Kapitel IV. Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen

Zeitabhängige Quellen, z.B. beschleunigte Punktladungen, erzeugen elektromagnetische Wellen. Dies wollen wir im folgenden detailliert studieren.

IV.1 Die retardierte Fundamentallösung der Wellengleichung

Fundamentallösungen der Wellengleichung sind distributive Lösungen von

$$\Box G = \delta \quad , \quad \Box = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \, . \qquad (1.1)$$

Diese wurden in der MMP-Vorlesung ausführlich studiert (siehe Skript, speziell Kap. VII). Wir gehen deshalb bei den nachfolgenden Wiederholungen teilweise formal vor. (Davor sollte man keine Angst haben.)

Die Gl. (1.1) hat keine eindeutige Lösung. Wir interessieren uns in erster Linie für die retardierte Green'sche Funktion, welche

$$G(\underline{x},t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0 \qquad (1.2)$$

erfüllen soll. (Wir haben hier eine symbolische Schreibweise verwendet; es sei aber daran erinnert, dass das Verschwinden einer Distribution in einer offenen Teilmenge sinnvoll ist.)
Die Randbedingung (1.2) hat die folgende physikalische Bedeutung:

Für jede Fundamentallösung G ist

$$\varphi = G * \rho \tag{1.3}$$

eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\Box \varphi = \rho \;. \tag{1.4}$$

Schreiben wir (1.3) symbolisch in der Form

$$\varphi(\underline{x},t) = \int G(\underline{x}-\underline{x}', t-t')\, \rho(\underline{x}',t')\, d^3x'\, dt' \,, \tag{1.5}$$

so dürfte klar sein, dass nach (1.2) für die retardierte Green'sche Funktion der Wert $\varphi(\underline{x},t)$ zur Zeit t nur von der Quelle ρ für frühere Zeiten abhängt. Aus Kausalitätsgründen erwarten wir diese Eigenschaft von Feldwirkungen, welche durch zeitabhängige Quellen verursacht werden.

Wir bestimmen nun die retardierte Green'sche Funktion auf zwei verschiedene Arten.

<u>1. Methode:</u> Wir wollen (1.1) im Raume der temperierten Distributionen lösen und können deshalb eine (4-dim.) Fouriertransformation ausführen:

$$k^2 \cdot \hat{G}(k) = -1 \,. \tag{1.6}$$

Eine Lösung davon ist $\left[k = \left(\frac{\omega}{c}, \underline{k}\right) \right]$

$$\hat{G}(\underline{k},\omega) = \frac{1}{\underline{k}^2 - \frac{1}{c^2}(\omega + i\varepsilon)^2} \,, \quad \varepsilon \downarrow 0 \,, \tag{1.7}$$

wobei der Limes $\varepsilon\downarrow 0$ im distributiven Sinne zu nehmen ist. Wir werden bald sehen, dass diese Wahl gerade die retardierte Fundamentallösung liefert.

Es stellt sich die Aufgabe, die inverse Fouriertransformation von (1.7) zu bestimmen. Dies bewerkstelligen wir auf formale Weise: Im "Integral"

$$G(\underline{x},t) = (2\pi)^{-4}\int \frac{1}{\underline{k}^2 - \frac{(\omega+i\varepsilon)^2}{c^2}}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{x}}\, e^{-i\omega t}\, d\omega\, d^3k \qquad (1.8)$$

führen wir zuerst die ω-Integration aus, d.h., wir betrachten

$$I(\underline{k}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\omega t}}{c^2\underline{k}^2 - (\omega+i0)^2}\, d\omega\, .$$

Mit dem Residuensatz lässt sich dieses Integral leicht bestimmen. Für $t<0$ kann man den Integrationsweg in der oberen komplexen ω-Ebene schliessen und erhält mit dem Satz von Cauchy tatsächlich Null. Ist hingegen $t>0$, so kann der Integrationsweg in der unteren Halbebene geschlossen werden. Da dort zwei einfache Pole bei $\omega = \pm c|\underline{k}| - i0$ vorliegen, erhalten wir

$$I(\underline{k}) = 2\pi\cdot c\;\frac{\sin(ckt)}{k}\quad ,\; k = |\underline{k}|\,.$$

Im verbleibenden "Integral"

$$G(\underline{x},t) = \frac{c}{(2\pi)^3}\int e^{-i\underline{k}\cdot\underline{x}}\,\frac{\sin(ckt)}{k}\, d^3k \qquad (1.9)$$

führen wir zuerst die Winkelintegration aus:

$$G(\underline{x},t) = \frac{c}{2\pi^2}\frac{1}{r}\int_0^\infty \sin(kr)\sin(ckt)\,dk. \qquad (1.10)$$

Da der Integrand in k gerade ist, können wir das Integral über ganz $\mathbb{R}$ erstrecken und finden so

$$G = \frac{1}{8\pi^2}\frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}} \left[e^{i(t-\frac{r}{c})u} - e^{i(t+\frac{r}{c})u}\right] du.$$

Da $t>0$, folgt

$$G(\underline{x},t) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}\delta(t-\frac{r}{c}) \quad \text{für } t>0.$$

Insgesamt ist somit

$$\boxed{G(\underline{x},t) = \frac{1}{4\pi r}\,\theta(t)\,\delta(t-\frac{r}{c}).} \qquad (1.11)$$

Würden wir die Pole in der komplexen ω-Ebene anders wählen, so würden sich andere Randbedingungen ergeben.

Setzen wir (1.11) in (1.3) (oder (1.5)) ein, so erhalten wir für die retardierte Lösung von (1.4)

$$\varphi(\underline{x},t) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho(\underline{x}',t-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c})}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\,d^3x'. \qquad (1.12)$$

Man kann natürlich nachträglich leicht verifizieren, dass dieser Ausdruck – etwa für ein stetiges ρ – die Gleichung (1.4) tatsächlich löst (Übung).

<u>2. Methode</u>: Zunächst wenden wir auf (1.1) die <u>partielle</u> Fourier-Transformation bezüglich $\underline{x}$ an.*) Für $\hat{G}(\underline{k},t) =$

$\mathcal{F}_{\underline{x}}[G]$ erhält man leicht (wir setzen vorübergehend $c=1$):

$$\frac{\partial^2 \hat{G}}{\partial t^2}(\underline{k},t) + \underline{k}^2 \hat{G}(\underline{k},t) = 1(\underline{k})\,\delta(t). \qquad (1.13)$$

<u>Eine</u> Lösung davon ist (in $\mathcal{S}'$)

$$\hat{G}(\underline{k},t) = \theta(t)\,\frac{\sin|\underline{k}|t}{|\underline{k}|}. \qquad (1.14)$$

Dazu folgendes: Sei $E(t) = \theta(t)Z(t)$, Z eine glatte Funktion mit $Z(0)=0$, $Z'(0)=1$, so gilt $E' = \theta Z' + Z(0)\delta' = \theta Z'$, also $E'' = \theta Z'' + Z'\delta = \delta + \theta Z''$. In unserem Fall ist $Z'' = -k^2 Z$, also $E'' + k^2 E = \delta$.

Aus (1.13) ergibt sich

$$G(\underline{x},t) = \theta(t)\,\mathcal{F}_{\underline{k}}^{-1}\left[\frac{\sin|\underline{k}|t}{|\underline{k}|}\right]. \qquad (1.15)$$

Im MMP-Skript wird die Rücktransformation recht streng durchgeführt. Hier gehen wir wieder formal vor: Wir stossen dabei auf dasselbe Integral wie in (1.9)

$$\mathcal{F}_{\underline{k}}^{-1}\left[\frac{\sin|\underline{k}|t}{|\underline{k}|}\right] = (2\pi)^{-3}\int \frac{\sin|\underline{k}|t}{|\underline{k}|}\,e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}}\,d^3k \qquad (1.16)$$

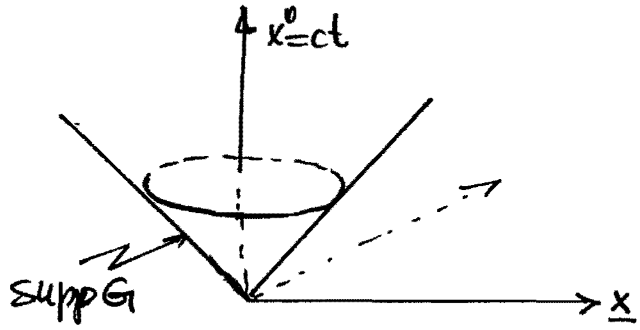
und erhalten wieder das Ergebnis (1.11).

Der Träger der retardierten Green-Funktion (1.11) ist der Mantel des Vorwärtskegels (s. Fig.):

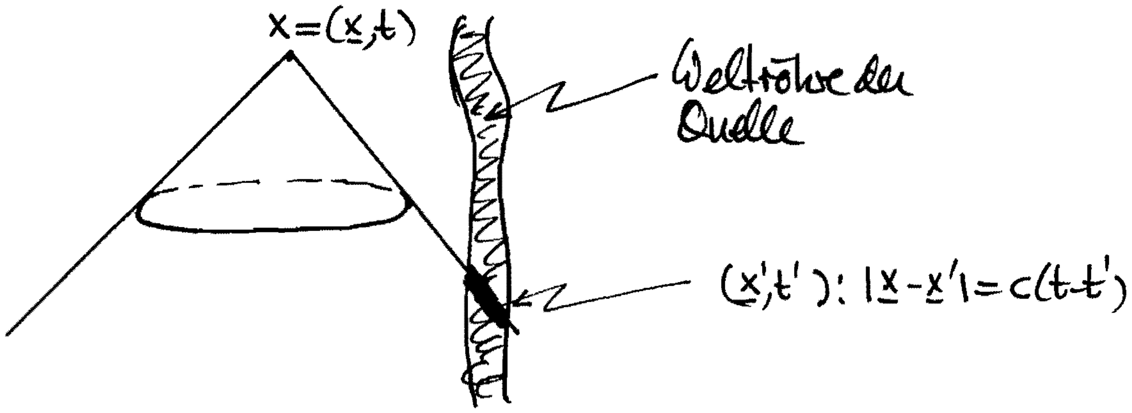
---

*) Es sei $T(x,y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. $\mathcal{F}_x[T]$ bezüglich x ist so definiert: $\langle \mathcal{F}_x[T], f\rangle = \langle T, \mathcal{F}_k[f]\rangle$ für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$. Da $\mathcal{F}_k[f]$ eine stetige Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ nach $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ ist, ist $\mathcal{F}_k[T]$ aus $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$.

$$\operatorname{supp} G = \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid (x,x) = 0,\ \ x^0 > 0 \}. \tag{1.17}$$



Deshalb tragen in (1.12) zu φ in x nur Quellpunkte bei, die auf dem Mantel des Rückwärtskegels durch den Punkt x liegen (s. Fig.). Dies ist ein Ausdruck davon, dass sich elektromagnetische Signale mit c ausbreiten.



Wir führen noch folgende Bezeichnung ein:

$$D_{ret}(\underline{x}, t) = \frac{1}{r}\, \theta(t)\, \delta\!\left(t - \frac{r}{c}\right), \tag{1.18}$$

d.h. bis auf $\frac{1}{4\pi}$ ist D_{ret} die retardierte Green'sche Funktion. (Diese Normierung hat sich eingebürgert.)

IV.2 Nahzone – Fernzone, Multipolentwicklung

Wir leiten zunächst inhomogene Wellengleichungen für $\underline{E}$ und $\underline{B}$ ab.

Für $\underline{B}$ haben wir

$$\underbrace{\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\underline{B})}_{\frac{1}{c}\dot{\underline{E}}+\frac{4\pi}{c}\underline{J}} = \mathrm{grad}\,\underbrace{\mathrm{div}\,\underline{B}}_{0} - \Delta\underline{B} \quad ,$$

also

$$\underbrace{\frac{1}{c}\,\mathrm{rot}\,\dot{\underline{E}}}_{-\frac{1}{c^2}\ddot{\underline{B}}} + \frac{4\pi}{c}\,\mathrm{rot}\,\underline{J} = -\Delta\underline{B}$$

oder

$$\boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\underline{B} = -\frac{4\pi}{c}\,\mathrm{rot}\,\underline{J}\,.} \qquad (2.1)$$

Ähnlich ergibt sich für $\underline{E}$

$$\underbrace{\mathrm{rot}\,\underbrace{(\mathrm{rot}\,\underline{E})}_{-\frac{1}{c}\dot{\underline{B}}}}_{-\frac{1}{c}(\mathrm{rot}\,\underline{B})^{\cdot} = -\frac{1}{c}\left(\frac{4\pi}{c}\underline{J}+\frac{1}{c}\dot{\underline{E}}\right)^{\cdot}} = \mathrm{grad}\,\underbrace{\mathrm{div}\,\underline{E}}_{4\pi\rho} - \Delta\underline{E}$$

d.h.

$$\boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\underline{E} = 4\pi\left(\underline{\nabla}\rho + \frac{1}{c^2}\dot{\underline{J}}\right).} \qquad (2.2)$$

Aus (2.1) und (2.2) erhalten wir für die retardierten Felder

$$\underline{E}_{ret}(\underline{x},t) = -\int \frac{d^3x'}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\left[\underline{\nabla}'\rho + \frac{1}{c^2}\dot{\underline{J}}\right]_{ret}, \tag{2.3}$$

$$\underline{B}_{ret}(\underline{x},t) = \frac{1}{c}\int \frac{d^3x'}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\left[\mathrm{rot}'\,\underline{J}\right]_{ret}, \tag{2.4}$$

wobei "ret" das Argument $(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c})$ andeuten soll.

Nun ist $[\nabla'\rho]_{ret}$ nicht dasselbe wie $\underline{\nabla}'[\rho]_{ret}$: Wir haben

$$\underline{\nabla}'[\rho]_{ret} = \underline{\nabla}'\rho\left(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right)$$

$$= [\underline{\nabla}'\rho]_{ret} - [\partial_t\rho]_{ret}\,\underbrace{\underline{\nabla}'\left(\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right)}_{-\frac{1}{c}\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|}}$$

d.h.

$$\underline{\nabla}'[\rho]_{ret} = [\underline{\nabla}'\rho]_{ret} + \frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\frac{1}{c}[\dot{\rho}]_{ret}. \tag{2.5}$$

Damit erhalten wir für das $\underline{E}$-Feld

$$\underline{E}_{ret}(\underline{x},t) = \int \frac{d^3x'}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\left\{-\underline{\nabla}'[\rho]_{ret} + \frac{1}{c}\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|}[\dot{\rho}]_{ret} - \frac{1}{c^2}[\dot{\underline{J}}]_{ret}\right\}$$

oder, nach einer partiellen Integration im ersten Term,

$$\boxed{\underline{E}_{ret}(\underline{x},t) = \int\left\{\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}[\rho]_{ret} + \frac{1}{c}\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|^2}[\dot{\rho}]_{ret} - \frac{1}{c^2}\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}[\dot{\underline{J}}]_{ret}\right\}d^3x'.} \tag{2.6}$$

retardiertes Coulombfeld

Strahlungsterme $\propto \frac{1}{r}$
(fallen im stationären Fall weg).

