues Licht "brechbarer" ist als rotes, so sagt man die Dispersion sei normal; andernfalls spricht man von anomaler Dispersion. (Auf die mikroskopische Theorie dieses Unterschiedes werden wir in § 34.4 eingehen)

In dispergierenden Medien spielen verschiedene Geschwindigkeiten eine Rolle. Diese wollen wir nun besprechen.

A. Phasengeschwindigkeit

Zunächst betrachten wir für eine ebene Welle

$$\underline{A} e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)}, \quad \underline{k} = \frac{\omega}{c} n(\omega) \underline{n} \quad (34.40)$$

die Flächen konstanter Phase. Diese sind senkrecht zu \underline{k} und bewegen sich in Richtung \underline{k} mit der Geschwindigkeit

$$\boxed{v_{\text{Phase}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)}} \quad (34.41)$$

Diese Geschwindigkeit der Flächen gleicher Phase nennt man die Phasengeschwindigkeit. Für $n(\omega) < 1$ wird sie grösser als c !

B. Gruppengeschwindigkeit

Im folgenden sei ω eine allgemeine Funktion von \underline{k} :

$$\omega = \omega(\underline{k}) \quad : \quad \text{Dispersionsgesetz} \quad (34.42)$$

Wir betrachten, der Einfachheit halber, eine reelle skalare Welle $\phi(\underline{x}, t)$. Speziell studieren wir ein Wellenpaket der Form

$$\phi(\underline{x}, t) = \text{Re } \psi(\underline{x}, t), \quad (34.43)$$

wobei

$$\psi(\underline{x}, t) = \int a(\underline{k}) e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega(\underline{k})t)} d^3k \quad (34.44)$$

ist und $a(\underline{k})$ nur in einem engen Band um \underline{k}_0 wesentlich von Null verschieden sein soll.

Die "Energiedichte" ist proportional zu ϕ^2 . Deshalb definieren wir den Energiemittelpunkt durch

$$\langle \underline{x}(t) \rangle = \frac{\int \underline{x} \phi^2(\underline{x}, t) d^3x}{\int \phi^2 d^3x} \quad (34.45)$$

Nun ist $\phi = \frac{1}{2}(\psi + \psi^*)$ und nach Fourier-Umkehrformel

$$e^{-i\omega t} a(\underline{k}) = (2\pi)^{-3} \int \psi(\underline{x}, t) e^{-i\underline{k} \cdot \underline{x}} d^3x \quad (34.46)$$

Die Größe $\phi^2 = \psi^2 + (\psi^*)^2 + \frac{1}{2}\psi\psi^*$ enthält zwei Typen von Termen: ψ^2 und $(\psi^*)^2$ enthalten nur Beiträge mit \sim doppelter Frequenz, während $\frac{1}{2}\psi\psi^* \sim$ konstant ist. Die oszillatorischen Terme lassen wir weg, da diese bei der Zeitmittelung verschwinden.

Bis auf schnell oszillierende Beiträge ist also

$$\langle \underline{x}(t) \rangle = \int \underline{x} |\psi(\underline{x}, t)|^2 d^3x / \int |\psi(\underline{x}, t)|^2 d^3x \quad (34.47)$$

Für den Zähler erhalten wir nach partieller Integration mit Hilfe der Parseval-Gleichung:

$$\begin{aligned} \int x_i |\psi|^2 d^3x &= \int d^3x \psi^* \cdot \int a(\underline{k}) e^{-i\omega t} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial k_i} (e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}}) d^3k \\ &= \int d^3x \psi^* \int (i \frac{\partial a}{\partial k_i} + t \frac{\partial \omega}{\partial k_i} a) e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)} d^3k \\ &= (2\pi)^3 \int d^3k a^*(\underline{k}) \left(i \frac{\partial a}{\partial k_i} + t \frac{\partial \omega}{\partial k_i} a \right). \end{aligned}$$

Der Nenner in (34.47) ist andersherum gleich

$$\int |\psi|^2 d^3x = (2\pi)^3 \int |a(\underline{k})|^2 d^3k.$$

Damit erhalten wir

$$\langle x_i(t) \rangle = \frac{\int a^* i (\partial a / \partial k_i) d^3k}{\int |a(\underline{k})|^2 d^3k} + t \cdot \frac{\int \frac{\partial \omega}{\partial k_i} |a(\underline{k})|^2 d^3k}{\int |a(\underline{k})|^2 d^3k}, \quad (34.48)$$

Folglich gilt

$$\boxed{\frac{d}{dt} \langle \underline{x}(t) \rangle = \left\langle \frac{\partial \omega}{\partial \underline{k}} \right\rangle}, \quad (34.49)$$

wobei

$$\left\langle \frac{\partial \omega}{\partial \underline{k}} \right\rangle = \frac{\int \frac{\partial \omega}{\partial \underline{k}} |a(\underline{k})|^2 d^3k}{\int |a(\underline{k})|^2 d^3k} \quad (34.50)$$

ist. Die Gruppengeschwindigkeit ist definiert durch

$$\underline{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \underline{k}}. \quad (34.51)$$

Im isotropen Fall $\omega = \omega(|\underline{k}|)$ ist $v_g = |\underline{v}_g| = \partial \omega / \partial k$, oder nach (34.41)

$$\underline{v}_g = v_{\text{Phase}} + k \frac{\partial v_{\text{Phase}}}{\partial k} = v_{\text{Phase}} - \lambda \frac{\partial v_{\text{Phase}}}{\partial \lambda}$$

(λ : Wellenlänge). In der Optik durchsichtiger Medien ist

$\omega = ck/n(\omega)$ (mit reellem $n(\omega)$) und man erhält dafür sofort

$$v_g = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}} \quad (34.52)$$

Für normale Dispersion ist $\frac{dn}{d\omega} > 0$ und $n > 1$. Dann gilt

$$v_g < v_{\text{Phase}} < c. \quad (34.53)$$

Für anomale Dispersion kann $dn/d\omega$ sehr negativ werden. Dann ist v_g sehr verschieden von v_{Phase} und $v_g > c$ ist möglich.

Große Werte von $|dn/d\omega|$ bedeuten schnelle Variation von ω als Funktion von k . Dann dürfen wir die oszillierenden Terme nicht mehr weglassen und der Energieinhaltepunkt bewegt sich viel komplizierter.

C. Ausbreitungsgeschwindigkeit

Wir zeigen jetzt, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit $\leq c$ ist. Dies beruht auf den analytischen Eigenschaften von $n(\omega)$.

Wir diskutieren nun den Spezialfall einer linear polarisierten Wellengruppe, welche eine Superposition von monochromatischen Wellen in Richtung $\underline{n} = (1, 0, 0)$ ist. Der \underline{E} -Vektor habe nur eine y -Komponente $E(x, t)$, welche nur von x und t abhängt:

$$E(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i(kx - \omega t)} d\omega, \quad (34.54)$$

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(0, t) e^{i\omega t} dt. \quad (34.55)$$

Die Wellengruppe erreiche den Punkt $x = 0$ frühestens zur Zeit t :

$$E(0, t) = 0 \quad \text{für } t < 0. \quad (34.56)$$

Ich behaupte, dass dann

$$E(x,t) = 0 \quad \text{für } t < \frac{x}{c}, \quad x > 0 \quad (34.57)$$

ist. Zum Beweis nehmen wir der Einfachheit halber an, dass $E(0,t)$, $\frac{dE}{dt}(0,t)$, $\frac{d^2E}{dt^2}(0,t)$ in $0 \leq t < \infty$ absolut integrierbar sind.

Dann folgt aus (34.55) zunächst, dass $A(\omega)$ in $\text{Im } \omega > 0$ analytisch ist, sowie in $\text{Im } \omega \geq 0$ stetig und beschränkt ist. Da die Ableitung von $E(0,t)$ nach t der Multiplikation von $A(\omega)$ mit $i\omega$ entspricht, folgt weiter, dass auch $\omega^2 A(\omega)$ in $\text{Im } \omega \geq 0$ beschränkt ist. Somit existiert eine Konstante a so, dass

$$|A(\omega)| \leq \frac{a}{1 + |\omega|^2} \quad \text{für } \text{Im } \omega \geq 0. \quad (34.58)$$

Da $k = \frac{\omega}{c} n(\omega)$ ist, schliessen wir, dass auch der Phasenfaktor in (34.54) in $\text{Im } \omega > 0$ analytisch ist. Sein Betrag ist gleich

$$|e^{i(kx - \omega t)}| = e^{-\text{Im } \omega \left(\frac{x}{c} - t\right)} e^{-\text{Im} [\omega(n(\omega) - 1)] x/c} \quad (34.59)$$

Weiter ist

$$\text{Im} [\omega(n-1)] = \text{Im } \omega (\text{Re } n - 1) + \text{Re } \omega \text{Im } n. \quad (34.60)$$

Aus den Ergebnissen auf S. 235 folgt, dass darin der letzte Term nicht negativ ist. Infolgedessen gilt für $x > 0$

$$|A(\omega) e^{i(kx - \omega t)}| \leq \frac{a}{1 + |\omega|^2} \exp \left\{ -\text{Im } \omega \left[\frac{x}{c} - t + \frac{x}{c} (\text{Re } n(\omega) - 1) \right] \right\} \quad (34.61)$$

Für $|\omega| \rightarrow \infty$ gilt aber $\text{Re } n(\omega) \rightarrow 1$. Falls also $\frac{x}{c} - t > 0$ ist, haben wir für hinreichend grosses $|\omega|$ die Abschätzung

$$|A(\omega) e^{i(kx - \omega t)}| \leq \frac{a}{1 + |\omega|^2} e^{-\varepsilon \text{Im } \omega} \quad (34.62)$$

Somit kann man in (34.54) den reellen Integrationsweg beliebig weit parallel in die Halbebene $\text{Im } \omega > 0$ verschieben. Im Grenzfall unendlicher Verschiebung wird aber das Integral wegen (34.62) Null. \square

D. Ausbreitung eines Signals in einem dispersiven Halbraum

Auf die Grenzfläche $x = 0$ soll im Zeitpunkt $t = 0$ aus dem Vakuum ($x < 0$) eine ebene harmonische Welle mit scharf bestimmter Front aufbreiten. Diese Welle sei, wie im letzten Abschnitt, in der y -Richtung polarisiert $\underline{E} = (0, E, 0)$. Bei geeigneter Wahl der Normierung nimmt E die Randwerte

$$E(0, t) = \Theta(t) \cdot e^{-i\omega_0 t} \quad (34.63)$$

an. Setzen wir dies in (34.55) ein, so erhalten wir mit Gl. (54) auf S. 161

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot F[\Theta(t) e^{-i\omega_0 t}] = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{\omega - \omega_0 + i0} \quad (34.64)$$

und damit

$$E(x, t) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(k(\omega) \cdot x - \omega t)}}{\omega - \omega_0 + i0} d\omega. \quad (34.65)$$

Für eine analytische Diskussion dieses Ausdruckes wählen wir

$$E(\omega) = 1 - \omega_p^2 / \omega^2. \quad (34.66)$$

Diese Form ergibt sich als Näherung bei hohen Frequenzen. Nach (34.25) und (s. S. 159)

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi \delta(x) + \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) \quad (34.67)$$

gilt nämlich

$$E(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' \text{Im } E(\omega')}{\omega'^2 - (\omega + i0)^2} d\omega'. \quad (34.68)$$

Für sehr große ω erhalten wir deshalb näherungsweise (34.66),
mit

$$\omega_p^2 = + \frac{z}{\pi} \int_0^{\infty} \omega' \operatorname{Im} \epsilon(\omega') d\omega' \quad (34.69)$$

Nach der Definition der Wurzel in $u(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$ auf S. 234
ist

$$u(\omega) = \begin{cases} \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}, & \omega^2 > \omega_p^2, \\ i \sqrt{\omega_p^2/\omega^2 - 1} \cdot \operatorname{sgn}(\omega), & \omega^2 < \omega_p^2. \end{cases} \quad (34.70)$$

(Hier bedeutet das Wurzelzeichen die positive Wurzel.)

