Quantenmechanik I
Serie 11

WS 05/06
Prof. G. Blatter

Aufgabe 11.1 Harmonischer Oszillator in drei Dimensionen

Betrachte den anisotropen harmonischen Oszillator gegeben durch das Potential

$$V(\vec{x}) = \frac{m}{2}(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2 + \omega_3^2 x_3^2)\,. \tag{1}$$

a) Bestimme die Energieeigenwerte durch Lösen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung.

b) Zeige, dass für Energien $E \gg \hbar\omega_i$ die Zustandsdichte approximiert werden kann durch

$$g(E) \approx \frac{E^2}{2\hbar^3\omega_1\omega_2\omega_3}\,.$$

Hinweis: Berechne erst die Zahl der Zustände mit Energie $< E$ und leite dann nach E ab.

c) Bestimme die Entartung der Energieeigenwerte im Falle eines isotropen Potentials, d.h. wenn $\omega_i = \omega$.

d) Eine Entartung der Energieeigenwerte rührt häufig von einer Symmetrie her. Das isotrope Potential ist offensichtlich rotationssymmetrisch. In welche irreduziblen Darstellungen der Drehgruppe $SO(3)$ zerfällt ein Energieeigenraum zum Eigenwert E?

Hinweis: Verwende, dass die Raumspiegelung eine Symmetrie des Potentials ist. Welchen Drehimpulsen entsprechen Zustände gerader (ungerader) Parität?

Aufgabe 11.2 Potentiale in 2D

Betrachte ein schwaches 2D Potential der Form

$$U(R) = -U(0)\frac{R_0^2}{R^2 + R_0^2}. \tag{2}$$

Es ist unmöglich die Grundzustandenergie exakt zu bestimmen, aber man kann eine Näherung verwenden. Die Schrödingergleichung lautet

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R} + \frac{\beta}{R^2 + R_0^2} - \kappa^2\right]\Psi(R) = 0, \tag{3}$$

wobei $\kappa^2 = 2m|E_B|/\hbar^2$, und für ein schwaches Potential gilt

$$\beta = \frac{2mU(0)R_0^2}{\hbar^2} \ll 1. \tag{4}$$

Definiere $R^* = \sqrt{\beta}/\kappa$ und $g(R) \equiv \beta/\big(R^2 + R_0^2\big) - \kappa^2$ und nähere

$$\begin{aligned} g(R) &\simeq \beta/R_0^2, && R < R_0, \\ g(R) &\simeq \beta/R^2, && R_0 < R < R^* \\ g(R) &\simeq -\kappa^2, && R > R^* \end{aligned} \tag{5}$$

a) Finde die Grundzustandsenergie für diese Näherung.

b) Was ist beim 2D Potentialtopf anders?

Aufgabe 11.3 Teilchen mit Spin

Bisher haben wir Zustände kennengelernt welche durch *skalare* Wellenfunktionen beschrieben wurden. In dieser Aufgabe verleihen wir dem Zustand zusätzliche "innere Struktur" indem wir annehmen, dass die Werte der Wellenfunktion *Vektoren* anstatt komplexer Zahlen seien

$$\vec{\psi}(\vec{r}) \in \mathbb{R}^3\,, \quad \vec{r} \in \mathbb{R}^3\,,$$

oder

$$\vec{\psi} \in L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{R}^3\,.$$

Das hat zur Folge, dass der Zustand unter Drehungen $R \in SO(3)$ unter der folgenden Darstellung, U, transformiert

$$(U(R)\vec{\psi})(\vec{r}) = R(\vec{\psi}(R^{-1}\vec{r}))\,.$$

Zeige, dass sich der Drehimpulsoperator, $\vec{J}$, zusammensetzt aus dem aus der Vorlesung bekannten Bahnanteil, $\vec{L}$, welcher nicht auf die innere Struktur wirkt und einem Anteil $\vec{S}$, welcher nur auf die innere Struktur wirkt:

$$\vec{J} = \vec{L} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{S}\,.$$

Später in der Vorlesung werden wir den Zustand in dieser Aufgabe als Teilchen mit Spin 1 interpretieren und wir werden Teilchen mit anderem Spin einführen indem wir den $\mathbb{R}^3$ durch andere Darstellungsräume der universellen Ueberlagerungsgruppe von $SO(3)$ ersetzen.
Hinweis: Wende eine infinitesimale Drehung um die Achse $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ auf den Zustand $\vec{\psi}(\vec{r})$ an um $(-i/\hbar)(\vec{J} \cdot \vec{\omega})(\vec{\psi}(\vec{r}))$ zu bestimmen.