Entsprechend bemerken wir im Ausdruck (2.4) für $\underline{B}$. Mit

Hilfe von

$$\underline{\nabla}' \wedge [\underline{J}]_{ret} = [\underline{\nabla}' \wedge \underline{J}]_{ret} + \frac{1}{c}\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \wedge [\dot{\underline{J}}]_{ret} \qquad (2.7)$$

erhalten wir nach partieller Integration

$$\boxed{\underline{B}_{ret}(\underline{x},t) = -\frac{1}{c}\int \Big\{ \underbrace{\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3} \wedge [\underline{J}]_{ret}}_{\text{Biot-Savart}} + \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{|\underline{x}-\underline{x}'|^2} \wedge [\dot{\underline{J}}]_{ret}}_{\text{Strahlungsterm}} \Big\} d^3x'.} \qquad (2.8)$$

Für grosse Abstände betrachten wir monochromatische Zeitabhängigkeiten $\sim e^{-i\omega t}$. Dann erhalten wir für das Verhältnis der beiden Terme in (2.8) ($R \equiv |\underline{x}-\underline{x}'|$):

$$\frac{\text{Strahl.-Term}}{\text{Biot-Savart}} \sim \left(\frac{\dot{J}}{Rc}\right)\Big/\left(\frac{J}{R^2}\right) \sim \frac{\omega}{c}R \sim \frac{R}{\lambda}. \qquad (2.9)$$

Für grosse λ (kleine ω) dominiert der Biot-Savart Anteil bis zu grossen Abständen von der Quelle; erst für $R \gg \lambda$ dominiert der Strahlungsterm. Die entsprechenden Aussagen gelten für das $\underline{E}$-Feld. Man führt deshalb die folgende Terminologie ein:

<u>Nahzone</u> : $R \ll \lambda$; (2.10)

<u>Fernzone</u> : $R \gg \lambda$ (auch <u>Wellenzone</u>). (2.11)

Wir konzentrieren uns nun auf die Felder in der Fernzone. Sei d die Ausdehnung der Quelle, dann soll genauer gelten:

$$r \gg \lambda \quad \underline{\text{und}} \quad r \gg d\,. \tag{2.12}$$

Nach (2.6) ist mit der Stromerhaltung und weglassen einer ~~einer partiellen Integration~~ Divergenz ($\underline{n} := \underline{x}/|\underline{x}|$)

$$\underline{E}_{ret} = \frac{1}{r}\int \Big\{ \frac{1}{c}\underbrace{[\dot{\rho}]_{ret}}_{-[\underline{\nabla}'\cdot\underline{J}]_{ret} = -\underline{\nabla}'\cdot[\underline{J}]_{ret} + \frac{1}{c}\,\underline{n}\cdot[\underline{\dot{J}}]_{ret}}\underline{n} - \frac{1}{c^2}[\underline{\dot{J}}]_{ret}\Big\}\, d^3x' + O\!\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\frac{1}{c^2}\int \Big\{ (\underline{n}\cdot[\underline{\dot{J}}]_{ret})\,\underline{n} - [\underline{\dot{J}}]_{ret}\Big\}\, d^3x' + O\!\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

d.h.

$$\underline{E}_{ret} = \frac{1}{r}\frac{1}{c^2}\int \underline{n}\wedge(\underline{n}\wedge[\underline{\dot{J}}]_{ret})\, d^3x' + O\!\left(\frac{1}{r^2}\right). \tag{2.13}$$

Noch einfacher folgt aus (2.8)

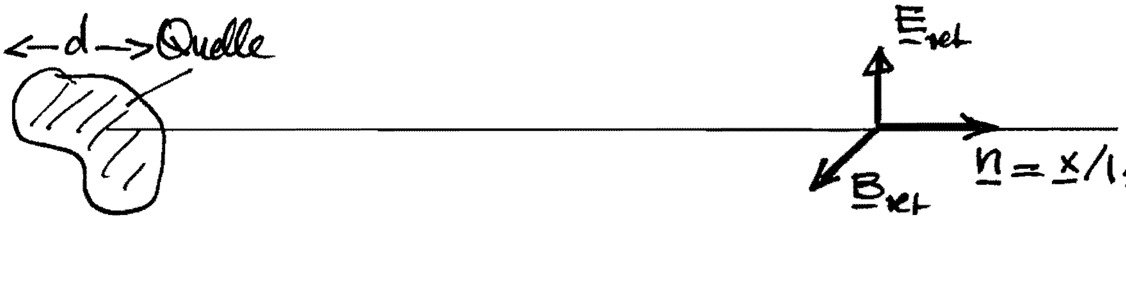
$$\underline{B}_{ret} = -\frac{1}{r}\frac{1}{c^2}\int \underline{n}\wedge[\underline{\dot{J}}]_{ret}\, d^3x' + O(1/r^2). \tag{2.14}$$

Sei also

$$\underline{\mathcal{J}}(\underline{x},t) = \int [\underline{J}]_{ret}\, d^3x' = \int \underline{J}\!\left(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c}\right) d^3x', \tag{2.15}$$

so haben wir, bis auf $O(1/r^2)$,

$$\left.\boxed{\begin{aligned} \underline{E}_{ret} &= \frac{1}{c^2 r}\,\underline{n}\wedge(\underline{n}\wedge\underline{\dot{\mathcal{J}}}), \\ \underline{B}_{ret} &= -\frac{1}{c^2 r}\,\underline{n}\wedge\underline{\dot{\mathcal{J}}}\,; \end{aligned}}\right\} \Longrightarrow \underline{E}_{ret} = \underline{B}_{ret}\wedge\underline{n}\,. \tag{2.16}$$



Diese Formeln beschreiben eine lokal ebene Welle.

In genügend grossen Abständen dürfen wir auch t_{ret} in $\underline{J}$ entwickeln:

$$t_{ret} = t - \frac{r}{c} + \frac{\underline{n}\cdot\underline{x}'}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{d^2}{rc}\right) \qquad (2.17)$$

(der Entwicklungsparameter ist d/r). Damit wir den letzten Term in (2.17) vernachlässigen dürfen, sollte sich $\underline{J}$ in der Zeit d^2/rc wenig ändern; im zeitlich harmonischen Fall bedeutet dies

$$\omega \frac{d^2}{rc} \sim \underline{\frac{d^2}{r\lambda} \ll 1}. \qquad (2.18)$$

Falls $\lambda \gg d$, dann ist (2.18) automatisch erfüllt, denn dann folgt aus $r \gg \lambda$, $\lambda \gg \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \lambda$ die Beziehung $r \gg (d/\lambda)^2 \lambda$.

Ist hingegen $\lambda \lesssim d$, dann ist (2.18) nicht in der ganzen Fernzone erfüllt, sicher aber für hinreichend grosse Abstände.

Wir ersetzen also jetzt $\underline{J}$ durch

$$\boxed{\underline{J} = \int \underline{j}\left(\underline{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\underline{n}\cdot\underline{x}'}{c}\right) d^3x'.} \qquad (2.19)$$

Die Gl. (2.16) und (2.19) bilden den Ausgangspunkt für die weitere Diskussion.

Es empfiehlt sich, die Zeitabhängigkeit von $\underline{J}$ durch ein Fourierintegral darzustellen:

$$\underline{J}(\underline{x},t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\underline{J}}(\underline{x},\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega . \qquad (2.20)$$

Dann ist

$$\underline{\mathcal{J}}(\underline{x},t) = \int d\omega\, e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})} \int d^3x'\, \hat{\underline{J}}(\underline{x}',\omega)\, e^{-i\underline{n}\cdot\underline{x}'\frac{\omega}{c}} .$$

Sei $\underline{k} = \frac{\omega}{c}\underline{n}$ der Wellenzahlvektor und

$$\tilde{\underline{J}}(\underline{k},\omega) = \int \hat{\underline{J}}(\underline{x}',\omega)\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{x}'} d^3x' \qquad (2.21)$$

So ist also

$$\boxed{\underline{\mathcal{J}}(\underline{x},t) = \int d\omega\, \tilde{\underline{J}}(\underline{k},\omega)\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{x}-\omega t)}} . \qquad (2.22)$$

Im monochromatischen Fall

$$\underline{J}(\underline{x},t) = \mathrm{Re}\left(\underline{J}(\underline{x})\, e^{-i\omega t}\right) \qquad (2.23)$$

ist

$$\underline{\mathcal{J}}(\underline{x},t) = \mathrm{Re}\left(\tilde{\underline{J}}(\underline{k})\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{x}-\omega t)}\right), \qquad (2.24)$$

wo $\tilde{\underline{J}}(\underline{k})$ die Fouriertransformierte von $\underline{J}(\underline{x})$ ist. Der zeitlich gemittelte Poynting-Vektor ist dann

$$\langle \underline{S} \rangle = \frac{c}{4\pi}\langle \underline{B}^2 \rangle \underline{n} \overset{(2.16)}{=} \frac{c}{4\pi}\frac{1}{r^2}\frac{1}{c^4}\langle |\underline{n}\wedge\dot{\underline{\mathcal{J}}}|^2\rangle \underline{n}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{1}{4\pi c^3}\,\omega^2 \underbrace{\langle |\underline{n}\wedge\underline{\mathcal{J}}|^2\rangle}_{\frac{1}{2}|\underline{n}\wedge\tilde{\underline{J}}(\underline{k})|^2} \underline{n} ,$$

d.h.,

$$\langle \underline{S} \rangle = \frac{1}{r^2}\,\frac{1}{8\pi c^3}\,|\underline{n}\wedge\underline{\tilde{J}}(\underline{k})|^2\,\omega^2\,\underline{n}\,. \tag{2.25}$$

Bezeichnet also $(d\bar{I}/d\Omega)\,d\Omega$ die zeitlich gemittelte abgestrahlte Energie pro Zeiteinheit in das Raumwinkelelement $d\Omega$, so ist

$$\boxed{\frac{d\bar{I}}{d\Omega} = \frac{\omega^2}{8\pi c^3}\,|\underline{n}\wedge\underline{\tilde{J}}(\underline{k})|^2, \quad \text{und} \quad \underline{\tilde{J}}(\underline{k}) = \int \underline{J}(\underline{x})\,e^{-i\underline{k}\cdot\underline{x}}\,d^3x\,, \quad \underline{k} = \frac{\omega}{c}\,\underline{n}\,.} \tag{2.26}$$

Dies ist eine schöne allgemeine Formel.

<u>Multipolentwicklung</u>

Wir wollen nun zusätzlich zu den bisherigen Bedingungen (2.12) und (2.18) noch annehmen, dass

$$\boxed{\lambda \gg d.} \tag{2.27}$$

(Wie im Anschluss an (2.18) ausgeführt wurde, ist dann die Bedingung (2.18) automatisch erfüllt.)

Wenn (2.27) zutrifft ist die relative zeitliche Änderung von $\underline{J}$ und ρ auch klein in der Zeit d/c die das Licht braucht, um die Quelle zu durchqueren; mit anderen Worten: <u>die Retardierung innerhalb der Quelle ist ein kleiner Effekt</u>.

Wir entwickeln deshalb in (2.19) den Integranden:

$$\underline{J}(\underline{x}',t-\tfrac{r}{c}+\tfrac{\underline{n}\cdot\underline{x}'}{c}) = \underline{J}(\underline{x}',t-\tfrac{r}{c}) + \frac{\underline{n}\cdot\underline{x}'}{c}\,\dot{\underline{J}}(\underline{x}',t-\tfrac{r}{c}) + \cdots \tag{2.28}$$

Der erste Term rechts gibt den folgenden Beitrag zu $\underline{\mathcal{J}}$:

$$\int \underline{J}(\underline{x}',t-\tfrac{r}{c})\,d^3x' = -\int \underline{x}'\,\underline{\nabla}'\cdot\underline{J}\,d^3x' = \int \underline{x}'\dot{\rho}\,d^3x',$$

und dies ist gleich $\dot{\underline{P}}(t-\frac{r}{c})$, wenn

$$\underline{P}(t) = \int \underline{x}\,\rho(\underline{x},t)\,d^3x \tag{2.29}$$

das zeitabhängige Dipolmoment der Ladungsverteilung ist.

Der zweite Term in der Entwicklung (2.28) gibt den folgenden Beitrag zu $\mathcal{J}_m$:

$$\frac{1}{c}n_\ell\int x'_\ell\,\dot{J}_m\,d^3x' = \frac{1}{2c}n_\ell\underbrace{\int(x'_\ell\dot{J}_m + x'_m\dot{J}_\ell)\,d^3x'}_{\ddot{I}_{\ell m}}$$

$$+\frac{1}{2c}n_\ell\underbrace{\int(x'_\ell\dot{J}_m - x'_m\dot{J}_\ell)\,d^3x'}_{2c\,\dot{\mu}_{\ell m}}.$$

Dabei seien

$$I_{\ell m} = \int \rho(\underline{x}')\,x'_\ell x'_m\,d^3x', \tag{2.30}$$

$$\mu_{\ell m} = \frac{1}{2c}\int(x'_\ell J_m - x'_m J_\ell)\,d^3x'. \tag{2.31}$$

Es gilt

$$\dot{I}_{\ell m} = \int \dot{\rho}(\underline{x}',t)\,x'_\ell x'_m\,d^3x' = -\int \operatorname{div}\underline{J}(\underline{x}',t)\,x'_\ell x'_m\,d^3x'$$

$$= \int(J_\ell x'_m + J_m x'_\ell)\,d^3x'. \tag{2.32}$$

Insgesamt erhalten wir also, bis auf höhere Terme,

$$\mathcal{S}_m = \dot{P}_m(t-\tfrac{r}{c}) + \dot{\mu}_{\ell m}(t-\tfrac{r}{c})\,n_\ell + \frac{1}{2c}\ddot{I}_{\ell m}(t-\tfrac{r}{c})\,n_\ell \,. \tag{2.33}$$

$$\underbrace{\qquad}_{\text{elektr. Dipol}} \qquad \underbrace{\qquad}_{\text{magn. Dipol}} \qquad \underbrace{\qquad}_{\text{elektr. Quadrupol}}$$

Unter Benutzung des magnetischen Moments

$$\underline{\mu} = \frac{1}{2c}\int \underline{x}\wedge\underline{J}\; d^3x \tag{2.34}$$

für die Stromverteilung, können wir die Dipolanteile wie folgt schreiben

$$\underline{\underline{\mathcal{S}}^{\text{Dipol}} = \dot{\underline{P}}(t-\tfrac{r}{c}) + \dot{\underline{\mu}}(t-\tfrac{r}{c})\wedge\underline{n}} \,. \tag{2.35}$$

Im elektrischen Quadrupolanteil dürfen wir $I_{m\ell}$ durch den <u>Quadrupoltensor</u>

$$Q_{\ell m} = I_{\ell m} - \frac{1}{3}\delta_{\ell m} I_{kk} \tag{2.36}$$

ersetzen, denn die abgezogene Spur gibt für $\underline{\mathcal{S}}$ einen Beitrag proportional zu $\underline{n}$ und trägt deshalb nicht zu den Feldstärken bei (s. (2.16)).

Schreiben wir $Q\underline{n}$ für den Vektor mit den Komponenten $Q_{m\ell}n_\ell$, so lauten die Feldstärken (2.16)

$$\underline{B} = \frac{1}{rc^2}\left[\ddot{\underline{P}}\wedge\underline{n} + (\ddot{\underline{\mu}}\wedge\underline{n})\wedge\underline{n} + \frac{1}{2c}(\dddot{Q}\underline{n})\wedge\underline{n}\right]_{\text{ret}}, \tag{2.37}$$

$$\underline{E} = \frac{1}{rc^2}\left[(\ddot{\underline{P}}\wedge\underline{n})\wedge\underline{n} + \underline{n}\wedge\ddot{\underline{\mu}} + \frac{1}{2c}((\dddot{Q}\underline{n})\wedge\underline{n})\wedge\underline{n}\right]_{\text{ret}}. \tag{2.38}$$

Die magnetische Dipolstrahlung geht aus der elektrischen durch folgende Substitution hervor:

$$\underline{E} \to \underline{B}\,, \quad \underline{B} \to -\underline{E}\,, \quad \underline{P} \to \underline{\mu}\,. \tag{2.39}$$

Abstrahlung

Nach (2.16) ist der Poynting Vektor

$$\underline{S} = \frac{c}{4\pi}\,\underline{E}\wedge\underline{B} = \frac{c}{4\pi}|\underline{E}|^2\underline{n} = \frac{c}{4\pi}|\underline{B}|^2\underline{n}\,. \tag{2.40}$$

Die Intensität der abgestrahlten Energie pro Raumwinkel ist

$$\frac{dI}{d\Omega} = |\underline{S}|\cdot r^2 = \frac{1}{4\pi c^3}\left|[\cdots]\right|^2, \tag{2.41}$$

wobei $[\cdots]$ eine der beiden eckigen Klammern in (2.37) und (2.38) ist.

Zunächst betrachten wir den häufigsten Fall, bei dem die elektrischen Dipolfelder dominieren. Dann ist

$$\left.\frac{dI}{d\Omega}\right|_{el.\,Dipol} = \frac{1}{4\pi c^3}|\ddot{\underline{P}}\wedge\underline{n}|^2 = \frac{1}{4\pi c^3}\ddot{\underline{P}}^2\sin^2\vartheta\,, \qquad \vartheta = \sphericalangle(\ddot{\underline{P}},\underline{n})\,. \tag{2.42}$$

Integrieren wir über alle Richtungen, so ergibt sich die Intensität

$$\boxed{\left. I\right|_{el.\,Dipol} = \frac{2}{3c^3}|\ddot{\underline{P}}|^2.} \tag{2.43}$$

Für die <u>magnetische</u> Dipolstrahlung müssen wir lediglich

$\underline{P}$ durch $\underline{\mu}$ ersetzen (s. (2.39)):

$$I\big|_{\text{magn. Dipol}} = \frac{2}{3c^3}\,|\ddot{\underline{\mu}}|^2 . \tag{2.44}$$

Wir betrachten jetzt die elektrische Quadrupolstrahlung. Nach (2.37) ist

$$B_i^{\text{Quad}} = \frac{1}{2c^3}\,\varepsilon_{ijk}\,\dddot{Q}_{jl}\,n_l\,n_k . \tag{2.45}$$

Die zugehörige differentielle Intensität ist nach (2.41) und (2.40)

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}\cdot\frac{1}{4c^6}\,\varepsilon_{ijk}\,\dddot{Q}_{jl}\,n_l\,n_k\,\varepsilon_{irs}\,\dddot{Q}_{rm}\,n_m\,n_s$$

$$\delta_{jr}\delta_{ks}-\delta_{js}\delta_{kr}$$

oder

$$\boxed{\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi c^5}\left[\dddot{Q}_{jl}\,\dddot{Q}_{jm}\,n_l\,n_m - \dddot{Q}_{jl}\,\dddot{Q}_{km}\,n_j\,n_l\,n_k\,n_m\right].} \tag{2.46}$$

Für die Integration über alle Richtungen benötigen wir folgende Formeln, welche man leicht beweist,

$$\int_{S^2} n_l\,n_m\,d\Omega = \frac{4\pi}{3}\,\delta_{lm} , \tag{2.47}$$

$$\int_{S^2} n_j\,n_l\,n_k\,n_m\,d\Omega = \frac{4\pi}{15}\left(\delta_{jl}\delta_{km}+\delta_{jk}\delta_{ml}+\delta_{jm}\delta_{lk}\right). \tag{2.48}$$

Damit kommt (beachte $Q_{kk}=0$)

$$\boxed{I^{\text{Quad.}} = \frac{1}{20c^5}\sum_{k,l}\dddot{Q}_{kl}\,\dddot{Q}_{kl} .} \tag{2.49}$$

Integriert man (2.41) über alle Richtungen, so verschwinden alle Kreuzterme der verschiedenen Multipole und man erhält die Summe von (2.43), (2.44) und (2.49):

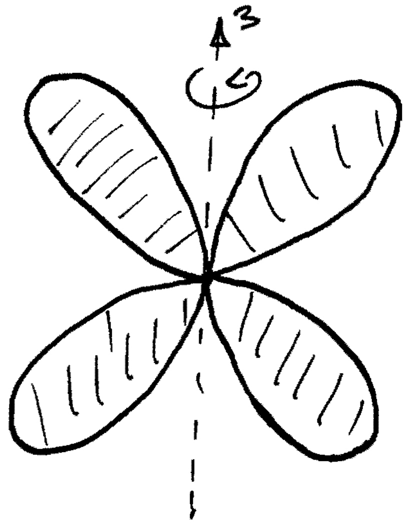
$$\boxed{I = \frac{2}{3c^3}|\ddot{\underline{P}}|^2 + \frac{2}{3c^3}|\ddot{\underline{\mu}}|^2 + \frac{1}{20c^5}\sum_{kl}\dddot{Q}_{kl}\dddot{Q}_{kl}.} \qquad (2.50)$$

<u>Beispiel</u> für Quadrupolstrahlung: Es sei

$$Q = \mathrm{diag}\left(-\tfrac{1}{2}Q_0, -\tfrac{1}{2}Q_0, Q_0\right).$$

Diese Form hat eine um die 3-Achse rotationssymmetrische Ladungsverteilung. Gl. (2.46) gibt die folgende Winkelverteilung (s. Fig.):

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{9}{64\pi c^5}(\dddot{Q}_0)^2 \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta .$$



Interessante Anwendungen auf Radiopulsare behandeln wir in den Übungen.