Deshalb ist

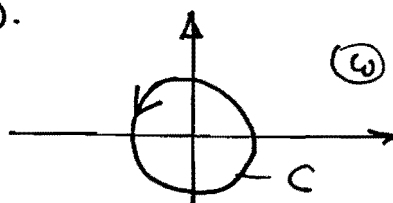
$$k(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}, & \omega^2 > \omega_p^2, \\ i \frac{|\omega|}{c} \sqrt{\omega_p^2/\omega^2 - 1}, & \omega^2 < \omega_p^2. \end{cases} \quad (34.71)$$

Zunächst betrachten wir die Form der Wellenfront, d.h.
wir setzen $\pi = t - x/c \ll 1$ und untersuchen das Integral
(34.65) für festes x .

In dieser Situation liefern die hohen Frequenzen den Haupt-
beitrag, so dass wir nur die führenden Terme von $k(\omega)$ und
 $1/(\omega - \omega_0 + i0)$ zu berücksichtigen brauchen. Mit (34.71) kommt
dann

$$E(x,t) \approx - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega + i0} \exp\left[-i\left(\omega\pi + \frac{\omega_0^2}{2\omega} \frac{x}{c}\right)\right], \quad \pi \ll 1. \quad (34.72)$$

Da $\pi > 0$ ist, ist der Integrand in der unteren Halbebene
für $\omega < 0$ exponentiell gedämpft, sodass wir den Integrations-
weg zu einem Kreis C um den Ursprung zusammen-
ziehen können (s. Fig.).



Im Ursprung hat der Integrand eine wesentliche Singularität. Durch die Substitution

$$\omega = i \sqrt{\frac{\omega_0^2 x}{2\pi c}} \cdot \xi$$

geht das Integral über C in eine bekannte Darstellung der Besselfunktion J_0 über (s., z.B., Cowant-Hilbert, Bd 1., S. 413):

$$E(x,t) \approx -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\xi}{\xi} \exp\left[\left(\frac{2\omega_0^2 x \pi}{c}\right)^{1/2} \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)\right] = J_0\left(\sqrt{\frac{2\omega_0^2 x \pi}{c}}\right),$$

$0 < \pi < \pi$. (34.73)

Das Integral (34.72) genügt ebenfalls dem Kausalitätsprinzip und verschwindet für $\tau < 0$. Die Front des Signals ist scharf ausgeprägt. Bei $\tau = 0$ ($x = ct$) springt E von Null auf eins:

$$E(x, \frac{x}{c} + 0) - E(x, \frac{x}{c} - 0) = 1 \quad (34.74)$$

und fällt hinter der Front mit der Besselfunktion J_0 ab (s. die veränderte Fig.). Die Front der sog. Kopfwelle ist identisch mit dem Profil des Signals an der Grenzfläche im Zeitpunkt $t=0$.

In größerem Abstand $x < ct$ hinter der Front dominieren die mittleren Frequenzen. Mit Hilfe von (34.64) schreiben wir zunächst (34.65) als Doppelintegral

$$E(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i[k(\omega)x + \eta(\omega - \omega_0) - \omega t]}. \quad (34.75)$$

Es werden vor allem die Frequenzen in der Nähe des Pols $\omega = \omega_0$ in (34.65) beibehalten. Deshalb entwickeln wir $k(\omega)$ um $\omega = \omega_0$ nach Taylor und brechen nach dem zweiten Glied ab!

$$k(\omega) \approx k(\omega_0) + k'(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} k''(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2;$$

$k(\omega_0)$ ist das Bezugsrohr der Gruppengeschwindigkeit bei ω_0 :

$$k'(\omega_0) = \frac{1}{v_g} \quad (34.76)$$

Diese ist positiv und kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. $k(\omega_0)$ und $k''(\omega_0)$ lassen sich ebenfalls durch v_g ausdrücken:

$$k(\omega_0) = \frac{\omega_p}{c^2} \frac{v_g}{\sqrt{1 - v_g^2/c^2}}, \quad k''(\omega_0) = -\frac{1}{v_g^3} \frac{c^3}{4\pi \cdot c} (1 - v_g^2/c^2)^{3/2} \quad (34.77)$$

Die Phase in (34.75) ist eine quadratische Funktion in ω und die ω -Integration lässt sich leicht ausführen. Setzt man in verbleibendem Integral

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi} |k''(\omega_0)|} \left(\frac{x}{v_g} - t + \tau \right),$$

so lautet das Ergebnis

$$E(x,t) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i[k(\omega_0)x - \omega_0 t - \frac{\pi}{4}]} \int_{\xi_0}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2}\xi^2} d\xi, \quad (34.78)$$

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{\omega_p v^2}{\pi x c^2}} \frac{x - v_g t}{(1 - v_g^2/c^2)^{3/4}} \quad (34.79)$$

Das verbleibende Integral lässt sich durch die Fresnelschen Integrale

$$C(\xi_0) = \int_0^{\xi_0} \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi^2\right) d\xi, \quad S(\xi_0) = \int_0^{\xi_0} \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi^2\right) d\xi \quad (34.80)$$

ausdrücken

$$\begin{aligned} \int_{\xi_0}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2}\xi^2} d\xi &= \int_0^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2}\xi^2} d\xi - \int_0^{\xi_0} e^{i\frac{\pi}{2}\xi^2} d\xi \\ &= \frac{1+i}{2} - C(\xi_0) - iS(\xi_0). \end{aligned} \quad (34.81)$$

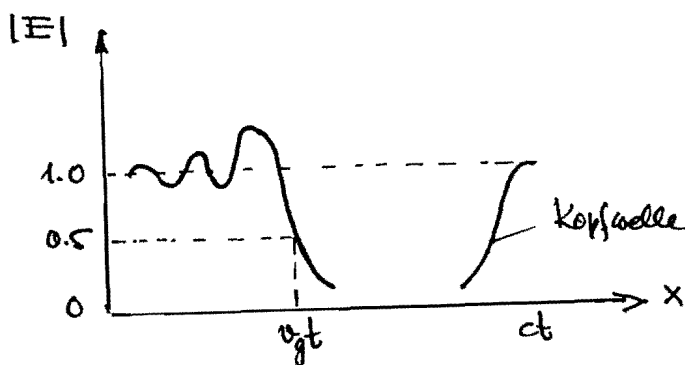
Für den absoluten Betrag von (34.48) bekommen wir jetzt

$$|E(x,t)|^2 \approx \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} - C(\xi_0) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} - S(\xi_0) \right]^2 \right\}. \quad (34.82)$$

Dieses Ergebnis ist in der nächsten Fig. skizziert. Wir erhalten damit das folgende Bild. Auf die Kopfwellen folgt in grösserem Abstand eine zweite Welle, deren Front sich mit der Gruppengeschwindigkeit $v_g < c$ bewegt. Wert hinter der Front der zweiten Welle geht das elektrische Feld in eine ebene harmonische Welle mit der Frequenz ω_0 und der Wellenzahl $k(\omega_0)$ über (s. (34.78)). Abgesehen von der durch die Randbedingung bei $x=0$ erzwungenen Unstetigkeit, die sich auf der Charakteristike der Differentialgleichung (s. (34.36), (34.66)):

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \right) E = 0 \quad (34.83)$$

ausbreitet, dringt das Signal mit der Gruppengeschwindigkeit v_g in das Medium ein.



34.4. Molekulare Dispersionstheorie

A. Molekulare Polarisierbarkeit

Sei $p(t)$ das Dipolmoment eines Atoms (Moleküls), welches sich in einem zeitabhängigen äusseren Feld $E(t)$ befindet. Für nicht zu starke Felder besteht zwischen $p(t)$ und $E(t)$ ein linearer Zusammenhang

$$p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t-t') E(t') dt', \quad (34.84)$$

d.h.

$$p = k * E. \quad (34.84')$$

Im allgemeinen ist k eine Matrix. Im folgenden betrachten wir nur "Atome", die kein permanentes Dipolmoment haben. Für k gelten die gleichen Eigenschaften wie für K auf S. 229. Deshalb erfüllt k auch die Dispersionsrelationen (34.22) und (34.24).

Für die weitere Diskussion nehmen wir der Einfachheit halber an, dass $k(t)$ ein Skalar ist. Die Fourier-Transformierte $\alpha(\omega) = \tilde{k}(\omega)$ ist die molekulare Polarisierbarkeit. Für $\omega=0$ erhalten wir die statische Polarisierbarkeit, denn für $E(t) = \alpha(t) E$ ist

$$p(t) = E \int_0^t k(t-t') dt' \longrightarrow p(\infty) = \alpha(0) E.$$

Diese statische Polarisierbarkeit wird offensichtlich maximal, wenn wir die Dipole durch ideal leitende Kugeln ersetzen. Deshalb ist nach (13.11)

$$0 < \frac{4\pi}{3} N \alpha(0) < 1. \quad (34.85)$$

Die atomare Grösse $\alpha(\omega)$ lässt sich in der Quantenmechanik (im Prinzip) berechnen.

B. Einfache klassische Modelle für $\alpha(\omega)$

In der klassischen Dispersionstheorie betrachtet man die Elektronen als quasielastische Oszillatoren. Die allgemeine Form, die man in diesem Modell für $\alpha(\omega)$ erhält, bleibt auch in der Quantenmechanik (im wesentlichen) bestehen.

Die Geschwindigkeit der Elektronenbewegung in den Atomen ist, im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit, klein. Deshalb sind die Entfernungen v/ω , die von den Elektronen im Laufe einer Periode zurückgelegt werden, klein im Vergleich zur Wellenlänge c/ω . Aus diesem Grund können wir, bei der Bestimmung der Bewegung des Elektrons im Feld der elektromagnetischen Welle, das Feld als homogen betrachten. Dann lautet die Bewegungsgleichung eines Elektrons

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} \Xi(t), \quad (34.86)$$

Mit einer Fourier-Transformation erhalten wir

$$x(t) = \int g(t-t') \Xi(t') dt', \quad (34.87)$$

wobei

$$\tilde{g}(\omega) = \frac{e}{m} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2 - i\gamma\omega}, \quad (34.88)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{g}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (34.89)$$

Gibt es mehrere Typen von Oszillatoren, etwa f_k mit Frequenzen ω_k und Dämpfung γ_k , so erhalten wir damit für die Polarisierbarkeit:

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2}{m} \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_k}, \quad (34.89)$$

wobei

$$\sum_k f_k = Z \quad (34.90)$$

(Kernladungszahl) ist.

