Quantenmechanik I
Serie 4

Aufgabe 4.1 Strom in der Quantenmechanik

Verifiziere, daß die quantenmechanische Stromdichte eines Zustandes $\psi(\vec{r},t) = \sqrt{\rho(\vec{r},t)}e^{i\varphi(\vec{r},t)}$ gegeben ist durch

$$\vec{\jmath}(\vec{r},t) = \frac{\hbar}{m}\rho(\vec{r},t)\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t).$$

Aufgabe 4.2 Wellenpakete

Ein Wellenpaket habe zum Zeitpunkt $t = 0$ folgende Form (σ reell):

$$\psi(x,0) = Ae^{ik_0x}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma}}$$

a) Berechne die Konstante A, damit das Wellenpaket die korrekte Normierung aufweist.

b) Zeige, daß das Wellenpaket für beliebige Zeiten $t \neq 0$ die Form

$$\psi(x,t) = \sqrt[4]{\frac{\sigma}{2\pi\sigma_t^2}}\; e^{ik_0x}\; e^{-i(\hbar/2m)k_0^2 t}\; e^{-\frac{(x-(x_0+(\hbar/m)k_0t))^2}{4\sigma_t}}$$

mit $\sigma_t = \sigma + i\frac{\hbar}{2m}t$ annimmt.

c) Bestimme die mittlere Geschwindigkeit eines Teilches, welches durch dieses Wellenpaket beschrieben wird, indem Du $\langle v\rangle = d\langle x\rangle/dt$ berechnest.

d) Die Breite des Wellenpakets zum Zeitpunkt $t = 0$ ist durch $(\Delta x)^2|_{t=0} = \sigma$ gegeben. Berechne die Breite zum Zeitpunkt $t \neq 0$ indem Du zeigst, daß die Ortsunschärfe die Form

$$(\Delta x)^2 = \sigma\left(1 + Bt^2\right)$$

annimmt und bestimme B.

e) In der dissipativen Dynamik wird ein Temperaturprofil durch die Gleichung

$$\partial_t T(x,t) = D\partial_x^2 T(x,t)$$

bestimmt, wobei D eine *reelle* Konstante ist. Zeige, dass die Breite eines Gausschen Profils nun die Form

$$\Sigma^2 = \sigma\,(1 + Ct)$$

annimmt, d.h. das i in der Schrödinger-Gleichung bewirkt eine quadratische statt eine lineare Verbreiterung in der Zeit.

f) Zurück zur QM. Eine wichtige Eigentümlichkeit der Wellenpakete ist ihre Verbreiterung mit fortschreitender Zeit, das Du in d) explizit am Beispiel eines Gausschen Wellenpakets gezeigt hast. Eine wichtige Größe zur Charakterisierung der Verbreiterung ist die Phasengeschwindigkeit $u(k) = \omega(k)/k$ der verschiedenen ebenen Partialwellen, aus denen das Paket aufgebaut wurde. Die Wellenzahlabhängigkeit von u bezeichnet man als Dispersion. Zeige explizit, daß keine Verbreiterung des Pakets auftritt, wenn $\omega(k)$ nur linear von k abhängt, d.h. $\omega(k) = s_0 + s_1k$.

g) Ein freies Proton habe die kinetische Energie $T = 1$MeV. Nach welcher Flugstrecke hat das Proton seine anfängliche Unschärfe von $\sqrt{\sigma} = 10^{-2}$Å verdoppelt? (Hinweis: $\langle p\rangle = \hbar\langle k\rangle = \hbar k_0 = \sqrt{2m_pT}$, wobei m_p die Masse des Protons ist.)

Aufgabe 4.3 Eigenwerte für ein beliebiges eindimensionales Potential

In dieser Aufgabe wollen wir die Eigenwerte eines beliebigen Potentiales numerisch berechnen. Im Vordergrund steht dabei nicht die Implementierung eines optimierten Algorithmus. Lernen wollen wir, dass die stationäre Schrödingergleichung

$$\psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(x)\right)\psi(x) = 0$$

wohl für alle Werte der Energie E eine Lösung hat, aber nur für bestimmte Werte die Lösungen nicht exponentiell Ansteigen und damit normierbar sind. Zur Vereinfachung des Problems betrachten wir nur Potentiale mit Inversionssymmetrie. Verwende den Numerov Algorithmus für beliebige Energien E, um das Verhalten der Lösung im Limes $x \to \infty$ zu untersuchen. Beginne mit dem quartischen Potential

$$V(x) = \frac{m\kappa^2}{2}x^4.$$

Wenn du das Prinzip des Findens von Eigenwerten und den Algorithmus verstanden hast, untersuche noch das "double well" Potential

$$V(x) = \begin{cases} \frac{m\Omega^2}{2}(|x| - \frac{R}{2})^2 & , \quad |x| < \frac{R}{2} \\ \frac{m\omega^2}{2}(|x| - \frac{R}{2})^2 & , \quad |x| \geq \frac{R}{2}. \end{cases}$$

Was für ein zusätzliches Problem stellt die Tunnelbarriere dar?

Auf der Homepage zur Vorlesung findest du ein Mathematica Notebook zu dieser Übung.
`http://www.itp.phys.ethz.ch/lectures/QM1`

D.N. & S.H