IV.3 Der Hertz'sche Dipol

Wir wollen jetzt – ähnlich wie in der Statik – die Felder einer "kleinen" Ladungs- und Stromverteilung (mit Ausdehnung d) untersuchen. Wir setzen genauer voraus, dass

$$r \gg d \qquad \text{und} \qquad \lambda \gg d \,, \tag{3.1}$$

über die Beziehung zwischen r und λ wird aber keine Annahme gemacht.

Als Ausgangspunkt könnten wir die exakten Ausdrücke (2.6) und (2.8) für die elektromagnetischen Felder benutzen. Es ist aber einfacher mit den Potentialen $(A^\mu) = (\varphi, \underline{A})$ zu arbeiten. Die retardierten Lösungen von (II.1.18) (Lorentzeichung!) sind nach § IV.1

$$A^\mu = \frac{4\pi}{c} G * j^\mu \,, \tag{3.2}$$

d.h.,

$$\varphi(\underline{x},t) = \int \frac{\varrho(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c})}{|\underline{x}-\underline{x}'|} d^3x' \,, \tag{3.3}$$

$$\underline{A}(\underline{x},t) = \frac{1}{c} \int \frac{\underline{J}(\underline{x}', t - \frac{|\underline{x}-\underline{x}'|}{c})}{|\underline{x}-\underline{x}'|} d^3x' . \tag{3.4}$$

Nach unseren Annahmen (3.1) dürfen wir wieder nach der Retardierung innerhalb der Quellen entwickeln: Da (2.18), d.h. $d^2/r\lambda \ll 1$, nach (3.1) erfüllt ist, ist der letzte Term in (2.17) vernachlässigbar,

$$t_{ret} \simeq t - \frac{r}{c} + \frac{\underline{n}\cdot\underline{x}'}{c} \quad ,$$

und wir erhalten z.B.

$$[\rho]_{ret} \simeq \rho(\underline{x}', t - \frac{r}{c} + \underline{n}\cdot\underline{x}'/c)$$
$$= \rho(\underline{x}', t - \frac{r}{c}) + \frac{\underline{n}\cdot\underline{x}'}{c}\,\dot{\rho}(\underline{x}', t - \frac{r}{c}) + \cdots \quad (3.5)$$

Wir entwickeln zuerst den Integranden in (3.3) bis zur ersten Ordnung in d/r und $d/\lambda \sim \frac{d}{c}\partial_t$:

$$\frac{[\rho]_{ret}}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = \frac{\rho(\underline{x}', t - r/c)}{r} + \frac{\underline{n}\cdot\underline{x}'}{r^2}\,\rho(\underline{x}', t - r/c) + \frac{1}{c}\,\frac{\underline{n}\cdot\underline{x}'}{r}\,\dot{\rho}(\underline{x}', t - \frac{r}{c})$$
$$+ \text{höhere Ordn.} \quad (3.6)$$

Bezeichnen Q die Gesamtladung und $\underline{P}$ das Dipolmoment der Ladungsverteilung, so erhalten wir also für das skalare Potential in hinreichender Näherung

$$\varphi(\underline{x}, t) = \frac{Q}{r} + \frac{1}{r^2}\,\underline{n}\cdot\underline{P}(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{cr}\,\underline{n}\cdot\dot{\underline{P}}(t - r/c) \,. \quad (3.7)$$

Für das Vektorpotential $\underline{A}$ müssen wir in (3.6) ρ durch $\underline{J}$ ersetzen. Bei der Umformung der resultierenden Integrale benötigen wir zwei Identitäten:

Aus

$$\int \underbrace{\partial_l (x_k J_l)}_{J_k + x_k \underline{\nabla}\cdot\underline{J}}\, d^3x = 0 = \int J_k\, d^3x - \int x_k \dot{\rho}\, d^3x$$

folgt als erste Identität

$$\int \underline{J}\, d^3x = \underline{\dot{P}}. \tag{3.8}$$

Ähnlich können wir so weiterfahren

$$0 = \int \partial_\ell (x_k x_s J_\ell)\, d^3x = \int (J_k x_s + J_s x_k + x_k x_s \underbrace{\underline{\nabla}\cdot\underline{J}}_{-\dot{\rho}})\, d^3x$$

$$\Longrightarrow \quad \int J_k x_s\, d^3x = -\int J_s x_k\, d^3x + \int \dot{\rho}\, x_k x_s\, d^3x . \tag{3.9}$$

Multiplizieren wir die letzte Gleichung mit einem konstanten Vektor a_s, so ergibt sich

$$\int (\underline{a}\cdot\underline{x})\,\underline{J}\, d^3x = -\int \underline{x}\,(\underline{J}\cdot\underline{a})\, d^3x + \int \underline{x}\,(\underline{a}\cdot\underline{x})\,\dot{\rho}\, d^3x . \tag{3.10}$$

In der Anwendung auf unser Problem dürfen wir in dieser Identität den letzten Term weglassen, da er von der Ordnung d^2/r^2 (Quadrupol) ist. In dieser Näherung bleibt

$$\int (\underline{a}\cdot\underline{x})\,\underline{J}\, d^3x = \frac{1}{2}\int [\,\underline{a}\cdot\underline{x}\;\underline{J} - \underline{x}\;\underline{J}\cdot\underline{a}\,]\, d^3x$$

$$= -\frac{1}{2}\int \underline{a}\wedge(\underline{x}\wedge\underline{J})\, d^3x . \tag{3.11}$$

Bezeichnet $\underline{\mu}$ das magnetische Moment der Stromverteilung, so erhalten wir in der gewünschten Näherung, mit (3.8), (3.11),

$$\boxed{\underline{A}(\underline{x},t) = \frac{1}{cr}\,\underline{\dot{P}}(t-\tfrac{r}{c}) - \frac{1}{r^2}\,\underline{n}\wedge\underline{\mu}(t-r/c) - \frac{1}{cr}\,\underline{n}\wedge\underline{\dot{\mu}}(t-r/c).} \tag{3.12}$$

Wir wollen die Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$ nur für den Fall berechnen, dass $Q = 0$ ist und $\underline{\mu}$ vernachlässigt werden kann. Man spricht dann von einem <u>Hertzschen Dipol</u>. Dann ist

$$\varphi(\underline{x},t) = \frac{1}{r^2}\,\underline{n}\cdot\underline{P}(t-r/c) + \frac{1}{rc}\,\underline{n}\cdot\dot{\underline{P}}(t-r/c)$$

oder

$$\varphi = -\nabla\cdot\underline{\underline{Z}} \qquad (3.13)$$

und

$$\underline{A} = \frac{1}{c}\,\dot{\underline{\underline{Z}}}\,, \qquad (3.14)$$

wobei

$$\underline{\underline{Z}} = \frac{1}{r}\,\underline{P}(t-r/c) \qquad (3.15)$$

der sog. <u>Hertzsche Vektor</u> ist. Für die Felder findet man leicht (Übung):

$$\underline{B} = -\underline{n}\wedge\left[\frac{1}{c^2 r}\ddot{\underline{P}} + \frac{1}{cr^2}\dot{\underline{P}}\right], \qquad (3.16)$$

$$\begin{aligned}\underline{E} = {} & \frac{1}{c^2 r}\left[(\ddot{\underline{P}}\cdot\underline{n})\underline{n} - \ddot{\underline{P}}\right] \\ & + \frac{1}{cr^2}\left[3(\dot{\underline{P}}\cdot\underline{n})\underline{n} - \dot{\underline{P}}\right] \qquad (3.17) \\ & + \frac{1}{r^3}\left[3(\underline{P}\cdot\underline{n})\underline{n} - \underline{P}\right].\end{aligned}$$

Dabei sind überall die <u>retardierten Zeiten</u> $t-r/c$ in $\underline{P}, \dot{\underline{P}}, \ddot{\underline{P}}$ zu nehmen.

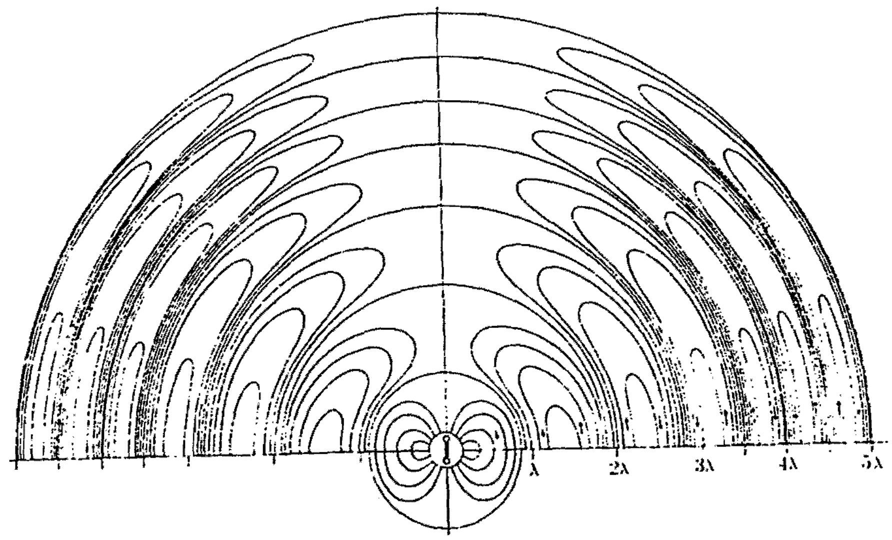
Anstelle eines elektrischen Hertzschen Oszillators könnte man auch einen magnetischen betrachten: $\underline{E}\to\underline{B}$, $\underline{B}\to-\underline{E}$, $\underline{P}\to\underline{\mu}$. Beispiel: Pulsar (= rotierender magnetisierter Neutronenstern), siehe Übungen.

Wir diskutieren die relative Wichtigkeit der verschiedenen Terme. Für $r \to \infty$ überwiegen die Terme $\sim 1/r$. In welchem Sinn muss r gross sein? Dazu betrachten wir den zeitlich harmonischen Fall $\sim e^{-i\omega t}$. Dann ist $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \sim -\frac{i\omega}{c} = 2\pi/\lambda$. Die drei Terme des elektrischen Feldes haben dann die Grössenordnung: $\frac{1}{r\lambda^2}$, $\frac{1}{r^2\lambda}$, $\frac{1}{r^3}$.

In der <u>Nahzone</u> $r \ll \lambda$ überwiegt der letzte; dieser beschreibt ein statisches elektrisches Dipolfeld, das dem Dipol $\underline{P}(t)$ <u>instantan</u> folgt; $\underline{B}$ ist sehr klein gegen $\underline{E}$.

In der <u>Induktionszone</u> $r \sim \lambda$ wird $\underline{B}$ von gleicher Grössenordnung wie $\underline{E}$. In diesem Gebiet wird $\underline{B}$ durch die Induktionswirkung des Verschiebungsstromes "erregt".
In der <u>Wellenzone</u> $r \gg \lambda$ überwiegen die Terme $\sim \frac{1}{r}$. Diese sind uns schon bekannt (s. (2.37,38)).

Die elektrischen Feldlinien eines Hertzschen Dipols sind in der nachstehenden Fig. gezeigt.



IV.4 Das Feld einer bewegten Punktladung

Wir wollen nun das elektromagnetische Feld einer beliebig bewegten Punktladung studieren. Dabei interessieren wir uns speziell für die totale und spektrale Abstrahlung eines beschleunigten Teilchens (Synchrotronstrahlung). Diese spielt u.a. in der Astrophysik eine sehr wichtige Rolle.

Die Punktladung (Ladung e) bewege sich längs einer Weltlinie $z^\mu(\tau)$ (τ: Eigenzeit). Die 4er-Geschwindigkeit $\dot{z}^\mu$ ($\cdot = d/d\tau$) bezeichnen wir wie früher mit $u^\mu(\tau)$.

Ich behaupte, dass sich die 4er-Stromdichte folgendermassen als Weltlinien-Integral darstellen lässt:

$$j^\mu(x) = ec \int \delta^4(x - z(\tau))\, \dot{z}^\mu(\tau)\, d\tau . \tag{4.1}$$

<u>Begründung</u>: Die (distributiven) Ladungs- und Stromdichten sind

$$\rho(\underline{x},t) = e\,\delta^3(\underline{x} - \underline{z}(t)) , \tag{4.2}$$

$$\underline{J}(\underline{x},t) = e\,\frac{d\underline{z}}{dt}\,\delta^3(\underline{x} - \underline{z}(t)) . \tag{4.3}$$

Somit ist die 4er-Stromdichte zunächst

$$j^\mu(x) = e\,\frac{dz^\mu}{dt}\,\delta^3(\underline{x} - \underline{z}(t)) . \tag{4.4}$$

Nun sei λ irgend ein Kurvenparameter der Weltlinie des Teilchens. Dann ist das Integral

$$ec \int \frac{dz^\mu}{d\lambda}\,\delta^4(x - z(\lambda))\, d\lambda$$

offensichtlich unabhängig von λ. Für $\lambda = z^0/c$ (= Laborzeit des Teilchens) lässt sich die λ-"Integration" trivial ausführen und gibt gerade den Ausdruck (4.4). Daraus folgt die Behauptung für $\lambda = \tau$.

Ausgangspunkt ist die inhomogene Wellengleichung

$$\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \tag{4.5}$$

für das 4er-Potential in der Lorentz-Eichung. Bezeichnet G wie früher die retardierte Greenfunktion, dann lautet die retardierte Lösung von (4.5)

$$A^\mu = \frac{4\pi}{c} G * j^\mu . \tag{4.6}$$

Hier setzen wir den distributiven Strom (4.1) ein:

$$A^\mu(x) = 4\pi e \int u^\mu(\tau) \underbrace{G * \delta^4(x - z(\tau))}_{G(x-z(\tau))} d\tau$$

Nun bemerken wir, dass sich G folgendermassen schreiben lässt (s. Fussnote 1)

$$G(x) = \frac{\theta(t)}{2\pi} \delta(x^2) . \tag{4.7}$$

Somit finden wir das Zwischenergebnis

$$A^\mu(x) = 2e \int d\tau\, u^\mu(\tau)\, \theta(x^0 - z^0(\tau))\, \delta((x - z(\tau))^2) . \tag{4.8}$$

Jetzt bemerken wir die folgende allgemeine Tabelle:

Sei $f(u)$ eine stetig differenzierbare Funktion mit einer einfachen Nullstelle bei u_0, dann gilt

$$\delta(f(u)) = \frac{\delta(u-u_0)}{|f'(u_0)|} \tag{4.9}$$

(siehe MMP, oder die Fussnote 2 unten). In (4.8) gebrauchen wir dies für

$$f(\tau) = (x-z(\tau))^2 \,, \quad x^0 > z^0(\tau) . \tag{4.10}$$

Die einfache Nullstelle τ_0 ist durch $(x-z(\tau_0))^2=0$ bestimmt (s. Fig.).