C. Die quantenmechanische Formel für $\alpha(\omega)$.

Ein Atom habe die diskreten Energiezustände E_n mit den Übergangsfrequenzen

$$\omega_{nm} = \frac{E_m - E_n}{\hbar} ,$$

Quantenmechanisch kann man die folgende Formel für $\alpha(\omega)$ herleiten (s. QM-Vorlesung):

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2}{m} \sum_{n \neq m} w_n \frac{f_{nm}}{\omega_{nm}^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_{nm}} , \quad (34.91)$$

Dabei ist $\{w_n\}$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Elektronen auf die verschiedenen Zustände E_n ($\sum_n w_n = 1$).

Weiter ist

$$f_{nm} = \frac{2m}{3e^2} \omega_{nm} |\langle n | \underline{d} | m \rangle|^2 , \quad (34.92)$$

wo $\langle n | \underline{d} | m \rangle$ das Übergangsmatrixelement des Dipoloperators ist. Schliesslich ist

$$\Gamma_{nm} = \Gamma_n + \Gamma_m ,$$

wo $1/\Gamma_n$ die Lebensdauer des Zustandes (bezüglich Strahlungszerfall, etc.) ist. Es gilt auch der Summensatz von Thomas, Reiche & Kuhn:

$$\sum_n f_{nm} = Z . \quad (34.93)$$

Aus (34.92) folgt, dass die Oszillatorstärken f — im Gegensatz zur klassischen Theorie — auch negative Werte annehmen können. Dies wurde auch experimentell bestätigt.

Man sieht, wie verblüffend ähnlich die klassischen und die quantenmechanischen Formeln sind.

Für grosse Frequenzen folgt klassisch und quantenmechanisch

$$\alpha(\omega) \approx -\frac{2e^2}{m\omega^2}, \quad (34.91)$$

(Nach dem Korrespondenz-Prinzip erwartet man, dass hier die klassische Theorie zuständig ist.)

5. Die Lorenz-Lorenz Formel

Nun verallgemeinern wir die Formel von Clausius-Mossotti (siehe §13) auf den dynamischen Fall. Wieder betrachten wir ein Dielektrikum mit $\mu = 1$. Dieses bestehe, der Einfachheit halber, nur aus einer Sorte von Atomen der Teilchendichte N . (Die Verallgemeinerung auf mehrere Sorten ist trivial.)

Wieder muss man beachten, dass das lokale Feld \underline{E}' , welchem ein Molekül ausgesetzt ist, nicht mit dem mittleren Feld \underline{E} übereinstimmt. Eine approximative Beziehung zwischen \underline{E} und \underline{E}' erhalten wir wie in §13.

Das makroskopische Feld \underline{E} ist gleich dem äusseren Feld \underline{E}_0 plus dem retardierten Feld zu $\rho = -\text{div } \underline{P}$, $\underline{J} = \dot{\underline{P}}$.

Das lokale Feld \underline{E}' ist andererseits gleich \underline{E}_0 plus den retardierten Dipolfeldern aller Dipole, ausserdem betrachteten Dipol. Diese Summe spalten wir wieder in zwei Anteile auf. Wir denken uns um den beliebig herausgegriffenen Dipol eine Kugel K , welche makroskopisch klein ist, aber immer noch viele Atome enthält. Die Dipole ausserhalb der Kugel können wir dann im Kontinuumslimes behandeln. Die Summe über die Dipole innerhalb K wird sich in Ursprung von K wieder weitgehend wegheben und wir sehen sie gleich Null (siehe S. 58). Deshalb ist

$$\underline{E} \approx \underline{E}' + \text{retardiertes Feld von } (\underline{J} = \dot{\underline{P}}, \rho = -\text{div } \underline{P}) \text{ in } K.$$

Für eine kleine Kugel dürfen wir den Beitrag $-\frac{1}{c} \dot{\underline{A}}$ vom Vektorpotential vernachlässigen und für das skalare Potential wird die Retardierung unfallig. Das Feld der kleinen Kugel dürfen wir also statisch berechnen, was bereits in § 13 durchgeführt wurde. Mit (13.9) finden wir wieder (13.2):

$$\underline{\underline{E}}' = \underline{E} + \frac{4\pi}{3} \underline{P} \quad (34.92)$$

Nun ist aber

$$\hat{\underline{P}}(\omega) = N \alpha(\omega) \underline{\underline{E}}'(\omega) \quad (34.93)$$

und folglich

$$\hat{\underline{P}}(\omega) = \frac{N \alpha(\omega)}{1 - \frac{4\pi}{3} N \alpha(\omega)} \hat{\underline{\underline{E}}}(\omega) \quad (34.94)$$

Für die dynamische DK erhalten wir

$$\underline{E}(\omega) = \frac{1 + \frac{8\pi}{3} N \alpha(\omega)}{1 - \frac{4\pi}{3} N \alpha(\omega)} \quad (34.95)$$

oder

$$\frac{\underline{E}(\omega) - 1}{\underline{E}(\omega) + 2} = \frac{4\pi}{3} N \alpha(\omega) \quad (34.96)$$

(Lorentz-Lorenz Formel)

Dies ist eine wichtige Formel für die Optik dichter Medien. Auf Grund von (34.85) schließen wir auf

$$1 < \underline{E}(\omega) < \infty.$$

Für hohe Frequenzen ergibt sich nach (34.91) und (34.95):

$$\underline{E}(\omega) \simeq 1 - \omega_p^2 / \omega^2 \quad (34.96)$$

wo

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m} \quad (34.97)$$

n_e bezeichnet die Elektronendichte und ω_p ist die sog. Plasmafrequenz.

Da andererseits ω_p allgemein durch (34.69) gegeben ist, so erhält man für

$$f(\omega) = \frac{\mu}{2\pi^2 \epsilon^2} \omega \operatorname{Im} \epsilon(\omega) \quad (34.98)$$

den Summensatz

$$\int_0^{\infty} f(\omega) d\omega = n_e. \quad (34.99)$$

E. Analytische Eigenschaften von $\epsilon(\omega)$ und $n(\omega)$

Für $\alpha(\omega)$ gelten natürlich auch die Eigenschaften, welche im Satz auf S. 232 formuliert sind. Daraus schliessen wir zunächst, dass nach (34.95) $\epsilon(\omega)$ dieselben analytischen Eigenschaften wie $\alpha(\omega)$ hat. Tabaddlich kann der Nenner in (34.95) nach dem zitierten Theorem höchstens auf der imaginären Achse einen Pol produzieren. Da aber nach (34.85) $\frac{4\pi}{3} N \alpha(\omega) < 1$ ist und $\alpha(\omega)$ auf der imaginären Achse monoton abfällt, ist $\epsilon(\omega)$ in der oberen Halbebene ($\operatorname{Im} \omega > 0$) holomorph. Auch die weiteren Eigenschaften von $\epsilon(\omega)$ in der folgenden Liste verifiziert man ohne Mühe.

Eigenschaften von $\epsilon(\omega)$:

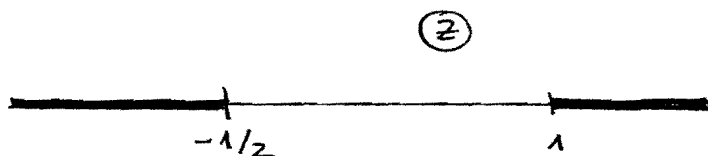
- (i) $\epsilon(\omega)$ ist analytisch in ω in der Halbebene $\operatorname{Im} \omega > 0$;
 - (ii) $\epsilon(\omega)$ ist stetig und beschränkt in $\operatorname{Im} \omega \geq 0$ und $|\epsilon(\omega) - 1| \rightarrow 0$ für $|\omega| \rightarrow \infty$;
 - (iii) $\epsilon(\omega)^* = \epsilon(-\omega^*)$ für $\operatorname{Im} \omega \geq 0$;
 - (iv) $\operatorname{Im} \epsilon(\omega) > 0$ für $0 < \omega < \infty$,
 $\operatorname{Re} \epsilon(\omega) > 0$ für alle ω in $\operatorname{Im} \omega \geq 0$;
 - (v) $\epsilon(\omega) > 1$.
- (34.100)

Deshalb bleibt insbesondere die Dispersionsrelation (34.25) gültig.

Der Brechungsindex $n(\omega)$ ist $n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)}$, d.h.

$$n(z) = \sqrt{\frac{1+z^2}{1-z}} \quad , \quad z(\omega) = \frac{4\pi}{3} N \alpha(\omega) \quad , \quad (34.101)$$

Wir machen $n(z)$ eindeutig durch zwei Schlitze in der z -Ebene, die von den Singularitäten $1, -\frac{1}{2}$ nach ∞ , bzw. $-\infty$ laufen (s. Fig.).



In der geschnittenen Ebene definieren wir $n(z)$ durch $n(0) = 1$. In dieser ist dann $\operatorname{Re} n(z) > 0$, $\operatorname{Im} n(z) \geq 0$ für $\operatorname{Im} z \geq 0$. Die Diskussion auf S. 235 f lässt sich leicht wiederholen und man findet dank $0 < z(\omega) < 1$ (gl. (34.85)), dass $n(\omega)$ nach wie vor die Eigenschaften (34.33) erfüllt sind. (Die Kurve C in der Fig. auf S. 235 schneidet die Schlitze in der obigen Figur nicht.) Insbesondere ergibt sich wieder die Dispersionsrelation (34.34).

* * *

5.6

§ 35. Die Frank-Tamm Theorie der Čerenkov-Strahlung

In diesem Abschnitt ergänzen wir die elementare Theorie der Čerenkov-Strahlung in § 32, indem wir nun auch die Dispersion berücksichtigen. Dadurch verschwinden die unphysikalischen Singularitäten auf dem Mach-Kegel. Wir werden im folgenden insbesondere die abgestrahlte Energie berechnen.

