Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Quantenmechanik I
Serie 12

WS 05/06
Prof. G. Blatter

Aufgabe 12.1 Streuung an der harten Kugel

a) Gegeben sei das Potential

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \mathrm{r} \leq \mathrm{r}_0 \\ 0 & \mathrm{r} > \mathrm{r}_0 \end{cases} .$$

Berechne die Streuphasen δ_0, δ_1. Skizziere die radiale Wellenfunktion für $l = 0$ in Abhängigkeit von $\rho_0 = kr_0$.

b) Berechne den totalen Streuquerschnitt σ im Limes kleiner Einfallsenergien ($\rho_0 \ll 1$) bis zur Ordnung $O(\rho_0^4)$. Warum kann man die Partialwellen mit grossen l vernachlässigen? Was erwartet man für den totalen Streuquerschnitt im klassischen Fall?

Aufgabe 12.2 Streulängen

Wir betrachten in dieser Aufgabe Streuung von Wellenfunktionen mit kleiner Energie ($k \to 0$) an einem Potential $V(r)$. In diesem Zusammenhang wird oft eine Streulänge a wie folgt definiert

$$\lim_{k \to 0} \; k \cot \delta_0 = -\frac{1}{a},$$

wobei δ_0 die Streuphase für s-Wellen Streuung ist.

a) Zeige, dass für das Potential einer harten Kugel mit Radius r_0 (c.f. Aufg. 1) $a = r_0$ gilt.

b) Zeige, dass im Limes kleiner Energien der totale Wirkungsquerschnitt σ durch $\sigma = 4\pi a^2$ gegeben ist.

c) Argumentiere anhand von (6.55), dass $a > 0$ ($a < 0$) für ein schwach repulsives (attraktives) Potential gilt. Zeige, dass a gleich der Nullstelle der asymptotischen Funktion $u_\infty \propto \sin(kr) + \tan \delta_0 \cos(kr)$ im Limes $k \to 0$ ist, und skizziere u und u_∞ für ein schwach attraktives und repulsives Potential.

d) Ähnlich wie man in der Elektrostatik beliebige Ladungsverteilungen durch eine Punktladung ersetzen kann, falls man weit genug weg ist, wollen wir auch hier zeigen, dass man ein beliebiges Potential durch ein Punktpotential oder Pseudopotential ersetzen kann, falls die Energie des gestreuten Teilchens klein genug ist. Zeige, dass dieses Punktpotential im Limes $k \to 0$ durch

$$\frac{\hbar^2}{2m} 4\pi a \; \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} r$$

gegeben ist, was in diesem Limes äquivalent zur Streuung an einer harten Kugel mit Radius a ist. Für kleine Energien wird die exakte Form des Potentials also unwichtig, denn wir können das Potential durch einen einzigen Parameter, die Streulänge a, charakterisieren.

Aufgabe 12.3 Streulänge für den sphärischen Potentialtopf

Wir betrachten einen sphärischen Potentialtopf der Tiefe V_0 und mit Radius r_0 in 3 Dimensionen

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \mathrm{r} \leq \mathrm{r}_0 \\ 0 & \mathrm{r} > \mathrm{r}_0 \end{cases} .$$

Die Stärke des Potentials kann durch die dimensionslose Grösse $\chi_0 = \sqrt{2m|V_0|r_0^2/\hbar^2}$ charakterisiert werden. Wir wollen die niederenergetischen Streuzustände dieses Potentials charakterisieren. D.h. wir untersuchen das Verhalten der s-Wellen Streulänge a in Abhängigkeit der Potentialstärke χ_0.

a) Wie verhält sich die Streulänge falls der Topf einen gebundenen Zustand nahe bei $E = 0$ besitzt? Berechne a und zeige wie sich die Streulänge in diesem Fall mit der Bindungsenergie in Verbindung bringen lässt.

b) Nach dieser qualitativen Betrachtung wollen wir $a(\chi_0)$ allgemein berechnen. (*Was ist passiert für den abstossenden Kasten?)*

S.H.