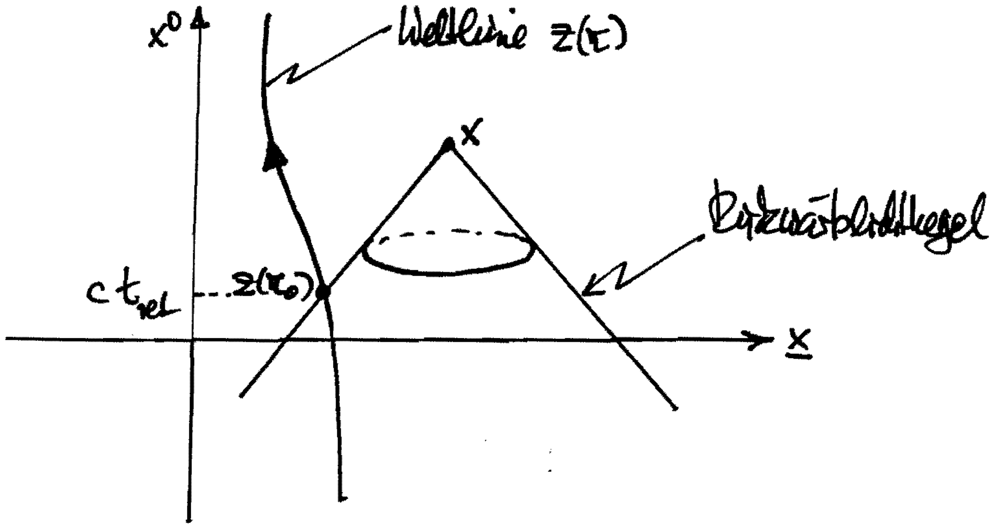


Fig. Graphische Darstellung von $(x-z(\tau_0))^2=0$, $x^0>z^0(\tau)$.

Damit folgt aus (4.8)

$$\boxed{A^\mu(x) = \frac{e u^\mu}{u\cdot(x-z(\tau))}\bigg|_{\tau=\tau_0}} . \tag{4.11}$$

Bevor wir dies weiter verwerten, wollen wir noch die benutzten Hilfsmittel näher erläutern.

Fussnoten. 1. Wir hatten in (1.11)

$$G(\underline{x},t)=\frac{1}{4\pi|\underline{x}|}\,\theta(t)\,\delta(|\underline{x}|-ct)\,.$$

Nun ist für $t>0$ (beachte $\delta(au)=\frac{1}{|a|}\delta(u)$):

$$\delta(x^2)=\delta([|\underline{x}|-ct]\underbrace{[|\underline{x}|+ct]}_{\downarrow\, 2|\underline{x}|})=\frac{1}{2|\underline{x}|}\,\delta(|\underline{x}|-ct)\,. \qquad (4.12)$$

Wir wollen dies zur Abwechslung noch streng begründen. Es ist für $t>0$

$$\langle\delta(x^2),f\rangle=\int_{\substack{\text{Vorwärts-}\\ \text{Lichtkegel}}} f\,\omega\,, \qquad (4.13)$$

wo ω die Leray-Form zur Funktion x^2 ist (s. MMP-Skript, § VI.10). Um diese zu finden, notieren wir

$$d(x^2)\wedge\underbrace{\frac{dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3}{2x^0}}_{\equiv\sigma}=dx^0\wedge dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3:$$

Volumenform der Minkowski-Raumzeit.

Es ist $\omega=i^*\sigma$, wenn i die Inklusion des Vorwärtslichtkegels in die Minkowski-Raumzeit bezeichnet. Wir haben also

$$\omega=\frac{dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3}{2|\underline{x}|} \qquad (4.14)$$

und somit

$$\langle\theta(t)\delta(x^2),f\rangle=\int f(\underline{x},x^0=|\underline{x}|)\,\frac{d^3x}{2|\underline{x}|}\,. \qquad (4.15)$$

Anderseits gilt natürlich

$$\langle G, f\rangle = \frac{1}{4\pi}\int \frac{f(\underline{x}, x^0=|\underline{x}|)}{|\underline{x}|}\, d^3x\,, \tag{4.16}$$

womit (4.7) streng bewiesen ist.

2. Nun beschäftigen wir uns mit (4.9). Die einzig sinnvolle Definition von $\delta(f)$, f eine differenzierbare Funktion einer Variablen, ist folgende: Es sei δ_n eine Dirac-Folge von Funktionen (s. MMP), etwa in $L^1(\mathbb{R})$. Es gilt also in $\mathcal{S}'$: $\delta_n \to \delta$ für $n\to\infty$ (wenn man die δ_n als Distributionen auffasst). Die Zusammensetzung $\delta_n(f) = \delta_n\circ f$ ist definiert, und wir verlangen natürlich

$$\lim_{n\to\infty}\langle \delta_n\circ f, \varphi\rangle \overset{\text{f.ist}}{=:} \langle \delta(f), \varphi\rangle\,, \quad \varphi\in\mathcal{S}.$$

Nun ist die linke Seite (in der Nähe der einfachen Nullstelle u_0 von f umkehrbar)

$$\lim_{n\to\infty}\langle\delta_n\circ f,\varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\int \delta_n(f(x))\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int \delta_n(y)\,\varphi(f^{-1}(y))\frac{dy}{|f'(f^{-1}(y))|} = \varphi(\underbrace{f^{-1}(0)}_{u_0})/|f'(\underbrace{f^{-1}(0)}_{u_0})|$$

$$= \varphi(u_0)/|f'(u_0)| = \left\langle \frac{\delta(u-u_0)}{|f'(u_0)|}, \varphi\right\rangle.$$

Damit erhalten wir (4.9).

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Wir schreiben die kompakte Formel (4.11) noch in einer (3+1) – Zerlegung aus. Nach Definition ist

$$x^0 - z^0(\tau_0) = |\underline{x} - \underline{z}(\tau_0)| =: R \quad . \tag{4.17}$$

Mit $u = \gamma(c, \underline{v})$ haben wir ferner an der Stelle τ_0

$$u\cdot(x-z) = u^0(x^0-z^0) - \underline{u}\cdot(\underline{x}-\underline{z}) = \gamma c R - \gamma\,\underline{v}\cdot(\underline{x}-\underline{z}) \, ,$$

d.h.,

$$u\cdot(x-z)\big|_{\tau_0} = \gamma c R\,(1-\underline{\beta}\cdot\underline{n}) \, , \; \underline{n} := \frac{\underline{x}-\underline{z}}{|\underline{x}-\underline{z}|} \, . \tag{4.18}$$

Da $(A^\mu) = (\varphi, \underline{A})$, folgt damit aus (4.11):

$$\varphi(\underline{x},t) = \left[\frac{e}{(1-\underline{\beta}\cdot\underline{n})R}\right]_{ret} , \quad \underline{A}(\underline{x},t) = \left[\frac{e\,\underline{\beta}}{(1-\underline{\beta}\cdot\underline{n})R}\right]_{ret} . \tag{4.19}$$

(Lienhard-Wiechert-Potentiale)

Dabei bedeutet "ret", dass die Ausdrücke zur retardierten Zeit $t_{ret} = \frac{z^0}{c}(\tau_0)$ (s. die Fig. auf S. IV.26) zu nehmen sind. Nach (4.17) haben wir

$$t_{ret} = t - \frac{R}{c} = t - \frac{|\underline{x}-\underline{z}(t_{ret})|}{c} \, . \tag{4.20}$$

(Dies ist eine implizite Gleichung für t_{ret}.)

<u>Feldstärken</u>. Wir können die $F_{\mu\nu}$ ausgehend von (4.11) berechnen. Es ist aber einfacher, auf die Integraldarstellung (4.8) von A^μ zurückzugehen. Bilden wir davon $\partial^\nu A^\mu$, so ist

folgendes zu beachten: Bei der Differentiation brauchen wir $\theta(x^0 - z^0(\tau))$ nicht abzuleiten, da dafür $x^0 = z^0(\tau)$ sein müsste, weshalb aus dem δ-Faktor in (4.8) $\delta(-R^2)$ würde. Deshalb erhalten wir für $R \neq 0$ keinen Beitrag. Somit kommt

$$\partial^\nu A^\mu = ze \int d\tau \, u^\mu(\tau)\, \theta(x^0 - z^0(\tau))\, \partial^\nu \delta((x - z(\tau))^2).$$

Nun bemerken wir, mit der Bezeichnung (4.10),

$$\partial^\nu \delta(f) = \delta'(f)\, \partial^\nu f \underset{\uparrow}{=} \frac{\partial^\nu f}{df/d\tau} \frac{d}{d\tau} \delta(f)$$

$$\left[\frac{d}{d\tau} \delta(f) = \delta'(f) \frac{df}{d\tau} \right]$$

$$= \frac{2(x^\nu - z^\nu)}{-2(x-z)\cdot u} \frac{d}{d\tau} \delta(f).$$

Damit erhalten wir, nach einer partiellen Integration,

$$\partial^\nu A^\mu = ze \int d\tau \, \frac{d}{d\tau} \left[\frac{(x^\nu - z^\nu) u^\mu}{(x-z)\cdot u} \right] \theta(x^0 - z^0(\tau))\, \delta((x - z(\tau))^2). \tag{4.21}$$

Dies ist ein Integral vom gleichen Typ wie (4.8). Auf dieselbe Weise bekommen wir deshalb

$$\boxed{F^{\mu\nu}(x) = \frac{e}{u\cdot(x-z)} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{(x^\mu - z^\mu) u^\nu - (x^\nu - z^\nu) u^\mu}{u\cdot(x-z)} \right] \Bigg|_{\tau=\tau_0}.} \tag{4.22}$$

Unter Beachtung von $\frac{d}{d\tau}[u\cdot(x-z)] = -\underbrace{u\cdot u}_{c^2} + \frac{du}{d\tau}\cdot(x-z)$ führen wir die Ableitungen in (4.22) noch aus. Immer an der Stelle τ_0 genommen, ergibt sich

$$F^{\mu\nu} = \frac{e}{u\cdot(x-z)}\left\{\frac{(x^\mu-z^\mu)\frac{du^\nu}{d\tau}-(x^\nu-z^\nu)\frac{du^\mu}{d\tau}}{u\cdot(x-z)}\right. \tag{4.23}$$

$$\left. + \frac{(x^\mu-z^\mu)u^\nu-(x^\nu-z^\nu)u^\mu}{[u\cdot(x-z)]^2}\left[c^2-\frac{du}{d\tau}\cdot(x-z)\right]\right\}.$$

Dies spalten wir wieder in Raum und Zeit. Dazu bemerken wir (s. (4.17) und (4.18)):

$$x-z=(R,R\underline{n}),\quad u=\gamma c(1,\underline{\beta}),\quad u\cdot(x-z)=\gamma c R(1-\underline{\beta}\cdot\underline{n}). \tag{4.24}$$

Ferner benötigen wir die ~~der~~ Beschleunigung $du^\mu/d\tau$). Nun ist

$$\frac{d\gamma}{d\tau}=\frac{d\gamma}{\sqrt{1-\beta^2}\,dt}=\gamma\,\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma^4\underline{\beta}\cdot\dot{\underline{\beta}}$$

(von jetzt an bezeichne ein Punkt Ableitungen nach t), also

$$\frac{d}{d\tau}(\gamma\underline{\beta})=\gamma^4(\underline{\beta}\cdot\dot{\underline{\beta}})\underline{\beta}+\gamma^2\dot{\underline{\beta}}.$$

Damit

$$\frac{du^\mu}{d\tau}=\left(c\gamma^4\underline{\beta}\cdot\dot{\underline{\beta}},\ c\gamma^2\dot{\underline{\beta}}+c\gamma^4(\underline{\beta}\cdot\dot{\underline{\beta}})\underline{\beta}\right). \tag{4.25}$$

Aus (4.24) und (4.25) ergibt sich auch

$$\frac{du}{d\tau}\cdot(x-z)=Rc\gamma^4\underline{\beta}\cdot\dot{\underline{\beta}}-Rc\left[\gamma^2\underline{n}\cdot\dot{\underline{\beta}}+\gamma^4(\underline{\beta}\cdot\dot{\underline{\beta}})(\underline{n}\cdot\underline{\beta})\right] \tag{4.26}$$

Nun überzeugen wir uns zuerst, dass aus (4.23)

$$\boxed{\underline{B}=\underline{n}\wedge\underline{E}} \tag{4.27}$$

folgt. Dazu vergleichen wir die entsprechenden Proportionalitätsfaktoren der beiden Zeilen von (4.23) zu $\underline{E}$ und $\underline{B}$. Der Anteil zum $\underline{E}$-Feld der 2. Zeile ist proportional zu

$$(x^0-z^0)u^i-(x^i-z^i)u^0 \longrightarrow R\underline{u}-R\underline{n}u^0=R\gamma c(\underline{\beta}-\underline{n}).$$

Der entsprechende Faktor für F^{ij} ist

$$(x^i-z^i)u^j-(x^j-z^j)u^i \longrightarrow R\,\underline{n}\wedge\underline{u}=R\gamma c\,\underline{n}\wedge\underline{\beta}$$

$$=R\gamma c\,\underline{n}\wedge(\underline{\beta}-\underline{n}) \text{ für } \underline{B}.$$

Also stehen diese Anteile tatsächlich in der Beziehung von (4.27). Entsprechend erhält man aus der 1. Zeile die Faktoren

$$\underline{E}: \quad R\frac{d\underline{u}}{d\tau}-R\underline{n}\frac{du^0}{d\tau}\;;$$

$$\underline{B}: \quad R\,\underline{n}\wedge\frac{d\underline{u}}{d\tau}=\underline{n}\wedge\left[R\frac{d\underline{u}}{d\tau}-R\underline{n}\frac{du^0}{d\tau}\right].\;\checkmark$$

Wir benötigen deshalb nur das $\underline{E}$-Feld ($F^{0i}=-E_i$). Die Terme, in denen die 4er-Beschleunigung nicht vorkommt sind nach den gerade ausgeführten Rechnungen gleich

$$\frac{ec^2}{[u\cdot(x-z)]^3}R\gamma c(\underline{n}-\underline{\beta})=\frac{ec^2}{(\gamma cR)^3(1-\underline{\beta}\cdot\underline{n})^3}=e\left.\underline{\frac{\underline{n}-\underline{\beta}}{\gamma^2(1-\underline{\beta}\cdot\underline{n})^3R^2}}\right|_{t_{ret}}.$$

(4.28)

Die Terme proportional zu den Komponenten der 4er-Beschleunigung geben den folgenden Beitrag zu $\underline{E}$ (s. oben):

$$-\frac{e}{[u\cdot(x-z)]^2}\left[R\frac{d\underline{u}}{d\tau}-R\underline{n}\frac{du^0}{d\tau}\right] \longleftarrow \text{1. Zeile in (4.23)};$$

$$-\frac{e}{[u\cdot(x-z)]^3}R\gamma c(\underline{n}-\underline{\beta})\frac{du}{d\tau}\cdot(x-z) \longleftarrow \text{2. Zeile in (4.23)}.$$

Hier setzen wir die oben zusammengestellten Ausdrücke ein und erhalten

$$1.\ \text{Zeile} = -\frac{e}{(\gamma c R)^3(1-\underline{\beta}\cdot\underline{n})^2}\, Rc\left[\gamma^2\dot{\underline{\beta}} + \gamma^4(\underline{\beta}\cdot\dot{\underline{\beta}})\underline{\beta} - \gamma^4(\underline{\beta}\cdot\dot{\underline{\beta}})\underline{n}\right]$$

$$= \frac{e}{c}\,\frac{1}{(1-\underline{\beta}\cdot\underline{n})^2 R}\left[\underline{\gamma^2(\underline{\beta}\cdot\dot{\underline{\beta}})(\underline{n}-\underline{\beta})} - \dot{\underline{\beta}}\right];$$

$$2.\ \text{Zeile} = -\frac{e}{(\gamma c R)^3(1-\underline{\beta}\cdot\underline{n})^3}\, R\gamma c\,(\underline{n}-\underline{\beta})\, Rc\left[\gamma^4\underline{\beta}\cdot\dot{\underline{\beta}} - \gamma^2\underline{n}\cdot\dot{\underline{\beta}} - \gamma^4(\underline{\beta}\cdot\dot{\underline{\beta}})(\underline{n}\cdot\underline{\beta})\right]$$

$$= \frac{e}{c}\,\frac{1}{(1-\underline{\beta}\cdot\underline{n})^3 R}(\underline{n}-\underline{\beta})\left[\underline{n}\cdot\dot{\underline{\beta}} - \underline{\gamma^2(\underline{\beta}\cdot\dot{\underline{\beta}})(1-\underline{n}\cdot\underline{\beta})}\right].$$

Die unterstrichenen Terme heben sich weg und wir erhalten für den Anteil des $\underline{E}$-Feldes linear in $\dot{\underline{\beta}}$

$$\frac{e}{c}\,\frac{1}{(1-\underline{\beta}\cdot\underline{n})^3 R}\left[\underbrace{(\underline{n}\cdot\dot{\underline{\beta}})(\underline{n}-\underline{\beta}) - (1-\underline{\beta}\cdot\underline{n})\dot{\underline{\beta}}}_{\underline{n}\wedge((\underline{n}-\underline{\beta})\wedge\dot{\underline{\beta}})}\right]. \qquad (4.29)$$