Die in der Zeit Fourier-transformierten Felder $\hat{\underline{E}}(\underline{x}, \omega)$, $\hat{\underline{B}}(\underline{x}, \omega)$ erfüllen die Maxwell'schen Gleichungen ($\mu \text{ sei } = 1$):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \hat{\underline{B}} &= 0, & \operatorname{rot} \hat{\underline{E}} - \frac{i\omega}{c} \hat{\underline{B}} &= 0, \\ \operatorname{div} \hat{\underline{E}} &= 4\pi \hat{\rho} / \epsilon(\omega), & \operatorname{rot} \hat{\underline{B}} + \frac{i\omega}{c} \epsilon(\omega) \hat{\underline{E}} &= 4\pi \hat{\underline{J}}. \end{aligned} \quad (35.1)$$

Die homogenen Gleichungen gestatten uns, wie immer, eine Darstellung durch Potentiale

$$\hat{\underline{B}} = \operatorname{rot} \hat{\underline{A}}, \quad \hat{\underline{E}} = -\operatorname{grad} \hat{\varphi} + \frac{i\omega}{c} \hat{\underline{A}}. \quad (35.2)$$

Wir können die Formeln (32.5) und (32.6) übernehmen, wenn wir diese in Fouriertransformierter Form schreiben:

Lorenzbedingung: $\operatorname{div} \hat{\underline{A}} - \frac{i\omega}{c} \epsilon(\omega) \hat{\varphi} = 0$; (35.3)

Feldgleichungen:
$$\left. \begin{aligned} [\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)] \hat{\varphi} &= -4\pi \hat{\rho} / \epsilon \\ [\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)] \hat{\underline{A}} &= -4\pi \hat{\underline{J}} \end{aligned} \right\} \quad (35.4)$$

Die Ladungs- und Stromdichte für eine translational bewegte Punktladung sind

$$\begin{aligned} \rho(\underline{x}, t) &= e \delta(\underline{x} - \underline{v}t), \\ \underline{J}(\underline{x}, t) &= e \underline{v} \delta(\underline{x} - \underline{v}t). \end{aligned} \quad (35.5)$$

Nun wenden wir auf (35.4) auch noch die räumliche Fourier-Transformation an. Mit den Bezeichnungen

$$\tilde{\varphi}(\underline{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\underline{x} dt e^{-i(\underline{k}\cdot\underline{x} - \omega t)} \varphi(\underline{x}, t), \text{ etc. (35.6)}$$

sowie

$$\tilde{\psi}(\underline{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dt e^{i\omega t} e^{-i\underline{k}\cdot\underline{v}t} = \frac{1}{2\pi} \delta(\omega - \underline{k}\cdot\underline{v}) \quad (35.7)$$

(begründe dies nach den Regeln der Kunst!), erhält man

$$\left[\underline{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right] \tilde{\varphi}(\underline{k}, \omega) = \frac{z}{\varepsilon(\omega)} \cdot \delta(\omega - \underline{k}\cdot\underline{v}), \quad (35.8)$$

$$\left[\underline{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right] \tilde{A}(\underline{k}, \omega) = \frac{z}{c} \underline{v} \delta(\omega - \underline{k}\cdot\underline{v}). \quad (35.9)$$

Da $\varepsilon(\omega)$ für reelle ω einen nichtverschwindenden Quadratwert hat, besitzt (35.8) die folgende Lösung in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$:

$$\tilde{\varphi}(\underline{k}, \omega) = \frac{ze}{\varepsilon(\omega)} \frac{\delta(\omega - \underline{k}\cdot\underline{v})}{\underline{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega)}. \quad (35.10)$$

Durch Vergleich von (35.8) und (35.9) schliessen wir

$$\tilde{A}(\underline{k}, \omega) = \frac{1}{c} \varepsilon(\omega) \underline{v} \tilde{\varphi}(\underline{k}, \omega). \quad (35.11)$$

Zu dieser partikulären Lösung können wir natürlich immer eine Lösung der homogenen Gleichung addieren. Die angeschriftene Lösung wird das Cerenkov-Licht beschreiben.

Aus (35.10) folgt ($\underline{v} = (0, 0, v)$):

$$\hat{\varphi}(\underline{x}, \omega) = \frac{ze}{\varepsilon(\omega)} (2\pi)^{-3/2} \int d\underline{k} \frac{\delta(\omega - vk_3)}{\underline{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega)} e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}}. \quad (35.12)$$

Wir zerlegen bezüglich der Richtung von \underline{v} : $\underline{k} = (\underline{k}_\perp, k_3)$, $\underline{x} = (\underline{x}_\perp, z)$. Die k_3 - "Integration" in (35.12) ist trivial:

$$\hat{\varphi}(x, \omega) = \frac{1}{v} \frac{ze}{\epsilon(\omega)} (z_0)^{3/2} e^{i\omega z/v} \int dk_{\perp} \frac{e^{ik_{\perp} \cdot x_{\perp}}}{k_{\perp}^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega)}. \quad (35.13)$$

Wir benötigen das folgende Integral

$$I = \int dk_{\perp} \frac{e^{ik_{\perp} \cdot x_{\perp}}}{k_{\perp}^2 - \lambda^2}, \quad \lambda^2 = \frac{\omega^2}{v^2} (\beta^2 \epsilon(\omega) - 1). \quad (35.14)$$

Für Čerenkov-Strahlung ($\frac{v}{c/m} > 1$) ist $\text{Re } \lambda^2 > 0$.

Offensichtlich ist (mit $|x_{\perp}| = \rho$):

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 e^{ik_1 \rho} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 - \lambda^2}. \quad (35.15)$$

Das Integral über k_2 führen wir mit Residuentechnik aus. Für $\omega > 0$ ist $\text{Im } \epsilon(\omega) > 0$, also $\text{Im } \lambda^2 > 0$. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden:

(a) $\lambda^2 < k_1^2$: Integrand hat Pole bei $k_2 = \pm i\sqrt{k_1^2 - \lambda^2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 - \lambda^2} = \frac{\pi}{\sqrt{k_1^2 - \lambda^2}}; \quad (35.16a)$$

(b) $\lambda^2 > k_1^2$: Pole bei $k_2 = \pm \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$

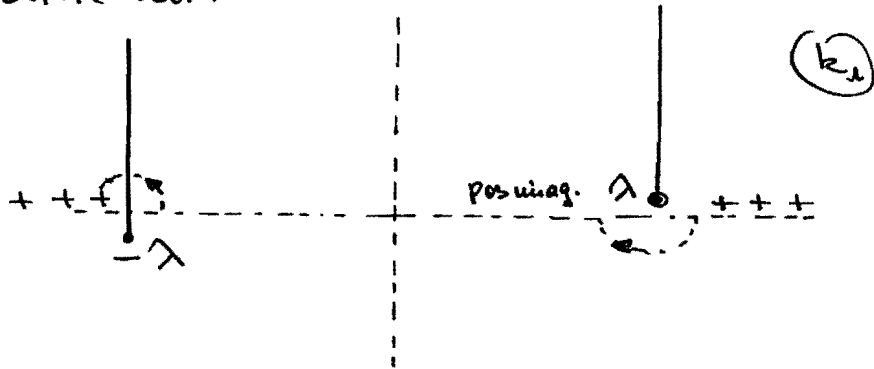
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 - \lambda^2} = \frac{i\pi}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}. \quad (35.16b)$$

Damit reduziert sich (35.15) auf

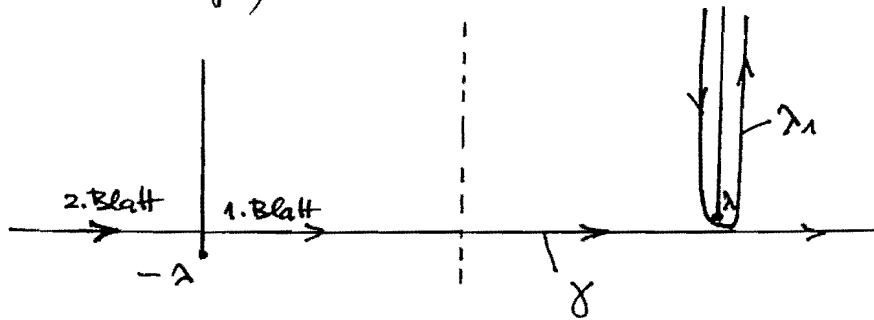
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 e^{ik_1 \rho} \frac{\pi}{\sqrt{k_1^2 - \lambda^2}}, \quad (35.17)$$

wobei die Wurzel konform mit (35.16a) und (35.16b) definiert werden muss. Dazu schneiden wir die k_1 -Ebene so auf, wie dies in der nachstehenden Figur angedeutet ist. (Beachte, dass λ einen kleinen positiven Imaginärteil hat). In der geschnittenen Ebene definieren wir die Wurzel in

(35.17) so, dass $\sqrt{k_1^2 - \lambda^2}$ für $k_1 > \text{Re } \lambda$ ($k_1 \in \mathbb{R}$) einen positiven Realteil hat.



Das Integral (35.17) ist dann gleich dem Integral desselben Ausdruck über den Weg γ in der folgenden Fig., der teilweise auf dem 2. Blatt zum Verzweigungspunkt durch $-\lambda$ verläuft,



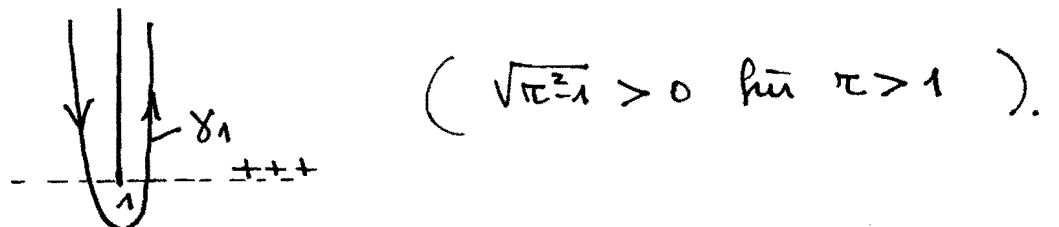
Wegen $g > 0$ lässt sich γ auf den Weg γ_1 deformieren (s. Fig.):

$$I = \int_{\gamma_1} dk_1 e^{ik_1 g} \frac{\pi}{\sqrt{k_1^2 - \lambda^2}} \quad (35.18)$$

Dies ist aber im wesentlichen die Integraldarstellung der Hankelfunktion $H_0^{(1)}(z)$. Es gilt nämlich die folgende Formel (s. z.B. Smitnov, Bd. III.2, p. 357)

$$H_0^{(1)}(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\lambda \pi^{3/2}} \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz\pi}}{\sqrt{\tau^2 - 1}} d\tau \quad , \quad (35.19)$$

mit γ_1 :



Wegen $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ folgt damit

$$I = i\pi^2 H_0^{(1)}(\lambda \rho). \quad (35.20)$$

Folglich ist nach (35.13)

$$\hat{\varphi}(x, \omega) = \sqrt{\frac{\pi}{z}} \frac{e}{\varepsilon(\omega)} i H_0^{(1)}(\lambda \rho) e^{i\omega z/v}, \quad (\omega > 0)$$

und nach (35.11)

$$\begin{aligned} \hat{A}_z(x, \omega) &= \frac{\varepsilon}{c} v \hat{\varphi} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{z}} \frac{e}{c} i H_0^{(1)}(\lambda \rho) e^{i\omega z/v} \quad (\omega > 0). \end{aligned} \quad (35.21)$$

Darzufoolge gilt

$$\underline{A_z(x, t) = \frac{e}{zc} \int d\omega a(\rho, \omega) e^{i\omega(z/v - t)},} \quad (35.22)$$

$$\text{mit } \underline{a(\rho, \omega) = i H_0^{(1)}(\lambda \rho) \text{ f\"ur } \omega > 0.} \quad (35.23a)$$

Da $a(\rho, -\omega) = a(\rho, \omega)^*$ ist, gilt

$$\underline{a(\rho, \omega) = -i H_0^{(2)}(\lambda \rho) \text{ f\"ur } \omega < 0.} \quad (35.23b)$$

F\"ur $\omega > 0$ gilt asymptotisch f\"ur gro\"usse ρ

$$a(\rho, \omega) \sim i \sqrt{\frac{z}{\pi \lambda \rho}} e^{i(\lambda \rho - \pi/4)} \quad (\omega > 0). \quad (35.24)$$

Setzen wir

$$\cos \vartheta = \frac{1}{\beta n}, \quad u = \frac{c}{n} = v \cos \vartheta \quad (35.25)$$

(wir vernachl\"assigen jetzt $\text{Im } \varepsilon(\omega)$), so hat der Integrand in (35.22) die asymptotische Form

$$e^{i\omega(z/v - t)} a(\rho, \omega) \sim e^{-i\pi/4} e^{i\omega \left[\frac{z \cos \vartheta + \rho \sin \vartheta}{u} - t \right]}. \quad (35.26)$$

Dies ist eine in Richtung $\hat{\sigma}$ auslaufende Welle (mit der Geschwindigkeit $u = c/n$). Nach (32.31) steht diese Richtung senkrecht auf dem Hohl-Kegel.

