Quantenmechanik I
Serie 7

Aufgabe 7.1 Kohärente Zustände zum harmonischen Oszillator

Wir betrachten den harmonischen Oszillator mit dem Hamilton-Operator

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2).$$

Hier bezeichnen a und $a^\dagger$ den Vernichtungs- und Erzeugungsoperator mit $[a, a^\dagger] = 1$. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ und $|\alpha\rangle$ ein normierter Eigenvektor des Vernichtungsoperators a mit Eigenwert α; $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ und $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$. Dann heisst $|\alpha\rangle$ ein kohärenter Zustand des harmonischen Oszillators. Der Begriff des kohärenten Zustandes wurde geprägt von Roy J. Glauber (*1925), Nobelpreis für Physik 2005.

a) Zeige, dass (bis auf eine Phase) gilt

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle,$$

wobei $|0\rangle$ der Grundzustand des harmonischen Oszillators ist.

b) Berechne $|\alpha\rangle(t) = e^{-iHt/\hbar}|\alpha\rangle$ und zeige, dass

$$|\alpha\rangle(t) = |\alpha(t)\rangle e^{-i\omega t/2}, \alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t},$$

d.h. $|\alpha\rangle(t)$ ist wieder ein kohärenter Zustand.

c) Verifiziere, dass kohärente Zustände minimale Unschärfe aufweisen,

$$\Delta q \Delta p = \hbar/2.$$

d) Sei $|q_0, p_0\rangle := \exp(ip_0 q/\hbar)\exp(-iq_0 p/\hbar)|0\rangle$, wobei q, p der Orts- bzw. impulsoperator ist. Berechne die Wellenfunktion $\Psi_{q_0,p_0}(q) = \langle q|q_0, p_0\rangle$ und die Erwartungswerte $\langle q\rangle$, $\langle p\rangle$ in diesem Zustand.

e) Setze $\alpha := q_0\sqrt{m\omega/2\hbar} + ip_0/\sqrt{2m\hbar\omega}$ und zeige, dass

$$|q_0, p_0\rangle = \exp(ip_0 q_0/2\hbar)|\alpha\rangle$$

gilt.

f) Berechne den Erwartungswert der Energie im Zustand $|\alpha\rangle$ als Funktion von q_0 und p_0.

g) Zeige, dass

$$|q_0, p_0\rangle(t) = |q_0(t), p_0(t)\rangle e^{i\phi(t)}$$

gilt, wobei $(q_0(t), p_0(t))$ die klassische Bahn mit $q_0(0) = q_0$ und $p_0(0) = p_0$ ist.

h) Beweise folgende Relation,

$$1 = \int \frac{d\alpha^* d\alpha}{2\pi i}|\alpha\rangle\langle\alpha|,$$

mit der sich der Identitätsoperator 1 durch kohärente Zustände ausdrücken lässt.

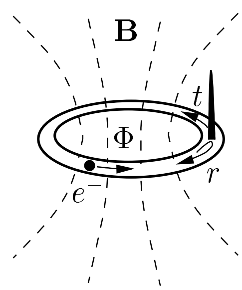
Aufgabe 7.2 Ring mit Streuer

Wir wollen das Energiespektrum eines Elektrons mit Masse m und Ladung $e > 0$ in einem metallischen Ring mit einem δ-Streuer untersuchen, wobei der Ring einen magnetischen Fluss Φ umschliesst. Der Hamilton-Operator des Systems ist gegeben durch

$$H(A_x) = \frac{1}{2m}\left[\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{c}A_x(x)\right]^2 + V(x),$$

mit $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$, $V(x+L) = V(x)$, x der Ortskoordinate entlang des Rings und L dem Umfang des Rings. Die Schrödingergleichung lautet $i\hbar\dot{\Psi}(x,t) = H\Psi(x,t)$, wobei $\Psi(x+L,t) = \Psi(x,t)$ (Eindeutigkeit der Wellenfunktion).

Skizze:



a) Wir wollen das Spektrum des Systems in Abhängigkeit des Parameters $\alpha = 2\pi\Phi/\Phi_0$, $\Phi_0 = hc/e$ bestimmen. Zeige, dass die stationäre Schrödingergleichung durch eine Eichtransformation $\Psi(x) = \exp[-i(e/\hbar c)\int^x dy A_y(y)]\psi(x)$ auf das Problem

$$H(0)\,\psi_{n,\alpha}(x) = \varepsilon_{n,\alpha}\psi_{n,\alpha}(x),$$
$$\psi_{n,\alpha}(x+L) = e^{i\alpha}\psi_{n,\alpha}(x)$$

gebracht werden kann; dies entspricht dem Problem für Bloch-Wellenfunktionen in einem Festkörper mit $\alpha \to k$; k ist der Kristallimpuls.

b) Betrachte zuerst den Ring ohne Streuer [$V(x) = 0$]. Zeichne die Energien $\varepsilon_{n,\alpha}$ gegen α auf.

c) Sei nun $V(x) = V_0\delta(x)$. Wie sieht das Energiespektrum aus?

Hinweis: Das Problem ist äquivalent zum Kronig-Penney Modell, das schon in der Vorlesung gelöst wurde.

d) Sei nun $U = \oint E_x dx$ eine Spannung um den Ring, generiert durch einen zeitabhänigen Fluss $\Phi(t) = Uct$ (überprüfe die Dimensionen). Was passiert mit der Energie eines Elektrons das sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Grundzustand befunden hat? i) bei kleinem U; ii) bei grossem U; iii) bei mittlerem U?

F.H.