Insgesamt erhalten wir für das $\underline{E}$-Feld die Summe von (4.28) und (4.29):

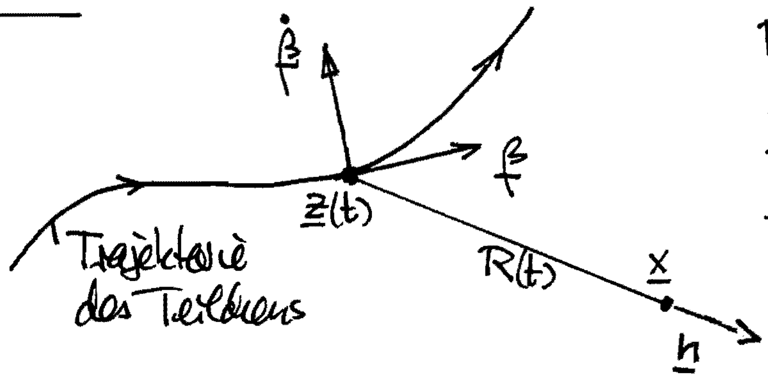
$$\boxed{\underline{\mathbf{E}} = e\left[\frac{\underline{n}-\underline{\beta}}{\gamma^2(1-\underline{\beta}\cdot\underline{n})^3R^2}\right]_{\text{ret}} + \frac{e}{c}\left[\frac{1}{(1-\underline{\beta}\cdot\underline{n})^3R}\,\underline{n}\wedge\left((\underline{n}-\underline{\beta})\wedge\dot{\underline{\beta}}\right)\right]_{\text{ret}}.} \qquad (4.30)$$

Durch (4.30) und und (4.27) sind die Felder explizite bestimmt. Die zugehörigen Potentiale (4.19) nennt man die <u>Lienhard–Wiechert–Potentiale</u>. Der erste Term in (4.30) ist das Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung, welches wir schon in §II.1E studiert haben. Dieses fällt mit R^{-2} ab, während der zweite Term in (4.30) – proportional zu $\dot{\underline{\beta}}$ – mit R^{-1} abnimmt und deshalb die Abstrahlung bestimmt. Der zugehörige Energiefluss ist in Richtung $\underline{n}$ und hat die Grösse

$$\underline{S}\cdot\underline{n} = \frac{c}{4\pi}|\underline{E}|^2 = \frac{1}{4\pi R^2}\,\frac{e^2}{c}\left[\frac{1}{(1-\underline{\beta}\cdot\underline{n})^6}\left|\underline{n}\wedge\left((\underline{n}-\underline{\beta})\wedge\dot{\underline{\beta}}\right)\right|^2\right]_{ret}. \qquad (4.31)$$

Notiere, dass die Richtung des Vektors innerhalb des Absolutbetrags die <u>Richtung des $\underline{E}$-Feldes</u> ist. Dies ist für die Diskussion der Polarisationsverhältnisse wichtig.

Wir halten an dieser Stelle die Notationen in (4.30) und (4.31) nochmals fest (s. Fig.):



$R = |\underline{x}-\underline{z}(t)|$,

$\underline{n} = (\underline{x}-\underline{z}(t))/R(t)$;

$t_{ret}(t,\underline{x})$: Lösung von

$$\frac{|\underline{x}-\underline{z}(t_{ret})|}{c} = \underbrace{t-t_{ret}}$$
$$\| $$
$$\underbrace{R(t_{ret})/c} \;;$$

$\underline{v}(t) = \dot{\underline{z}}(t)$,

$\underline{\beta}(t) = \underline{v}(t)/c$.

In (4.30) und (4.31) sind alle Grössen zur Zeit <u>t_{ret}</u> zu nehmen.

* * *

IV.5 Strahlung von beschleunigten Punktladungen

Der Ausdruck (4.31) gibt die pro Zeiteinheit und Flächeneinheit in Richtung $\underline{n}$ (am Aufpunkt) abgestrahlte Energie zur Zeit t. Diese Strahlung wurde zur Zeit $t_{ret} = t - R(t_{ret})/c$ emittiert. Interessanter für uns ist die Energie, die das Teilchen auf seiner Bahn pro retardierte Zeiteinheit verliert. Wegen

$$\frac{dt}{dt_{ret}} = 1 - \underline{n}\cdot\underline{\beta} \qquad (5.1)$$

ist diese Strahlungsleistung in den Raumwinkel $d\Omega$,

$$\frac{dP(t_{ret})}{d\Omega} = R^2(\underline{S}\cdot\underline{n})\frac{dt}{dt_{ret}} \quad , \qquad (5.2)$$

gegeben durch

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c}\,\frac{1}{(1-\underline{\beta}\cdot\underline{n})^5}\,|\underbrace{\underline{n}\wedge((\underline{n}-\underline{\beta})\wedge\dot{\underline{\beta}})}_{\text{Richtung des }\underline{E}\text{-Feldes}}|^2.} \qquad (5.3)$$

Diese wichtige Formel wollen wir nun in mehrfacher Weise anwenden.

<u>nichtrelativistischer Grenzfall</u> ($\beta \ll 1$): Dieser Fall ist z.B. in Röntgengeräten realisiert. Wenn Elektronen in Metallen abgebremst werden, führt dies zu einer elektromagnetischen Strahlung, der sog. <u>Bremsstrahlung</u>. Aus (5.3) wird näherungs-

Weise

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \,|\underbrace{\underline{n} \wedge (\underline{n} \wedge \dot{\underline{\beta}})}_{\text{Polarisationsrichtung}}|^2 . \qquad (5.4)$$

Ist $\vartheta = \sphericalangle(\underline{n}, \dot{\underline{\beta}})$, so ist

$$\underline{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3}\, \dot{\underline{v}}^2 \sin^2\vartheta} . \qquad (5.5)$$

Die gesamte Strahlungsleistung beträgt

$$\boxed{P = \frac{2e^2}{3c^3}\, \dot{\underline{v}}^2} \qquad (5.6)$$

(Larmor'sche Formel).

Auch im allgemeinen Fall (5.3) lässt sich die Winkelintegration mit etwas Mühe durchführen. Dies kann man sich aber mit einer einfachen relativistischen Überlegung ersparen: Da die abgestrahlte Energie dE_s in der Zeit dt_{ret} gleich $P\,dt_{ret}$ ist und dE_s die 0-Komponente eines 4er-Vektors ist, muss P <u>lorentzinvariant</u> sein. Andererseits darf P nur von $\underline{\beta}$ und $\dot{\underline{\beta}}$ abhängen, wie ein Blick auf (5.3) zeigt. Durch diese Forderungen und den nichtrelativistischen Grenzfall (5.6) ist nun P eindeutig bestimmt. Um dies zu sehen, schreiben wir (5.6) in der suggestiven Form

$$P = \frac{2e^2}{3m^2c^3}\, \frac{d\underline{p}}{dt} \cdot \frac{d\underline{p}}{dt} .$$

Eine lorentzinvariante Verallgemeinerung ist der folgende

Ausdruck

$$P = -\frac{2e^2}{3m^2c^3}\,\frac{dp}{d\tau}\cdot\frac{dp}{d\tau}\,. \qquad (5.7)$$

Dies ist auch die einzige Möglichkeit, denn wir haben nur die 4er-Vektoren p und $\frac{dp}{d\tau}$ zur Verfügung. Wegen $p\cdot p = mc^2$ ist aber $p\cdot\frac{dp}{d\tau} = 0$.

Wir wollen (5.7) durch $\underline{\beta}$ und $\dot{\underline{\beta}}$ ausdrücken. Dazu greifen wir auf (4.25), d.h.,

$$\frac{dp}{d\tau} = mc\left(\gamma^4\underline{\beta}\cdot\dot{\underline{\beta}},\ \gamma^2\dot{\underline{\beta}} + \gamma^4(\underline{\beta}\cdot\dot{\underline{\beta}})\,\underline{\beta}\right) \qquad (5.8)$$

zurück. Die Minkoski-"Länge" davon ist

$$-\frac{dp}{d\tau}\cdot\frac{dp}{d\tau} = m^2c^2\gamma^6\left[(\underline{\beta}\cdot\dot{\underline{\beta}})^2\beta^2\gamma^2 + \frac{1}{\gamma^2}\dot{\underline{\beta}}^2 + 2(\underline{\beta}\cdot\dot{\underline{\beta}})^2 - \gamma^2(\underline{\beta}\cdot\dot{\underline{\beta}})^2\right]$$

$$= m^2c^2\gamma^6\left[(\underline{\beta}\cdot\dot{\underline{\beta}})^2(\gamma^2\beta^2+2-\gamma^2) + \frac{1}{\gamma^2}\dot{\underline{\beta}}^2\right].$$

Wir bemerken $(\underline{\beta}\wedge\dot{\underline{\beta}})^2 = \beta^2\dot{\underline{\beta}}^2 - (\underline{\beta}\cdot\dot{\underline{\beta}})^2$ und erhalten

$$-\left(\frac{dp}{d\tau}\right)^2 = m^2c^2\gamma^6\left[-(\underline{\beta}\wedge\dot{\underline{\beta}})^2 + \beta^2\dot{\underline{\beta}}^2 + \frac{1}{\gamma^2}\dot{\underline{\beta}}^2 \underbrace{-(\underline{\beta}\cdot\dot{\underline{\beta}})^2 + (\underline{\beta}\cdot\dot{\underline{\beta}})^2(\gamma^2\beta^2+2-\gamma^2)}_{0}\right]$$

oder

$$\boxed{-\left(\frac{dp}{d\tau}\right)^2 = m^2c^2\gamma^6\left[\dot{\underline{\beta}}^2 - (\underline{\beta}\wedge\dot{\underline{\beta}})^2\right].} \qquad (5.9)$$

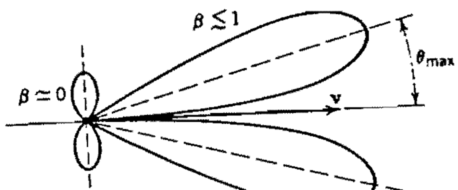
Damit wird aus (5.7)

$$\boxed{P = \frac{2e^2}{3c}\,\gamma^6\left[\dot{\underline{\beta}}^2 - (\underline{\beta}\wedge\dot{\underline{\beta}})^2\right].} \tag{5.10}$$

<u>Lineare Bewegung</u>. Dieser einfache Fall ist insbesondere für Linearbeschleuniger relevant. Dafür wird aus (5.3), wenn $\vartheta = \sphericalangle(\underline{\beta}, \underline{n})$,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3}\,\dot{v}^2\,\frac{\sin^2\vartheta}{(1-\beta\cos\vartheta)^5}. \tag{5.11}$$

Für $\beta \to 1$ geht die Strahlung hauptsächlich in die Vorwärtsrichtung (s. Fig.). Der Winkel ϑ_{max}, bei dem die Intensität



maximal wird, ist

$$\vartheta_{max} = \cos^{-1}\left[\frac{1}{3\beta}\left(\sqrt{1+15\beta^2}-1\right)\right] \xrightarrow{(\beta\to 1)} \underline{\underline{\frac{1}{2\gamma}}}. \tag{5.12}$$

In diesem extrem relativistischen Fall ist die Intensität beim Maximum proportional zu γ^8. Die Strahlung ist in einem kleinen Kegel in der Vorwärtsrichtung konzentriert. Näherungsweise gilt

$$\frac{dP}{d\Omega} \simeq \frac{8}{\pi}\frac{e^2}{c^3}\,\dot{v}^2\gamma^8\,\frac{(\gamma\vartheta)^2}{(1+\gamma^2\vartheta^2)^5}. \tag{5.13}$$

Dafür ist

$$\langle\vartheta^2\rangle^{1/2} = \frac{1}{\gamma}. \tag{5.14}$$

Die gesamte Strahlungsleistung ist nach (5.10)

$$\boxed{P = \frac{2e^2}{3c^3}\,\dot{v}^2\gamma^6} . \qquad (5.15)$$

Wir wollen dies mit der Energieänderung dE/dt des Teilchens vergleichen. Dazu drücken wir zuerst (5.15) durch dp/dt des Teilchens aus. Wir haben (s. S. IV.31)

$$\frac{dp}{dt} = mc\,\frac{d}{dt}(\gamma\beta) = mc\left[\gamma^3(\beta\cdot\dot{\beta})\beta + \gamma\dot{\beta}\right],$$

also für Linearbeschleunigung

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = \gamma^6 m^2c^2\left[\beta^4\dot{\beta}^2 + \frac{\dot{\beta}^2}{\gamma^4} + \frac{2}{\gamma^2}\beta^2\dot{\beta}^2\right] = \gamma^6 m^2 c^2 \dot{\beta}^2 .$$

Folglich kann (5.15) so geschrieben werden:

$$P = \frac{2e^2}{3m^2c^3}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 . \qquad (5.16)$$

Nun ist die Energieänderung dE/dx des Teilchens pro Längeneinheit

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{v}\frac{dE}{dt} = \frac{1}{v}\frac{p}{E}\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dt} .$$

Folglich gilt auch

$$P = \frac{2e^2}{3m^2c^3}\left(\frac{dE}{dx}\right)^2 . \qquad (5.17)$$

Die rechte Seite hängt nur von der treibenden Kraft ab. Wichtig ist das Verhältnis

$$\frac{P}{dE/dt} = \frac{2e^2}{3m^2c^3}\,\frac{1}{v}\,\frac{dE}{dx} \xrightarrow{(\beta\to 1)} \frac{2}{3}\,\frac{e^2/mc^2}{mc^2}\,\frac{dE}{dx} . \qquad (5.18)$$

Der Energieverlust ist deshalb unwichtig, solange der Energiegewinn nicht von der Ordnung $mc^2 = 0.511$ MeV über eine Distanz $e^2/mc^2 = 2.83\times10^{-13}$ cm, d.h., 2×10^{14} MeV/Meter ist! Typische Energiegewinne in Maschinen sind weniger als 10 MeV/Meter.

<u>Zirkularbewegung</u>. Ganz anders sind die Verhältnisse bei Zirkularbeschleunigern. Die totale Strahlungsleistung ergibt sich aus (5.10) zu

$$P = \frac{2e^2}{3c}\dot{\beta}^2\gamma^4. \qquad (5.19)$$

Für eine Kreisbewegung mit dem Radius ρ und Kreisfrequenz ω ist dies auch

$$P = \frac{2e^2}{3}\frac{c}{\rho^2}\beta^4\underline{\underline{\gamma^4}} = \frac{2e^2}{3c}\omega^2\beta^2\underline{\underline{\gamma^4}}. \qquad (5.20)$$

Der Faktor γ^4 führt zu enormen Strahlungsverlusten für zirkulare Elektronenmaschinen wie LEP. Der Strahlungsverlust eines Teilchens pro Umlauf ist

$$\delta E = \frac{2\pi\rho}{c\beta}P = \frac{4\pi}{3}\frac{e^2}{\rho}\beta^3\gamma^4. \qquad (5.21)$$

Für $\beta\simeq1$ ist dies für Elektronen und Positronen

$$\delta E(\text{MeV}) = 8.85\times10^{-2}\,\frac{[E(\text{GeV})]^4}{\rho(\text{Meter})}. \qquad (5.22)$$

Der zugehörige Strom (für ein Teilchen) ist

$$I = e\,\frac{1}{2\pi\rho/c\beta} = \frac{e\beta c}{2\pi\rho},$$

also

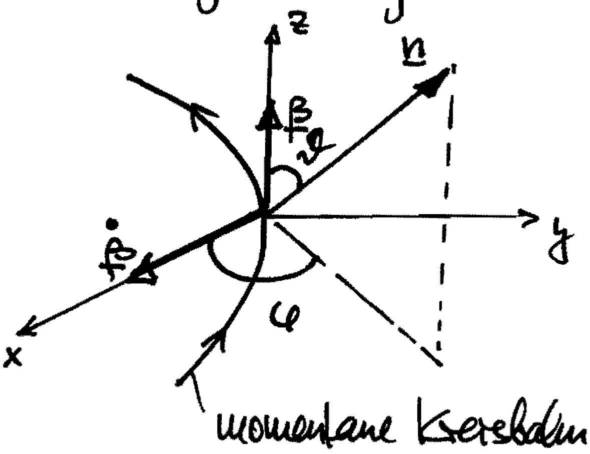
$$P = \frac{J}{e}\,\delta E\;;$$

in Zahlen

$$\boxed{P(\mathrm{Watt}) = 10^6\,\delta E(\mathrm{MeV})\;I(\mathrm{Amp})}\,. \qquad (5.23)$$

Werte (5.22) und (5.23) für das LEP aus (s. Übungen).