Wir berechnen jetzt die Felder $\hat{\underline{E}}$ und $\hat{\underline{B}}$. Nach (35.2) und (35.3) ist

$$\begin{aligned}\hat{\underline{B}} &= \text{rot } \hat{\underline{A}}, \\ \hat{\underline{E}} &= \frac{ic}{\omega n^2} \text{grad}(\text{div } \hat{\underline{A}}) + i\frac{\omega}{c} \hat{\underline{A}}.\end{aligned}\quad (35.27)$$

Diese Ausdrücke bestimmen wir in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) . Nun ist nur $A_z \neq 0$ und A_z ist unabhängig vom azimutalen Winkel φ . Eine Routinerechnung zeigt (benutze Übungsserie), dass nur \hat{B}_φ , \hat{E}_ρ und \hat{E}_z nicht verschwinden und für diese ist

$$\begin{aligned}\hat{B}_\varphi &= -\frac{\partial \hat{A}_z}{\partial \rho}, \\ \hat{E}_\rho &= \frac{ic}{\omega n^2} \frac{\partial^2 \hat{A}_z}{\partial z \partial \rho}, \\ \hat{E}_z &= \frac{ic}{\omega n^2} \frac{\partial^2 \hat{A}_z}{\partial z^2} + \frac{i\omega}{c} \hat{A}_z.\end{aligned}\quad (35.28)$$

Der Poynting-Vektor hat die Komponenten

$$\begin{aligned}S_\rho &= -\frac{c}{4\pi} E_z B_\varphi, \\ S_\varphi &= 0, \\ S_z &= \frac{c}{4\pi} E_\rho B_\varphi.\end{aligned}\quad (35.29)$$

Der Energiefluss durch einen Zylinder mit dem Radius ρ ist pro Längeneinheit

$$\frac{dW}{dz} = 2\pi\rho \int_{-\infty}^{+\infty} S_\rho dt = -\frac{c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} E_z B_\varphi dt. \quad (35.30)$$

Aus (35.28) und (35.22) ergibt sich:

$$B_{\varphi} = -\frac{e}{2c} \int e^{i\omega(z/c-t)} \frac{\partial a(\rho, \omega)}{\partial \rho} d\omega, \quad (35.31)$$

$$E_z = -\frac{ie}{2c^2} \int e^{i\omega(z/c-t)} \left(\frac{1}{\beta^2 u^2} - 1 \right) a(\rho, \omega) \omega d\omega, \quad (35.32)$$

Nach der Parsevalgleichung und der Realitätsbedingung $a(\omega)^* = a(-\omega)$ folgt

$$\frac{dW}{dz} = -\frac{i\pi e^2}{4c^2} \rho \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\beta^2 u^2} - 1 \right) [a(\omega) \frac{\partial a(-\omega)}{\partial \rho} - a(-\omega) \frac{\partial a(\omega)}{\partial \rho}] \omega d\omega. \quad (35.33)$$

Darin setzen wir (35.23) ein und bekommen

$$\frac{dW}{dz} = -\frac{i\pi e^2}{4c^2} \rho \int_0^{\omega_{\max}} \left(\frac{1}{\beta^2 u^2} - 1 \right) \lambda \cdot W[H_0^{(1)}, H_0^{(2)}](\lambda \rho) \omega d\omega. \quad (35.34)$$

Hier ist $W[H_0^{(1)}, H_0^{(2)}]$ die Wronsky-Determinante

$$W[H_0^{(1)}, H_0^{(2)}](x) = H_0^{(1)} \frac{\partial H_0^{(2)}}{\partial x} - H_0^{(2)} \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial x}. \quad (35.35)$$

Diese bestimmt man wie folgt. Die Hankelfunktionen in (35.35) erfüllen die Differentialgleichung

$$u'' + \frac{1}{x} u' + u = 0.$$

Daraus ergibt sich für zwei Lösungen

$$W[u_1, u_2]' + \frac{1}{x} W[u_1, u_2] = 0$$

oder

$$W = \frac{\text{const.}}{x}.$$

Aus der Asymptotik von $H_0^{(1)}$, $H_0^{(2)}$ bestimmt man sofort die Konstante und findet

$$W[H_0^{(1)}, H_0^{(2)}] = -\frac{4i}{\pi x}. \quad (35.36)$$

Damit ergibt sich schließlich

$$\left| \frac{dW}{dz} = \frac{e^2}{c^2} \int_0^{\omega_{\max}} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)} \right) \omega d\omega \right. ; \quad (35.37)$$

(Frank & Tamm)

ω_{\max} ist bestimmt durch die Bedingung:

$$\underline{n(\omega) \beta > 1.}$$

Fast dasselbe Resultat erhält man auch in einer quantenmechanischen Behandlung.

5.7
§36. Geführte Wellen in zylindrischen Anordnungen

Wir betrachten in diesem Abschnitt Anordnungen, welche invariant sind unter Translationen längs einer ausgezeichneten Achse, welche wir als z -Richtung wählen. Die Materialkonstanten ϵ , μ und σ sind dann unabhängig von z . Bei periodischer Erregung ($\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$) lauten zwei der Maxwell-Gleichungen

$$\text{rot } \underline{E} = i \frac{\mu\omega}{c} \underline{H}, \quad \text{rot } \underline{H} = -i \frac{\epsilon'\omega}{c} \underline{E}, \quad (36.1)$$

mit

$$\epsilon' = \epsilon + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma. \quad (36.2)$$

Wir setzen die Feldstärken in der z -Richtung als ebene Wellen dar:

$$\begin{aligned} \underline{E}(\underline{x}, \omega) &= \underline{E}(x, y, \omega) e^{ihz}, \\ \underline{H}(\underline{x}, \omega) &= \underline{H}(x, y, \omega) e^{ihz}, \end{aligned} \quad h \in \mathbb{C}, \quad (36.3)$$

(Die allgemeinste Lösung lässt sich nach Fourier durch Superposition solcher Wellen darstellen.) Vektoren zerlegen wir im folgenden in transversale und longitudinale Anteile:

$$\underline{E} = \underline{E}_\perp + E_z \underline{e}_z, \quad \underline{x} = \underline{x}_\perp + z \underline{e}_z, \quad \text{etc.}, \quad (36.4)$$

wobei \underline{e}_z der Einheitsvektor in der z -Richtung ist. Wir zerlegen auch die Gleichungen (36.1) in ihre transversalen und longitudinalen Komponenten, indem wir diese vektoriell, bzw. skalar mit \underline{e}_z multiplizieren. Benutzt man die Identität:

$$\underline{e}_z \wedge \text{rot } \underline{E} = \nabla_\perp E_z - \frac{\partial}{\partial z} \underline{E}_\perp \quad (36.5)$$

(verifiziere diese), so findet man

$$\frac{\partial}{\partial z} \underline{E}_\perp + i \frac{\mu\omega}{c} \underline{e}_z \wedge \underline{H}_\perp = \nabla_\perp E_z, \quad \underline{e}_z \cdot (\nabla_\perp \wedge \underline{E}_\perp) = i \frac{\mu\omega}{c} H_z, \quad (36.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \underline{H}_\perp - i \frac{\epsilon' \omega}{c} \underline{e}_z \wedge \underline{E}_\perp = \nabla_\perp H_z, \quad \underline{e}_z \cdot (\nabla_\perp \wedge \underline{H}_\perp) = -i \frac{\epsilon' \omega}{c} E_z. \quad (36.7)$$

Für die z -Abhängigkeit (36.3) kann man in den Transversalen Gleichungen leicht \underline{H}_\perp , bzw. \underline{E}_\perp eliminieren und erhält

$$\begin{aligned} i(h^2 - \mu \epsilon' \frac{\omega^2}{c^2}) \underline{E}_\perp &= h \nabla_\perp E_z - \frac{\mu \omega}{c} \underline{e}_z \wedge \nabla_\perp H_z, \\ i(h^2 - \mu \epsilon' \frac{\omega^2}{c^2}) \underline{H}_\perp &= h \nabla_\perp H_z + \frac{\epsilon' \omega}{c} \underline{e}_z \wedge \nabla_\perp E_z. \end{aligned} \quad (36.8)$$

Wir setzen im folgenden

$$k^2(\omega) = \frac{\mu \epsilon' \omega^2}{c^2}. \quad (36.9)$$

Falls also $\underline{h^2} \neq k^2$ ist, können wir nach (36.8) die transversalen Felder \underline{E}_\perp und \underline{H}_\perp durch die longitudinalen Komponenten E_z und H_z ausdrücken.

In Bereichen homogener Materialkonstanten gelten die Wellengleichungen

$$\underbrace{(\Delta + \mu \epsilon' \frac{\omega^2}{c^2})}_{k^2(\omega)} \begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{H} \end{pmatrix} = 0. \quad (36.10)$$

In solchen Bereichen folgen aus (36.1) durch Divergenzbildung auch $\nabla \cdot \underline{H} = 0$, $\nabla \cdot \underline{E} = 0$. Bezeichnet Δ_\perp den transversalen (zweidimensionalen) Laplace-Operator, so folgt aus (36.3) und (36.10)

$$(\Delta_\perp + k^2 - h^2) \begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{H} \end{pmatrix} = 0. \quad (36.11)$$

Für den Ausnahmefall $k^2 = h^2$ erfüllen demnach \underline{E} und \underline{H} die zweidimensionale Laplace-Gleichung.

An den Grenzflächen zwischen Materialien verschiedener Konstanten ϵ, μ, σ müssen die üblichen Stetigkeitsbedingungen er-

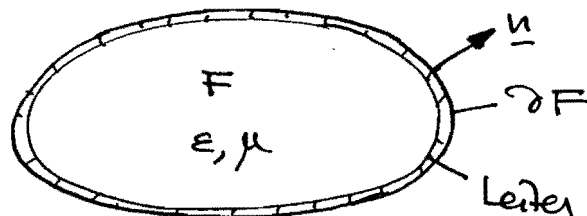
füllt sein.

36.1. Der ideale metallische Wellenleiter

Ein idealer Wellenleiter ist ein Hohlzylinder von beliebigem, aber längs der Zylinderachse konstantem Querschnitt F , dessen Mantel aus ideal leitendem Material besteht. Der Innenraum sei mit einem homogenen, isotropen und dispersionsfreien Medium mit den Materialkonstanten ϵ , μ , $\sigma=0$ gefüllt (z.B. Vakuum). Wir interessieren uns für das elektromagnetische Feld im Innenraum. Im idealen Leiter verschwindet \underline{E} und, wegen dem Induktionsgesetz, auch \underline{H} . Daraus folgen aus den homogenen Maxwell-Gleichungen die bekannten Stützbedingungen

$$(\underline{n} \cdot \underline{E})_{\text{Rand}} = 0 \quad , \quad (\underline{n} \wedge \underline{H})_{\text{Rand}} = 0 \quad , \quad (36.12)$$

wo \underline{n} der Normalenvektor ist (s. Fig.).



