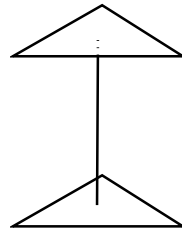


Aufgabe 1.1 Reziprokes Gitter

Ein kubisch raumzentriertes Gitter hat die Periodenvektoren $\mathbf{a}_1 = a(-1, 1, 1)/2$, $\mathbf{a}_2 = a(1, -1, 1)/2$, $\mathbf{a}_3 = a(1, 1, -1)/2$. Berechne die Periodenvektoren des reziproken Gitters. Zu welchem Bravaisgitter gehören sie?

Aufgabe 1.2 Gruppen und Darstellungen

Die Figur ist invariant unter der Gruppe D_{3h} . Benutze das folgende Rezept, um die Charakter-



Tafel von D_{3h} zu erstellen. In den Übungen wird das Rezept an Hand der Gruppe D_{2d} vorgeführt.

- Bestimme die Anzahl g der Elemente (Symmetrieoperationen) und die Anzahl k der Klassen mit jeweils n_j Elementen.
Hinweis: Vergiss die uneigentlichen Drehungen nicht.
- Die Anzahl irreduzibler Darstellungen k ist gleich der Anzahl der Äquivalenzklassen. Erstelle eine Tabelle wie unten gezeigt.
- Die erste Darstellung ist die identische, 1-dim. Darstellung, welche dir sofort die erste Zeile der Tabelle liefert.
- Die Charaktere aller 1-dim. Darstellungen bestimmt man mit Hilfe der Relation $\chi(R_j)\chi(R_l) = \chi(R_j R_l)$ und den Klasseneigenschaften.
- Es gilt: $\sum_{\mu} l_{\mu}^2 = g$, wobei l_{μ} die Dimensionen der irreduziblen Darstellung μ ist. Das hilft Dir bei der Bestimmung der ersten Spalte der Tabelle.
- Finde die restlichen Charaktere durch Berechnung der Spur in einer expliziten Darstellung.

Die Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen der Charaktere lautet: $\sum_j n_j \chi_j^{\mu} \chi_j^{\nu *} = g \delta_{\mu\nu}$, $\sum_{\mu} \chi_j^{\mu} \chi_l^{\mu *} = (g/n_j) \delta_{jl}$; Summiert wird über die Klassen j bzw. Darstellungen μ , n_j ist die Anzahl der Elemente in jeder Klasse. Aus den Vollständigkeitsrelationen lassen sich die obigen Regeln herleiten. Für die mehrdimensionalen Darstellungen ist es notwendig, ein geeignetes Basisset von Funktionen zu wählen und die Matrizen der Darstellung zu bestimmen (eine pro Äquivalenzklasse genügt).

D_{3h}	E	$2C_3$...
Γ_1	1	...	
Γ_2	1	...	
\vdots	\vdots	\ddots	

Aufgabe 1.3 Energieniveaueaufspaltung der f-Zustände

Zeige, wie die Energieniveaus der f-Zustände ($Y_{3,m}$) sich aufspalten, wenn die Symmetrie in der Sequenz $O(3) \rightarrow O_h \rightarrow D_{4h} \rightarrow D_{2h}$ reduziert wird.

Aufgabe 1.4 Zeitumkehr-Transformation

Die Zeitumkehrtransformation T ist eine Symmetrie deren antiunitäre Darstellung \mathcal{D}_T den (Dreh-)Impuls, aber nicht den Ortsoperator umkehrt,

$$\mathcal{D}_T \mathbf{x} \mathcal{D}_T^{-1} = T \mathbf{x} T^{-1} = \mathbf{x}, \quad \mathcal{D}_T \mathbf{p} \mathcal{D}_T^{-1} = T \mathbf{p} T^{-1} = -\mathbf{p}, \quad \mathcal{D}_T \boldsymbol{\sigma} \mathcal{D}_T^{-1} = T \boldsymbol{\sigma} T^{-1} = -\boldsymbol{\sigma}, \quad (1)$$

und eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung,

$$i\partial_t \psi = H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\sigma})\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} \quad (2)$$

überführt auf eine Funktion $\mathcal{D}_T \psi$ mit umgekehrter Zeitabfolge,

$$-i\partial_t (\mathcal{D}_T \psi) = \mathcal{D}_T (i\partial_t \psi). \quad (3)$$

Zeige, dass $\mathcal{D}_T \psi$ der folgenden Gleichung genügt,

$$-i\partial_t (\mathcal{D}_T \psi) = H(\mathbf{x}, -\mathbf{p}, -\boldsymbol{\sigma})(\mathcal{D}_T \psi). \quad (4)$$

Verifiziere, dass für Spin-1/2 Teilchen die Relationen (3) und (1) erfüllt sind mit der Definition

$$\mathcal{D}_T \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} = i\sigma_y \begin{pmatrix} \psi_\uparrow^* \\ \psi_\downarrow^* \end{pmatrix}. \quad (5)$$

(Benutze, dass $\boldsymbol{\sigma}^* \sigma_y = -\sigma_y \boldsymbol{\sigma}$.)

Zeitumkehrinvarianz bedeutet nun das $\mathcal{D}_T \psi(-t)$ wieder eine Lösung der Schrödinger-Gleichung ist, d.h.

$$-i\partial_t (\mathcal{D}_T \psi) = H(\mathcal{D}_T \psi) \iff \mathcal{D}_T H \mathcal{D}_T^{-1} = H. \quad (6)$$

Verifiziere diese Äquivalenz.

F.H.