Wir betrachten auch noch die Winkelverteilung und werten dazu (5.3) aus, wobei wir die folgenden Polarwinkel einführen: β schaue momentan in die z-Richtung und $\dot{\beta}$ in die x-Richtung (s. Fig.). Mit den üblichen Polarwinkeln (ϑ,φ) für die Beobachtungsrichtung erhält man:

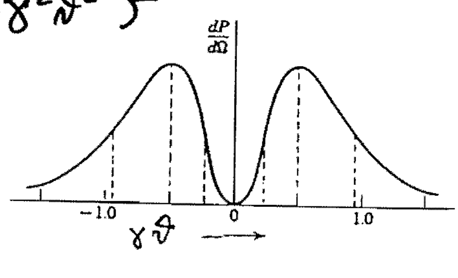


$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3}\,\dot{v}^2\,\frac{1}{(1-\beta\cos\vartheta)^3}\left[1-\frac{\sin^2\vartheta\cos^2\varphi}{\gamma^2(1-\beta\cos\vartheta)^2}\right]}\,. \qquad (5.24)$$

Für $v \uparrow c$ erhalten wir wieder eine charakteristische Vorwärtsspitze (s. Fig.). Für kleine Winkel ϑ ist

$$\frac{dP}{d\Omega} \simeq \frac{2e^2}{\pi c^3}\,\dot{v}^2\gamma^6\,\frac{1}{(1+\gamma^2\vartheta^2)^3}\left[1-\frac{4\gamma^2\vartheta^2\cos^2\varphi}{(1+\gamma^2\vartheta^2)^2}\right].$$

und wieder gilt $\langle\vartheta^2\rangle^{1/2} = 1/\gamma$.



Bewegung in einem homogenen Magnetfeld. Bei dieser bleibt die Energie konstant: $d\gamma/dt = 0$ (s. (II.2.13)) und nach (II.2.12) gilt damit

$$\dot{\underline{v}} = \frac{e}{\gamma mc}\, \underline{v} \wedge \underline{B} \qquad (\Longrightarrow \dot{\underline{v}} \perp \underline{v}). \qquad (5.25)$$

Aus (5.10) folgt

$$P = \frac{2e^2}{3c}\gamma^4 \dot{\beta}^2 ,$$

wobei nach (5.25)

$$\dot{\beta} = \frac{e}{\gamma mc}\beta B_\perp , \qquad B_\perp = \text{Komponente von } \underline{B} \perp \underline{\beta}.$$

Somit ist

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^4 B_\perp^2}{m^2 c^3}(\gamma^2 - 1)$$

oder

$$\boxed{P = \frac{2}{3}\frac{e^4 B_\perp^2}{m^2 c^3}\left[\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1\right].} \qquad (5.26)$$

Synchrotron-Alter

Für hochrelativistische Elektronen gilt also

$$\frac{dE}{dt} = -\rho E^2 , \qquad \rho := \frac{2e^4}{3m^4c^7} B_\perp^2 . \qquad (5.27)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$\frac{1}{E} = \rho t + \text{const}.$$

Für $t = 0$ sei $E = E_0 \gg mc^2$; dann gilt

$$E = \frac{E_0}{1 + \rho E_0 t}. \qquad (5.28)$$

Nach der Zeit $t_{1/2} = 1/\beta E_0$ ist $E = \frac{1}{2} E_0$. Numerisch ist

$$\boxed{t_{1/2}[s] = \frac{5.1 \times 10^8}{[B_\perp(\text{Gauss})]^2} \frac{mc^2}{E_0}} . \qquad (5.29)$$

Anwendung auf den Krebsnebel

Der Krebsnebel ist das Relikt einer Supernova, welche 1054 n. Ch. aufleuchtete. Dieser Nebel sendet eine beachtliche Synchrotronstrahlung von $\sim 10^{38}$ erg/s aus, deren Spektrum von niedrigen Radiofrequenzen bis zur harten γ-Region reicht. Wir werden das Synchrotronspektrum im nächsten Abschnitt ausrechnen und dabei sehen, dass dieses ziemlich flach ist und oberhalb einem Maximum bei

$$\nu_m = 0.07 \frac{eB_\perp}{mc} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \qquad (5.30)$$

rasch abfällt (s. S. IV.52). Für typische Werte $B_\perp = 5 \times 10^{-4}$ G erhalten wir in der γ-Region: $E \simeq 2 \times 10^6$ GeV für $\nu = 10^{22}$ Hz. Ersetzen wir in (5.29) E_0 durch ν_m, so kommt

$$t_{1/2}[s] = 6.1 \times 10^{11} (B_\perp[G])^{-3/2} (\nu_m[\text{Hz}])^{-1/2} . \qquad (5.31)$$

Etwa für $\nu_m = 10^{20}$ Hz ist $t_{1/2}$ nur etwa <u>10 Wochen</u>! Da der Krebsnebel aber 740 Jahre alt ist, müssen offenbar ständig hochrelativistische Elektronen in den Nebel nachgeliefert werden. Der Ursprung dieser Elektronen war lange ein Rätsel. Heute weiss man, dass sie vom zentralen Pulsar stammen.

IV. 6 Spektrale Verteilung der Synchrotronstrahlung

Wir wollen nun das Spektrum der Synchrotronstrahlung berechnen. Dieses ist vorallem in der Astrophysik von grosser Bedeutung, wie schon aus der obigen Diskussion des Krebsnebels hervorgehen dürfte.

Als Ausgangspunkt könnten wir (4.31) wählen. (Dieser Weg wird z.B. in Jackson, §14.5, beschritten.) Wir gehen anders vor und leiten zunächst einen allgemeinen Ausdruck für die spektrale Verteilung ab, der für beliebige Ströme gilt. Dazu gehen wir auf die Gleichungen (2.16) und (2.22) zurück:

$$\underline{E} = \frac{1}{r}\frac{1}{c^2}\, \underline{n}\wedge(\underline{n}\wedge\dot{\underline{J}})\,, \qquad \underline{E} = \underline{B}\wedge\underline{n}\,, \tag{6.1}$$

$$\underline{J}(\underline{x},t) = \int d\omega\, \tilde{\underline{J}}(\underline{k},\omega)\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{x}-\omega t)} \qquad \left(\underline{k} = \frac{\omega}{c}\underline{n},\ \underline{n} = \underline{x}/r\right). \tag{6.2}$$

Dabei ist

$$\tilde{\underline{J}}(\underline{k},\omega) = \frac{1}{2\pi}\int dt\, e^{i\omega t}\int d^3x\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{x}}\, \underline{J}(\underline{x},t)\,. \tag{6.3}$$

Die Energieabstrahlung pro Zeiteinheit in den Raumwinkel $d\Omega$ ist $dI(t) = r^2\frac{c}{4\pi}|\underline{E}(t)|^2 d\Omega$. (Da wir uns für das Frequenzspektrum interessieren, das der Beobachter registriert, rechnen wir jetzt pro Laborzeiteinheit, und nicht wie früher in Einheiten von t_{ret}.) Die gesamte abgestrahlte Energie pro Raumwinkel ist

$$\frac{dW}{d\Omega} = r^2\frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\underline{E}(t)|^2 dt\,. \tag{6.4}$$

Zerlegen wir $\underline{E}(t)$ in ein Fourierintegral,

$$\underline{E}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \underline{\tilde{E}}(\omega) e^{-i\omega t} dt \qquad (6.5)$$

so gilt nach der Parsevalgleichung

$$\frac{dW}{d\Omega} = r^2 \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{\tilde{E}}(\omega)|^2 d\omega . \qquad (6.6)$$

Die spektrale Verteilung der differentiellen Abstrahlung ist somit

$$\frac{d^2W}{d\Omega\, d\omega} = r^2 \frac{c}{4\pi} \cdot 2\, |\underline{\tilde{E}}(\omega)|^2 , \qquad (6.7)$$

wobei wir $\underline{E}(\omega)^* = \underline{E}(-\omega)$ benutzt haben. Nun ist aber nach (6.1) und (6.2)

$$|\underline{\tilde{E}}(\omega)|^2 = \frac{1}{r^2}\, 2\pi\, \frac{\omega^2}{c^4}\, |\underline{n}\wedge(\underline{n}\wedge \underline{\tilde{J}}(\underline{k},\omega))|^2 . \qquad (6.8)$$

Damit haben wir die gesuchte allgemeine Formel

$$\frac{d^2W}{d\Omega\, d\omega} = \frac{\omega^2}{c^3} |\underline{n}\wedge(\underline{n}\wedge \underline{\tilde{J}}(\underline{k},\omega))|^2 . \qquad (6.9)$$

Jetzt spezialisieren wir auf die Stromdichte (4.3) einer bewegten Punktladung

$$\underline{J}(\underline{x},t) = e\,\underline{v}(t)\,\delta^3(\underline{x}-\underline{z}(t)) \quad , \quad \underline{v}(t) = \dot{\underline{z}}(t) .$$

Dafür ist

$$\underline{\tilde{J}}(\underline{k},\omega) = \frac{1}{2\pi}\int dt\, e^{i\omega t} \int d^3x\; e\,\underline{v}(t)\,\delta^3(\underline{x}-\underline{z}(t))\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{x}}$$

$$= \frac{e}{2\pi} c \int \underline{\beta}(t)\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{z}(t)} e^{i\omega t} dt .$$

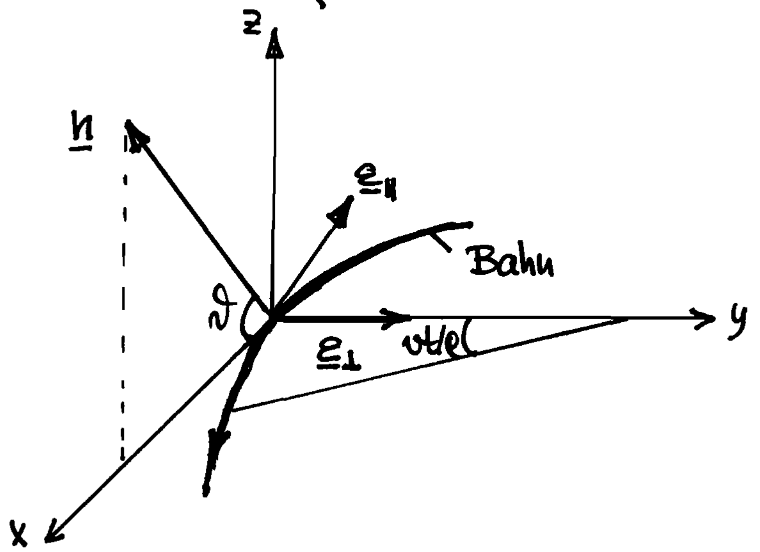
In (6.9) eingesetzt gibt

$$\boxed{\frac{d^2W}{d\Omega\, d\omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int \underbrace{\underline{n}\wedge(\underline{n}\wedge\underline{\beta}(t))}_{\text{Richtung von } \underline{E}(t)} e^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}(t)} e^{i\omega t} dt \right|^2.} \qquad (6.10)$$

Auswertung für hohe Energien

Wir haben bereits gesehen, dass die Strahlung für $\gamma \gg 1$ stark in der Vorwärtsrichtung konzentriert ist. Deshalb sieht ein Beobachter nur einen kurzen Puls. Da die Winkelausdehnung $\langle \vartheta^2 \rangle^{1/2} \simeq 1/\gamma$ ist (s. S. IV.41), wird das Teilchen während der Pulsdauer eine Distanz ρ/γ (ρ: Krümmungsradius) durchqueren. Die Zeitdauer des Pulses ist somit $\Delta t \sim \rho/\gamma v \simeq \rho/\gamma c$. Für diese kurze Zeit approximieren wir die Bahn durch eine momentane Kreisbewegung in der (x,y)-Ebene (s. Fig.)

$$\underline{r}(t) = \left(\rho \sin\frac{v}{\rho}t,\ \rho - \rho\cos\frac{v}{\rho}t,\ 0\right).$$



Die Beobachtungsrichtung wählen wir in der (x,z)-Ebene:

$$\underline{n} = (\cos\vartheta, 0, \sin\vartheta), \quad \vartheta = \sphericalangle(\underline{\beta}, \underline{n}).$$

Zur Zeit $t=0$ ist die Geschwindigkeit in der x-Richtung. Als Polarisationsvektoren senkrecht zu $\underline{n}$ wählen wir zu diesem Zeitpunkt $\underline{\varepsilon}_\perp$ in der y-Richtung und $\underline{\varepsilon}_\parallel = \underline{n}\wedge\underline{\varepsilon}_\perp$. Mit diesen Bezeichnungen haben wir

$$\underline{\beta} = \left(\beta\cos\frac{v}{\rho}t,\ \beta\sin\frac{v}{\rho}t,\ 0\right),$$

$$\underline{n}\wedge(\underline{n}\wedge\underline{\beta}) = -\beta\,\underline{\varepsilon}_\perp\sin\left(\frac{v}{\rho}t\right) + \beta\,\underline{\varepsilon}_\parallel\cos\left(\frac{v}{\rho}t\right)\sin\vartheta. \qquad (6.11)$$

Wir benötigen diese Funktionen nur für sehr kurze Zeiten $\sim \rho/\gamma c$ und kleine Winkel $\vartheta \sim 1/\gamma$:

$$\underline{n}\wedge(\underline{n}\wedge\underline{\beta}) \simeq -\frac{c}{\rho}t\,\underline{\varepsilon}_\perp + \vartheta\,\underline{\varepsilon}_\parallel. \qquad (6.12)$$

In (6.10) brauchen wir noch

$$\omega t - \underline{k}\cdot\underline{z}(t) = \omega\left[t - \frac{\rho}{c}\sin\left(\frac{vt}{\rho}\right)\cos\vartheta\right]$$

$$\simeq \omega\left[t - \beta t + \frac{\rho}{c}\frac{1}{3!}\left(\frac{vt}{\rho}\right)^3 + \frac{\rho}{c}\frac{v}{\rho}t\frac{\vartheta^2}{2}\right].$$

Da $\beta = \sqrt{1-1/\gamma^2}$, $1-\beta \simeq 1/2\gamma^2$ erhalten wir, wenn wir überall, wo dies erlaubt ist, $\beta = 1$ setzen

$$\omega t - \underline{k}\cdot\underline{z}(t) \simeq \frac{\omega}{2}\left[\left(\frac{1}{\gamma^2}+\vartheta^2\right)t + \frac{c^2}{3\rho^2}t^3\right]. \qquad (6.13)$$

Setzen wir jetzt (6.12) und (6.13) in (6.10) ein, so kommt

$$\boxed{\frac{d^2W}{d\Omega\, d\omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c}\left|-\underline{\varepsilon}_\perp A_\perp(\omega) + \underline{\varepsilon}_\parallel A_\parallel(\omega)\right|^2,} \qquad (6.14)$$

wobei $A_\perp(\omega)$ und $A_\parallel(\omega)$ durch die folgenden Integrale gegeben sind:

$$A_\perp(\omega) \simeq \frac{c}{\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} t \exp\left\{ \frac{i\omega}{2}\left[\left(\frac{1}{\gamma^2}+\vartheta^2\right)t + \frac{c^2}{3\rho^2}t^3\right]\right\} dt \,,$$

$$A_\parallel(\omega) \simeq \vartheta \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{\ldots\} \, dt \,. \qquad (6.15)$$

Nun setzen wir

$$\xi = \frac{\omega\rho}{3c}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\vartheta^2\right)^{3/2} \qquad (6.16)$$

und benutzen die neue Integrationsvariable

$$x = \frac{ct}{\rho}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\gamma^2}+\vartheta^2}} \,.$$

Damit schreiben sich die Amplituden (6.15) für die beiden orthogonalen Polarisationen

$$A_\perp(\omega) = \frac{\rho}{c}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\vartheta^2\right) \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left[i\frac{3\xi}{2}\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)\right] dx \,,$$

$$A_\parallel(\omega) = \frac{\rho}{c}\vartheta\left(\frac{1}{\gamma^2}+\vartheta^2\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[i\frac{3\xi}{2}\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)\right] dx \,. \qquad (6.17)$$

Die hier vorkommenden Integrale sind Integraldarstellungen der Airy-Funktionen (siehe Abramowitz, Formel 10.4.32). Benutzt man auch die Beziehungen 10.4.14 und 10.4.31 in Abramowitz zu den modifizierten Besselfunktionen $K_{1/3}$, $K_{2/3}$, so findet man

$$\int_0^\infty x \sin\left[\frac{3}{2}\xi\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)\right] dx = \frac{1}{\sqrt{3}} K_{2/3}(\xi) \,,$$

$$\int_0^\infty \cos\left[\frac{3}{2}\xi\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)\right] dx = \frac{1}{\sqrt{3}} K_{1/3}(\xi) \,. \qquad (6.18)$$

Damit lautet die spektrale Verteilung

$$\boxed{\frac{d^2W}{d\Omega\, d\omega} = \frac{e^2}{3\pi^2 c}\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)^2\left(\frac{1}{\gamma^2}+\vartheta^2\right)^2\Big[\underbrace{K_{2/3}^2(\xi)}_{\varepsilon_\perp} + \frac{\vartheta^2}{\frac{1}{\gamma^2}+\vartheta^2}\underbrace{K_{1/3}^2(\xi)}_{\varepsilon_\parallel}\Big].} \qquad (6.19)$$

Dieses Ergebnis wollen wir nun im einzelnen diskutieren. Dazu notieren wir zuerst die folgenden Näherungsformeln für die modifizierten ~~Bessel~~funktionen (s. Abramowitz):

$$\underline{x \ll 1}: \; K_\nu(x) \sim \frac{1}{2}\Gamma(\nu)\left(\frac{1}{2}x\right)^{-\nu}, \quad \nu \neq 0;$$

$$\underline{x \gg 1}: \; K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}\left[1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right] \qquad (6.20)$$

$(\Gamma(1/2) = \pi^{1/2},\ \Gamma(2/3) = 1.3541\ldots)$.