Wählen wir für einen gegebenen Randpunkt das Koordinatensystem so, dass $\underline{n} = \underline{e}_x$ ist (x, y, z : Cartesische Koordinaten), so muss dort nach (36.12) folgendes gelten: $H_x = 0, E_y = 0, E_z = 0$. Dann ist aber nach der transversalen Gleichung in (36.7) auch $H_{z,x} = 0$, d.h. für E_z und H_z gelten die Randbedingungen

$$E_z|_{\text{Rand}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial H_z}{\partial n}|_{\text{Rand}} = 0 \quad , \quad (36.13)$$

Diese Bedingungen sind für $h^2 \neq k^2$ gemäss (36.8) äquivalent zu (36.12). (Um dies zu sehen schreibe man (36.8) in Komponenten aus.)

A. Diskussion der Moden für $h^2 \neq k^2$

Dieser Fall zerfällt in zwei Klassen von Moden:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) TM-Modus: } H_z = 0, E_z = \psi \neq 0; \\ (\Delta_{\perp} + k^2 - h^2) \psi = 0, \psi|_{\text{Rand}} = 0. \end{array} \right. \quad (36.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(ii) TE-Modus: } E_z = 0, H_z = \psi \neq 0; \\ (\Delta_{\perp} + k^2 - h^2) \psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial n} |_{\text{Rand}} = 0. \end{array} \right. \quad (36.15)$$

In diesen Moden gelten für die transversalen Komponenten nach (36.8) die Beziehungen

$$\underline{H}_{\perp} = \frac{1}{z} \underline{e}_z \wedge \underline{E}_{\perp}, \quad (36.16)$$

wobei

$$z = \begin{cases} \frac{c h}{\epsilon \omega} = \frac{h}{k} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} & \text{(TM),} \\ \frac{\mu \omega}{c h} = \frac{k}{h} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} & \text{(TE).} \end{cases} \quad (36.17)$$

die sog. Wellen-Impedanz ist. Neben (36.16) gilt für die transversalen Felder nach (36.8)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{TM-Moden: } \underline{E}_{\perp} = \frac{i h}{k^2 - h^2} \nabla_{\perp} \psi, \\ \text{TE-Moden: } \underline{H}_{\perp} = \frac{i h}{k^2 - h^2} \nabla_{\perp} \psi. \end{array} \right. \quad (36.18)$$

$$\quad (36.19)$$

Die skalare Funktion ψ bestimmt also die Felder in den beiden Klassen von Moden gemäß (36.16), (36.18) und (36.19).

Wir müssen nun die Eigenwertprobleme (36.14) und (36.15) diskutieren. Differentialgleichung und Randbedingung können zusammen und für bestimmte Werte von $\lambda^2 := k^2 - h^2$ erfüllt werden, welche man die Eigenwerte nennt. Die zugeordneten Lösungen heißen Eigenfunktionen.

Wir zeigen zunächst, dass die Eigenwerte reell und positiv sein müssen. Dazu verwenden wir den Gauss'schen Satz in zwei Dimensionen. Integration von $\nabla_{\perp} \cdot (\psi \nabla_{\perp} \psi) = |\nabla_{\perp} \psi|^2 + \psi \Delta_{\perp} \psi$ über F gibt

$$\int_F |\nabla_{\perp} \psi|^2 d\sigma + \int_F \psi \Delta_{\perp} \psi d\sigma = \int_{\partial F} \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds. \quad (36.20)$$

Sowohl aus (36.14) als auch aus (36.15) folgt deshalb

$$\lambda^2 = \frac{\int_F |\nabla_{\perp} \psi|^2 d\sigma}{\int_F \psi^2 d\sigma} \geq 0. \quad (36.21)$$

$\lambda^2 = 0$ kommt nach Voraussetzung ($h^2 \neq k^2$) nicht vor. Zu einem Eigenwert gehören im allgemeinen verschiedene Eigenfunktionen. Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten sind im folgenden Sinne orthogonal: Aus

$$(\Delta_{\perp} + \lambda_i^2) \psi_i = 0, \quad (\Delta_{\perp} + \lambda_j^2) \psi_j = 0, \quad \lambda_i^2 \neq \lambda_j^2$$

und den Randbedingungen (36.14) oder (36.15) folgt

$$\int_F \psi_i \psi_j d\sigma = 0. \quad (36.22)$$

Zunächst gilt nämlich

$$\int_F (\psi_j \Delta_{\perp} \psi_i - \psi_i \Delta_{\perp} \psi_j) d\sigma = (\lambda_j^2 - \lambda_i^2) \int_F \psi_i \psi_j d\sigma.$$

Aber die linke Seite verschwindet nach der 2. Green'schen Formel in zwei Dimensionen und den Randbedingungen:

$$\int_F (\psi_j \Delta_{\perp} \psi_i - \psi_i \Delta_{\perp} \psi_j) d\sigma = \int_{\partial F} (\psi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial n} - \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial n}) d\sigma = 0.$$

Man kann die folgenden Aussagen beweisen:

- (i) Es gibt abzählbar unendlich viele Eigenwerte λ_n ,

die sich im Endlichen nirgends k ufen. Jeder Eigenwert λ_n hat eine endliche Vielfachheit. Der kleinste Eigenwert λ_1 ist einfach. Die Eigenfunktionen können reell und orthogonal vorausgesetzt werden.

(ii) Jede genugend glatte Funktion, die der Randbedingung genügt, kann in eine absolut und gleichmässig konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen entwickelt werden*).

(Diese ziemlich tief liegenden Aussagen beweist man mit der Theorie der Integralgleichungen; siehe z.B. W.S. Wladimirov, Gleichungen der mathematischen Physik, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1972.)

Für jeden Eigenwert erhalten wir eine Dispersionsbeziehung

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu = k^2 + \lambda_i^2. \quad (36.23)$$

Wir sehen

$$\frac{1}{c^2} \epsilon \mu = \frac{1}{u^2}, \quad u^2 \lambda_i^2 = \omega_i^2 \quad (36.24)$$

und lösen (36.23) nach der Wellenzahl auf:

$$k = \pm k_i(\omega), \quad k_i(\omega) = \frac{1}{u} \sqrt{\omega^2 - \omega_i^2}. \quad (36.25)$$

Die i -te Eigenwelle breitet sich nur im Frequenzbereich $\omega^2 > \omega_i^2$ aus. (Sonst ist $k_i(\omega)$ imaginär.) In der Praxis versucht man oft durch eine geeignete Dimensionierung der Anordnung zu erreichen, dass sich nur die Grundwelle ausbreiten kann (d.h. $\omega^2 > \omega_1^2$, $\omega^2 < \omega_i^2$ für alle anderen i).

Die Phasengeschwindigkeit der Eigenwellen beträgt:

x) Für den TE-Modus muss man noch die konstanten Funktionen mitnehmen.

$$v_{\text{Phase}} = \frac{\omega}{k_i} = \frac{u}{\sqrt{1 - \omega_i^2/\omega^2}} > u, \quad (36.26)$$

d.h. $v_{\text{Phase}} \rightarrow \infty$ für $\omega \downarrow \omega_i$. Offensichtlich ist das Produkt von Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit

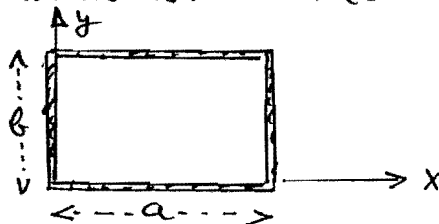
$$v_g = \frac{d\omega}{dk_i} = u \sqrt{1 - \omega_i^2/\omega^2} < u \quad (36.27)$$

gleich u^2 :

$$v_{\text{Phase}} \cdot v_g = u^2, \quad (36.28)$$

Beispiel. Rechtwinkliger Wellenleiter:

Für den TE-Modus ist nach (36.15) (s. Fig.):



$$\psi_{mn}(x,y) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (m, n \in \mathbb{N}_0), \quad (36.29)$$

$$\lambda_{mn}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right); \quad (36.30)$$

m und n dürfen nicht gleichzeitig Null sein. Die niedrigste Grenzfrequenz ist für $a > b$

$$\omega_{1,0} = \frac{\pi u}{a}. \quad (36.31)$$

Diese Frequenz ist kleiner als die kleinste Grenzfrequenz der TM-Moden, da man für diese in (36.29) "cos" durch "sin" ersetzen muss (weil $m, n \in \mathbb{N}$ sind).

Die Felder für den tiefsten TE-Modus sind nach (36.29), (36.19) und (36.16):

$$H_z = H_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{i(k_{1,0} z - \omega t)},$$

$$\begin{aligned}
 H_x &= -i \frac{\mu_0 a H_0}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(\mu_0 z - \omega t)}, \\
 E_y &= i \frac{\omega \mu H_0}{\pi c} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(\mu_0 z - \omega t)}.
 \end{aligned}
 \tag{36.32}$$

B. Diskussion der TEM-Wellen

Wir betrachten nun den Fall $\underline{u}^2 = k^2$. Dann ist nach (36.11) $\Delta_{\perp} E_z = 0$; da ferner $E_z|_{\text{Rand}} = 0$ muss E_z überall verschwinden. Aus $\Delta_{\perp} H_z = 0$ und $\partial H_z / \partial n|_{\text{Rand}} = 0$ (s. (36.13)) folgt zunächst bloß $H_z = \text{const.}$ Nun ist aber

$$0 = \int_{\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{s} = \int_F \text{rot } \underline{E} \cdot \underbrace{d\underline{s}}_{\underline{e}_z d\sigma} = \int_F \frac{i\mu\omega}{c} H_z d\sigma,$$

woraus $\underline{H}_z = 0$ folgt. Aus (36.6) und (36.7) folgt sodann

$$\underline{\nabla}_{\perp} \wedge \underline{E}_{\perp} = 0, \quad \underline{\nabla}_{\perp} \cdot \underline{E}_{\perp} = 0,
 \tag{36.33}$$

$$\underline{B}_{\perp} = \sqrt{\mu\epsilon} \underline{e}_z \wedge \underline{E}_{\perp}.
 \tag{36.34}$$

Die Gleichungen (36.33) sind äquivalent zu

$$\underline{E}_{\perp} = -\underline{\nabla}_{\perp} \psi, \quad \Delta_{\perp} \psi = 0.
 \tag{36.35}$$

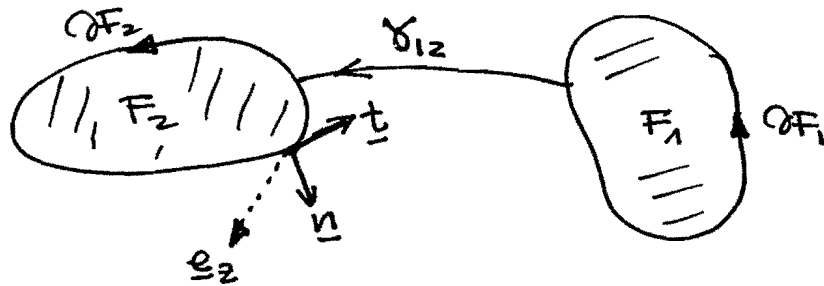
Außerdem ist ψ auf den Leitern konstant. Es liegt also ein ebenes Potentialproblem (Kapazitätenproblem) vor. Dieses hat nur additive Lösungen, wenn der Rand der Leiter in mehrere nichtzusammenhängende Komponenten zerfällt.

