Quantenmechanik I
Serie 2

Aufgabe 2.1 Bohr-Sommerfeld Quantisierung

Betrachte den eindimensionalen harmonischen Oszillator,

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2},$$

und wende auf dieses System die Bohr-Sommerfeld Quantisierungsregel an. Berechne Energie, Periode und Amplitude (Auslenkung) der quantisierten Bahnen.

Aufgabe 2.2 Propagator für Polynome $\mathcal{L}(x,\dot{x},t)$ zweiten Grades in x und $\dot{x}$

Falls $\mathcal{L}(x,\dot{x},t)$ von der Form $\mathcal{L} = a(t)\dot{x}^2 + b(t)\dot{x}x + c(t)x^2 + d(t)\dot{x} + e(t)x + f(t)$ ist, vgl. (1.30) im Skript, dann lässt sich der Propagator exakt berechnen und hat die Form (1.33),

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = F(t_b, t_a) e^{iS[x_{\mathrm{cl}}(t)]/\hbar} \, .$$

Verifiziere die Herleitung von (1.33) im Detail. Was ist die Bedeutung von $F(t_b, t_a)$?

Aufgabe 2.3 Aharanov-Bohm Effekt

Wir wollen das Experiment im Artikel von R.A. Webb *et al.* verstehen [R.A. Webb *et al.*, Phys. Rev. Lett. **54**, 2696 (1985)]. Von der Webpage `http://prl.aps.org/` kannst du den Artikel herunterladen, indem du den Band (54) und die Seitenzahl (2696) eingibst. Drucke ihn anschliessend aus, um ihn zu lesen.

a) Berechne den Propagator eines Teilchens im Magnetfeld $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ und zeige, dass dieser unter einer sinnvollen Annahme über das Verhalten des Feldes $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ als

$$K_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_b, t_b, \mathbf{x}_a, t_a) = K_{\mathbf{A}=0}(\mathbf{x}_b, t_b, \mathbf{x}_a, t_a) \exp\left(i \frac{e}{\hbar c} \int_{\mathbf{x}_a}^{\mathbf{x}_b} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{A} \right)$$

approximiert werden kann. Welches ist die Annahme? *Hinweis:* Verwende Aufgabe 2.2.

b) Überprüfe die Behauptung, dass für den Ring in Abbilung 1 des Artikels das Feld von 0.00759 T gerade einem magnetischen Fluss von $\Phi_0 = h/e$ entspricht. *Beachte:* Im Artikel werden andere Einheiten als im Skript ($\Phi_0 = hc/e$) verwendet.

c) Erkläre die Oszillationen in Abbildung 1.

Aufgabe 2.4 Propagator des harmonischen Oszillators (für Freaks)

Berechne den Propagator $K(b,a)$ des harmonischen Oszillators

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2},$$

indem du Aufgabe 2.2 verwendest. Zeige, dass

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin(\omega\tau)} \right)^{1/2} \exp\left\{ \frac{im\omega}{2\hbar \sin(\omega\tau)} \left[(x_a^2 + x_b^2)\cos(\omega\tau) - 2x_a x_b \right] \right\},$$

wobei $\tau \equiv t_b - t_a$. Diskutiere das Verhalten des Propagators für grosse und kleine Zeiten τ. Was ist mit grosser bzw. kleiner Zeit gemeint?

F.H.