Daraus ergibt sich, dass (6.15) für grosse ξ wie $e^{-2\xi}$ abfällt. Der Ausdruck (6.16) für ξ zeigt, dass ξ für alle Winkel ϑ gross wird, wenn die Frequenz ω gross ist. Wir definieren dementsprechend eine kritische Frequenz*) durch $2\xi = 1$ bei $\vartheta = 0$, d.h.,

$$\omega_c = \frac{3}{2}\gamma^3\left(\frac{c}{\rho}\right). \qquad (6.21)$$

Beachte, dass ω_c für $\gamma \gg 1$ viel grösser ist als die Kreisfrequenz c/ρ der Bewegung.

In der Vorwärtsrichtung ($\vartheta = 0$) finden wir sofort die Grenzfälle:

---

*) Diese ist um einen <u>Faktor 2 kleiner</u> als bei Jackson (p. 675). Wir halten uns hier an die meist gebrauchte Konvention.

$$\left.\frac{d^2W}{d\Omega\, d\omega}\right|_{\vartheta=0} \simeq \begin{cases} \frac{e^2}{c}\left[\frac{\Gamma(2/3)}{\pi}\right]^2\left(\frac{3}{4}\right)^{1/3}\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)^{2/3} & \text{für } \omega \ll \omega_c, \\ \frac{3}{2\pi}\frac{e^2}{c}\gamma^2\frac{\omega}{\omega_c}e^{-\omega/\omega_c} & \text{für } \omega \gg \omega_c. \end{cases} \qquad (6.22)$$

Für $\vartheta = 0$ wächst also das Spektrum zunächst mit $\omega^{2/3}$ (weit unter ω_c) erreicht dann ein Maximum in der Nähe von ω_c und fällt danach exponentiell ab.

Die Winkelausdehnung von (6.19) für festes ω können wir grob wie folgt abschätzen. Wir suchen – bei gegebenem ω – den kritischen Winkel ϑ_c bei dem $\xi(\vartheta_c) = \xi(0) + 1$ ist. Bei niederen Frequenzen ($\omega \ll \omega_c$) ist $\xi(0)$ sehr klein, so dass $\xi(\vartheta_c) \simeq 1$ ist. Deshalb gibt (6.16)

$$\vartheta_c \simeq \left(\frac{3c}{\omega\rho}\right)^{1/3} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{2\omega_c}{\omega}\right)^{1/3} \qquad (\omega \ll \omega_c). \qquad (6.23)$$

Beachte, dass ϑ_c viel grösser ist als $\langle\vartheta^2\rangle^{1/2} \simeq 1/\gamma$. Im entgegengesetzten Fall $\omega \gg \omega_c$ ist $\xi(0)$ schon gross verglichen mit 1 und es ist deshalb

$$\frac{d^2W}{d\Omega\, d\omega} \simeq \left.\frac{d^2W}{d\Omega\, d\omega}\right|_{\vartheta=0} \cdot e^{-\frac{3}{2}\gamma^2\vartheta^2\omega/\omega_c} \qquad (\omega \gg \omega_c). \qquad (6.24)$$

Beim Winkel

$$\vartheta_c \simeq \frac{1}{\gamma}\left(\frac{2\omega_c}{3\omega}\right)^{1/2} \qquad (\omega \gg \omega_c)$$

ist deshalb die Intensität um $1/e$ abgefallen. Bei hohen Frequenzen ist also die Strahlung sehr stark in Vorwärtsrichtung konzentriert.

Nun wollen wir die Frequenzverteilung

$$\frac{dW}{d\omega} = \int \frac{d^2W}{d\omega\, d\Omega}\, d\Omega = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2W}{d\omega\, d\Omega} \cos\vartheta\, d\vartheta$$

diskutieren. Zunächst betrachten wir wieder die Grenzfälle. Integration von (6.24) gibt

$$\frac{dW}{d\omega} \simeq \sqrt{3\pi}\,\frac{e^2}{c}\,\gamma\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)^{1/2} e^{-\omega/\omega_c} \qquad (\omega \gg \omega_c). \qquad (6.25)$$

Für $\omega \ll \omega_c$ ist grob

$$\frac{dW}{d\omega} \sim 2\pi\vartheta_c \left.\frac{d^2W}{d\Omega\, d\omega}\right|_{\vartheta=0} \sim \frac{e^2}{c}\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)^{1/3}. \qquad (6.26)$$

Das Spektrum steigt also wieder langsam ($\sim \omega^{1/3}$) an und fällt oberhalb ω_c exponentiell ab.

Benutzt man verschiedene Eigenschaften der Airy-Funktionen, so lässt sich die Winkelintegration von (6.19) in folgende Form bringen (beachte dabei, dass $d\Omega = 2\pi\cos\vartheta\, d\vartheta \simeq 2\pi\, d\vartheta$):

$$\boxed{\frac{dW}{d\omega} = \frac{dW_+}{d\omega} + \frac{dW_-}{d\omega} = \sqrt{3}\,\frac{e^2}{c}\,\gamma\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x)\,dx}\,, \qquad (6.27)$$

wobei

$$\frac{dW_+}{d\omega} = \sqrt{3}\,\frac{e^2}{c}\,\gamma\,\frac{1}{2}\left[F(x)+G(x)\right], \qquad (6.28)$$

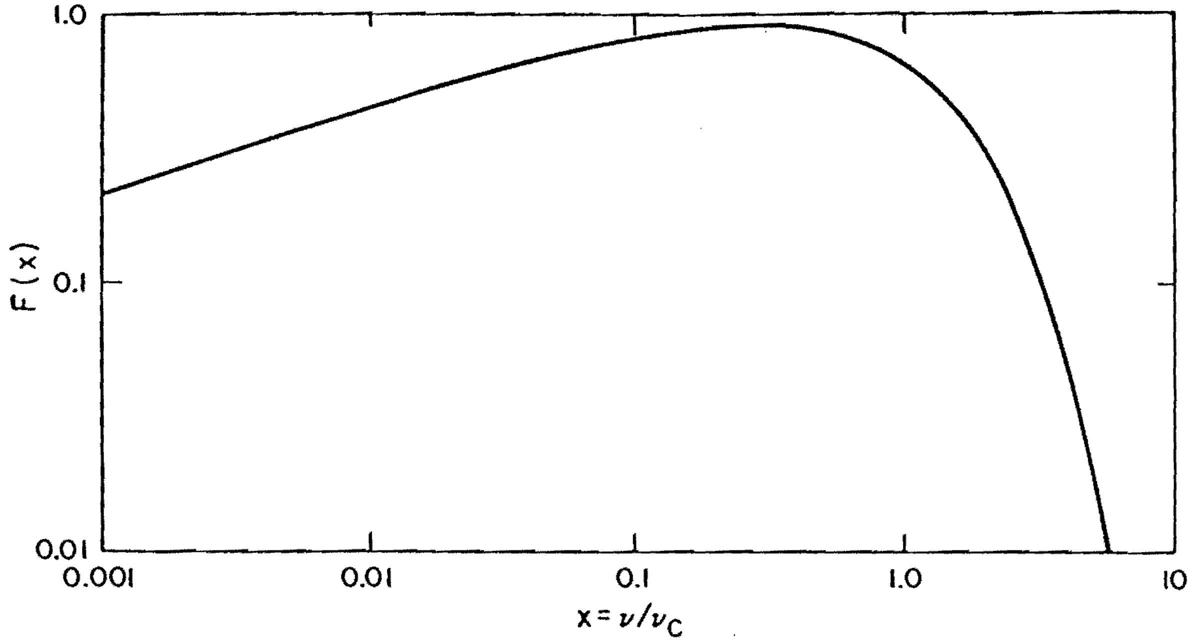
$$\frac{dW_-}{d\omega} = \sqrt{3}\,\frac{e^2}{c}\,\gamma\,\frac{1}{2}\left[F(x)-G(x)\right], \quad x := \frac{\omega}{\omega_c}, \qquad (6.29)$$

mit

$$F(x) = x\int_x^{\infty} K_{5/3}(y)\,dy, \qquad (6.30)$$

$$G(x) = x\,K_{2/3}(x). \qquad (6.31)$$

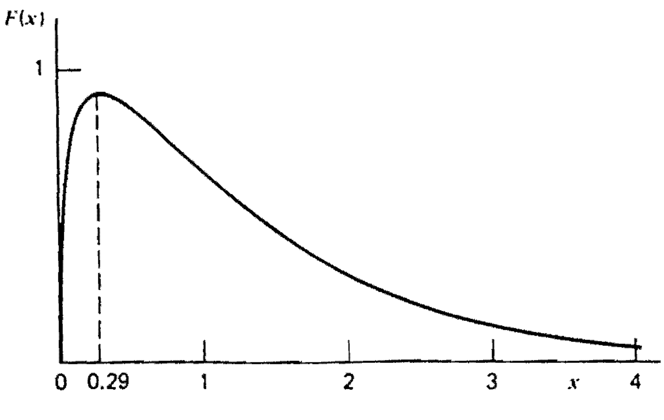
Die Funktionen F und G sind tabelliert.*) Der Graph von F ist in der folgenden Figur gezeigt. Diese gibt nach



(6.27) die Form des Synchrotronspektrums (für beide Polarisationen zusammen). $F(\nu/\nu_c)$ wird maximal bei

$$\underline{\nu_{max} \simeq 0.29\, \nu_c} \qquad (6.32)$$

(s. Fig).



*) Siehe, z.B., A.G. Pacholczyk, Radio Astrophysics, Freeman and Company, 1970.

Spektrale Intensitätsverteilung für eine Spiralbewegung

Das geladene Teilchen (Elektron) bewege sich nun in einem homogenen $\underline{B}$-Feld auf einer Spirale. Wählen wir die Richtung von $\underline{B}$ als z-Achse, so ist

$$\underline{z}(t) = (-\rho_0 \cos\omega_0 t, \rho_0 \sin\omega_0 t, c\beta_\parallel t), \tag{6.33}$$

$$\underline{\beta}(t) = (\beta_\perp \sin\omega_0 t, \beta_\perp \cos\omega_0 t, \beta_\parallel), \tag{6.34}$$

wobei

$$\beta_\perp = \frac{\rho_0 \omega_0}{c}. \tag{6.35}$$

Zunächst benötigen wir den Krümmungsradius ρ für diese Bewegung. Allgemein gilt (konsultiere ein Buch über Kurven und Flächen)

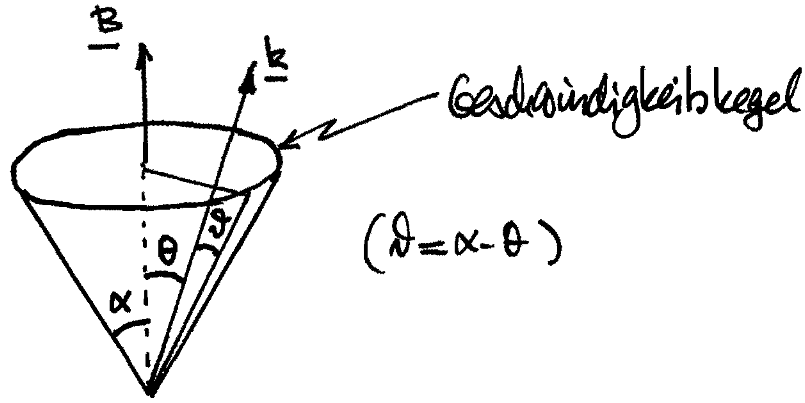
$$\frac{1}{\rho} = \frac{[(\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y})^2+(\dot{y}\ddot{z}-\ddot{y}\dot{z})^2+(\dot{z}\ddot{x}-\ddot{z}\dot{x})^2]^{1/2}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{3/2}}$$

Setzt man hier (6.34) ein, so ergibt sich

$$\rho = \frac{c\beta^2}{\omega_0\beta_\perp} = \frac{c\beta}{\omega_0 \cos\alpha}, \quad \alpha = \sphericalangle(\underline{\beta}, \underline{B}). \tag{6.36}$$

Der Beobachter ~~empfängt~~ periodische Pulse. Die Zeit zwischen zwei Pulsen ist aber nicht $2\pi/\omega_0$, da er die Umlaufsfrequenz Doppler-verschoben sieht. Äquivalent dazu kann man auch sagen, dass nach (5.1) die Beziehung zwischen t und t_{ret} gegeben ist durch (s. Fig.):

$$\frac{dt}{dt_{ret}} = 1 - \underline{\beta}_\parallel \cdot \underline{n} = 1 - \beta_\parallel \cos\theta = 1 - \beta\cos\alpha\cos\theta. \tag{6.37}$$



$(\vartheta = \alpha - \theta)$

Deshalb ist die Periode zwischen zwei empfangenen Pulsen

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 - \beta\cos\alpha\cos\theta\right).$$

Da $\theta \simeq \alpha$, genügt die Näherung

$$T \simeq \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 - \beta\cos^2\alpha\right) \simeq \frac{2\pi}{\omega_0}\sin^2\alpha . \tag{6.38}$$

Für $\omega \gg \omega_0$ ist das beobachtete Spektrum praktisch kontinuierlich. Wir erhalten die spektrale Intensitätsverteilung für den Beobachter weit weg durch Multiplikation von (6.19) mit der Repetitionsrate $1/T \simeq \omega_0/(2\pi\sin^2\alpha)$:

$$\frac{d\tilde{P}}{d\Omega\, d\omega} = \frac{\omega_0}{2\pi\sin^2\alpha}\,\frac{d^2W}{d\Omega\, d\omega}. \tag{6.39}$$

Ersetzen wir in (6.19) ρ durch die kritische Frequenz (6.21), so erhalten wir

$$\frac{d\tilde{P}}{d\Omega\, d\omega} = \frac{3e^2}{8\pi^3 c}\,\frac{\omega_0}{\sin^2\alpha}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \gamma^2\left(1+\gamma^2\vartheta^2\right)^2\Big[K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\vartheta^2}{(1/\gamma^2)+\vartheta^2}K_{1/3}^2(\xi)\Big]. \tag{6.40}$$

Das Argument ξ lässt sich ebenfalls durch die kritische Frequenz ausdrücken:

$$\boxed{\xi = \frac{1}{2}\,\frac{\omega}{\omega_c}\left(1+\gamma^2\vartheta^2\right)^{3/2}.} \qquad (6.41)$$

Substituieren wir andererseits für ρ den Wert (6.36) (mit $\beta \to 1$) in (6.21), so lässt sich die kritische Frequenz folgendermassen durch ω_0 ausdrücken

$$\boxed{\omega_c = \frac{3}{2}\gamma^3\omega_0 \sin\alpha\,.} \qquad (6.42)$$

Für $\gamma \gg 1$ ist $\omega_c \gg \omega_0$!