Beispiele dafür sind die Doppelleitung und das Koaxialkabel.

36.2. Leitungsgleichungen für eine Doppelleitung

Wir behandeln jetzt die Doppelleitung, d.h. eine Anordnung, die aus zwei parallelen zylindrischen idealen Wellenleitern be-

steht. Die Wellenleiter sind häufig in ein Medium mit einer dispersiven DK $\epsilon(\omega)$ eingebettet (s. Fig.). Die Permeabilität



ist dagegen konstant. Die gesamte Anordnung befindet sich im "Vakuum", doch können wir von dem Einfluss der Grenzfläche zwischen Vakuum und dispersivem Medium in der Umgebung der Wellenleiter absehen, wenn die transversale Ausdehnung des Mediums gross gegenüber den Querspannungen der Wellenleiter ist.

Wir stellen uns vor, das ebene Kapazitätenproblem (36.35) sei (z.B. mit funktionsentheoretischen Methoden) gelöst und es sei $\psi_1 = \psi|_{\partial F_1}$, $\psi_2 = \psi|_{\partial F_2}$.

Wir wollen nun insbesondere eine Gleichung für den Strom, welcher am Rande ∂F_1 fließt, herleiten. Dazu bilden wir zuerst die Spannung (s. Fig.):

$$U = \int_{\gamma_{12}} \underline{E}_{\perp} \cdot d\underline{s} = - \int_{\gamma_{12}} \underline{\nabla}_{\perp} \psi \cdot d\underline{s} = \psi_1 - \psi_2, \quad (36.36)$$

welche unabhängig von γ_{12} ist. Daneben betrachten wir den Bündelfluss

$$\Phi = -\frac{1}{c} \int_{\gamma_{12}} \underline{B} \cdot (d\underline{s} \wedge \underline{e}_z), \quad (36.37)$$

welcher wegen $\underline{\nabla}_{\perp} \cdot \underline{B}_{\perp} = 0$ ebenfalls von γ_{12} unabhängig ist. (Man mache sich die Bedeutung von Φ anschaulich klar). Nach (36.6) ist

$$\Phi = -\frac{1}{c} \int_{\gamma_{12}} d\underline{s} \cdot (\underline{e}_z \wedge \underline{B}) = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{c} \int_{\gamma_{12}} \underline{E}_{\perp} \cdot d\underline{s} = \frac{k}{\omega} U, \quad (36.38)$$

Auf ∂F_1 fließt in der z -Richtung der Strom

$$I = \frac{c}{4\pi} \int_{\partial F_1} \underline{H}_\perp \cdot d\underline{s} = - \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \int_{\partial F_1} \frac{\partial \psi}{\partial n} ds. \quad (36.39)$$

$$\left(\frac{1}{\mu} \sqrt{\mu \epsilon} \underline{e}_z \wedge \underline{E}_\perp = \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{\mu}} \nabla_\perp \psi \wedge \underline{e}_z \right)$$

Ferner ist die Ladung Q pro Längeneinheit

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial F_1} \underline{D} \cdot \underline{n} ds = - \frac{\epsilon}{4\pi} \int_{\partial F_1} \underbrace{\nabla_\perp \psi \cdot \underline{n}}_{\frac{\partial \psi}{\partial n}} ds,$$

d.h.

$$Q = - \frac{\epsilon}{4\pi} \int_{\partial F_1} \frac{\partial \psi}{\partial n} ds. \quad (36.40)$$

Deshalb gilt

$$Q = \frac{k}{\omega} I, \quad (36.41)$$

Nach Fourier-Transformation wird aus (36.41) und (36.38)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial I}{\partial z} = 0, \quad (36.42)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (36.43)$$

Ferner ist nach (36.40) und (36.36)

$$Q = C U, \quad C = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\int_{\partial F_1} \frac{\partial \psi}{\partial n} ds}{\psi_2 - \psi_1} \quad (36.44)$$

und nach (36.38), (36.39):

$$\phi = L \cdot I, \quad L = \frac{4\pi}{c^2} \mu \frac{\psi_2 - \psi_1}{\int_{\partial F_1} \frac{\partial \psi}{\partial n} ds}. \quad (36.45)$$

Notiere

$$C \cdot L = \frac{\mu \epsilon}{c^2}. \quad (36.46)$$

Die weitere Diskussion hängt von der Dispersion $\epsilon(\omega)$ ab.

Lassen wir diese weg, so folgt für $Q(z,t)$, etc.,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = C \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (36.47)$$

$$\Phi = L \cdot I.$$

Daraus und aus (36.42), (36.43) können wir Q und Φ eliminieren und erhalten

$$C \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} = 0, \quad (36.48)$$

$$L \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (36.49)$$

Daraus folgen die Gleichungen

$$\left(LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \begin{pmatrix} I \\ U \end{pmatrix} = 0. \quad (36.50)$$

Diese z-dimensionalen Wellengleichungen haben nach (36.46) die Phasengeschwindigkeit

$$u = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}}. \quad (36.51)$$

Dies ist also gerade die Phasengeschwindigkeit des Mediums.

Die allgemeine Lösung für I lautet

$$I(z,t) = f(z-ut) + g(z+ut). \quad (36.52)$$

Nach (36.48) und (36.49) ist dann

$$U(z,t) = \sqrt{\frac{L}{C}} [f(z-ut) - g(z+ut)]. \quad (36.53)$$

Die Grösse

$$z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{H}{\epsilon}} \left| \frac{\psi_2 - \psi_1}{\int_{\mathcal{C}_1} \frac{\partial \psi}{\partial u} ds} \right| \quad (36.54)$$

ist der Wellenwiderstand der Doppelleitung. Schliesst man diese mit einem Ohm'schen Widerstand der Grösse Z ab, so tritt keine Unstetigkeit im Verlauf von Strom und Spannung auf, also auch keine Reflexionen.

Bei endlicher Leitfähigkeit treten natürlich auch Verluste in den Leitern und damit Dämpfungen auf. Dies wollen wir aber hier nicht weiter untersuchen. (Siehe dazu Jackson, § 8.8.)

Zum Schluss dieser Untersuchungen mache man sich nochmals klar, dass der Transport der Energie in unseren Überlandleitungen zwischen den Drähten erfolgt. Die Drähte dienen nur dazu, den Energiestrom (d.h. den Poynting'schen Vektor) in die Richtung der Drähte zu zwingen und damit die Energie dorthin zu transportieren, wohin man es wünscht.

* * *

5.8 § 37. Grenzübergang zur Strahlenoptik

Die Wellenlängen λ von sichtbarem Licht sind in der Grössenordnung $\sim 10^5$ cm. Da dies eine makroskopisch kleine Länge ist, kann man erwarten, dass der Limes $\lambda \rightarrow 0$ für viele Zwecke eine gute Näherung für die Ausbreitungsgesetze (Optik) des Lichtes gibt. In diesem Grenzfall erhält man die Gesetze der geometrischen Optik (oder Strahlenoptik). Dies wollen wir im folgenden zeigen. Die nachfolgenden Beobachtungen sind in der Physik verschiedenartig wichtig. So erhält man z.B. die klassische Mechanik durch einen analogen Grenzübergang aus der Wellenmechanik. (Diese Analogie spielte in den Schrödinger-

schen Arbeiten eine wichtige Rolle; siehe dazu mein QM I Skript.)

A. Herleitung der Eikonalgleichung

Neben λ betrachten wir noch die Länge L , über welche die Amplitude und Polarisation einer Welle wesentlich variieren. Die geometrische Optik ist dann eine gute Näherung, wenn

$$\lambda \ll L \quad (37.1)$$

ist. Wir untersuchen ein nichtleitendes, isotropes, aber inhomogenes Medium. Ferner vernachlässigen wir den Imaginärteil von ϵ . (Das Medium sei im betrachteten Frequenzbereich durchsichtig.)

Unter einer "fast-ebenen" Welle verstehen wir im Sinne einer Verallgemeinerung einer ebenen Welle

$$\underline{E}(x,t) = \underline{E}_0 e^{i(k \cdot x - \omega t)}, \quad \underline{B}(x,t) = \underline{B}_0 e^{i(k \cdot x - \omega t)} \quad (37.2)$$

eine Feldverteilung der Form:

$$\underline{E}(x,t) = \underline{E}_0(x,t) e^{i\phi(x,t)}, \quad \underline{B}(x,t) = \underline{B}_0(x,t) e^{i\phi(x,t)}, \quad (37.3)$$

wobei $\underline{E}_0(x,t)$, $\underline{B}_0(x,t)$, $\text{grad } \phi$ und $\partial\phi/\partial t$ über Distanzen $\sim \lambda$ nur sehr wenig variieren. Wären diese Größen konstant, so würde sich (37.3) auf eine ebene Welle (37.2) reduzieren.

In Abwesenheit von Ladungs- und Stromdichten lauten die Maxwell'schen Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{div } \underline{B} &= 0, & \text{rot } \underline{E} + \frac{1}{c} \dot{\underline{B}} &= 0, \\ \text{div } \underline{D} &= 0, & \text{rot } \underline{H} - \frac{1}{c} \dot{\underline{D}} &= 0. \end{aligned} \quad (37.4)$$

In diese setzen wir (37.3) ein, wobei wir aber entsprechend

unseren Annahmen alle Ableitungen von $\epsilon, \mu, \underline{E}_0$ und \underline{B}_0 vernachlässigen. Es ergibt sich so:

$$\begin{aligned} \underline{B}_0 \cdot \text{grad} \phi &= 0, & \text{grad} \phi \wedge \underline{E}_0 + \frac{1}{c} \dot{\phi} \underline{B}_0 &= 0, \\ \underline{E}_0 \cdot \text{grad} \phi &= 0, & \text{grad} \phi \wedge \underline{B}_0 - \frac{\epsilon \mu}{c} \dot{\phi} \underline{E}_0 &= 0. \end{aligned} \quad (37.5)$$

$\underline{E}_0, \underline{B}_0, \text{grad} \phi$ bilden an jeder Stelle ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Aus den beiden Gleichungen rechts in (37.5) findet man leicht (z.B. durch Elimination von \underline{B}_0) die sog. Eikonalgleichung der geometrischen Optik:

$$\boxed{|\text{grad} \phi|^2 = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \dot{\phi}^2} \quad (37.6)$$

Meistens hängen in den Anwendungen ϵ und μ nicht von der Zeit ab. Dann können wir

$$\phi(x, t) = \chi(x) - \omega t \quad (37.7)$$

mit konstanter Frequenz ω setzen und erhalten mit $n^2 = \epsilon \mu$:

$$\boxed{|\text{grad} \chi|^2 = n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (37.8)$$

Dies ist die grundlegende Gleichung der geometrischen Optik. Die Flächen $\chi(x) = \text{konst.}$ geben die Flächen konstanter Phase, die sog. geometrischen Wellenfronten.