Die Kreisfrequenz ω_0 ist die Zyklotronfrequenz. Aus (5.25) ergibt sich dafür sofort

$$\omega_0 = \frac{eB}{\gamma m c}. \qquad (6.43)$$

Bei der Winkelintegration von (6.40) muss man beachten, dass jetzt $d\Omega = 2\pi \sin\theta\, d\theta \simeq 2\pi \sin\alpha\, d\vartheta$ ist, während bei der Winkelintegration von (6.19) $d\Omega \simeq 2\pi\, d\vartheta$ war. Deshalb erhalten wir nach (6.28) und (6.29)

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{P}_\perp}{d\omega} &= \frac{1}{\sin^2\alpha}\,\frac{\sqrt{3}\,e^2}{2\pi c}\,\gamma\omega_0\,\frac{1}{2}\left[F(x)+G(x)\right]\sin\alpha\,, \\ \frac{d\tilde{P}_\parallel}{d\omega} &= \quad '' \qquad\quad '' \qquad\quad \cdot\left[\quad - \quad\right]\sin\alpha\,. \end{aligned} \qquad (6.44)$$

Die Spektralintegrale dieser Ausdrücke dürfen wir nicht mit P in (5.10) gleichsetzen, da dort die Strahlungsleistung pro Einheit von t_{ret} gerechnet wird! (Dies wird in der

Literatur oft übersehen.) Bezeichnen wir die entsprechende Grössen zu (6.44) mit $dP_\perp/d\omega$, $dP_\parallel/d\omega$, so ist wegen (6.37), d.h., $dt/dt_{ret} \simeq \sin^2\alpha$,

$$\frac{dP_\perp}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}\, e^3 B \sin\alpha}{2\pi m c^2}\, \frac{1}{2}\left[F(x) + G(x)\right],$$

$$\frac{dP_\parallel}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}\, e^3 B \sin\alpha}{2\pi m c^2}\, \frac{1}{2}\left[F(x) - G(x)\right]. \tag{6.45}$$

Insbesondere ist die gesamte spektrale Strahlungsleistung

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}\, e^3 B \sin\alpha}{2\pi m c^2}\, F(\omega/\omega_c). \tag{6.46}$$

Das Spektralintegral davon müsste mit (5.10) übereinstimmen. Dies wollen wir zur Kontrolle verifizieren. Das Integral von F ist bekannt:

$$\int_0^\infty F(x)\,dx = \frac{8\pi}{9\sqrt{3}}.$$

Damit haben wir

$$\int_0^\infty \frac{dP}{d\omega}\, d\omega = \frac{\sqrt{3}\, e^2}{2\pi c}\, \gamma\omega_0 \underbrace{\omega_c}_{\frac{3}{2}\gamma^3\omega_0 \sin\alpha}\, \frac{8\pi}{9\sqrt{3}} \sin\alpha.$$

Aus (5.10) erhält man andererseits (da $\beta \perp \dot{\beta}$):

$$P = \frac{2e^2}{3c}\gamma^6 \underbrace{\dot{\beta}^2}_{(\beta_\perp\omega_0)^2 \simeq \omega_0^2 \sin^2\alpha}(1-\beta^2).$$

Beide Ausdrücke geben in der Tat

$$\boxed{P \simeq \frac{2e^2}{3c}\gamma^4 \omega_0^2 \sin^2\alpha .} \tag{6.47}$$

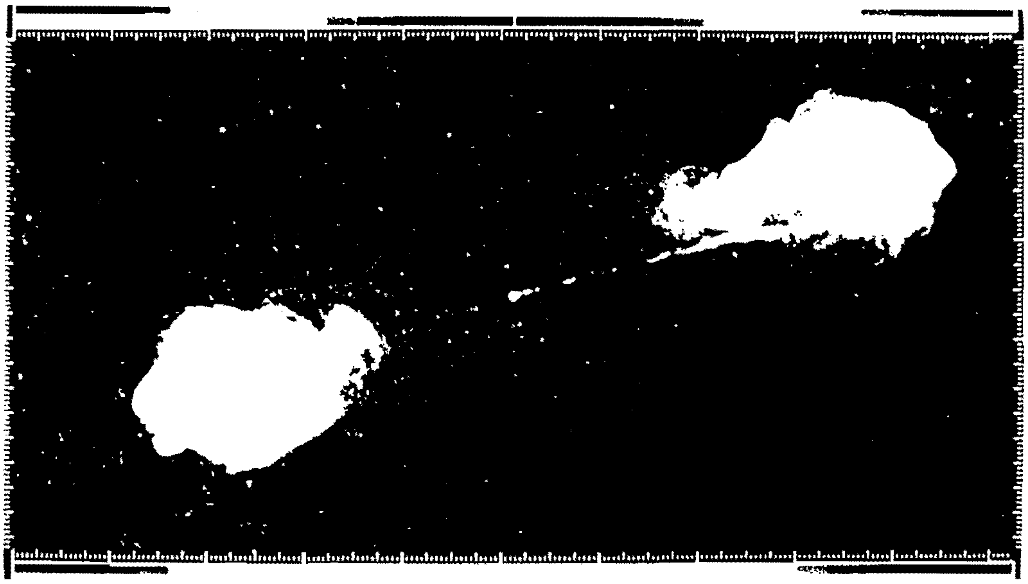
(vgl. dies mit (5.20)).

IV.7 Synchrotronstrahlung von Radiogalaxien

Im Jahre 1954 identifizierten Baade und Minkowski die Radioquelle Cygnus A mit dem hellsten Mitglied eines schwachen Galaxienhaufens und bestimmten dessen Rotverschiebung zu $z = 0.057$, entsprechend einer Distanz von etwa 170 Mpc. Daraus schliesst man auf eine absolute Radioleuchtkraft von ungefähr 10^{45} erg/s. Dies ist $\sim 10^7$ mal mehr als die Radiostrahlung von gewöhnlichen Galaxien und ~ 10 mal mehr als die optische Strahlung einer typischen Galaxie. Wir werden die physikalische Bedeutung dieses ausserordentlichen Resultates weiter unten diskutieren.

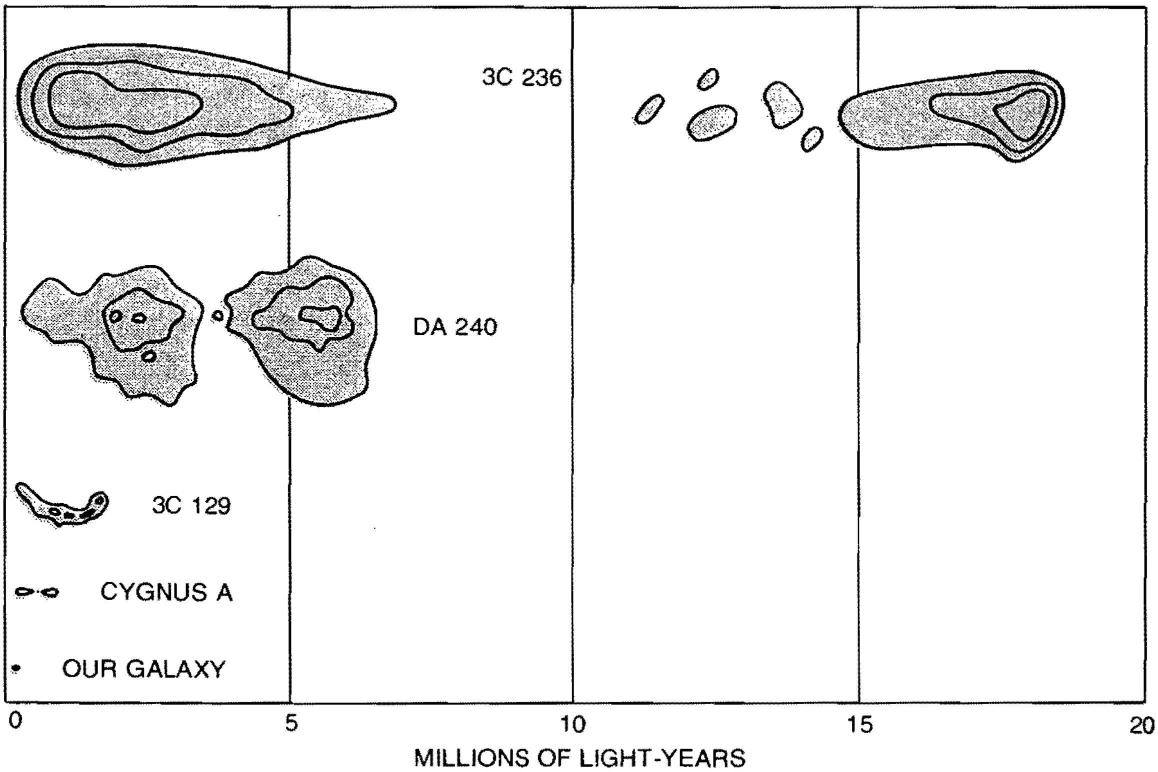
Mit Hilfe von potenten Interferometeranlagen, mit denen sich strukturelle Einzelheiten von Bogensekundengrösse unterscheiden lassen, sind die Radiogalaxien seither eingehend untersucht worden. Die folgende Abbildung geht auf Messungen des VLA ("Very Large Array" in New Mexico) zurück. In dieser sind die beiden Radioblasen von Cygnus A zu sehen. Halbwegs zwischen den beiden befindet sich eine elliptische Galaxie, welche im Bild als kleiner heller Lichtfleck erscheint und offenbar mit den Radioblasen über eine dünne "Nabelschnur" verbunden ist. Dieses und ähnliche

Bilder deuten stark darauf hin, dass von der zentralen optischen Galaxie in zwei entgegengesetzten Richtungen gewaltige Ströme von Plasma und relativistischen Teilchen ausgestossen werden, die im umgebenden intergalaktischen Medium abgebremst werden und riesige Plasmakeulen an ihren Enden ausbilden. Die Radioemission wird durch Synchrotronstrahlung extrem relativistischer Elektronen erzeugt, die vom Kern der Galaxie aus in die magnetisierten Keulen injiziert werden. (Das Synchrotronalter (S. 29) ist wieder kürzer als das Alter der Radioquellen, welches man aus deren riesigen Ausdehnungen abschätzt.)



Die Radioquelle Cygnus A bei 6 cm Wellenlänge, dargestellt in Form einer „Radiophotographie", nach VLA-Messungen. (R. A. PERLEY et al., Astrophys. Jour. 285 (1984) L 35)

Einen Eindruck von den gewaltigen Ausdehnungen mancher Radiogalaxien gibt das nächste Bild. Deshalb müssen auch die beteiligten Energien, etwa die magnetische Feldenergie, gigantisch sein. Diese Frage wollen wir nun näher untersuchen.



Energieinhalt von Radiogalaxien

Wir schätzen dazu die minimale Energie ab, welche in den Radiokeulen in Form von relativistischen Teilchen und Magnetfeldern gespeichert ist.

Für die Elektronenverteilung nehmen wir ein beobachtetes Potenzgesetz an:

$$N(E) = N_0 E^{-\gamma} \quad \text{für} \quad E_1 \le E \le E_2 . \qquad (7.1)$$

Die gesamte kinetische Energie der Elektronen in $[E_1, E_2]$ ist dann

$$E_e = \int E\, N(E)\, dE = N_0 \int_{E_1}^{E_2} E^{-\gamma+1}\, dE . \qquad (7.2)$$

Da die abgestrahlte Strahlungsleistung für ein einzelnes Elektron nach (5.26) durch

$$P = c_2 B_\perp^2 E^2, \qquad c_2 := \frac{2e^4}{3m^4c^7} = 2.37\times 10^{-3}\,(\mathrm{cgs}). \qquad (7.3)$$

gegeben ist, beträgt die gesamte Leuchtkraft der Synchrotronstrahlung

$$L = \int_{E_1}^{E_2} c_2 B_\perp^2 E^2 N(E)\, dE = N_0 c_2 B_\perp^2 \int_{E_1}^{E_2} E^{-\gamma+2}\, dE. \qquad (7.4)$$

Mit dieser Gleichung eliminieren wir N_0 in (7.2):

$$E_e = c_2^{-1} L B_\perp^{-2} \frac{\gamma-3}{\gamma-2} \frac{E_1^{-\gamma+2} - E_2^{-\gamma+2}}{E_1^{-\gamma+3} - E_2^{-\gamma+3}}. \qquad (7.5)$$

Darin ersetzen wir noch die Grenzenergien E_1, E_2 durch die zugehörigen kritischen Frequenzen: Nach (6.42) und (6.43) ist

$$\omega_c = \frac{3e}{2mc} B_\perp \gamma^2 \Longrightarrow \nu_c = \frac{3e}{4\pi m^2 c^5} B_\perp E^2,$$

oder

$$\nu_c = c_1 B_\perp E^2, \qquad c_1 := \frac{3e}{4\pi m^3 c^5} = 6.27\times 10^{18}\,(\mathrm{cgs}); \qquad (7.6)$$

somit – wenn $\alpha = -(1-\gamma)/2$ der sog. <u>Spektralindex</u> ist –

$$E_e = c_2^{-1} c_1^{1/2} \tilde{c}(\alpha, \nu_1, \nu_2) B_\perp^{-3/2} L \equiv c_{12}(\alpha, \nu_1, \nu_2) B_\perp^{-3/2} L. \qquad (7.7)$$

Dabei ist

$$\tilde{c}(\alpha, \nu_1, \nu_2) = \frac{2\alpha-2}{2\alpha-1} \frac{\nu_1^{(1-2\alpha)/2} - \nu_2^{(1-2\alpha)/2}}{\nu_1^{1-\alpha} - \nu_2^{1-\alpha}}. \qquad (7.8)$$

Den Spektralindex α kann man aus den Beobachtungen entnehmen, wie ich nun zeigen will. Schreiben wir (6.46) folgendermassen

$$\frac{dP}{d\nu} = c_3 B \sin\alpha \; F(\nu/\nu_c) \quad , \quad c_3 = \sqrt{3}\,\frac{e^3}{mc^2} \, , \qquad (7.9)$$

so ist die gesamte spektrale Leuchtkraft

$$L(\nu) = c_3 B \sin\alpha \int_0^\infty N(E) F(x)\, dE = c_3 N_0 B \sin\alpha \int_0^\infty E^{-\gamma} F(x) dE$$

$$\overset{(7.6)}{=} \frac{1}{2} c_3 N_0 B \sin\alpha \left(\frac{\nu}{c_1 B \sin\alpha}\right)^{-(\gamma-1)/2} \int_0^\infty x^{(\gamma-3)/2} F(x) dx .$$

Dies zeigt, dass $L(\nu)$ einem Potenzgesetz $\propto \nu^{-\alpha}$ folgt. Das verbleibende Integral ergibt sich aus (s. Astrophys. J. 130) 241 (1959))

$$\int_0^\infty x^\mu F(x) dx = \frac{2^{\mu+1}}{\mu+2} \Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{7}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{2}{3}\right). \qquad (7.10)$$

Bemerken wir noch $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, so ergibt sich

$$\boxed{L(\nu) = c_5(\gamma) N_0 (B\sin\alpha)^{(\gamma+1)/2} \left(\frac{\nu}{2c_1}\right)^{-(\gamma-1)/2}} , \qquad (7.11)$$

wobei

$$c_5(\gamma) = \frac{1}{4} c_3 \Gamma\left(\frac{3\gamma-1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3\gamma+7}{12}\right) \frac{\gamma+7/3}{\gamma+1} . \qquad (7.12)$$

– – – – – – –

Übung: Benutze auch $\int_0^\infty x^\mu G(x) dx = 2^\mu \Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{2}{3}\right)$ und zeige, dass Polarisationsgrad der Strahlung gleich $(\gamma+1)/(\gamma+\frac{7}{3})$ ist.

– – – – – – – – –

Damit kann $\tilde{c}(\alpha, \nu_1, \nu_2)$ in (7.8) mit spektralen Beobachtungen bestimmt werden.

Die gesamte gespeicherte Energie in den Keulen in Form von Teilchenenergien (Elektronen und vor allem Protonen) und Magnetfeldern ist

$$E_{total} = E_e + E_p + E_B \,, \tag{7.13}$$

mit E_e in (7.7) und

$$E_B = \frac{B^2}{8\pi}\,\Phi\,\frac{4\pi R^3}{3}\,,$$ Φ: Bruchteil des Volumens, welches durch Magnetfelder ausgefüllt ist.

Setzen wir für die Energie der schweren Teilchen $E_p = kE_e$, mit $1 \lesssim k \lesssim 10^3$ (?), so haben wir also

$$E_{tot} = (1+k)\,c_{12}\,B^{-3/2}L + \frac{B^2\Phi R^3}{6}\,. \tag{7.14}$$

Die magnetische Feldstärke B ist nicht bekannt. Deshalb nehmen wir in (7.14) den <u>Minimalwert</u>, der für

$$E_B = \frac{3}{4}(1+k)\,E_e \tag{7.15}$$

(ungefähre Equipartition) angenommen wird, wobei das zugehörige Magnetfeld folgenden Wert hat

$$B^{(min)} = (4.5)^{2/7}(1+k)^{2/7}\,c_{12}^{2/7}\,\Phi^{-2/7}R^{-6/7}L^{2/7}\,. \tag{7.16}$$

Nach (7.15) ist

$$E_{tot}^{(min)} = \frac{7}{4}(1+k)E_e = \frac{7}{4}(1+k)\,c_{12}\,B^{-3/2}L\,. \tag{7.17}$$

Benutzen wir darin noch (7.16), so kommt

$$\boxed{E_{tot}^{(min)} = c_{13}\,(1+k)^{4/7}\,\Phi^{3/7}\,R^{9/7}\,L^{4/7}}\,, \qquad (7.18)$$

mit

$$\log c_{13} = -\,0.036 + \tfrac{4}{7}\log c_{12}\,.$$

<u>Beispiel: Fornax A</u>. Hier findet man ein Potenzgesetz zwischen $\nu_1 \sim 10^7$ Hz, $\nu_2 \sim 10^{10}$ Hz mit $\alpha = +0.75$. In diesem Intervall ist $L = 2.8 \times 10^{41}$ erg/s. Der Durchmesser beträgt 89 kpc, das Volumen ist also $V = 2.2 \times 10^{70}$ cm^3 (2 Quellen). Für $k = 100$ gibt dafür (7.18)

$$\underline{E_{tot}^{(min)} \simeq 1.3 \times 10^{59}\,\text{erg}}\,, \quad B^{(min)} = 8 \times 10^{-6}\,\text{Gauss}\,.$$

In diesem Beispiel ist das zugehörige Energieintervall $E_1 = 280$ MeV $< E <$ 9 GeV. Die totale Zahl der relativistischen Elektronen ist $\sim 10^{60.3}$, entsprechend einer Dichte $\sim 10^{-10}$/cm^3. Die "Lebensdauer" von 9 GeV Elektronen in 8 Mikrogauss ist $t_{1/2} = 1.4 \times 10^7$ Jahre, also sehr kurz.

Für andere Beispiele kommt man auf noch höhere Werte: <u>3C236 $\longrightarrow 10^{61}$ erg</u>! Nun ist

$$10^{60}\,\text{erg} \simeq 10^6\, M_\odot c^2\,.$$

Das Energieproblem, welches durch die Radiogalaxien aufgeworfen wird, ist also gigantisch. Wahrscheinlich sind <u>supermassive Schwarze Löcher</u> in der zentralen Galaxie im Spiel. Deren stabile Rotationsachse könnte auch für die unglaubliche Kollinearität etwa von 3C 236 (siehe Figur oben) verantwortlich sein.