B. Lichtstrahlen

Die zeitlichen Mittelwerte für die elektrische und magnetische Energiedichte sind

$$\langle u_e \rangle = \frac{\epsilon}{16\pi} \underline{E}_0 \cdot \underline{E}_0^*, \quad \langle u_m \rangle = \frac{1}{16\pi\mu} \underline{B}_0 \cdot \underline{B}_0^* \quad (37.9)$$

Benutzen wir hier (37.5) und (37.7) so folgt

$$\underline{\langle u_e \rangle} = \underline{\langle u_m \rangle} = \frac{c/\omega}{16\pi\mu} \underline{E}_0 \cdot (\underline{B}_0^* \wedge \underline{\nabla} \chi). \quad (37.10)$$

Der zeitliche Mittelwert für den Poynting-Vektor ist

$$\underline{\langle S \rangle} = \frac{c}{8\pi\mu} \operatorname{Re} (\underline{E}_0 \wedge \underline{B}_0^*)$$

oder mit (37.5)

$$\underline{\langle S \rangle} = \frac{c}{8\pi\mu} \operatorname{Re} [\underline{E}_0 \wedge (\underline{\nabla} \chi \wedge \underline{E}_0^*)] \cdot \frac{c}{\omega},$$

d.h.

$$\underline{\langle S \rangle} = \frac{c}{8\pi\mu} (\underline{E}_0 \cdot \underline{E}_0^*) \frac{c}{\omega} \underline{\nabla} \chi. \quad (37.11)$$

Mit (37.9) können wir auch schreiben

$$\underline{\langle S \rangle} = \frac{2c}{n^2} \langle u_e \rangle \frac{c}{\omega} \underline{\nabla} \chi$$

oder mit (37.6) ($u = u_e + u_m$):

$$\underline{\langle S \rangle} = \frac{c}{n} \langle u \rangle \frac{\underline{\nabla} \chi}{\omega n/c}. \quad (37.12)$$

Nach der Eikonalgleichung (37.8) ist

$$\underline{s} := \frac{\underline{\nabla} \chi}{n\omega/c} \quad (37.13)$$

ein Einheitsvektor, und es gilt

$$\underline{\langle S \rangle} = v_{\text{Phase}} \langle u \rangle \underline{s}, \quad (37.14)$$

wo $v_{\text{Phase}} = c/n$ die Phasengeschwindigkeit im Medium ist. Die Richtung von \underline{s} ist senkrecht auf den geometrischen Wellenfronten. Der zeitlich gemittelte Poynting-Vektor zeigt in dieselbe Richtung und hat die Größe: mittlere Energiedichte mal Phasengeschwindigkeit.

Die geometrischen Lichtstrahlen sind die Integralkurven des

Vektorfeldes $\underline{\varepsilon}$ und sind also Orthogonaltrajektorien der geometrischen Wellenfronten $\chi = \text{const.}$. Diese Integralkurven erfüllen die Gleichung

$$n \frac{c}{\omega} \frac{d\underline{x}}{ds} = \underline{\nabla} \chi(\underline{x}(s)), \quad (37.15)$$

wobei s die Bogenlänge ist:

$$\left(\frac{d\underline{x}}{ds}\right)^2 = 1. \quad (37.16)$$

Aus (37.15) und (37.8) wollen wir eine Differentialgleichung für die Strahlen herleiten, die nur n enthält. (Um (37.15) lösen zu können, müsste man zuerst die partielle Differentialgleichung (37.8) gelöst haben.)

Wir bilden

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\underline{x}}{ds} \right) &= \frac{c}{\omega} \frac{d}{ds} (\underline{\nabla} \chi(\underline{x}(s))) = \frac{c}{\omega} \left(\frac{d\underline{x}}{ds} \cdot \underline{\nabla} \right) \underline{\nabla} \chi \\ &= \frac{(c/\omega)^2}{n} (\underline{\nabla} \chi \cdot \underline{\nabla}) \underline{\nabla} \chi = \frac{(c/\omega)^2}{2n} \underline{\nabla} ((\underline{\nabla} \chi)^2) = \frac{1}{2n} \underline{\nabla} n^2 = \underline{\nabla} n. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\boxed{\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\underline{x}}{ds} \right) = \underline{\nabla} n.} \quad (37.17)$$

C. Das Prinzip von Fermat

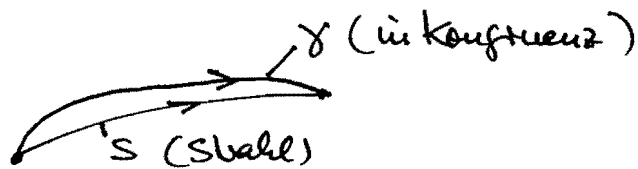
Das Fermatsche Prinzip des kürzesten Lichtweges besagt:
Das über einen Strahl erstreckte Integral

$$\int_{P_1}^{P_2} n ds$$

ist ein Minimum im Vergleich zu den Werten, die ^{es} auf beliebigen Nachbarcurven zwischen dieselben Endpunkten P_1 und P_2 annimmt.

Man muss dabei voraussetzen, dass sich eine Umgebung des Strahlstrahles von P_1 nach P_2 in eine "Strahlenkongruenz" einbetten lässt. Damit ist gemeint, dass durch jeden Punkt der Umgebung genau ein Lichtstrahl geht.

Liegt das Strahlstrahle von P_1 nach P_2 ganz in einer Strahlenkongruenz von \cong und beschränkt man sich auf Vergleichskurven γ von P_1 nach P_2 innerhalb dieser Kongruenz, so kann man wie folgt auf die Gültigkeit des Fermat'schen Prinzips schließen. Aus $\omega n/c \cdot \cong = \nabla X$ folgt $\nabla \wedge (n \cong) = 0$. Nach dem Stokes'schen Satz folgt deshalb (s. Fig.):



$$\int_{\gamma} n \cong \cdot d\underline{l} = \int_S n ds$$

($d\underline{l}$: vektorielles Linienelement). Offensichtlich ist aber

$$\left| \int_{\gamma} n \cong \cdot d\underline{l} \right| \leq \int_{\gamma} n dl$$

(dl : skalares Linienelement). Also ist

$$\int_S n ds \leq \int_{\gamma} n dl. \quad \square$$

In den Übungen werden wir sehen, dass die Euler-Lagrange Gleichungen zum Fermat'schen Prinzip mit (37.17) übereinstimmen.

D. Hamiltonsche Formulierung

Die Eikonalgleichung (37.8) können wir als verkürzte Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\boxed{H(\underline{x}, \nabla X) = \omega} \quad (37.18)$$

auffassen. Dabei ist $H(\underline{x}, \underline{k})$ durch die Auflösung der Gleichung

$$\underline{k}^2 = n^2(\omega) \omega^2 / c^2 \quad (37.19)$$

nach ω definiert.

Durch Ableiten von (37.19) nach \underline{k} , bzw. \underline{x} und der Def. von H ergeben sich die Identitäten

$$2 \underline{k} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial(\omega n^2)}{\partial \omega} \frac{\partial H}{\partial \underline{k}}, \quad (37.20)$$

$$0 = 2 \frac{n\omega^2}{c^2} \frac{\partial n}{\partial \underline{x}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial(n^2 \omega^2)}{\partial \omega} \frac{\partial H}{\partial \underline{x}}. \quad (37.21)$$

Für das folgende benötigen wir noch eine weitere Identität. Dazu leiten wir die Eikonalgleichung (37.8) partiell nach \underline{x} ab und benutzen (37.21)

$$2 \frac{\partial X}{\partial x_i} \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} = 2 \frac{n\omega^2}{c^2} \frac{\partial n}{\partial x_j} = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial(n^2 \omega^2)}{\partial \omega} \frac{\partial H}{\partial x_j}. \quad (37.22)$$

Setzen wir jetzt in (37.20) $\underline{k} = \nabla X$ und benutzen (37.22) und (37.21), so kommt

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial(n^2 \omega)}{\partial \omega} \frac{\partial H}{\partial k_i} \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} = 2 \frac{\partial X}{\partial x_i} \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial(n^2 \omega^2)}{\partial \omega} \frac{\partial H}{\partial x_j},$$

$$\text{d.h.} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial(n^2 \omega)}{\partial \omega} \left[\frac{\partial H}{\partial k_i} \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial H}{\partial x_j} \right] = 0. \quad (37.23)$$

Wir machen die generische Annahme $\partial(n^2 \omega^2) / \partial \omega \neq 0$. Dann ergibt sich die gesuchte Identität

$$\frac{\partial H}{\partial k_i} \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} = - \frac{\partial H}{\partial x_j}. \quad (37.24)$$

Nach diesen Vorbereitungen behalten wir jetzt eine Wellengruppe mit fast einheitlichem Wellenvektor \underline{k} . Für den

Schwerpunkt $\underline{x}(t)$ der Welle ist $\dot{\underline{x}}(t)$ gleich der Gruppengeschwindigkeit, d.h.

$$\dot{\underline{x}} = \frac{\partial H}{\partial \underline{k}}(\underline{x}(t), \underline{k}(t)), \quad (37.25)$$

wobei

$$\underline{k}(t) = \nabla \chi(\underline{x}(t)) \quad (37.26)$$

ist. Aus der ersten kanonischen Gleichung (37.25) und der Hamilton-Jacobi-Gleichung folgt allgemein auch die zweite kanonische Gleichung. In der Tat ist

$$\dot{k}_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial \chi(\underline{x}(t))}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_j \partial x_i} \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial k_i} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_j \partial x_i} = - \frac{\partial H}{\partial x_j},$$

wobei die Identität (37.24) benutzt wurde. Für $\underline{x}(t)$ und $\underline{k}(t)$ gelten also die kanonischen Gleichungen

$$\boxed{\dot{\underline{x}} = \frac{\partial H}{\partial \underline{k}}, \quad \dot{\underline{k}} = - \frac{\partial H}{\partial \underline{x}}.} \quad (37.27)$$

Wir zeigen noch, dass daraus wieder die Gleichung (37.17) für die Strahlen folgt.

Langs eines Strahls ist $H = \omega = \text{const.}$ ("Energiesatz").

Aus (37.20) folgt

$$\underline{k} = \frac{1}{2c^2} \frac{\partial(\omega^2)}{\partial \omega} \frac{\partial H}{\partial \underline{k}} = \frac{1}{2c^2} \frac{\partial(\omega^2)}{\partial \omega} \dot{\underline{x}}. \quad (37.28)$$

Aus der 2. Gleichung von (37.27) ergibt sich deshalb mit (37.21)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2c^2} \frac{\partial(\omega^2)}{\partial \omega} \dot{\underline{x}} \right) = - \frac{\partial H}{\partial \underline{x}} = \frac{\frac{2\omega^2}{c^2} \frac{\partial \omega}{\partial \underline{x}}}{\frac{1}{c^2} \frac{\partial(\omega^2)}{\partial \omega}}. \quad (37.29)$$

Nun fassen wir \underline{x} als Funktion der Bogenlänge s auf. Es

ist $\dot{\underline{x}} = \frac{d\underline{x}}{ds} |\dot{\underline{x}}|$. Nach (37.28) ist aber

$$|\dot{\underline{x}}| = |\underline{k}| \frac{1}{\frac{1}{2c^2} \frac{\partial(\omega^2)}{\partial \omega}} = \frac{2\omega/c}{\frac{1}{c^2} \frac{\partial(\omega^2)}{\partial \omega}}$$

und infolgedessen erhalten wir aus (37.29)

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{u\omega}{c} \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\omega}{c} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Daraus folgt, da $\omega = \text{const.}$, tab. (37.17). Diese Gleichung ist, wie schon erwähnt, die Eulersche Gleichung zum Prinzip von Fermat

$$\delta \int u ds = 0. \quad (37.30)$$

* * *